علت نیاز به پردازشگر:

فرضاً می خواهیم سیگنال را از طریق آنتن انتقال دهیم. اثبات می شود که باید ارتباطی بین ابعاد آنتن و فرکانس سیگنال برقرار باشد. معمولاً $l = \frac{\lambda}{10} \Leftarrow l \cong \frac{c}{10f}$

$$\left.\begin{array}{l} f = 100 \\ c = 300\,000 \ km/sec \end{array}\right\} \Rightarrow l \cong 300 \ km$$ غیرمنطقی

برای رفع این مشکل سیگنال را در یک کسینوسی ضرب می کنیم تا به فرکانس های بالا رود و طول آنتن کاهش یابد. این عمل پردازش است.

قبل از اینکه سیگنال به ما برسد ما بی نهایت تابع می توانیم حدس بزنیم که سیگنال مورد نظر می تواند یکی از آنها باشد. به این فرآیند، فرآیندهای استوکاستیک سیگنال های تصادفی می گوییم.

منابع:

۱- سیستم های ارتباطی نویسنده: A.B. Carlson

۲- Comm Systems Engineering
۳- Digital Comm
Proakis + Masoud Salehi

۴- Digital and analog Comm نویسنده: Shanmugan

iran-ieee.com

سیگنال :

$m(t)$

اگر باری که سیگنال به آن اعمال می‌شود مقاومتی یک اهم باشد داریم :

$P_t = v(t)\,i(t)$

$P_t = v(t)\,i(t) = v^2(t)$

$P_t = i(t)\,i(t) = i^2(t)$

بنابراین توان لحظه‌ای نرمالیزه شده را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم : $P_t \triangleq m^2(t)$

بنابراین توان لحظه‌ای نرمالیزه شده یا به طور خلاصه توان لحظه برابر با مجذور سیگنال می‌باشد.

(توان متوسط) $P_{متوسط} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)\,dt$

انرژی سیگنال :

(انرژی کل) $E = \int_{-\infty}^{+\infty} m^2(t)\,dt$

سیگنالی مشابه مقابل که در تمام زمان حضور دارند دارای انرژی بینهایت هستند و فقط توان متوسط برای آنها قابل تعریف هستند. به این سیگنال ها، سیگنال های توان (Power Signals) می‌گوییم.

سیگنال مقابل دارای توان متوسط صفر و انرژی محدود می‌باشند. به این سیگنال ها سیگنال های انرژی (Energy Signals) می‌گوییم.

$m(t) \longleftrightarrow M(f)$

سیگنال های پایین گذر - سیگنال های باند پایه
Low pass Signals

$m(t) \longleftrightarrow M(f)$

سیگنال های میان گذر - سیگنال های باند میانی
Band pass Signals

PAPCO
www.iran-ieee.com

- به سیگنال ها یا فرآیندهایی که متغیر با زمان هستند، سیگنال ها یا فرآیندهای استوکاستیک می گوییم.

سیگنال ها
- استوکاستیک
  - توان
    - LP
    - BP
  - انرژی
    - LP
    - BP
- حقیقی یا موهومی
- معلوم
  - توان
    - LP
    - BP
  - انرژی
    - LP
    - BP
- حقیقی یا موهومی

mh_abbasi2003@yahoo.com

اصل استاد حل تمرین: سه‌شنبه ۲-۱۲

فرض می‌کنیم $x(t)$ یک سیگنال انرژی باشد و داشته باشیم:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

تابع چگالی طیف انرژی: Energy Spectrul Function

این تابع نشان می‌دهد که انرژی سیگنال چگونه در فرکانس های مختلف توزیع شده است.

در این تابع هر سطح زیر دو فرکانس مشخص برابر با انرژی سیگنال در آن فرکانس ها است.

$$Y(f) = X(f)\,H(f)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = 2\int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$$ = انرژی مربوط به فرکانس های f_1 هرتز تا f_2 هرتز $x(t)$

هرگاه $G(f)$ را زوج گرفتیم نتیجه می‌گیریم که سیگنال حقیقی است. $G(f) = |X(f)|^2$

www.iran-ieee.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال فرض می‌کنیم x(t) یک سیگنال توان باشد.

$$x_T(t) = x(t)\,p\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow G(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (1)$$

$$x_T(t) \longleftrightarrow X_T(f)$$

برای پیدا کردن چگالی توان یک تقطیع به طول T انتخاب، انرژی آن را بدست آورده و سپس بر T تقسیم می‌کنیم. حال با میل T به بینهایت تابع چگالی طیف توان را بدست می‌آوریم.

$$\underbrace{E}_{\text{ژول}} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,\underbrace{df}_{\text{هرتز}} \Rightarrow [G(f)] = \frac{\text{ژول}}{\text{اهم}\times\text{هرتز}}$$

اهم

$$E_{f_0} = \int_{f_0-df/۲}^{f_0+df/۲} G(f)\,df \simeq G(f_0)\,df$$

مثال: با استفاده از رابطه 1 چگالی توان یک تابع پریودیک را بدست آورید؟

* هر سیگنال پریودیک یک سیگنال توان است زیرا انرژی یک سیگنال پریودیک بینهایت است.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{۲\pi}{T_0}$$

$$x_T(t) = p\left(\frac{t}{T}\right)x(t) \longleftrightarrow X_T(f)$$

$$p(t/T) \longleftrightarrow T\sin fT$$

$$x(t) \longleftrightarrow \sum C_n\,\delta(f-nf_0)$$

$$X_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T C_n\,\mathrm{Sinc}\,T(f-nf_0), \quad f_0 = 1/T_0$$

$$|X_T(f)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} T|C_n|\,|\mathrm{Sinc}\,T(f-nf_0)|\right|$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(f)|^۲}{T} = \lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} T|C_n|^۲\,\mathrm{Sinc}^۲\,T(f-nf_0) + \lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\ n\neq m}}^{\infty} T|C_n||C_m|\,|\mathrm{Sinc}\,T(f-nf_0)|\,|\mathrm{Sinc}\,T(f-mf_0)|$$

$$\left|\sum T|C_n|^2\,\delta(f-nf_0)\right|$$

PAPCO
www.iran-ieee.com

$$\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \, \delta(f-nf_0)$$

تبدیل هیلبرت:

برای تبدیل هیلبرت یک سیگنال باید سیستمی با پاسخ ضربه $\frac{1}{\pi t}$ داشته باشیم اما این سیستم علی نخواهد بود و نمی توان چنین سیستمی ساخت.

$x(t)$

$$\hat{x}(t) \triangleq x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\pi t}} \longrightarrow \hat{x}(t)$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$$\hat{x}(t) \longleftrightarrow X_h(f)$$

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j\,\mathrm{Sign}(f)$$

$$X_h(f) = -j\,\mathrm{Sign}(f)\, X(f)$$

$$X(f) = |X(f)|\, e^{j\measuredangle X(f)}$$

$$X_h(f) = |X_h(f)|\, e^{j\measuredangle X_h(f)}$$

$$-j\,\mathrm{Sign}(f) = \begin{cases} -j & f>0 \quad = e^{-j\pi/2} \\ j & f<0 \quad = e^{j\pi/2} \end{cases}$$

$$|-j\,\mathrm{Sign}(f)| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |X_h(f)| = |X(f)| \\ \measuredangle X_h(f) = \begin{cases} \measuredangle X(f) - \pi/2 & f>0 \\ \measuredangle X(f) + \pi/2 & f<0 \end{cases} \end{cases}$$

مثال: فرض کنید $x(t) = a\cos 2\pi f_0 t$ ، $\hat{x}(t)$ را حساب کنید.

$$x(t) = \tfrac{1}{2} a e^{j2\pi f_0 t} + \tfrac{1}{2} a e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\xrightarrow[\text{خطی و مستقل از زمان}]{\text{تبدیل هیلبرت}} \hat{x}(t) = \tfrac{1}{2} a e^{j2\pi f_0 t} e^{-j\pi/2} + \tfrac{1}{2} a e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\pi/2}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = \tfrac{1}{2} a e^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)} + \tfrac{1}{2} a e^{-j(2\pi f_0 t - \pi/2)}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$$

PAPCO
www.iran-ieee.com

مثال:

$$x(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t - a_3 \sin \omega_3 t$$

$$\hat{x}(t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \pi/2) + a_2 \cos(\omega_2 t - \pi/2) - a_3 \sin(\omega_3 t - \pi/2)$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = a_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_1}\right) + a_2 \cos \omega_2 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_2}\right) - a_3 \sin \omega_3 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_3}\right)$$

همانطور که می بینیم در حوزه زمان یک اعواج زیادی به سیگنال می دهد.

www.iran-icee.com

سیگنال های میان گذر و پایین گذر:

اگر سیگنالی طیف فرکانسیش حول یک فرکانس میانی غیرصفر بوده و یا از یک فیلتر میان گذر عبور کند، به آن سیگنال، سیگنال طیف میانی می گوییم.

در سرتاسر بحث ما، منظور از سیگنال میان گذر سیگنالی است که حقیقی می باشد.

عرض باند : $B = f_2 - f_1$

سیگنال باریک عرض سیگنالی است که یکی از شرایط زیر در آن برقرار باشد:

$$\frac{f}{B} \gg 1 \qquad \frac{B}{f} \ll 1$$

یک فرکانس بین f_1 و f_2 و یا حتی خود f_1 و f_2 را انتخاب می کنیم و f_c نام می گذاریم.

سیگنال باند پایه معادل $S(f)$ ⇐

$$S_L(f) = S(f+f_c)$$

$$S_+(f) = S(f)\,u(f)$$
$$S(f) \longleftrightarrow s(t)$$
$$u(f) \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}$$

$$\Rightarrow S_+(t) = s(t) * \left[\tfrac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right]$$

$$\Rightarrow S_+(t) = \tfrac{1}{2} s(t) + \tfrac{j}{2}\hat{s}(t) \quad (1)$$

$$S_L(f) = S_+(f+f_c) \Rightarrow S_L(t) = S_+(t)e^{-j2\pi f_c t} \Rightarrow S_+(t) = S_L(t)e^{j2\pi f_c t} \quad (2)$$

$$\left.\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \tfrac{1}{2} s(t) + \tfrac{j}{2}\hat{s}(t) = S_L(t)e^{j2\pi f_c t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[S_L(t)e^{j2\pi f_c t}\right] \\ \hat{s}(t) = 2\,\mathrm{Im}\left[S_L(t)e^{j2\pi f_c t}\right] \end{cases}$$ مدل a

www.Iran-ieee.com

$$S_L(t) = \frac{1}{2} S_i(t) + \frac{j}{2} S_q(t) \rightarrow \begin{cases} S_i(t): & \text{دو برابر قسمت حقیقی} \\ S_q(t): & \text{دو برابر قسمت موهومی} \end{cases}$$

$$S(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{2} S_i(t) + \frac{j}{2} S_q(t)\right)\left(\cos 2\pi f_c t + j \sin 2\pi f_c t\right)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow S(t) = S_i(t)\cos 2\pi f_c t - S_q(t)\sin 2\pi f_c t \\ &\Rightarrow \hat{S}(t) = S_i(t)\sin 2\pi f_c t + S_q(t)\cos 2\pi f_c t \end{aligned}\right\} \text{مدل b}$$

$$S_L(t) = \frac{1}{2} S_i(t) + \frac{j}{2} S_q(t) = \frac{1}{2} R(t)\, e^{j\phi(t)}$$

$$R(t) = \sqrt{S_i^2(t) + S_q^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1}\frac{S_q(t)}{S_i(t)}$$

$$S(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2} R(t)\, e^{j\varphi(t)}\, e^{j2\pi f_c t}\right] \Longrightarrow S(t) = R(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) \quad \text{مدل c}$$

از آنجایی که $S_L(t)$ سیگنالی از باند پایه است، سیگنال های $S_i(t)$، $S_q(t)$، $R(t)$ و $\varphi(t)$ هم سیگنال های باند پایه هستند.

← نشان دهید:

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[S_L(f - f_c) + S_L^*(-f - f_c)\right]$$

www.iran-icee.com

سیستم‌ها

سیستم باند میانی سیستمی است که پاسخ آن سیگنالی از باند میانی باشد.

سیستم مقابل، سیستمی از باند میانی است.

سیستم پایین گذر معادل سیستم بالا

$$\left.\begin{array}{l} Q(f)=H(f)S(f) \\ f\to f+f_c \end{array}\right\} \Rightarrow Q(f+f_c)=S(f+f_c)H(f+f_c)$$

اثبات

$$\xrightarrow{u(f+f_c)} Q(f+f_c)\,u(f+f_c)=S(f+f_c)\,u(f+f_c)\,H(f+f_c)\,u(f+f_c)$$

$$\Rightarrow Q_1(f)=H_1(f)S_1(f) \Rightarrow Q_1(t)=H_1(t)*S_1(t)$$

← نشان دهید اگر انتخاب f_c را عوض کنیم، $R(t)$ عوض نمی‌شود.

$$\begin{cases} S(t)=S_i(t)\cos 2\pi f_c t - S_q(t)\sin 2\pi f_c t \\ \hat{S}(t)=S_i(t)\sin 2\pi f_c t + S_q(t)\cos 2\pi f_c t \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_i(t)=S(t)\cos 2\pi f_c t + \hat{S}(t)\sin 2\pi f_c t \\ S_q(t)=\hat{S}(t)\cos 2\pi f_c t - S(t)\sin 2\pi f_c t \end{cases}$$

$$R(t)=\sqrt{S_i^2(t)+S_q^2(t)}=\sqrt{S^2(t)\cos^2\omega_c t+\hat{S}^2(t)\sin^2\omega_c t+\hat{S}^2(t)\cos^2\omega_c t+S^2(t)\sin^2\omega_c t}$$

$$\Rightarrow R(t)=\sqrt{S^2(t)+\hat{S}^2(t)}$$

همانطور که می‌بینیم مقدار $R(t)$ مستقل از انتخاب f_c است.

www.iran-ieee.com

اندازه نگذاشتیم چون سیگنال حقیقی است

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\,df$$

$$E_l = \int_{-\infty}^{\infty} |S_l(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_l(f)|^2\,df$$

$$\Rightarrow E = 2E_l$$

با یک روش دقیقتر، بالا را اثبات کنید.

به جای $s(t)$، معادل آن براساس S_i , S_q قرار دهیم. ← راهنمایی

www.iran-icee.com

مدولاسیون:

مدولاسیون AM: $x_{bp}(t) = x_I(t)\cos 2\pi f_0 t - x_Q(t)\sin 2\pi f_0 t$

$x_{LP}(t) = \frac{1}{2} x_I(t) + \frac{j}{2} x_Q(t)$

مدولاسیون های موج پیوسته خطی:

الف) مدولاسیون دامنه (AM)

* خبر را روی پوش سیگنال سینوسی قرار می دهیم.

حامل $c(t) = A_c \cos 2\pi f_0 t$

خبر $x(t)$ خبر باند پایه

$X(f)$ پهنای باند $\underline{W}$ ⇒

$S_x \ll 1$

$\langle x \rangle = 0$

سیگنال مدوله شده $x_c(t) = A_c(1+\mu x(t))\cos 2\pi f_0 t$

μ: اندیس مدولاسیون AM

یکی از شرط های ما اینست که $|x(t)| \leq 1$

اگر $|x(t)| \not\leq 1$ نباشد آنگاه

$A_{max} = A_c(1+\mu)$

$A_{min} = A_c(1-\mu)$

www.iran-ieee.com

اگر $A_{min}<0$:

با انتخاب مناسب μ می توانیم پیام را با استفاده از آشکارساز پوش بدست آوریم.

$A_{min}>0 \Rightarrow \mu<1$

اگر $\mu>1$ باشد پوش سیگنال متناسب با خبر نخواهد بود و در نقاط عبور از صفر وارونی فاز دارد.
همچنین $f_c \gg W$ باشد تا تداخل فاز نداشته باشیم.

بررسی پهنای باند و توان سیگنال AM :

$$x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t + A_c \mu x(t) \cos 2\pi f_c t$$

$$X_c(f) = \frac{1}{2} A_c \left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right] + \frac{1}{2} A_c \mu \left[X(f-f_c) + X(f+f_c)\right]$$

$BW = 2W$ بنابراین در مدولاسیون AM دو برابر پهنای باند خود سیگنال برای ارسال اشغال می شود

بررسی توان را می توان هم در حوزه زمان و هم در حوزه ی فرکانس بررسی کرد.

محاسبه توان در حوزه زمان :

$$S_T = \langle x_c^2(t) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} A_c^2 \langle 1 + \mu^2 x^2 + 2\mu x \rangle + \frac{1}{2} A_c^2 \langle (1+\mu x(t))^2 \cos 2\pi f_0 t \rangle$$

$$\Rightarrow S_T = \frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} A_c^2 \mu^2 S_x + 0 + 0 = \frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_x)$$

www.iran-ieee.com

این توان علاوه بر ارسال خبر، حامل را نیز می فرستد.

حال می خواهیم ببینیم چه مقدار از توان صرف فرستادن حامل می شود.

$$S_T = \frac{1}{2}A_c^2 + \frac{1}{2}A_c^2\mu^2 S_x = P_c + 2P_{sb}$$

$\frac{1}{2}A_c^2$: توان مصرفی برای فرستادن سیگنال حامل

$\frac{1}{2}A_c^2\mu^2 S_x$: توان مصرفی برای فرستادن دو سایدباند

می خواهیم نسبت توان حامل و side-band ها را بنویسیم.

$$\begin{cases} P_c = \frac{1}{2}A_c^2 & \text{توان حامل مدوله‌شده} \\ P_{sb} = \frac{1}{4}A_c^2\mu^2 S_x \Rightarrow P_{sb} = \frac{1}{2}P_c\mu^2 S_x & \text{توان به ازای هر کنار باند} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} |x(t)| < 1 \\ \mu < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\mu x(t)| < 1 \longrightarrow \mu^2 S_x < 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu^2 P_c S_x \leq \frac{1}{2}P_c$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} P_{sb} \leq \frac{1}{2}P_c \\ P_c = S_T - 2P_{sb} \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_{sb} \leq \frac{1}{4}S_t$$

یکی از مشکلات مدولاسیون AM اینست که بیش از ۵۰٪ توان مصرفی برای فرستادن حامل ها صرف می شود.

www.iran-ieee.com

مدولاسیون AM DSB-SC (Double side band-suppresid carrier)

باحذف حامل و μ خواهیم داشت:

$$x_c(t)=A_c x(t)\cos 2\pi f_c t$$

دراین حالت دیگر نمی‌توانیم از آشکارساز پوش استفاده کنیم.

$$X_c(f)=\frac{1}{2}A_c X(f-f_c)+\frac{1}{2}A_c X(f+f_c)$$

دراین حالت نیز باند $2W$ داریم.

$$B_T=2W$$

$$S_T=\langle x_c^2(t)\rangle=\frac{1}{2}A_c^2\langle x^2(t)\rangle \Rightarrow S_T=\frac{1}{2}A_c^2 S_x=2P_{sb}$$

www.iran-ieee.com

AM مدولاسیون : $x_c(t) = A_c(1+\mu x(t))\cos 2\pi f t$

$S_T = P_c + 2P_{sb}$

DSB مدولاسیون : $x_c(t) = A_c x(t)\cos 2\pi f t$

$S_T = 2P_{sb}$ $\qquad B_T = 2W$

پارامتر مقایسه : حداکثر پوشش که سیگنال می‌تواند داشته باشد همواره محدود است . معیاری که برای مقایسه این پارامتر قرار دادی کنیم برابر با $\frac{P_{sb}}{A_{max}^2}$

$$\Rightarrow A_{max} = \begin{cases} A_c & DSB \\ 2A_c & AM, \mu=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{sb} = \begin{cases} \frac{1}{4}A_c^2 S_x & DSB \\ \frac{1}{4}\mu^2 A_c^2 S_x & AM \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} DSB : \frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \frac{1}{4} S_x \\ AM : \frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \frac{1}{14} S_x \end{cases}$$

بنابراین توانی که در DSB به هر Side-band اختصاص می‌دهیم ۴ برابر توان هر Side-band در AM است.
بنابراین در حالت DSB سیگنال برد بیشتری خواهد داشت.

اگر A_{max} محدود باشد توان Side-band در مدولاسیون DSB ، چهار برابر از توان Side-band در AM بیشتر است.

مثال: در یک فرستنده $A_{max}^2 \leq 8\ kw$, $S_T \leq 3\ kw$. فرض می‌کنیم خبری به صورت $x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ با $A_m = 1$ داریم . P_{sb} را در هر دو حالت AM و DSB حساب کنید. الف) DSB

$$\left.\begin{array}{l} S_x = \frac{1}{2}A_m^2 = \frac{1}{2} \qquad A_{max}^2 \leq 8\ kw \\ P_{sb} = \frac{1}{4} S_x A_{max}^2 = \frac{1}{8} A_{max}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_{sb} \leq 1\ kw$$

غیر از پوشش ماکسیمم ما محدودیتی در حد اکثر توان ارسالی فرستنده نیز داریم.

$$P_{sb} = \frac{1}{2} S_T \leq \frac{3}{2} \Rightarrow P_{sb} \leq 1\ kw$$

www.iran-ieee.com

ب) AM:

$$\left.\begin{aligned} P_{sb} &= \frac{1}{14} S_x A_{max}^{2} \leq 1/4 \\ S_T &= P_c + 2P_{sb} = 4P_{sb} \\ P_{sb} &= 1/4\, P_c \\ P_{sb} &= 1/4\, S_T \leq 1/2 \text{ kw} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{sb} \leq 0/25 \text{ kw}$$

Tone Modulation : DSB:

$x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$

$S_x = 1/2\, A_m^2 \leq 1$

$x_c(t) = A_c A_m \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_c t = 1/2\, A_c A_m \cos(f_c + f_m)t + 1/2\, A_c A_m \cos(f_c - f_m)$

AM:

$x_c(t) = A_c(1 + \mu A_m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t$

www.iran-ieee.com

ساختار مدولاتورهای DSB و AM :

همانطور که دیدیم اگرچه در ساختار سیگنال خبر فرکانس خاصی داریم ولی در سیگنال مدوله شده، فرکانس‌های متفاوت با خبر داریم. پس در مدولاتورها به ناچار باید از عناصر غیرخطی استفاده کنیم.

$$v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2 + a_3 v_{in}^3$$

$$\begin{cases} v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2 \\ v_{in} = x(t) + \cos 2\pi f_c t \end{cases}$$

$$v_{out}(t) = a_1 \left(x(t) + \cos 2\pi f_c t\right) + a_2 \left(x(t) + \cos 2\pi f_c t\right)^2$$

$$= a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_2 \cos^2 2\pi f_c t + a_1 \left[1 + \frac{2a_2}{a_1} x(t)\right] \cos 2\pi f_c t \quad , \quad \begin{cases} a_1 = A_c \\ \frac{2a_2}{a_1} = \mu \end{cases}$$

سیگنال‌های متقابل نسبت به خط $f=0$ تقارن زوج دارند ⟵

$$\Rightarrow \begin{cases} 2W < f_c - B < f_c - W \\ f_c + W < f_c + B < 2f_c \end{cases}$$

برای استفاده از قطع در مدولاسیون DSB باید مقادیر $a_1 = 0$ و $a_2 = \frac{A_c}{2}$ را قرار دهیم.

مدولاسیون SSB (Single-sideband) :

$$B_T = W$$

$$S_T = P_{SB} = \frac{1}{4} A_c^2 S_x$$

www.iran-ieee.com

مدولاسیون تون:

$x(t) = A_m \cos 2\pi f t$

DSB: $\frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (f_c - f_m) t + \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (f_c + f_m) t$

$$\Rightarrow \text{SSB}: \begin{cases} \text{USSB}: \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (f_c + f_m) t \\ \text{LSSB}: \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (f - f_m) t \end{cases}$$

$x_{bp}(t) = A_c x(t) \cos 2\pi f_c t \longrightarrow y_{bp}(t)$: SSB

$Y_{LP}(f) = X_{LP}(f) H_{LP}(f)$

$x_{bp}(t) = A_c x(t) \cos 2\pi f_c t$

$H_{LP}(f) = u(f) - u(f-W) = \frac{1}{2}(1 + \text{Sign}(f)) \quad |f| \leq W$

$x_{LP}(t) = \frac{1}{2} A_c x(t)$

$Y_{LP}(f) = \frac{1}{2} A_c X(f) (1 + \text{Sign}(f))$

$X_{LP}(f) = \frac{1}{2} A_c X(f)$

$\Rightarrow Y_{LP}(f) = \frac{1}{4} A_c X(f) + \frac{1}{4} A_c X(f) \, \text{sign}(f)$

$$\Rightarrow y_{LP}(t) = \frac{1}{4} A_c x(t) + \frac{j}{4} A_c \hat{x}(t) \Rightarrow y_{bp}(t) = \frac{1}{2} A_c \left[x(t) \cos 2\pi f_c t \underset{\oplus}{-} \hat{x}(t) \sin 2\pi f_c t \right]$$

www.iran-ieee.com

مدولاسیون SSB :

معادل باند پایه SSB $y_{LP}(t) = \frac{1}{4} A_c \left(x(t) + j\hat{x}(t) \right)$

$$\begin{matrix} USSB \\ LSSB \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y_i(t) = \frac{1}{4} A_c x(t) \\ y_Q(t) = \pm \frac{1}{4} A_c \hat{x}(t) \end{cases}$$

$$y_{bp}(t) = \frac{1}{4} A_c \left[x(t) \cos 2\pi f_c t \mp \hat{x}(t) \sin 2\pi f_c t \right]$$

پوش : $A(t) = \frac{1}{2} A_c \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$

تولید $\hat{x}(t)$ کاری غیرممکن است زیرا سیستم سازنده آن غیرعلی است اما می‌توان با تقریب‌هایی به آن دست یافت.

تولید فیلتر کاملاً ایده‌آل نیز کاری مشکل است، در عمل باید با تقریب این فیلتر را ساخت.

ساختار مدولاتورهای SSB :

phase-shift Method

Two-step SSB generation

مثال:

$m(t) = \cos 2\pi f_m t$

می‌خواهیم با ساختار زیر به سیگنال SSB دست پیدا کنیم. پارامترهای ساختار را تعیین کنید.

www.iran-ieee.com

$$x_u(t) = m(t)\cos 2\pi f_1 t = \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_1 t = \tfrac{1}{2}\left[\cos 2\pi(f_1+f_m)t + \cos 2\pi(f_1-f_m)t\right]$$

$$x_l(t) = m(t)\sin 2\pi f_1 t = \cos 2\pi f_m t \sin 2\pi f_1 t = \tfrac{1}{2}\left[\sin 2\pi(f_1+f_m)t + \sin 2\pi(f_1-f_m)t\right]$$

بافرض $\begin{cases} |f_1-f_m| < W \\ f_1+f_m > W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_u(t) = \tfrac{1}{2}\cos 2\pi(f_1-f_m)t \\ y_l(t) = \tfrac{1}{2}\sin 2\pi(f_1-f_m)t \end{cases}$

$$x_c(t) = \tfrac{1}{2}\cos 2\pi(f_1-f_m)t \cos 2\pi f_2 t - \tfrac{1}{2}\sin 2\pi(f_1-f_m)t \sin 2\pi f_2 t = \cos 2\pi(f_1+f_2-f_m)t$$

SSB.

$$\begin{cases} u\,x_c(t) = \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_c t - \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_c t = \cos 2\pi(f_c+f_m)t \Rightarrow f_c = -f_1-f_2 \\ L\,x_c(t) = \cos 2\pi(f_c-f_m)t \Rightarrow f_c = f_1+f_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f_1-f_m| < W \\ f_1+f_m > W \end{cases}$$

مثال:

الف) رسم $Y(f)$

ب) آیا می‌توان با عبور مجدد $y(t)$ از این سیستم دوباره $m(t)$ را بدست آورد؟

$$v(t) = m(t)A\cos 2\pi f_c t$$

$$Q(f) = H(f)\,V(f)$$

اگر دوباره خروجی را عبور دهیم همانطور که در بالا side-band ها جابه‌جا شده‌اند دوباره نیز شاهد جابه‌جایی آنها و بدست آوردن شکل اصلی البته با تغییری در دامنه خواهیم بود.

www.iran-icee.com

روش‌های آشکارسازی در مدولاسیون‌های موج پیوسته خطی :

۱) روش سنکرون

۲) روش آشکارسازی پوش

روش‌های آشکارسازی سنکرون :

فرض می‌کنیم فرکانس موج سینوسی محلی با فرکانس حامل یکی است به همین دلیل به آن روش سنکرون می‌گوییم.

$$x_c(t) = [k_c + k_\mu x(t)]\cos 2\pi f_c t - k_\mu x_q(t)\sin 2\pi f_c t$$

AM: $x_q(t)=0 \quad k_c = A_c \quad k_\mu = \mu A_c$

DSB: $x_q(t)=0 \quad k_c = 0 \quad k_\mu = A_c$

SSB: $x_q(t)=\hat{x}(t) \quad k_c = 0 \quad k_\mu = \frac{1}{2}A_c$

$$y(t) = A_{LO}\, x_c(t)\cos 2\pi f_c t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}A_{LO}\Big[(k_c + k_\mu x(t)) + \underbrace{(k_c + k_\mu x(t))\cos 2\pi 2 f_c t}_{\text{از فیلتر عبور نمی‌کند}} - \underbrace{k_\mu x_q(t)\sin 2\pi 2 f_c t}_{\text{از فیلتر عبور نمی‌کند}}\Big]$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2}A_{LO}(k_c + k_\mu x(t)) \qquad \hat{x}(t) \xrightarrow{\text{خازن حذف DC}} \frac{1}{2}A_{LO}\, k_\mu x(t)$$

حال در سر راه خازن حذف DC قرار می‌دهیم تا مقدار ثابت جمع شده با سیگنال را حذف کند.
به همین علت فرض می‌کنیم خبر مقدار DC ندارد زیرا این مقدار در این مرحله حذف شده و در خروجی دیده نمی‌شود. پس این روش برای ارسال مقادیر DC مناسب نیست.

در اینجا مشکل همزمان کردن اسیلاتور کار سختی است برای رفع این مشکل نمونه ضعیف شده‌ای از سیگنال حامل را نیز همراه خبر می‌فرستیم تا گیرنده مشکلی برای سنکرون کردن نداشته باشیم

www.iran-ieee.com

مدولاسیون های موج پیوسته نمایی:

$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

$$\begin{cases} A(t) = A_c = cte \\ S_T = \frac{1}{2} A_c^2 \end{cases}$$

PM: $\varphi(t) = \varphi_\Delta x(t)$ — φ_Δ معرف حداکثر شیفت فاز تولید شده در اثر مدولاسیون است.

$|x(t)| \leq 1$

PM: $x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_\Delta x(t))$

زاویه لحظه‌ای $\theta_c(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t)$

$$f_c(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\theta}_c(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t)$$

FM: $f_c(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

f_Δ معرف حداکثر انحراف فرکانسی نسبت به فرکانس مرکزی f_c است. $|x(t)| \leq 1$

$$f_\Delta x(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t) \rightarrow \varphi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$x_c(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]$$

از آنجایی که $x_c(t)$ در دو حالت FM و PM مشابه یکدیگر هستند پس می‌توان با گرفتن انتگرال از سیگنال ورودی از PM به FM رفت.

	$\varphi(t)$	$f(t)$
PM	$\varphi_\Delta x(t)$	$f_c + \frac{\varphi_\Delta}{2\pi}\dot{x}(t)$
FM	$2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$f_c + f_\Delta x(t)$

از روی شکل مدوله شده نمی‌توان نوع مدولاسیون را تعیین کرد.

بنابراین اطلاعات در عبور از صفرها نهفته است و در اینجا از شکل ظاهری نمی‌توان اطلاعاتی از خبر را بدست آورد.

www.iran-ieee.com

پهنای باند مدولاسیون های نمایی :

در اینجا چون دامنه سیگنال مدوله شده ثابت است، پس S_T ثابت است.

مدولاسیون های نمایی پهنای باند زیادی را اشغال می کنند.

$$x_c(t) = A_c \cos\varphi(t) \cos 2\pi f_c t - A_c \sin\varphi(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$\text{میانی } x_c(t) = x_i(t) \cos 2\pi f_c t - x_q(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i(t) = A_c \cos\varphi(t) \\ x_q(t) = A_c \sin\varphi(t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{تیلور}]{\text{بسط}} \begin{cases} x_i(t) = A_c \left[1 - \frac{\varphi^2(t)}{2!} + \frac{\varphi^4(t)}{4!} - \cdots\right] \\ x_q(t) = A_c \left[\varphi(t) - \frac{\varphi^3(t)}{3!} + \frac{\varphi^5(t)}{5!} - \cdots\right] \end{cases}$$

$$\text{با فرض } |\varphi(t)| \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} x_i(t) = A_c \\ x_q(t) = A_c \varphi(t) \end{cases}$$

مؤلفه های هم فاز و متعامد برای تقریب باند باریک

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \varphi(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$\Rightarrow X_c(f) = \tfrac{1}{2} A_c \delta(f - f_c) + \tfrac{1}{2} A_c \delta(f + f_c) + \tfrac{j}{2} A_c \varphi(f - f_c) - \tfrac{j}{2} A_c \varphi(f + f_c)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_\Delta x(t) & PM \\ 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau & FM \end{cases} \Rightarrow \varphi(\ ) = \begin{cases} \varphi_\Delta X(f) & PM \\ -j f_\Delta \frac{X(f)}{f} & FM \end{cases} \rightarrow$$

در هر دو حالت پهنای باند $2W$ اشغال می شود.

در اینجا به هیچ عنوان نمی توانیم پهنای باند را از $2W$ کمتر کنیم.

* اثبات می شود که اگر از تقریب باند باریک استفاده نکنیم آنگاه پهنای باند حتماً بزرگتر از $2W$ خواهد بود.

www.iran-ieee.com

Tone Modulation:

خبر باندپایه $x(t) = \begin{cases} A_m \sin 2\pi f_m t & PM \\ A_m \cos 2\pi f_m t & FM \end{cases}$ $\qquad W = f_m \ll f_c$

$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \underbrace{\beta \sin 2\pi f_m t}_{\substack{PM:\ \varphi_\Delta x(t) \\ FM:\ 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}})$$

در اینجا داریم $\rightarrow \beta = \begin{cases} \varphi_\Delta A_M & PM \\ \frac{f_\Delta}{f_m} A_M & FM \end{cases}$

(در حالت کلی) $\beta = \begin{cases} \varphi_\Delta \max(x(t)) & PM \\ \frac{f_\Delta}{W} \max(x(t)) & FM \end{cases}$

می‌خواهیم شرط باندباریک بودن را قرار دهیم.

$$|\varphi(t)| \ll 1 \rightarrow |\beta \sin 2\pi f_m t| \ll 1 \xrightarrow{|\sin 2\pi f_m t| \leq 1} |\beta| \ll 1$$

$$\rightarrow x_c(t) = A_c \cos(\beta \sin 2\pi f_m t)\cos 2\pi f_c t - A_c \sin(\beta \sin 2\pi f_m t)\sin 2\pi f_c t$$

$$\rightarrow x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \beta \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_c t$$

$$\rightarrow x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t + \tfrac{1}{2} A_c \beta \cos 2\pi (f_c + f_m)t - \tfrac{1}{2} A_c \beta \cos 2\pi (f_c - f_m)t$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم پهنای باند برابر با $2W$ می‌باشد.

$$\cos(\beta \sin 2\pi f_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n \text{ زوج}} 2 J_n(\beta) \cos(2\pi n f_m t)$$

به ترتیب فوق تابع غیرخطی را به صورت مجموع هارمونیک‌هایی نوشتیم که می‌توانیم تبدیل فوریه‌ی آنها را حساب کنیم.

$$\sin(\beta \sin 2\pi f_m t) = \sum_{n \text{ فرد}} 2 J_n(\beta) \sin(2\pi n f_m t)$$

تابع بسل نوع 1 از مرتبه n: $J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda$

مقادیر $J_n(\beta)$ به ازای مقادیر مختلف n و β در جدول قرار دارد.

www.iran-ieee.com

$$x_c(t) = A_c\left[J_0(\beta) + \sum_{\text{زوج } n} 2J_n(\beta)\cos n\omega_m t\right]\cos\omega_c t$$
$$- A_c\left[\sum_{\text{فرد } n} 2J_n(\beta)\sin n\omega_m t\right]\sin\omega_c t$$

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c J_0(\beta)\cos\omega_c t + A_c\sum_{\text{زوج } n} J_n(\beta)\left[\cos(\omega_c - n\omega_m)t + \cos(\omega_c + n\omega_m)t\right]$$
$$- A_c\sum_{\text{فرد } n} J_n(\beta)\left[\cos(\omega_c + n\omega_m)t - \cos(\omega_c - n\omega_m)t\right]$$

می‌دانیم: $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

$$\Rightarrow X_c(f) = \tfrac{1}{2}A_c\sum_{n} J_n(\beta)\left[\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)\right]$$

www.iran-ieee.com

مدولاسیون نمایی :

$$x_c(t) = A\cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) \longrightarrow \begin{cases} \varphi(t) = \varphi_\Delta x(t) & PM \\ \varphi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau & FM \end{cases}$$

$$x_c(t) = A_c \sum_n \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_m t)\, J_n(\beta)$$

سیگنال‌های FM و PM پهنای باند بیشتری به خود اختصاص داده‌اند

مسأله دیگر اینست که در فرکانس حامل مقداری از اطلاعات خبر وجود دارد و ارسال آن به معنی ارسال خبر است.

$$|n/\beta| \gg 1 \Rightarrow |J_n(\beta)| \longrightarrow 0$$

$$|n/\beta| < 1 \Longrightarrow n_{max} = \beta$$

تقریب پهنای باند FM بین باند:

$\beta \gg 1$

$$B_T = 2\pi f_m = 2\beta f_m$$

قانون کارلسون برای تقریب پهنای باند x_c :

$$B_T = 2(\beta+1) f_m^{W}$$

مثال:

$$x_c(t) = 100\cos(\underbrace{2\pi f_c t + 100\int m(\tau)d\tau}_{\theta_c})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}_c = f_c + \frac{100}{2\pi} m(t)$$

$$\Rightarrow \Delta f_{max} = \frac{5\times 100}{2\pi}$$

www.iran-ieee.com

مثال:

$m(t) = 10 \cos 14\pi t$

$x_c(t) = 10 \cos\left[4000\pi t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right] \quad , f_\Delta = 10$

سیگنال فوق را به یک BPF داده و می‌خواهیم ببینیم توان در خروجی چند درصد توان سیگنال است.

BPF: $f_c = 4000 \qquad BW = 42\ Hz$

$\beta = \frac{f_\Delta A_m}{f_m} = \frac{10 \times 10}{\hat{\ }} = 12.5$

ضربه‌ها به ازای $n = -4 \dots 4$ عبور پیدا می‌کنند.

$$P_0 = \frac{10^2}{2} J_0^2(\beta) + 2\sum_{i=1}^{4} \frac{10^2}{2} J_i^2(\beta) = 13.15$$

$$|J_n(\beta)| = |J_{-n}(\beta)|$$

$$P_{c\ \text{سیگنال مدوله شده}} = \frac{1}{2} A_c^2 = 50$$

$$\Rightarrow \frac{P_0}{P_c}\% = 26.3$$

تولید و آشکارسازی سیگنال‌های FM و PM:

۱- روش مستقیم برای تولید سیگنال FM:

استفاده از VCO:

$C(t) = C_0 - C x(t)$

$$\theta_c(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \quad x(t)}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \qquad \left|\frac{C}{C_0} x(t)\right| \ll 1$$

$$\dot{\theta}_c(t) = \omega_0 \left(1 + \frac{C}{2C_0} x(t)\right) \qquad f_\Delta = \frac{C}{2C_0} f_0 \qquad f_\Delta < 0.004 f_c$$

www.iran-ieee.com

روش غیرمستقیم: مدولاتور فاز

مدولاتور باند باریک:

$$x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \underbrace{\varphi(t)}_{\varphi_\Delta x(t)} \sin 2\pi f_c t$$

مدولاتور فاز:

خروجی مقایسه

خروجی Flip-Flop

تولید و آشکارسازی سیگنال FM :

مدولاتور فرکانس باند باریک
NBFM

در اینجا به‌جای مشاهده‌ی طیف فرکانسی در هر مرحله، فرکانس لحظه‌ای هر بلوک را مشاهده می‌کنیم.
می‌خواهیم در نهایت داشته باشیم: $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

$$\theta_1(t) = 2\pi f_{c1} t + \frac{\varphi_\Delta}{T}\int x(\tau)d\tau$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}_1(t) = f_{c1} + \frac{\varphi_\Delta}{2\pi T}x(t)$$

$$f_2(t) \xrightarrow[\text{n ضرب می‌شود.}]{\text{زاویه‌ی لحظه‌ای در}} n f_1(t) = n f_{c1} + \frac{n\varphi_\Delta}{2\pi T}x(t)$$

$f(t)$ می‌تواند دو حالت مجموع یا تفاضل $f_2(t)$ و f_{LO} را داشته باشد. پس:

$$\begin{cases} f(t) = n f_{c1} + f_{LO} + \frac{n\varphi_\Delta}{2\pi T}x(t) \\ f(t) = n f_{c1} - f_{LO} + \frac{n\varphi_\Delta}{2\pi T}x(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_c = n f_{c1} \pm f_{LO} \\ f_\Delta = \frac{n\varphi_\Delta}{2\pi T} \end{cases}$$

از رابطه دوم n مشخص می‌شود و سپس در رابطه اول با توجه به n، f_{c1}، f_c، f_{LO} مشخص می‌گردد.

هدف: $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

فیلتر RF یکی از فرکانس‌های لحظه‌ای را حذف و دیگری را برای ارسال مهیا می‌کند.

www.iran-ieee.com

آشکارسازی فرکانسی :

حال می‌خواهیم اطلاعات خبر را از سیگنال مدوله شده دریافت کنیم.

۱) در سیگنال مدوله شده اطلاعات در فاز وجود دارد و با مشتق گرفتن، از آن اطلاعات خبر به دامنه منتقل می‌شود. با اینکار می‌توانیم با استفاده از آشکارساز پوش اطلاعات را بازیابی کنیم.

تبدیل FM به AM :

$$x_c(t) = A_c \cos(\theta_c(t)) \Rightarrow \dot{x}_c(t) = -A_c \dot{\theta}_c(t) \sin(\theta_c(t))$$

$$\dot{\theta}_c(t) = 2\pi(f_c + f_\Delta x(t))$$

$$\dot{x}_c(t) = -2\pi A_c (f_c + f_\Delta x(t)) \sin(\theta_c(t))$$

دسته‌ی دیگر از آشکارسازها مشتق را با تقریب حساب می‌کنند. به این روش Phase-Shift discriminator

اساس این روش تقریب زدن مشتق به صورت مقابل است.

$$\dot{v}(t) = \lim_{t_1 \to 0} \frac{v(t) - v(t-t_1)}{t_1}$$

$$FM: \dot{\varphi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t) \quad , \quad x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

تقریب : $\varphi(t) - \varphi(t-t_1) = t_1 \dot{\varphi}(t) = 2\pi f_\Delta t_1 x(t)$

برای پیاده‌سازی $\varphi(t)$ و $\varphi(t-t_1)$ از ساختار زیر بدست می‌آید.

$$y_1(t) : \sin(2\omega_c t + \varphi(t) + \varphi(t-t_1)) \, , \, \sin(\varphi(t) - \varphi(t-t_1)) \simeq \varphi(t) - \varphi(t-t_1) \ll 1$$

$$y_D(t) \propto 2\pi f_\Delta t_1 x(t) \Rightarrow y_D(t) = k_D f_\Delta x(t)$$

www.iran-ieee.com

۳_ آشکارساز عبور از صفر : Zero_Crossing

مبنای کار در اینجا کاملاً متفاوت با مرحله قبل است. در اینجا عبور از صفرها آشکارسازی می‌شوند و با توجه به فواصل این عبور از صفرها فرکانس لحظه‌ای تخمین زده می‌شود.

تعداد پالس‌ها در یک دوره‌ی T $\quad n_T = T f(t)$

$$\frac{1}{T}\int_T v(\tau)d\tau = \frac{1}{T} n_T A t = \frac{1}{T} T f(t) A t = A t f(t) = A t\left(f_c + f_\Delta x(t)\right) \Rightarrow y(t) = k_D x(t)$$

* T متناسب با پهنای باند خبر انتخاب می‌شود.

مثال:

پهن باند FM
$f_c = 10^4$ MHz
انحراف فرکانسی ۷۵ kHz

β_{FM} $\quad A\cos 2\pi f_0 t$

FM باند باریک: حداکثر انحراف زاویه‌ای ۰/۱

$W = 10$ kHz

$n_1 = ?\ ,\ n_2 = ?$

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right) \\ u_1(t) &= A\cos\left(2\pi n_1 f_0 t + n_1\varphi(t)\right) \\ u_2(t) &= A\cos\left(2\pi n_2 f_0 t\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(t) = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi(n_1+n_2)f_0 t + n_1\varphi(t)\right) + \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi(n_1-n_2)f_0 t + n_1\varphi(t)\right)$$

هدف: $y(t) = A\cos\left(2\pi f_c t + f_\Delta \varphi_1(t)\right)$

www.iran-ieee.com

$$\left.\begin{array}{l} FM:\ \beta = \dfrac{f_\Delta}{W} \\ f_\Delta : \text{ناشی از FM باندباریک} \end{array}\right\} \Rightarrow f_\Delta = 0.1 \times 15 = 1.5\ kHz$$

ابتدا انتخاب می‌کنیم کدام یک از حبلات $y(t)$ را نگه داریم، پس داریم:

$$75 = n_1 \times 1.5 \Rightarrow n_1 = 50$$

$$2\pi(n_1 + n_2) f_0 = 2\pi f_c \Rightarrow n_2 = 990$$

اگر بخواهیم در سیگنال نهایی حداکثر انحراف مجاز در فرکانس حامل $\pm 2\ Hz$ باشد بر این اساس حداکثر انحراف مجاز در اسیلاتور محلی چقدر است.

$$(n_1 + n_2)\Delta f_0 = \Delta f_{\text{حامل}} \Rightarrow \Delta f_0 = 0.0019\ Hz$$

www.iran-ieee.com

ساختار گیرنده‌ها در سیستم‌های مخابراتی (موج پیوسته)

گیرنده‌های جذ کشی (سوپرهتروداین):

$x(t)$ سیگنالی مدوله شده که ارسال می‌شود. این سیگنال با باند فرکانسی خیلی بالاست.

RF: هم فیلترینگ و هم تقویت را انجام می‌دهد.

مزیت این روش اینست که ما باید سخت‌افزار دقیق خود را برای کار در یک فرکانس پایین‌تر طراحی کنیم.
فیلترینگ اول که غیر دقیق نیز می‌باشد باعث می‌شود نویز در سیگنال کاهش یابد.

$$f_1 = |f_{LO} \pm f_c| \Rightarrow \begin{cases} |f_{LO} + f_c| : & f_c \text{ از } f_c \text{ بزرگتر است} \\ |f_{LO} - f_c| : & \end{cases}$$

این فرکانس را نمی‌خواهیم چون سیگنال باید به فرکانس مرکزی کمتر از f_c برود.
این فرکانس را به عنوان f_{IF} انتخاب می‌کنیم.

$$f_c = f_{LO} - f_{IF} \rightarrow f_{IF} = f_{LO} - f_c$$

بنابراین اگر شرط $B_{RF} < 2f_{IF}$ را بگذاریم آنگاه فرکانس‌های موجود در $f_{LO}+f_{IF}$ هنگام ضرب شدن در کسینوسی به f_{IF} منتقل شده و تداخل ایجاد می‌شود.

هرچه f_{IF} بیشتر باشد فاصله خیلی تا تصویر بیشتر شده و در نتیجه فیلترینگ راحت‌تر خواهد شد.

f'_c: فرکانس تصویر

$$f'_c = f_{LO} + f_{IF} = f_c + 2f_{IF}$$

www.iran-ieee.com

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: گیرنده FM سوپرهتروداین: ۸۸-۱۰۸ MHz — $f_{IF} < f_{LO}$

$88^{MHz} < f_c < 108^{MHz}$

f_c' خارج از محدوده فوق باشد. حداقل f_{IF} و محدوده تغییرات f_{LO} ؟

$f_c' \notin [88, 108] \Rightarrow 88 + 2f_{IF} > 108 \Rightarrow f_{IF} > 10\ MHz$

$f_{LO} = f_c + f_{IF} \Rightarrow 88+10 < f_{LO} < 108+10 \Rightarrow 98^{MHz} < f_{LO} < 118^{MHz}$

www.iran-ieee.com

نویز:

شناخت نویز:

احتمال و متغیرهای تصادفی:

پیشامد تصادفی آزمایشی است که نمی‌توان مقدار قطع و یقینی آن را از قبل بیان کرد.

پیشامد (رخداد): Event

نتیجه‌ای است که در هر بار انجام یک آزمایش تصادفی ممکن است حاصل شود.

$$P_A = \frac{N_A}{N}$$

$N_A \rightarrow$ تعداد دفعاتی که A پیش آمده

$N \rightarrow$ تعداد دفعات انجام آزمایش

A: نتیجه ممکن آزمایش

تئوری احتمال:

$$S = \{S_i\}$$

S: تمام پیشامدهای ممکن

شرط ها:

$$\begin{cases} 1)\ P(S_i) > 0 \\ 2)\ P(S) = 1 \\ 3)\ P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) \end{cases}$$

اگر A_1 و A_2 اشتراکی نداشته باشند.

متغیر تصادفی:

ضابطه‌ای است که به هر نتیجه ممکن یک آزمایش تصادفی، یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

$$P(X = +\infty) = P(X = -\infty) = 0$$

www.iran-ieee.com

انواع متغیرهای تصادفی :

الف) متغیر تصادفی گسسته : اگر فضای S دارای تعداد اعضای قابل شمارش باشد .

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی x : CDF $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$\xrightarrow{\text{خواص}} \begin{cases} 0 \leq F_X(x) \leq 1 \\ F_X(-\infty) = 0 \\ F_X(+\infty) = 1 \end{cases}$$

با استفاده از تابع توزیع تجمعی می‌توانیم احتمال هر پیشامدی را حساب کنیم .

$P(X > x) = 1 - F_X(x)$

$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

مثال : احتمال ایجاد خطا در هر بیت مستقل از سایر بیت‌ها است و احتمال خطا برابر با $2/5$ است . حال بیغامی ۳ بیتی را ارسال می‌کنیم . می‌خواهیم اطلاعات دریافتی را از لحاظ نوع دریافت بررسی کنیم .

$P(X=0) = (3/5)^3$

$P(X=1) = 3 \times 2/5 \times (3/5)^2$

$P(X=2) = 3 \times (2/5)^2 \times 3/5$

$P(X=3) = (2/5)^3$

$F_X(0) = P(X \leq 0) = P(X=0) = (3/5)^3$

$F_X(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$F_X(2) = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1 - P(X=3)$

$F_X(3) = 1$

www.iran-ieee.com

ب) متغیر تصادفی پیوسته :

این متغیری تواند هر عددی در روی محور حقیقی به خود اختصاص دهد.

$F_X(x) = P(X \leq x)$ x متغیری پیوسته است.

$P(X=a) = 0$

تابع چگالی احتمال PDF :

$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$$

PDF تابعی غیرمنفی است که سطح زیر آن ۱ بوده و سطح زیر آن در بازه‌ی $[a,b]$ احتمال رخداد پیشامد در آن بازه است.

۱- $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\lambda)\, d\lambda$

۲- $f_X(x) \geq 0$

۳- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(\lambda)\, d\lambda$

۴- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\lambda)\, d\lambda = 1$

- متغیر با توزیع یکنواخت :

اگر دو متغیر تصادفی X , Y همزمان قابل مشاهده باشند : $F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ تابع توزیع مشترک

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f_{XY}(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu$$

www.iran-ieee.com

$$f_{XY} = f_X(x) f_Y(y)$$

اگر متغیرهای x, y وابسته باشند می‌توانیم تابع زیر را تعیین کنیم.

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} & f_X(x) \neq 0 \\ 0 & f_X(x) = 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$$
$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, \lambda)\, d\lambda$$ به این تابع چگالی احتمال، PDF کناری می‌گوییم.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

میانگین آماری: $X, f_X(x)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$ ممان اول

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx$$ ممان n-ام

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

$$E(CX) = CE(X) \qquad E(C+X) = C + E(X)$$

$$Var(CX) = C^2 Var(X) \qquad Var(C+X) = Var(X)$$

www.iran-icee.com

تابع مشخصه:

$$\phi_X(v) = E(e^{jvX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} f_X(x)dx$$

$v = 2\pi t$

$x = f$

$$\Longrightarrow \phi_X(2\pi t) = F^{-1}\{f_X(f)\}$$

مثال: می‌خواهیم تابع چگالی احتمال برای f_Z به دست آوریم.

$Z = X + Y$ ، $f_Y(y)$ ، $f_X(x)$ مستقل از هم Y ، X

$$\phi_Z(v) = E(e^{jvZ}) = E(e^{jvX} e^{jvY}) \xrightarrow[\text{استقلال}]{\text{با توجه به شرط}} E(e^{jvX})E(e^{jvY}) \rightarrow$$

$$\phi_Z(v) = \phi_X(v)\phi_Y(v) \Rightarrow f_Z(\lambda) = f_X(\lambda) * f_Y(\lambda)$$

کوواریانس (هم‌پراکنی):

$E(X) = m_x$

$E(Y) = m_y$

$$\Longrightarrow Cov(X,Y) = E[(X-m_m)(Y-m_y)]$$

ضریب همبستگی $P_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$$\begin{cases} \sigma_X^2 = Var(X) \\ \sigma_Y^2 = Var(Y) \end{cases}$$

شرط ناهمبسته بودن

X ، Y ناهمبسته $\longrightarrow Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

شرط مستقل بودن

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

فرض کنیم برای متغیر تصادفی X ، تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ را داشته باشیم. حال می‌خواهیم برای $y=g(X)$ تابع چگالی احتمال را بدست آوریم.

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \Longrightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

www.iran-ieee.com

امتحان میانترم : چهارشنبه ۸۹/۹/۱۷

در نوشتن از این به بعد به‌جای $f_X(x)$ از $P(x)$ استفاده می‌کنیم.
برای ساده‌سازی، از تابع $P(x)$ به‌جای $f_X(x)$ استفاده می‌کنیم.
همچنین برای PDF توأم از $P(x,y)$ استفاده می‌کنیم.

- به تعداد پدیده‌های موجود در طبیعت، تابع چگالی احتمال داریم.

تابع های چگالی احتمال مهم :

۱) PDF یکنواخت (Uniform PDF) :

مصداق این حالت روشن کردن سیگنال ژنراتور است که در هر حالت ما با یک فاز اولیه خاص سیگنال را می‌بینیم.

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + x_2 \\ \updownarrow \qquad \updownarrow \\ P_1(x_1) \quad P_2(x_2) \end{array}\right\} \longrightarrow P(x) = P_1(x) * P_2(x)$$

نظریه حد مرکزی . Central limit theorem

این نظریه می‌گوید اگر بینهایت تابع مثبت را باهم کانوالو کنیم، آنگاه حاصل تابعی گوسی خواهد بود.
بنابراین اگر پدیده‌ای مجموع بینهایت پدیده مستقل باشد، آنگاه آن پدیده توزیعی گوسی دارد.

www.iran-ieee.com

PDF گوسی :

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

PDF گوسی ← یعنی بینهایت متغیر مستقل باهم جمع شده و این گونه PDF را شکل داده اند.

کانولوشن عملی نرم کننده است

تکلیف : تئوری حد مرکزی را با انتخاب تعدادی تابع مثبت و رسم کانولوشن آنها بدست آورید.

مصداق : افتادن برگ از درخت های موجود در یک باغ . هرکدام از این برگ ها مستقل از بقیه ممکن است بیفتد یا بیفتد.

$$x = x_1 + x_2 + \dots$$

برگ شماره ۱

مصداق : در متاومتی که هیچ گونه میدان الکتریکی یا مغناطیسی وجود ندارد، جریان تابعی گوسی است زیرا از حرکت بینهایت الکترون بوجود آمده و این الکترون مستقل از سایر الکترون ها حرکت می کند.

www.iran-ieee.com

در PDF گوسی mode ، media ، mean برهم منطبق هستند.

mode: نقطه مربوط به ماکزیمم PDF

media: محلی که سطح زیر منحنی را نصف می‌کند

mean: امید متغیر

۳- PDF رالی:

فرض می‌کنیم دو متغیر x_1 و x_2 را داریم که خواص زیر را دارند.

۱- مستقل از هم هستند
۲- گوسی شکل هستند
۳- $E\{x_1\} = E\{x_2\} = 0$
۴- $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma$

حال متغیر z و θ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

در واقع متغیر به صورت $z = x_1 + jx_2$ را تعریف می‌کنیم.

حال می‌خواهیم PDF مربوط به r و θ است.

نگاشت یک به یک است یعنی هر x_1 و x_2 یک z یا یک r و θ می‌دهد و برعکس.

پس اگر به احتمال ۲٪، $x_1 \simeq 1$ و $x_2 \simeq 2$ باشد آنگاه به احتمال ۲۰٪، $r \simeq \sqrt{5}$ و $\theta \simeq \arctan 2$ و برعکس.

به شرط اینکه x_1 و x_2 و r و θ در روابط فوق صدق کنند.

$$P(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = P(r, \theta)\, dr d\theta$$

حال ارتباط بین المان‌های سطح را بدست می‌آوریم.

$$dx_1 dx_2 = r\, dr\, d\theta$$

$dx_1 dx_2 = r\,dr\,d\theta$

$P(x_1, x_2) = P(x_1)\,P(x_2)$

$$\Rightarrow P(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r\,dr\,d\theta = P(r,\theta)\,dr\,d\theta \Rightarrow P(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(\theta) = \int_0^\infty P(r,\theta)\,dr = 1/2\pi$$

$$P(r) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,d\theta = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

تکلیف: mean ، mode ، media تابع توزیع رالی را بدست آورید.

مصداق: زدن تیر به هدف x و y هر کدام دارای PDF گوسی هستند زیرا بینهایت عامل در محل آنها تأثیر دارند و در نتیجه دارای توزیع گوسی هستند بنابراین r حاصل دارای توزیعی رالی و θ دارای توزیعی یکنواخت است.

اگر بتوانیم اثبات کنیم که $P(x,y) = P(x)P(y)$ را داریم آنگاه می‌توانیم بگوییم x و y مستقل از هم هستند. برای اثبات رابطه فوق $P(x)$ و $P(y)$ را از روی انتگرال گیری بدست آورده و بعد مقایسه می‌کنیم که آیا حاصل ضربشان برابر با $P(x,y)$ است یا نه.

اگر رابطه‌ی $E\{xy\} = E\{x\}E\{y\}$ برقرار باشد آنگاه می‌توانیم بگوییم x و y ناهمبسته هستند

نشان دهید که اگر دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، حتماً ناهمبسته هم هستند ولی عکس قضیه صادق نیست جز برای متغیرهای تصادفی گوسی.

اثبات می‌شود که اگر دو متغیر گوسی ناهمبسته باشند آنگاه مستقل نیز هستند

www.iran-ieee.com

علت اینکه سراغ ناهمبسته بودن می‌رویم اینست که شرایط برقراری استقلال بسیار سخت است و معمولاً حاصل نمی‌شود.

$$Cov(x,y) \triangleq E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

دو متغیر تصادفی x و y را انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = \text{معدل دبیرستان} \\ y = \text{تعداد مقالات علمی خوب در زمان دکتری} \end{cases}$$

هر فرد از این افراد یک x و یک y دارد. برای هر فرد در صفحه‌ی y-x یک نقطه داریم.

$$\begin{cases} x = \text{تعداد غیبت‌ها در کلاس} \\ y = \text{معدل} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \text{نمره‌ی کنکور} \\ y = \text{معدل دبیرستان} \end{cases}$$

a: بین x ها معدل گرفته و بین y ها نیز معدل می‌گیریم. نتیجه مقابل را داریم.

در اکثر موارد $\longrightarrow \begin{cases} x > \bar{x} \\ y > \bar{y} \end{cases}$

بنابراین در اکثر موارد $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ عددی مثبت است و در نتیجه cov نیز مثبت است یعنی اگر x رو به افزایش است به احتمال خیلی زیاد y نیز رو به افزایش است.

در اکثر موارد $\longrightarrow \begin{cases} x < \bar{x} \\ y < \bar{y} \end{cases}$

b: $E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} < 0$

c: $E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} = 0$

PAPCO
www.iran-ieee.com

درصورتی می‌توانیم بگوییم دو تابع x و y از هم مستقل هستند اگر هر دو تابع دلخواه از x و y ناهمبسته باشند.

مثال:

دو متغیر تصادفی x و y به صورت زیر در نظر می‌گیریم که θ یک توزیع یکنواخت دارد. می‌خواهیم ثابت کنیم که x و y مستقل نیستند و ناهمبسته می‌باشند.

$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

$$\bar{x} = E\{\cos\theta\} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta \, \cancel{p(\theta)}^{\frac{1}{2\pi}} \, d\theta = 0$$

$$\bar{y} = E\{\sin\theta\} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta \, \cancel{p(\theta)}^{\frac{1}{2\pi}} \, d\theta = 0$$

$$\overline{xy} = E\{\sin\theta\cos\theta\} = \frac{1}{2} E\{\sin 2\theta\} = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin 2\theta \, p(\theta) \, d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y}$$

$$\Rightarrow Cov(x,y) = 0$$

تحقیق کنید که دو متغیر مستقل نیستند.

۱) $x^2 + y^2 = 1$ ⇐ x روی y قیدی ایجاد می‌کند. ⇐ دو متغیر مستقل نیستند

۲) PDF مربوط به x و y را بدست می‌آوریم سپس نشان می‌دهیم که $f(x,y) \neq f(x)f(y)$

برای اینکه معیاری از بزرگی یا کوچکی ضریب کوواریانس را داشته باشیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اثبات کنید:

$$-1 \leq \rho = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \leq 1$$

اگر $\rho = 1$ باشد آنگاه رابطه‌ی بین x و y کاملاً خطی می‌شود

$$|\rho| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} |\rho| \to 1 : \text{بین } x \text{ و } y \text{ رابطه‌ای خطی ایجاد می‌شود} \\ |\rho| \to 0 : x \text{ و } y \text{ به سمت ناهمبسته بودن می‌روند} \end{cases}$$

www.iran-ieee.com

فرآیندهای تصادفی (فرآیندهای استوکاستیک):

$\cos(\omega_0 t + \theta)$

فرض کنیم سیگنال مقابل توسط اسیلاتور تولید شده است.
θ نیز دارای توزیعی به صورت $P(\theta)$ می باشد.
با توجه به مقدار θ ما می توانیم بی نهایت سیگنال تولیدی داشته باشیم. به این سیگنال ها خانواده می گوییم و به هر کدام از توابع یک تابع نمونه یا Sample Function می گوییم.
به مجموعه نیز خانواده یا Ensemble می گوییم.

مقدار تابع در لحظه t_0 به صورت $\cos(\omega_0 t_0 + \theta)$ است.

فرآیند

فرآیند استوکاستیک یک تابع زمانی است که در هر لحظه از زمان یک متغیر تصادفی می دهد.

یک فرآیند استوکاستیک به صورت $x(t, s)$ نشان می دهیم.

- اگر مقدار s برای ما معلوم شود، آنگاه $x(t, s)$ یک تابع معلوم می شود.

- اگر t را مشخص کنیم آنگاه با یک متغیر تصادفی مواجهیم یعنی $x(t, s)$ متغیری تصادفی است
- اگر t و s را هر دو معلوم کنیم، با یک عدد مواجهیم.

فرآیند استوکاستیک دترمینستیک فرآیندی است که اگر در یک لحظه مقدار تابع را بدانیم می توانیم تابع را به طور کامل مشخص کنیم. مثلاً در مورد تابع $\cos(\omega_0 t + \phi)$ اگر مقدار ϕ را در یک لحظه بدانیم، می توانیم تابع را به طور مشخص بدست آوریم.

www.iran-ieee.com

برای نمایش مقدار dc از نمایش $\langle g(t)\rangle$ استفاده می‌کنیم.

$$\langle g(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,dt$$

برای توابع متناوب، lim برداشته می‌شود و به‌جای T نیز T_0 قرار می‌گیرد.

مقدار متوسط $x(t,s)$ برابر میانگین آماری تمام dcهای توابع مختلف است.

فرض می‌کنیم فرآیند تصادفی $x(t,s)$ داریم که s دارای توزیع $p(s)$ است.

احتمال	تابع نمونه	مقدار dc
$p(s_1)ds$	$x(t,s_1)$	$\langle x(t,s_1)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,s_1)\,dt$
$p(s_2)ds$	$x(t,s_2)$	$\langle x(t,s_2)\rangle$
⋮		
$p(s_n)ds$	$x(t,s_n)$	$\langle x(t,s_n)\rangle$

$$\overline{d.c} \triangleq E\Big\{\underbrace{\langle x(t,s)\rangle}_{\text{تابع s است.}}\Big\} = E\Big\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,s)\,dt\Big\} = \int_{\text{همه s}}\Big[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,s)\,dt\Big]p(s)\,ds$$

می‌توان گفت امید dcها برابر با dc تابع امید می‌باشد، یعنی:

در لحظه‌ی t_0 از تمام مقدار متغیرها معدل گرفته و در $E\{x(t_0,s)\}$ قرار می‌دهیم.

$\overline{dc}$ ← dc تابع معدل

معدل همه dcهای ممکن

$$E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,\zeta)\,dt\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\int_{\text{همه‌ی }\zeta} x(t,\zeta)\,p(\zeta)\,d\zeta\right]dt$$

$$= \langle E\{x(t,\zeta)\}\rangle$$

$$E\{\langle x(t,\zeta)\rangle\} = \langle E\{x(t,\zeta)\}\rangle$$

همواره می‌توانیم جای امید و dc را عوض کنیم.

$E\{x(t,\zeta)\}$ دیگر تابعی استوکاستیک نیست.

مثال: فرآیند $x(t)=\cos(\omega_0 t+\theta)$ مفروض است. $E\{x(t)\}$ را در حالتهای زیر بدست آورید

الف) θ متغیر تصادفی با PDF یکنواخت بین ۰ تا 2π

ب) θ یک متغیر تصادفی با PDF یکنواخت بین ۰ تا π

dc تابع را در هر دو حالت محاسبه کنید.

$$E\{x(t)\} = \int_{\text{همه‌ی }\theta} \cos(\omega_0 t+\theta)\,p(\theta)\,d\theta$$

$$\theta\in[0,2\pi] \Rightarrow \int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\times\frac{1}{2\pi}\,d\theta = 0$$

$$\theta\in[0,\pi] \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\,d\theta = -\frac{1}{\pi}\sin\omega_0 t$$

چون به همه‌ی فازهای موجود احتمال یکنواخت را ندادیم پس $E\{x(t)\}$ مخالف صفر شد.

$$d.c = \langle E\{x\}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{حالت اول} \\ 0 & \text{حالت دوم} \end{cases}$$

PAPCO
www.iran-ieee.com

$x(t)$: تابع از جنس توان $\Longrightarrow G(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$

$x(t,S)$

$p(S_1)dS \qquad x(t,S_1) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f,S_1)|^2}{T} = G(f,S_1)$

$p(S_2)dS \qquad x(t,S_2) \qquad G(f,S_2)$

$p(S_3)dS \qquad x(t,S_3) \qquad G(f,S_3)$

$$G(f) = E\{G(f,S)\} = E\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f,S)|^2}{T}\right\}$$

چون نمی دانیم کدام SF رخ می دهد پس از تمام چگالی توان ها معدل گرفته و به عنوان تابع چگالی طیف توان معرفی می کنیم.

$x(t,s)$

$\downarrow$

$E\{x(t,s)\}$ تابع مقابل دترمینستیک می باشد.

$$E\{x(t,s)\} = \int_{s\text{ها}} x(t,s)\,p(s)\,ds$$

معدل آماری

تابع تصادفی - معدل ریاضی :

$$\langle x(t,s)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,s)\,dt$$

دو معدل فوق اصلاً قابل مقایسه نمی باشند.

$$\overline{dc} \triangleq E\{(dc)_s\} = E\{\overbrace{\langle x(t,s)\rangle}^{dc\ s\text{-این نمونه}}\} = \langle E\{x(t,s)\}\rangle$$

$x(t,s)$ $\quad G(f,s) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f,s)|^2}{T}$

تابع چگالی توان :

$$G(f) = E\{G(f,s)\} = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f,s)|^2\right\}$$

$$\bar{P} = \int_{f=-\infty}^{\infty} G(f)\,df$$

* توان معدل همه ی توان ها است

تابع چگالی توان ، تابع چگالی توان امید نیست

توان برابر با توان نیست.

$$\bar{P} = \int_{f=-\infty}^{\infty} G(f)\,df = \int_{f=-\infty}^{\infty}\left(E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f)|^2\right\}\right)df$$

$$\Rightarrow \bar{P} = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\underbrace{\int_{f=-\infty}^{\infty}|X_T(f,s)|^2\,df}_{\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t,s)\,dt}\right\} = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t,s)\,dt\right\} = E\{P_s\}$$

PAPCO
www.iran-ieee.com

$P' = E\{x(t,\lambda)\}$ توان سیگنال $= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(E\{x(t,\lambda)\}\right)^2 dt$

$\neq \langle E\{x^2(t,\lambda)\}\rangle$

علت تفاوت ناشی از تفاوت $E\{x^2\}$ با $(E\{x\})^2$

تصادفی معلوم

* $E\{g_d(t)\, g_r(t)\} = g_d(t)\, E\{g_r(t)\}$ DSB , AM مطلوبست محاسبه توان آماری سیگنال‌های

فرض کنید توان متوسط آماری پیام برابر P_m است.

$DSB(t) = A_c m(t) \cos 2\pi f_c t$

$P_{DSB} = \langle E\{A_c^2 m^2(t) \cos^2 2\pi f_c t\}\rangle = \langle A_c^2 \cos^2 2\pi f_c t \times E\{m^2(t)\}\rangle$

فرآیندهای ایستان Stationary

فرآیندی است که در آن داشته باشیم

$E\{f(x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_N))\} = E\{f(x(t_1+\lambda), \dots, x(t_N+\lambda))\}$

اگر به ازای همه توابع f ممکن و هر دسته دلخواه از لحظه‌های $t_1, t_2, \dots, t_n$ و هر λ حقیقی رابطه بالا برقرار باشد آنگاه سیگنال را ایستا از مرتبه ی N می گویند.

یعنی اگر در شکل مقابل نواصل $t_1 t_2$, $t_2 t_3$ ثابت باشد آنگاه با جابه‌جایی مبدأ تغییری در خصوصیات آماری سیگنال بوجود نمی آورد.

$E\{x(t)\} = cte$

$E\{x^2(t)\} = cte$

$E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1+\Delta)\, x(t_2+\Delta)\}$

www.iran-ieee.com

WSS : Wide Sense Stationary

شرط‌ها →
$$\begin{cases} E\{x(t)\} = cte \\ E\{x(t_1)\,x(t_2)\} = f(t_1 - t_2) \end{cases}$$

اگر شرایط فوق برقرار باشند، می‌گوییم فرآیند در مفهوم وسیع ایستان است.

مثال تحقیق کنید که آیا فرآیند زیر ایستان است یا خیر، که در آن θ متغیری تصادفی در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ با PDF یکنواخت است؟

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$E\{x(t)\} = \int_{\theta\text{ها}} x(t,\theta)\,P(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) \times \frac{1}{2\pi}\,d\theta = 0$$ شرط اول برقرار

$$E\{x(t_1)\,x(t_2)\} = E\{A_0^2 \cos(\omega_0 t_1 + \theta)\cos(\omega_0 t_2 + \theta)\}$$

$$= \int_0^{2\pi} A_0^2 \cos(\omega_0 t_1 + \theta)\cos(\omega_0 t_2 + \theta)\,\cancel{P(\theta)}^{\frac{1}{2\pi}}\,d\theta = \frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0(t_1 - t_2)$$ شرط دوم برقرار

مثال: مسأله‌ی بالا را برای حالتی که $0 \leq \theta \leq \pi$ است بررسی کنید.

$$E\{x(t)\} = \int_0^{\pi} A_0 \cos(\omega_0 t + \theta)\,\frac{1}{\pi} = -\frac{A_0}{2\pi}\sin\omega_0 t$$

امید $x_1 x_2$ را حساب کنید.

www.iran-ieee.com

مثال ۳: برای مسأله قبل $E\{x(t_1)x(t_2)\}$ را بدست آورید.

Cross Correlation Function: CCF : تابع همبستگی متقابل $x(t_1)$, $y(t_2)$

$$E\{x(t_1)y(t_2)\} = R_{xy}(t_1,t_2)$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = \int_{\alpha}\int_{\beta} p_{x(t_1),y(t_2)}(\alpha,\beta)\,\alpha(t_1)\,\beta(t_2)\,d\alpha\,d\beta$$

PAPCO
www.iran-ieee.com

فرض کنیم $x(t)$ و $y(t)$ دو فرآیند استوکاستیک باشند، آنگاه تعریف زیر را داریم:

تابع همبستگی متقابل در لحظه‌های t_1, t_2: $E\{x(t_1), y(t_2)\} = R_{xy}(t_1, t_2)$

در لحظه‌ی t_1 از x نمونه گرفتیم و دیدیم زیاد است این یعنی با فرض $R_{xy}(t_1, t_2)$ بالا در لحظه t_2، y نیز زیاد است.

حال کار فوق را برای یک سیگنال انجام می‌دهیم: $E\{x(t_1)\, x(t_2)\} = R_{xx}(t_1, t_2)$

به تابع فوق را تابع خودهمبستگی می‌گوییم. Auto Correlation Function

فرض کنید می‌دانیم $E\{x(t_1)\, x(t_1+5)\}$ زیاد است اگر بدانیم در لحظه t_1، x زیاد است آنگاه می‌توانیم پیش بینی کنیم که در ۵ ثانیه‌ی بعد نیز x زیاد خواهد بود.

معیار بزرگ یا کوچک بودن را با استفاده از مقدار ρ بدست می‌آوریم.

$$E\{x(t+\tau)\, x(t)\} = R_{xx}(t+\tau, t)$$

اگر تابع در مفهوم وسیع ایستان باشد آنگاه R_{xx} فقط تابع τ خواهد بود، یعنی داریم:

$$R_{xx}(t+\tau, t) = R_{xx}(\tau)$$

R_{xx} مقدار متوسط حاصل ضرب دو نمونه از سیگنال به فاصله τ ثانیه از هم است.

اگر فرآیند ایستان نباشد آنگاه $R_{xx}(t_1, t_2)$ تابع دو متغیر خواهد بود

در فواصل ۵ و ۱۰ ثانیه R_{xx} نمی‌توان هیچ پیش بینی

برخلاف تابع PDF تابع R_{xx} هرچه جمع‌تر باشد آنگاه رندم‌تر است.

رندم‌تر

رندم‌ترین فرآیند فرآیندی است که تابع خودهمبستگی آن یک ضربه باشد.

ماکزیمم مقدار $R_{xx}(\tau)$ برای فرآیندی ایستان در $\tau=0$ رخ می‌دهد.

خواص تابع خودهمبستگی فرآیند ایستان:

۱- $R_{xx}(\tau)$ تابع زوجی از τ است چرا ← های دو فرآیند را عوض کنیم اثبات می‌شود.

۲- اگر $x(t)$ متناوب باشد با دوره‌ی تناوب T_0، آنگاه $R_{xx}(\tau)$ هم با همان دوره‌ی تناوب متناوب خواهد بود.

$$R_{xx}(\tau)=E\{\overbrace{x(t+\tau)}^{=x(T_0+t+\tau)}x(t)\}=R_{xx}(\tau+T_0)\Rightarrow$$ R_{xx} متناوب با دوره‌ی T_0

۳- $|R_{xx}(\tau)|\leq R_{xx}(0)$ زیرا هر لحظه با خود حداکثر همبستگی را دارد.

$$\left(E\{pq\}\right)^2\leq E\{p^2\}E\{q^2\}$$ → چرا؟

$$\begin{matrix}p=x(t+\tau)\\ q=x(t)\end{matrix}\Rightarrow\left[E\{x(t+\tau)x(t)\}\right]^2\leq E\{x^2(t)\}E\{x^2(t+\tau)\}$$

$$\Rightarrow R_{xx}^2(\tau)\leq R_{xx}^2(0)\Rightarrow |R_{xx}(\tau)|\leq |R_{xx}(0)|$$

برای هر فرآیندی برای محاسبه توان داریم:

$$P=\langle E\{x^2(t)\}\rangle \xrightarrow{\text{فرآیند ایستان}} E\{x^2(t)\}=R_{xx}(0)>0$$

۴- $P=R_{xx}(0)$

۵- برای فرآیندی ایستان و غیر متناوب:

$$\lim_{\tau\to\infty}R_{xx}(\tau)=(dc)^2$$

$\Rightarrow dc=2$

$$E\{x(t+\tau)x(t)\}=R_{xx}(\tau)$$

اگر سیگنال متناوب نباشد آنگاه رفتارش با رفتار خیلی قبلش متفاوت است.

اما اگر متناوب باشد امکان دارد رفتار مشابه باشد.

www.iran-ieee.com

$$\lim_{\tau\to 0} Cov\{x(t)\,x(t+\tau)\}=0 \Rightarrow \lim_{\tau\to\infty} E\{x(t)x(t+\tau)\}=\underbrace{\lim_{\tau\to\infty} E\{x(t)\}}_{dc}\;\underbrace{E\{x(t+\tau)\}}_{dc}$$

چون تابع ایستان است.

$$\Rightarrow \lim_{\tau\to\infty} R_{xx}(\tau) = (dc)^2$$

۶- تابع خودهمبستگی و چگالی طیف توان فرآیند زوج فوریه هستند، یعنی: $R_{xx}(\tau)\rightarrow G(f)$

قضیه فوق را قضیه وینر-کینشتاین (Wiener-kinchin)

از راههایی که قبلاً گفتیم $G(f)$ محاسبه نمی‌شود بلکه با روش فوق آن را بدست می‌آورند.

قضیه فوق هم برای فرآیندهای ایستان و هم غیر ایستان برقرار است

حال این قضیه را برای فرآیندهای ایستان اثبات می‌کنیم:

$$G(f)=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f,s)|^2\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left\{|X_T(f,s)|^2\right\}$$

با فرض اینکه می‌توانیم جای دو عملگر را عوض کنیم.

در اینجا فرض بر اینست که فرآیند حقیقی نیز هست.

$X_T(f,s)\longrightarrow x_T(t,s)$

* تصله ای از تبدیل فوریه نیست بلکه تبدیل فوریه قطعه است.

$$X_T(f,s)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t,s)\,e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t,s)\,e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$X_T^*(f,s)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(\lambda,s)\,e^{j2\pi ft}\,d\lambda = \int_{-T/2}^{T/2} x(\lambda,s)\,e^{j2\pi ft}\,d\lambda$$

$$|X_T(f,s)|^2=\int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{\lambda=-T/2}^{T/2} x(t,s)\,x(\lambda,s)\,e^{-j2\pi f(t-\lambda)}\,dt\,d\lambda$$

$$\Rightarrow G(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{\lambda=-T/2}^{T/2} R_{xx}(t-\lambda)\,e^{-j2\pi f(t-\lambda)}\,dt\,d\lambda$$

$$\xrightarrow{t-\lambda=\tau} G(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{\tau=-T}^{T} R_{xx}(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,dt\,d(t-\tau)\right]$$

ثابت کنید: $\int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{\tau=-T}^{T} R_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, dt\, d(t-\tau) = T\int_{-T/2}^{T/2} R_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$

$$\Rightarrow G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \Rightarrow R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, d\tau$$

www.iran-ieee.com

اگر استاتیک نباشد. $R_{xx}(t+\tau, t) = f(t, \tau)$ $x(t)$

$$\overline{R_{xx}(\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{xx}(t+\tau, t)\, dt \longleftrightarrow G(f) \quad *$$

ثابت کنید. (*)

$G_x(f)$

$R_{xx}(\tau)$

روابط آماری ورودی و خروجی یک سیستم LTI :

$$R_{yx}(t+\tau, t) = E\{y(t+\tau)\, x(t)\} = ?$$

$$R_{yy}(t+\tau, t) = E\{y(t+\tau)\, y(t)\} = ?$$

$$E\{y(t)\} = ?$$

$$G_y(f) = ?$$

$$y(t) = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$* \; R_{yx}(t+\tau, t) = E\{y(t+\tau)\, x(t)\} = E\left\{x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t+\tau-\lambda)\, d\lambda\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E\{x(t+\tau-\lambda)\, x(t)\}}_{R_{xx}(\tau-\lambda)}\, h(\lambda)\, d\lambda = R_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

$$* \; R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

می‌دانیم: $R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$ چون زمان آنها هم باید عوض شود.

www.iran-ieee.com

$$* \quad E\{y(t+\tau)\,y(t)\} = E\left\{y(t+\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E\{y(t+\tau)\,x(t-\lambda)\}}_{R_{yx}(\tau+\lambda)}\,h(\lambda)\,d\lambda$$

$$\lambda \to -\lambda \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(\tau-\lambda)\,h(-\lambda)\,d\lambda = R_{yx}(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

$$\Rightarrow R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$* \quad E\{y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda\right\} = \bar{x}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\,d\lambda}_{H(0)} = Cte$$

$$E\{x(t-\lambda)\} = \bar{x}$$

$$\bar{y} = H(0)\,\bar{x}$$

پس اگر ورودی ایستان باشد خروجی هم ایستان است . (LTI)

$$\therefore \quad G_y(f) = |H(f)|^2\, G_x(f)$$

مثال)

$G_y(f) = ?$

$G_x(f)$ $\qquad$ $G_y(f) = ?$

$$\therefore \quad G_y(f) = G_x(f)\,|-j\,\mathrm{sign} f| = G_x(f)$$

www.iran-ieee.com

$$\therefore \quad R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = R_{xx}(\tau)$$

$$R_{\hat{x}x}(\tau) = R_{xx}(\tau) * \frac{1}{\pi t} = \widehat{R_{xx}(\tau)}$$

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = R_{\hat{x}x}(-x) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$$

$\therefore$ $R_{x\hat{x}}(\tau)$ تابع فردی است.

$$R_{\hat{x}x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E\{x(t)\,\hat{x}(t)\} = 0$$

$$R_{yx}(\tau) \longleftrightarrow G_{yx}(f)$$ هیچ تعبیر فیزیکی ندارد.

$$\Rightarrow G_{yx}(f) = G_x(f)\,H(f)$$

برای هر $$R_{yx}(0) = E\{x(t)\,y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{yx}(f)\,df$$

$$\therefore \quad R_{yx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,H(f)\,df$$ مهم

$$E\{\hat{x}(t)\} = E\left\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\right\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\lambda}\,x(t-\lambda)\,d\lambda\right\}$$

$$= \bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\lambda}\,d\lambda = 0$$ برای ایستان

مثال) برای سیگنالهای AM و DSB و SSB توان متوسط آماری را بدست آورید. (برحسب توان پیام)

www.iran-ieee.com

$$\bar{P} = \{ \langle x^2(t) \rangle \}$$

① اگر چگالی طیف توان $P = \int_{-\infty}^{+\infty}$

② تابع خود همبستگی را دادند مقدار آن در صفر را بدست می آوریم.

③ فرمول فوق

$m(t)$ P_m DC پیام را صفر فرض می کنیم.

$$DSB(t) = A_c\, m(t) \cos 2\pi f_c t$$

دیگر ایستان نیست.

$$\bar{P} = \langle E\{ A_c^2 m^2(t) \cos^2 2\pi f_c t \} \rangle = \langle A_c^2 \cos^2 2\pi f_c t \underbrace{E\{m^2(t)\}}_{P_m} \rangle$$

$$= P_m \langle A_c^2 \cos^2 w_c t \rangle \Rightarrow P_{DSB} = \frac{A_c^2}{2} P_m$$

مثال) θ متغیر تصادفی $\rightarrow p(\theta)$

$$y(t) = x(t) \cos(w_0 t + \theta)$$

نشان دهید توان $y(t)$ نصف توان $x(t)$ است.

$$AM(t) = \underbrace{A_c (1 + \mu m(t))}_{g(t)} \cos 2\pi f_c t$$

چون $m(t)$ ایستان است $g(t)$ و هم ایستان است.

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_g \Rightarrow P_g = \langle E\{ A_c^2 [1 + 2\mu m(t) + \mu^2 m^2(t)] \} \rangle$$

$$= \langle A_c^2 + A_c^2 \mu^2 P_m \rangle = A_c^2 (1 + \mu^2 P_m)$$

$$\Rightarrow P_{AM} = \frac{A_c^2 (1 + \mu^2 P_m)}{2}$$

Scholar.lib

www.iran-ieee.com

از روش دیگر خودم حل کنم.

$$P_{AM} = A_c^2 (1+\mu^2 P_m)/2 = \frac{A_c^2}{2} + \mu^2 P_m \frac{A_c^2}{2}$$ بازی!

$$= P_c + a\frac{A_c^2}{2} = P_c + aP_c \qquad 0 < a \ll 1$$

بیش از ۵۰٪ انرژی صرف ارسال حامل می‌شود.

SSB: ① راه اول: واضح است که توان آن نصف توان DSB است.

$$P_{SSB} = \frac{A_c^2}{4} P_m$$

② معمولی:

$$SSB(t) = \frac{A_c}{2}\left[m(t)\cos 2\pi f_c t \mp \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t\right]$$

$$P_{SSB} = \left\langle E\left\{m^2\cos^2 2\pi f_c t + \hat{m}^2(t)\sin^2 2\pi f_c t \mp 2\sin 2\pi f_c t\, m(t)\hat{m}(t)\right\}\right\rangle$$

$$\times \frac{A_c^2}{4}$$

$$\Rightarrow P_{SSB} = \frac{A_c^2}{4}\left\langle \cos^2 2\pi f_c t\, P_m + \sin^2 2\pi f_c t\, P_m\right\rangle$$

$$= \frac{A_c^2}{4} P_m$$

در FM خانه: $f_c = 100\,MH$ $\quad f_\Delta = 75\,kH$

که $f_c \gg f_\Delta$

$$FM, PM = A_c\cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

$$P_{FM} = P_{PM} = \frac{A_c^2}{2}$$ ← پس با تقریب خیلی خوب

www.iran-ieee.com

Subject: جلسه هجدهم

Year. Month. ۹ Date. ۱۷ ( )

نویز یا اغتشاش:

هر سیگنال الکتریکی ناخواسته که همراه سیگنال ما در سیستم وجود دارد را نویز می گویند.

منابع:

۱- طبیعی
- از درون: نمی توان از بین برد و فقط باید رفتار آن را شناخت. نویز حرارتی
- از بیرون: تخلیه الکتریکی: قابل کنترل در دست ما نیست.

ساخته دست بشر
- از درون: سلف های ایزوله نشده
- از بیرون: پست ترانس در نزدیکی آنتن

نویز حرارتی: هر فلزی در هر درجه حرارتی الکترون آزاد از خود ساطع می کند و این منبع نویز طبیعی از درون است

اگر مقاومت R در درجه حرارت T قرار بگیرد الکترون های آزاد آن شروع به حرکت می کنند و در نتیجه ولتاژی در دو سر آن وجود دارد. این ولتاژ نتیجه ی حرکت بی نهایت الکترون است و در نتیجه انتظار داریم این ولتاژ فرآیندی تصادفی گوسی باشد (بدلیل تئوری حد مرکزی)

چون احتمال راست رفتن و یا چپ رفتن فرق نمی کند پس امید فرآیند نیز صفر است و از آنجا یکه شرایط محیط ثابت است، پس فرآیند ایستان نیز است.

$E\{v\} = \bar{v} = 0$

$$P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(v-\bar{v})^2}{2\sigma^2}}$$

به نویز فوق نویز حرارتی می گویند.

حال می خواهیم توان نویز را محاسبه کنیم

ابراتور دوم را اثر ندادیم زیرا ایستان است.

$$P = E\{v^2(t)\} = \overline{v^2} \qquad \sigma^2 = \overline{v^2} - (\bar{v})^2 = \overline{v^2}$$

توان مصرفی در مقاومت

امی!

$$G(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{\frac{h|f|}{KT}} - 1} \qquad \left[\frac{W}{\Omega \cdot Hz}\right]$$

جدایی

مقاومت یک اهمی

$k =$ ثابت بولتزمن $= 1.37 \times 10^{-23}$ $\frac{\text{ژول}}{\text{درجه کلوین}}$ $\qquad h =$ ثابت پلانک $= 6.62 \times 10^{-34}$ $\frac{\text{ژول}}{\text{هرتز}}$

$$P = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,df = \frac{2}{3}\,\frac{(\pi k T)^2}{h}\,R$$

نویز عالب در سیستم‌های مخابراتی از نوع فوق است.

$$\left.\begin{array}{l} f < 10^{12} \longrightarrow \dfrac{hf}{kT} < 0.1 \\ e^{x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{کاما کاری می‌کنیم}]{\text{در بازه‌ای}} G(f) = 2RkT$$

هرگز از تابع فوق در بازه $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال گیری نمی‌کنیم زیرا بی‌نهایت می‌شود و رابطه فوق تنها برای بازه‌ای خاص برقرار است.

چون همه‌ی نرکانس‌ها در یک اندازه حضور دارند، به فرآیند، فرآیندی سفید می‌گویند.

به نویز از جنس نوسان نویز سفید گوسی می‌گویند، و چون با سیگنال جمع می‌شود به آن نویز سفید گوسی جمع شونده می‌گویند.

حال تابع خودهمبستگی نویز سفید را می‌کشیم:

رندم‌ترین فرآیند قابل تصور است زیرا

نه به جای τ در R_{ww} صفر می‌گذاریم و نه از $G(f)$ در کل اعداد انتگرال می‌گیریم (به دلیل تقریب استفاده شده)

بنابر تعریف داریم:

$$G(f) = 2RKT = \frac{N_0}{2}$$

www.iran-ieee.com

$G(f)=2RkT$

بنابراین از این به بعد هر مقاومت را بصورت مقابل مدل می‌کنیم.

با مدل کردن به صورت مقابل، متاسفی داریم که ایده آل است.

$G(f)=\frac{2kT}{R}$

مثال: شکل زیر در T درجه کلوین قرار دارد. خازن عاری از بار است. مطلوبست محاسبه

۱) چگالی طیف توان خروجی $y(t)$

۲) تابع خودهمبستگی خروجی $y(t)$

۳) PDF مربوط به y

۴) احتمال آنکه y در لحظه‌ی t از 10^{-4} ولت بیشتر باشد.

$$G_y(t)=|H(f)|^2 G_x(t)$$

$$H(f)=\frac{1}{1+j2\pi RCf} \Rightarrow |H(f)|^2=\frac{1}{1+4\pi^2R^2C^2f^2}$$

$$\Rightarrow G_y(t)=\frac{2RkT}{1+4\pi^2R^2C^2f^2}$$

ورودی نویز سفید بود اما خروجی نویزی رنگی است.

$$R_{yy}(\tau) \longleftrightarrow G_y(f)$$

$$\Rightarrow R_{yy}(\tau)=\frac{kT}{C}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

$$P_y=R_{yy}(0)=\frac{kT}{C}$$

اگر در خروجی مقاومت یک اهمی قرار دهیم با مقدار فوق انرژی در لحظه مصرف می‌شود.

خازن کمتر نویز بیشتری ایجاد می‌کند.

مقاومت دو کار می‌کند هرچه بیشتر باشد نویز بیشتر شده و از طرف دیگر فیلتر بارکیتر می‌شود پس این دو همدیگر را خنثی می‌کنند.

PDF گوسی است زیرا اولاً x گوسی بود و ثانیاً سیستم LTI بوده است.

$E\{y\}=0$ است زیرا $E\{x\}=0$ است.

$$P(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

هرچه C بیشتر باشد توان نویز کمتر است

$$\sigma_y^2=E\{y^2\}-(\cancel{E\{y\}})^2=P_y=\frac{kT}{C}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{kT}{C}}$$

$$P\{y<10^{-4}\}=\int_{-\infty}^{10^{-4}}p(y)dy=f(T,C)$$

در سیستم های مخابراتی می خواهیم حداکثر توان به بار برسد

فرض کنید یک منبع نویز داریم:

حال می خواهیم اگر مدار را به یک مقاومت تطبیق داده شده وصل کنیم چه مقدار توان به آن می رسد.

$$P_a=E\{\langle v(t)i(t)\rangle\}$$

مقدار متقابل حداکثر توانی است که می تواند به یک بار داده شود.

$$=E\{\langle\frac{v_s^2(t)}{4R}\rangle\}=\frac{1}{4R}E\{v_s^2(t)\}\Rightarrow P_a=\frac{1}{4R}\int 2RkTdf=\int\frac{kT}{2}df$$

$$\Rightarrow \underbrace{G_a(f)=\frac{kT}{2}}_{\text{چگالی توان در دسترس: تحویل داده شده به مقاومت تطبیق داده شده}}$$

چگالی متقابل مقداری است که در بار تطبیق داده شده در حال مصرف است.

بنابراین این چگالی به مقاومت بستگی ندارد.

یکی از منابع اصلی نویز تقویت کننده های طبقه ی اول هستند که دارای گین بسیار بالا هستند.

www.iran-ieee.com

هر تقویت کننده یک عرض باند دارد.
در مخابرات منظور از ایده آل بودن تقویت کننده اینست که
تقویت کننده نویز ایجاد نکند.

فرض کنید یک منبع نویز داریم.
حال می خواهیم چگالی سیگنال و نویز در خروجی را بدست آوریم.

ما یک نسبت $(\frac{S}{N})_i$ و یک نسبت $(\frac{S}{N})_o$ داریم و با توجه به اینکه خود تقویت کننده نیز نویز ایجاد می کند،
پس $(\frac{S}{N})_o < (\frac{S}{N})_i$ بنابه تعریف داریم:

$$\frac{(\frac{S}{N})_i}{(\frac{S}{N})_o} = F \Rightarrow (\frac{S}{N})_o = \frac{1}{F}(\frac{S}{N})_i$$

بنابراین می خواهیم F تا حد مقدور کوچکتر باشد. به تقویت کننده های دارای F کوچک LNA می گویند
که در طبقه اول گیرنده ها استفاده می شوند.

www.iran-ieee.com

Noise Equivalent Bandwidth — عرض باند معادل نویز:

$$\frac{N_0}{2} \longrightarrow \boxed{H(jf)} \xrightarrow{N_1}$$

N_1: توان نویزی که در خروجی داریم

می‌خواهیم عرض باند فیلتر ایده‌آل را با گونه‌ای بدست آوریم که توان نویز در خروجی در دو حالت یکسان باشد

پس هر شبکه یک عرض باند معادل نویزی دارد.

$$N_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(jf)|^2 df$$

$$\frac{N_0}{2} \longrightarrow \boxed{\text{ایده‌آل}} \longrightarrow N_2$$

$$N_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(jf)|^2_{max} df = N_0 |H(jf)|^2_{max} B_N$$

$$N_1 = N_2 \Rightarrow N_0 \int_{0}^{+\infty} |H(jf)|^2 df = N_0 |H(jf)|^2_{max} B_N \Rightarrow B_N = \frac{\int_0^{+\infty} |H(jf)|^2 df}{|H(jf)|^2_{max}}$$

بنابراین اگر نویز را به فیلتری ایده‌آل وارد کنیم که عرض باند B_N را دارد توان نویز در خروجی در هر دو حالت برابر است.

اگر فیلتر از ابتدا ایده‌آل می‌بود عرض باند نویزی خود عرض باند فیلتر می‌شد.

مثال:

برای فیلتر مقابل عرض باند معادل نویزی و عرض باند ۳dB را با هم مقایسه کنید

علت استفاده از $H(jf)$ تأکید بر تقارن هرمیتی است.

$$H(jf) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf} \Rightarrow |H(jf)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}$$

www.iran-ieee.com

$$B_N = \frac{\int_0^\infty \frac{df}{1+4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}{1} = \frac{1}{4RC}$$

پهنای باند ۳dB $= \frac{1}{2\pi RC}$

پهنای باند معادل نویزی $= \frac{1}{4RC}$

فرض کنید یک تقویت کننده داریم

عرض باند معادل نویزی B_N است و $|H(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2_{max} = G$

با فرض منطبق بودن طبقه‌ها نویز باجگالی $\frac{kT}{2}$ به تقویت کننده می‌رسد

$$\frac{N_0}{2} = \frac{kT}{2} \Rightarrow N_0 = kT \Rightarrow N_1 = kTGB_N \Rightarrow N_i = kTB_N$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{S_0}{N_0} = \frac{GS_i}{kTGB_N + N_2} = \frac{GS_i}{G(kTB_N + \frac{N_2}{G})} = \frac{\cancel{G}S_i}{kB_N\cancel{G}(T + \frac{N_2}{kB_N G})}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{S_i}{\underbrace{kB_N T}_{N_i}(1 + \frac{N_2}{kB_N GT})} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_0 = \left(\frac{S}{N}\right)_i \times \frac{1}{1 + \frac{N_2}{kB_N GT}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_i}{\left(\frac{S}{N}\right)_0} = 1 + \frac{N_2}{kB_N GT}$$

$$N_0 = kGB_N \underbrace{\left(T + \frac{N_2}{kGB_N}\right)}_{T_N}$$

T_N : درجه حرارت معادل نویز

می‌توان فرض کرد به دلیل نویز تقویت کننده دمای محیط از T به T_N افزایش یافته است.

www.iran-ieee.com

$$T_N = T + \frac{N_r}{k G B_N}$$

بررسی خصوصیات آماری مؤلفه‌های یک فرآیند ایستان گوسی و میانگذر:

$n(t)$ $\begin{cases} \text{میانگذر} \\ \text{ایستان} \\ \text{گوسی} \\ E\{n(t)\}=0 \\ G_n(f) \text{ را داریم} \end{cases}$

آیا $n_q(t)$, $n_i(t)$ ایستان هستند؟

$E\{n_i(t)\} = ?$ $\qquad$ $E\{n_q(t)\} = ?$

آیا $n_q(t)$, $n_i(t)$ گوسی هستند؟

آیا $n_q(t)$, $n_i(t)$ نامبسته هستند؟

چگالی طیف توان $n_q(t)$, $n_i(t)$ چگونه هستند؟

فرکانس f_c را در بازه‌ی فرکانسی $n(t)$ انتخاب می‌کنیم.

$$n_i(t) = n(t)\cos 2\pi f_c t + \hat{n}(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$n_q(t) = \hat{n}(t)\cos 2\pi f_c t - n(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$E\{n_i(t)\} = \cos 2\pi f_c t\, E\{n(t)\} + \sin 2\pi f_c t\, E\{\hat{n}(t)\} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} E\{n_q(t)\} = 0$$

پس اگر سیگنالی ایستان امید صفری داشته باشد مؤلفه‌های آن هم امید صفری دارند

n_i , n_q گوسی نیز هستند زیرا ترکیب خطی دو فرآیند گوسی است. $n(t)$ بنابه فرض گوسی است , $\hat{n}(t)$ نیز

نتیجه عبور $n(t)$ از سیستم خطی است پس گوسی می‌باشد.

حال می‌خواهیم ایستان بودن را بررسی کنیم:

$$E\{n_i(t)n_i(t-\tau)\} = E\{[n(t)\cos 2\pi f_c t + \hat{n}(t)\sin 2\pi f_c t][n(t-\tau)\cos 2\pi f_c(t-\tau) + \hat{n}(t-\tau)\sin 2\pi f_c(t-\tau)]\} = \cos 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c(t-\tau)\underbrace{R_{nn}(\tau)}_{\text{ایستانی فرآیند } n}$$

$$+ \cos 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c(t-\tau)\, \overbrace{R_{n\hat{n}}(\tau)}^{E\{n(t)\hat{n}(t-\tau)\}} + \sin 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c(t-\tau) R_{\hat{n}n}(\tau)$$

$$+ \sin 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c(t-\tau) R_{\hat{n}\hat{n}}(\tau)$$

قبلاً داشتیم $\Rightarrow \begin{cases} R_{nn}(\tau) = R_{\hat{n}\hat{n}}(\tau) \\ R_{n\hat{n}}(\tau) = -R_{\hat{n}n}(\tau) = \hat{R}_{nn}(\tau) \end{cases}$

با تبدیل حاصلضرب به حاصل جمع و استفاده از روابط مقابل نشان داده می‌شود که:

www.iran-ieee.com

$$E\{n_i(t)\, n_i(t-\tau)\} = R_{nn}(\tau)\cos 2\pi f_c \tau + \hat{R}_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau$$

پس سمت چپ تابع t نبوده و فرآیند n_i فرآیندی ایستان است.

$$\Rightarrow R_{n_i n_i}(\tau) = R_{nn}(\tau)\cos 2\pi f_c \tau + \hat{R}_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau$$

نشان دهید: $R_{n_q n_q}(\tau) = R_{n_i n_i}(\tau)$

$$P_{n_i} = R_n(0) = P_n = P_{n_q}$$

پس n_i و n_q باهم توان یکسانی دارند.

$$G_{n_i}(f) = \tfrac{1}{2}G(f+f_c) + \tfrac{1}{2}G(f-f_c) + F\{\hat{R}_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau\}$$

$$\hat{R}_{nn}(\tau) \longleftrightarrow G(f)\{-j\,\mathrm{Sgn}(f)\} \Rightarrow \hat{R}_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}G(f+f_c)\mathrm{Sgn}(f+f_c) - \tfrac{1}{2}G(f-f_c)\mathrm{Sgn}(f-f_c)$$

$$G_{n_i}(f) = \left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{Sgn}(f+f_c)\right]G_n(f+f_c) + \left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{Sgn}(f-f_c)\right]G_n(f-f_c)$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{Sgn}(x) &= u(x) \\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{Sgn}(x) &= u(-x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$u(-f+f_c) = u(-f)\Big|_{f \to f-f_c}$$

$$\Rightarrow G_{n_i}(f) = G(f+f_c)\,u(f+f_c) + G(f-f_c)\,u(-(f-f_c))$$

$$G_{n_q}(f) = G(f+f_c)\,u(f+f_c) + G(f-f_c)\,u(-(f-f_c))$$

نشان دهید:

www.iran-ieee.com

حال می‌خواهیم رابطه بین n_i , n_q را بدست آوریم و ببینیم آیا با هم همبستگی دارند یا خیر.

$$E\{n_i(t)\,n_q(t-\tau)\} \xrightarrow[\text{شود}]{\text{اثبات}} f(\tau) = R_{n_i n_q}(\tau)$$

$$R_{n_i n_q}(\tau) \longleftrightarrow G_{n_i n_q}(f)$$ تابع چگالی احتمال توأم

$$G_{n_i n_q}(f) = j\left[G_n(f+f_c)\,u(f+f_c) - G_n(f-f_c)\,u(f-f_c)\right]$$

در این حالت الزاماً مجموع صفر نیست پس امید حاصلضرب الزاماً صفر نیست

وقتی امید فوق صفر است که نویز اصلی در اطراف یک نقطه متقارن باشند و ما همان در شکل مقابل n_i , n_q ناهمبسته هستند ولی اگر یکی را مقداری در حوزه‌ی زمان شیفت دهیم دیگر اصلاً ناهمبسته نمی‌شوند.

* ثابت کنید به ازای $\tau=0$ ، حتماً $R_{n_i n_q}(\tau)=0$ می‌باشد.

بنابراین n_i , n_q ، حتماً ناهمبسته هستند چون $\tau=0$ ولی در مورد $n_i(t)$, $n_q(t-\tau)$ ، $R_{n_i n_q}(\tau)$ فقط وقتی صفر است که تقارن گفته شده را داشته باشیم.

بنابراین n_i , n_q همراه ناهمبسته هستند ولی n_i , n_q که یکی شیفت داده شود، نمی‌توانند ناهمبسته باشند مگر اینکه حالت تقارن ایجاد شود.

$$Z(t) = x(t) + y(t)$$

$$R_{zz}(t_1,t_2) = E\{(x(t_1)+y(t_1))(x(t_2)+y(t_2))\} = R_{xx}(t_1,t_2)+R_{yy}(t_1,t_2)+R_{xy}(t_1,t_2)+R_{yx}(t_1,t_2)$$

بنابراین دیدیم که در حالت کلی اگر فرآیندی مجموع دو فرآیند باشد آنگاه تابع خودهمبستگی آن مجموع تابع‌های خودهمبستگی دو فرآیند نیست مگر اینکه همبستگی متقابل دو فرآیند صفر باشد.

وقتی مجموع دو فرآیند ایستان، ایستان است که تابع همبستگی متقابل دو فرآیند نیز ایستان باشد. این حالتی اتفاق می‌افتد که x و y ورودی و خروجی یک سیستم LTI باشند.

از ایستان بودن x و y نمی‌توان به ایستان بودن توأم دو فرآیند رسید.

اگر به ازای هر t_1, t_2، $E\{x(t_1)y(t_2)\}=0$ باشد آنگاه می‌توانیم بگوییم:

* همبستگی متقابل مجموع، مجموع خودهمبستگی‌هاست.
* ایستان بودن دو فرآیند باعث ایستان بودن مجموع می‌شود.

عملکرد مدولاسیون های مختلف در حضور AWGN:

نویز سفید رندمترین نویز موجود است. اکثر نویزهای سیستم های مخابراتی از این نوع نویز است.

برای بررسی از مدل خلاصه شده زیر استفاده می‌کنیم. خیلی عناصر هستند که تأثیر زیادی دارند اما چون این تأثیر یکسان است روی نویز و پیام، آنها را حذف می‌کنیم.

بلوک اول هم فیلتر و هم تقویت کننده است اما چون هم سیگنال و هم نویز را تقویت می‌کند پس سیگنال به نویز را عوض نمی‌کند و آن را واحد فرض می‌کنیم.

www.iran-icee.com

DSB:

$A_c m(t)\cos 2\pi f_c t \longrightarrow A_r m(t)\cos 2\pi f_c t \Rightarrow \begin{cases} S_T = \frac{A_c^2}{2}P_m \\ S_R = \frac{A_r^2}{2}P_m \end{cases} \Rightarrow L = \frac{A_c^2}{A_r^2} \Rightarrow A_r^2 = \frac{A_c^2}{L}$

$N_R = 2N_0 W$

چگالی طیف توان نویز در ورودی گیرنده :

$v(t) = m_c(t) + n(t) = A_R m(t)\cos 2\pi f_c t + n(t)$

در $v(t)$ می‌توان فرض کرد $m_c(t)$, $n(t)$ مستقل از هم هستند زیرا هر کدام از یک منبع جداگانه بدست می‌آیند.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{A_R^2 P_m}{4N_0 W}$$

در مورد دمودلاتور DSB داریم.

$\cos 2\pi f_c t \leftarrow$ سنکرون شده

$n(t)$ را حول فرکانس میانی f_c با بردارهای sin و cos تجزیه می‌کنیم.

$n(t) = n_i \cos 2\pi f_c t - n_q(t)\sin 2\pi f_c t$

$v(t) = [A_R m(t) + n_i(t)]\cos 2\pi f_c t - n_q(t)\sin 2\pi f_c t$

$y(t) = [A_R m(t) + n_i(t)]\underbrace{\cos^2 2\pi f_c t}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\pi f_c t} - n_q(t)\underbrace{\sin 2\pi f_c t\cos 2\pi f_c t}_{\frac{1}{2}\sin 4\pi f_c t}$

جملاتی از $y(t)$ که در $\sin 4\pi f_c t$ و $\cos 4\pi f_c t$ ضرب می‌شوند دیگر از LPF عبور نمی‌کنند.

$y_D(t) = \frac{1}{2}A_R m(t) + \frac{1}{2}n_i(t)$

می‌خواهیم توان سیگنال $y_D(t)$ را بدست آوریم.

بنابراین توان $y_D(t)$ چون از دو فرآیند مستقل ساخته شده پس توان $y_D(t)$ مجموع توان‌هاست.

$$\left.\begin{aligned} S_D &= \frac{A_R^2}{4}P_m \\ N_D &= \frac{1}{4}P_{n_i} = \frac{1}{4}P_n = \frac{2N_0 W}{4} = \frac{N_0 W}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = \frac{\frac{A_R^2}{4}P_m}{\frac{N_0 W}{2}}$$

www.iran-ieee.com

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = \frac{A_R^2 P_m}{2N_0 W}$$

$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = 2\left(\frac{S}{N}\right)_R$ زیرا یکی از مؤلفه های نویز در این سیستم حذف شد.

از گوسی بودن نویز در اینجا استفاده‌ای نکردیم.

PAPCO
www.iran-ieee.com

$$E\{n_i(t)\, n_q(t)\} = R_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau - \hat{R}_{nn}(\tau)\cos 2\pi f_c t = R_{n_i n_q}(\tau)$$

$$E\{n_i(t)\, n_q(t)\} = 0$$

$$\hat{R}_n(\tau)\big|_{\tau=0} = 0 \qquad \hat{R}_{nn}(\tau) = R_{nn}(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} \longleftrightarrow G_n(f)\,(-j\,\mathrm{sgn}(f))$$

$$\hat{R}_{nn}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{G_n(f)\,(-j\,\mathrm{sgn}(f))}_{\text{فرد}} = 0$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = \frac{A_R^2 P_m}{2N_0 W} = \frac{S_R}{N_0 W} \triangleq \gamma$$

سیگنال به نویز در مخابرات باند پایه:

$$S_T = P_m$$

$$S_R = k^2 P_m$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,BB} = \frac{k^2 P_m}{N_0 W} = \frac{S_R}{N_0 W} = \gamma$$

γ یعنی سیگنال به نویز در مقصد اگر مدولاسیون انجام ندهیم.

بررسی عملکرد مدولاسیون SSB در هنگام حضور AWGN:

$$v(t) = \frac{A_R}{2}\left[m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t\right] + n_i(t)\cos 2\pi f_c t - n_q(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$y(t) = \left[A_R m(t) + n_i(t)\right]\cos^2 2\pi f_c t - \left[A_R \hat{m}(t) + n_q(t)\right]\sin 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c t$$

$$\Rightarrow y_D(t) = \tfrac{1}{4} A_R m(t) + \tfrac{1}{2} n_i(t)$$

* به جای f_c، از f_0 برای تجزیه استفاده کنیم.

PAPCO
www.iranieee.com

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,SSB} = \frac{\frac{1}{16}A_R^2 P_m}{\frac{1}{4}N_0 W} = \gamma$$

$$S_R = \frac{A_R^2 P_m}{4}$$

در اینجا در سر دمودلاتور سیگنال با نویز همان γ است و علت اینست که سیگنال کسینوسی ضرب شوند. هم قسمتی از سیگنال و هم قسمتی از نویز را حذف می‌کند

: AM مدولاسیون

$$y_1(t) = A_R[1+\mu m(t)]\cos^2 2\pi f_c t + n_i(t)\cos^2 2\pi f_c t - n_q(t)\sin 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c t$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}A_R[1+\mu m(t)] + \frac{1}{2}n_i(t)$$

$$y_D(t) = \frac{1}{2}A_R\mu m(t) + \frac{1}{2}n_i(t)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\text{سنکرون AM}} = \frac{A_R^2\mu^2 P_m}{2N_0 W}$$

$$S_R = \frac{A_R^2}{2}(1+\mu^2 P_m) \Rightarrow A_R^2 = \frac{2S_R}{1+\mu^2 P_m}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,\text{سنکرون AM}} = \frac{\overbrace{\mu^2 P_m}^{a}}{1+\mu^2 P_m}\gamma$$

$$0 \le a \le 1 \Rightarrow \frac{a}{1+a} \le \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\text{سنکرون AM}} \le \gamma/2$$

DSB	$\frac{S_R}{N_0 W}$	نویز یکسان، سیگنال یکسان، توان ارسالی یکسان، تضعیف یکسان
SSB	$\frac{S_R}{N_0 W}$	← سه مورد اول سیگنال با نویز فرق می‌کند
BB	$\frac{S_R}{N_0 W}$	بنابراین هیچ انگیزه‌ای در زمینه‌ی مدولاسیون بر روی سیگنال با نویز نیست.
سنکرون, AM	$\le \frac{1}{2}\frac{S_R}{N_0 W}$	سه مدولاسیون اول 3dB ارجحیت از لحاظ سیگنال با نویز نسبت به سوسو دارند.

www.iran-ieee.com

می‌خواهیم سیگنال به نویزهایی را که در مقصد برحسب γ نوشتیم برحسب Peak power باهم مقایسه می‌کنیم.

DSB: $DSB(t) = A_c\, m(t) \cos 2\pi f_c t \Rightarrow P(t) = A_c^2\, m^2(t) \cos^2 2\pi f_c t \Rightarrow P_p = A_c^2$

$$\frac{A_c^2}{A_R^2} = L \Rightarrow A_R^2 = \frac{A_c^2}{L} = \frac{P_p}{L}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = \frac{A_c^2 P_m}{2 L N_0 W} = \frac{P_p P_m}{2 L N_0 W}$$

AM: $AM(t) = A_c(1+\mu\, m(t)) \cos 2\pi f_c t \Rightarrow P(t) = A_c^2(1+\mu m(t))^2 \cos^2 2\pi f_c t \Rightarrow P_p = 4 A_c^2$

$$\Rightarrow A_c^2 = \frac{P_p}{4}$$

$$\Rightarrow A_R^2 = \frac{P_p}{4L}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\ \text{سنکرون}\ AM} = \frac{\mu^2 P_p P_m}{8 L N_0 W}$$

بازای P_pهای یکسان (ناتوان‌های متوسط ارسالی یکسان یا پول انرژی یکسان)، کانال یکسان، نویز یکسان سیگنال یکسان DSB با مقدار 9dB مزیت نسبت به AM سنکرون دارد.

SSB: $\frac{A_c}{2}\left[m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t\right]$

SSB، 3dB ارجحیت سیگنال به نویز نسبت به DSB دارد.

SSB، 9dB ارجحیت سیگنال به نویز نسبت به AM سنکرون دارد.

تاکنون نویز جمع شونده داشتیم. حال می‌خواهیم مدولاسیون AM پوش را بررسی کنیم و خواهیم دید اگر سیگنال نسبت به نویز کم باشد باعث می‌شود نویز ضرب شونده داشته باشیم که باعث می‌شود طبیعت سیگنال عوض شود.

www.iran-ieee.com

$$v(t) = A_R[1+\mu m(t)]\cos 2\pi f_c t + R_n(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_n(t)) = R_v(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi_v(t)]$$

آشکارساز پوش وسیله‌ای است که اگر $R(t)\cos[2\pi f_c t+\varphi(t)]$ به آن برسد، $R_v(t)$ را به ما بدهد.

برای رسیدن به شکل فوق نویز را به صورت قطبی تجزیه می‌کنیم.

$$R_v(t) = \sqrt{[A_R(1+\mu m(t)) + n_i(t)]^2 + n_q^2(t)}$$

1) $\underbrace{\left(\frac{S}{N}\right)_R}_{\propto R_n} \gg 1 \qquad P\{\underbrace{A_R}_{\propto A_R} \gg R_n\} \approx 1$

$$R_v(t) \cong A_R[1+\mu m(t)] + n_i(t)$$

$$\Rightarrow y_D(t) = \mu A_R m(t) + n_i(t) \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{پوش AM}, \left(\frac{S}{N}\right)\gg 1} = \frac{\mu^2 A_R^2 P_m}{2N_0 W}$$

برای سادگی این بار نویز را که دامنه بیشتری دارد مبدأ فاز در نظر می‌گیریم.

$$R_v(t) = \underbrace{R_n(t)}_{\text{نویز}} + \underbrace{A_R[1+\mu m(t)]\cos\varphi_n(t)}_{\text{نویز و سیگنال در هم ضرب شده‌اند}}$$

در مدولاسیون‌های قبلی هرچه سیگنال با نویز را کم می‌کردیم آنگاه باز هم نویز جمع کننده خواهد بود.

www.iran-ieee.com

$P\{R_n > A_R\} \leq 0.01$

نیاز به داشتن PDF ، R_n داریم :

$R_n^2(t) = n_i^2(t) + n_q^2(t) \longrightarrow$ R_n رالی است $\Rightarrow P(R_n) = \frac{R_n}{2N_0W} e^{-\frac{R_n^2}{4N_0W}}$

n_q, n_i { مستقل ، امید صفر ، σ برابر ، گوسی

$P\{R_n > A_R\} \leq 0.01 \Rightarrow \int_{A_R}^{\infty} P(R_n)\, dR_n \leq 0.01 \Rightarrow e^{-\frac{A_R^2}{2NR}} \leq 0.01$

$\Rightarrow \frac{A_R^2}{2NR} \geq 10 \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_R \geq 10 \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{th} = 10$

www.iran-ieee.com

$R_v(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi_v(t)]$

$$v(t) = A_R \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)] + R_n(t)\cos\overbrace{[2\pi f_c t + \varphi_n(t)]}^{2\pi f_c t + \varphi(t) + \overbrace{\varphi_n(t) - \varphi(t)}} = R_v(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi_v(t)]$$

در اینجا زاویه نامانگر نویز است.

$$\alpha(t) = \arctan \frac{R_n(t)\sin[\varphi_n(t) - \varphi(t)]}{A_R + R_n(t)\cos[\varphi_n(t) - \varphi(t)]}$$

در ذات آشکارسازی FM یک آشکارسازی پولس است و همانطور که دیدیم هر آشکارساز پولسی یک مدار آستانه برای سیگنال به نویز دارد و بنابراین ما در آشکارسازی FM هم یک مدار آستانه داریم و برای رعایت آن باید شرط $A_R \gg R_n$ را داشته باشیم.

$$\Rightarrow \alpha(t) = \arctan \frac{R_n(t)\sin[\varphi_n(t) - \varphi(t)]}{A_R} \simeq \frac{R_n(t)\sin[\varphi_n(t) - \varphi(t)]}{A_R}$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \frac{1}{A_R} R_n(t)\sin[\varphi_n(t) - \varphi(t)]$$

حال می‌خواهیم جگرانی طیف توان $\alpha(t)$ را حساب کنیم

$\varphi(t)$ از باند پایین است و $\varphi_n(t)$ فرکانس بالاست پس تغییرات $\varphi(t)$ نسبت به $\varphi_n(t)$ است پس $\varphi(t)$ را در مقابل $\varphi_n(t)$ عددی ثابت در نظر می‌گیریم. پس:

$$\varphi(t) \simeq \varphi$$

PAPCO
www.iran-ieee.com

$$\alpha(t) = \frac{1}{A_R}\left[R_n(t)\sin\varphi_n(t)\cos\varphi - R_n(t)\cos\varphi_n(t)\sin\varphi(t)\right]$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \frac{1}{A_R}\left[n_q(t)\cos\varphi - n_i(t)\sin\varphi\right]$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \frac{\cos\varphi}{A_R}\, n_q(t) - \frac{\sin\varphi}{A_R}\, n_i(t)$$

اثبات کردیم که $n_i(t)$, $n_q(t)$ مستقل هستند و در نتیجه $G_\alpha(f)$ برابر مجموع چگالی های طیف توان است.

$$G_\alpha(f) = \frac{\cos^2\varphi}{A_R^2} G_q(f) + \frac{\sin^2\varphi}{A_R^2} G_q(f) \rightarrow G_\alpha(f) = \frac{1}{A_R^2} G_q(f)$$

فرض ها اولاً بالاتر از آستانه کار می کنیم $\left(\left(\frac{S}{N}\right)_R \geq 10\right)$

ثانیاً می توان از $\varphi(t)$ را در مقابل $\varphi_n(t)$ ثابت فرض کرد.

حال می خواهیم وارد نوع مدولاسیون شویم.

در قسمت های قبل توان نویز و توان سیگنال بستگی نداشت اما در اینجا این ارتباط وجود دارد.

$$S_R = \frac{A_R^2}{2} \Rightarrow A_R^2 = 2S_R$$

$$\Rightarrow G_\alpha(f) = \frac{1}{2S_R} G_q(f)$$

PM:

$$\varphi(t) = \varphi_\Delta m(t)$$

$$y(t) = \varphi_v(t)$$

$$y(t) = \varphi_\Delta m(t) + \alpha(t)$$

چون سیگنال و نویز ناهمبسته هستند، پس می توان y_D را از مجموع دو چگالی توان ساخت.

نویز بعد از عبور از LPF

$$y_D(t) = \varphi_\Delta m(t) + \beta(t)$$

$$N_D = \frac{N_0 W}{S_R} = \frac{1}{\gamma}$$

$$S_D = \varphi_\Delta^2 P_m$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,PM} = \varphi_\Delta^2 P_m \gamma$$

بنابراین کمترین سیگنال به نویز در این حالت φ_Δ^2 است

$$P_m = 1 \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,PM} = \varphi_\Delta^2 \gamma \leftarrow$$

توان سیگنال علاوه بر تقویت خود آن، نویز را نیز تضعیف می کند

www.iran-ieee.com

FM: $\varphi(t) = 2\pi f_\Delta \int^t m(\lambda)\, d\lambda$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\varphi_v(t)\right)$$

برای اینکه ضریب 2π حذف بخورد

$$\varphi_v(t) = \varphi(t) + \alpha(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = f_\Delta\, m(t) + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\right)}_{\frac{1}{4\pi^2}\left(4\pi^2 f^2\right) G_\alpha(f) = \underbrace{\frac{f^2}{2S_R} G_{nq}(f)}_{\text{(چگالی طیف توان نویز در خروجی دمودلاتور FM)}}}$$

اگر اندکی بازه‌ی فیلتر LPF زیاد شود مقدار نویز بیشتری در این حالت عبور می‌کند حال اینکه در حالت قبل اینطور نبود.

$$N_D = \int_{-W}^{+W} \frac{N_0}{2S_R} f^2 df = \frac{N_0}{S_R}\frac{W^3}{3} = \frac{W^2}{3\gamma}$$

$$S_D = f_\Delta^2 P_m$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{f_\Delta^2 P_m 3\gamma}{W^2} = 3\beta^2 P_m \gamma$$

فرض‌ها اولاً از بیشتر بودن $\left(\frac{S}{N}\right)_R$ از آستانه مطمئن باشیم.

$$B_T = 2W(1+\beta)$$

در اینجا سیگنال به نویز با توان دوم پهنای باند زیاد می‌شود.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FM} = 3\beta^2 P_m \frac{S_R}{N_0 W}$$

به ازای یک نویز مفروض و پیام معین (دست ما نیست) ما می‌توانیم با تغییر S_R و β سیگنال به نویز را بهبود بخشیم.
هرچه S_R را زیاد کنیم سیگنال به نویز بهتری می‌گیریم.
اگر پهنای باند را خیلی زیاد کنیم آنگاه نویز بیشتری به ورودی دمودلاتور می‌رسد و این یعنی سیگنال به نویز با حد آستانه پایین نزدیک می‌شود و دیگر روابط فوق برقرار نخواهند بود.

www.iran-ieee.com

$$\frac{S_R}{N_R} \geq 10$$

$$N_R = N_0 B_T = 2N_0 W(1+\beta)$$

$$\therefore S_R/N_R = \left(\frac{S_R}{2N_0 W(1+\beta)}\right) \geq 10 \Rightarrow \frac{S_R}{N_0 W} \geq 20(1+\beta) \Rightarrow \gamma_{th} = 20(1+\beta)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D \geq 40\beta^2(1+\beta)P_m$$

با حداقل توان ممکن ارسالی، $\left(\frac{S}{N}\right)_D = 50^{dB}$ را بدست آورید.

با مساوی فرض را با موسادی تبدیل شده و سیگنال با نویز در سر دمودلاتور دقیقاً ۱۰ خواهد بود

مثلاً $\Rightarrow 2W(1+\beta) = 220^{kHz}$ ، β بدست می آید، B_T را از روی آن حساب می کنیم

و بهنای باند در دسترس 180^{kHz} است از روی 180^{kHz} ، β' را بدست آورده و بقیه مسائل را با آن حل می کنیم.

www.iran-ieee.com

سیگنال را خاموش می‌کنیم $\Rightarrow A_R \cos 2\pi f_c t + R_n(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_n(t)) = v(t)$

بردار مربوط به نویز در هر لحظه هم زاویه و هم اندازه‌اش تغییر می‌کند بنابراین هر جا این دو تغییر کند می‌توانیم ناحیه‌ای را بگیریم که $\varphi_v(t)$ در آن تغییر می‌کند. حال اگر $R_n(t)$ کوچک باشد این ناحیه کوچک است و تغییرات $\varphi_v(t)$ نمی‌تواند زیاد شود اما اگر دامنه نویز از سیگنال زیادتر شود آنگاه ناحیه بزرگ شده و امکان دارد با تغییر اندک زمان $\varphi_v(t)$ زیاد تغییر می‌کند و امکان دارد در بعضی مواقع ضربه‌هایی را نیز ایجاد کند که مطلوب نمی‌باشد.

نویز FM متناسب با عکس توان سیگنال است. در رادیو وقتی روی یک موج هستیم و می‌خواهیم به موج دیگر برویم در بین راه نویز داریم زیرا در اینجا سیگنال ضعیف است ولی در موج دیگر چون سیگنال ایجاد می‌شود سیگنال با نویز افزایش یافته و صدا را می‌شنویم.

همانطور که دیدیم در فرکانس‌های طیف توان نویز در خروجی دمودلاتور FM داریم.
هرچه فرکانس کار بالا رود انرژی نویز عبوری زیاد می‌شود.

اگر در نقطه X یک فیلتر RC ساده قرار دهیم آنگاه داریم
اما این فیلتر سیگنال را نیز ضعیف می‌کند.
برای رفع این مشکل در فرکانس‌های بالا پیام تقویت می‌شوند و بنابراین
با فیلتر RC، این پیام به حالت عادی خود باز می‌گردد و نویز تضعیف می‌شود.
به این عمل در فرستنده تأکیدگر و در گیرنده واتأکیدگر می‌گویند.
مثال‌های کتاب کارلسون را حل کنید.

www.iran-ieee.com

$H_d(f)\,H_p(f) = 1$

تا هنگامی که در مورد سیگنال بحث می کنیم هم خود را بر تأکید گری بدیم.

$$(N_D)_{\text{باتأکید}} = \int_{-W}^{W} \frac{N_0 f^2}{2 S_R} |H_d(f)|^2 \, df \ll (N_D)_{\text{بدون تأکید}}$$

$$(S_D)_{\text{باتأکید}} = (S_D)_{\text{بدون تأکید}}$$

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\ \text{باتأکید}}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\ \text{بدون تأکید}}} = \frac{(N_D)_{\text{بدون تأکید}}}{(N_D)_{\text{باتأکید}}} \gg 1$$

پس در ذات مدولاسیون FM هم تأکیدگر و اتأکیدگر وجود دارد و هم آستانه رعایت شده است.

اگر فیلتر $H_d(f)$ باصورت استفاده شود آنگاه $H_p(f)$ بصورت خواهد بود.

در مدولاسیون خطی با افزایش دامنه عرض باند تغییری نمی کرد ولی در مدولاسیون غیرخطی با افزایش دامنه عرض باند زیادی شود، پس با افزایش دامنه سیگنال فرکانس های بالا تقویت می شوند.

www.iran-ieee.com

اساس مخابرات دیجیتال تقریبا نمونه برداری است. یعنی به جای یک سیگنال نمونه هایی از آن را ارسال می کنیم.

لازمه ی بحث band limited بودن سیگنال است. فرض کنیم $m(t)$ سیگنالی با باند محدود با عرض باند W باشد. سیگنال $m(t)$ را وارد نمونه گیری می کنیم. نمونه گیر ایده آل ضرب در قطار ضربه ها بود. و نمونه گیر غیرایده آل نیز پالس هایی با سطح واحد و عرض باریک است.

از لحاظ تئوری با عرض باندی بینهایت برای ارسال $m_s(t)$ نیاز داریم.

$$\sum \delta(t-kT_s) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s}\delta(f-nf_s)$$

$$\Rightarrow f_s \geq 2W$$ نرخ نمونه برداری نایکوئیست

معرفی سیستم PCM: Pulse Code Modulation

یک ATD در بخش فرستنده و یک DTA در بخش گیرنده داریم.

در نمونه گیری غیرایده آل نیز به جای ضربه یا پالس های باریک را داریم و فقط، در $M_s(f)$ سطح $M(f)$ های شیفت یافته متفاوت است.

PCM

در PCM یک عددی مثل Q انتخاب کرده و بازه ی $[-1,1]$ را به Q قسمت تقسیم کرده و مقادیر خروجی نمونه گیر را به نزدیکترین مقدارش گرد می کنیم. به این عمل که توسط کوانتایزر انجام می شود کوانتیزه کردن می گوییم.

اگر مثلاً ۸ تیغ داشته باشیم آنگاه با سه بیت باینری می توانیم این مقادیر را با طور کامل مشخص کنیم.

کدگذار رشته ی $(q=2^k)$ k تایی را مشخص کرده و ارسال می کند که k تای اول مشخص کننده ی اولین نمونه بوده و k تای دوم مشخص کننده ی دومین نمونه و به همین ترتیب می باشد.

www.iran-ieee.com

بنابراین ATD عبارتست از یک نمونه‌بردار، کوانتایزر و کدگذار.
چون هر نمونه با یک رشته‌ای فرستاده شده که در آن دو تنوع است به آن binary PCM گفته می‌شود.
در mary PCM رابطه‌ی $q = M^k$ خواهیم داشت.
پس سیگنال آنالوگ وارد شد و در خروجی یک رشته‌ی صفر و یک خارج شد.
هرچه عرض باند پیام بیشتر شود سیگنال دیجیتالی که از خروجی ATD بیرون می‌آید فرکانس بیشتری از لحاظ نمونه‌برداری دارد.

درست گیرنده آنچه مهم است، Timing است که این تضمینه با کلاک سنکرون شده در فرستنده و گیرنده حل می‌شود.

0,1 → OOK = on off keying

در mary، هر بردار شامل M تنوع است.
در عمل سیستم با نویز آمیخته می‌شود.

بنابراین صفر و یک‌ها علاوه بر تضعیف، نرمی نیز شده‌اند.

بهترین سطح آستانه ۱/۲ است با فرض احتمال صفر و یک بودن برابر باشد و ثانیاً نویز از نوع AWGN باشد در اینجا خطا داریم. زیرا امکان دارد
گیرنده‌ی بهینه گیرنده‌ای است که بهترین آستانه را داشته باشد یعنی آستانه طوری انتخاب شده که کمترین خطا را داریم.

حال می‌خواهیم در خروجی جمع‌کننده LPF بگذاریم که مقادیر را در جاهای یکی نمونه‌برداری می‌کنیم سیگنال را بدون تغییر عبور داده و نویز را کم کند. نیاز نداریم بدانیم این فیلتر در جاهای یکی نمونه نداریم چه می‌کند. مهم اینست که مقادیر در محل‌های یکی می‌خواهیم نمونه‌برداریم تغییری نکنند. به این فیلترها، فیلترهای تطبیقی می‌گویند.

www.iran-ieee.com

قرار است از خروجی جمع کننده سیگنال و نویز نمونه بگیریم. مهم این است که آلودگی نمونه به نویز کم باشد. برای این منظور از فیلترهای تطبیقی استفاده می‌کنیم.

Match Filter — فیلتر تطبیقی (سازگار)

فرض کنیم پالس $s(t)$ رسیده و به نویز $n(t)$ آلوده شده است.

می‌خواهیم فیلتر تطبیقی را به گونه‌ای طراحی کنیم که $y_0(t_0) = s_0(t_0) + n_0(t_0)$ ، مقدار $\frac{|s_0(t_0)|^2}{E\{n_0^2(t_0)\}}$ ماکسیمم شود.

$$SNR = \frac{|s_0(t_0)|^2}{E\{n_0^2(t_0)\}}$$

بنابراین در اینجا مهم این است که آلودگی نویز در نمونه‌ها کم باشد.

$$s_0(t) \xleftrightarrow{F} S_0(f) = S(f) H_R(f)$$

$$\Rightarrow s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f t} df \Rightarrow s_0(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df$$

$$E\{n_0^2(t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f) |H_R(f)|^2 df$$

$$SNR = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} G_n(f) |H_R(f)|^2 df}$$

$S(f)$ ، t_0 ، $G_n(f)$ معلوم‌اند حال می‌خواهیم $H_R(f)$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که SNR ماکسیمم شود.

طبق نامساوی شوارتز داریم:

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(f) W^*(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df$$

$$V = kW$$

با برابری وقتی به تساوی تبدیل می‌شود که V ضریبی اسکالر از W باشد.

www.iran-ieee.com

$$V(f) = H_R(f)\, G_n^{1/2}(f)$$

$$W(f) = \frac{S^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}{G_n^{1/2}(f)}$$

بنابراین حداکثر سست چپ وقتی است که $V = kW$.

$$\Rightarrow H_R(f)\, G_n^{1/2}(f) = k\, \frac{S^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}{G_n^{1/2}(f)} \Rightarrow H_R(f) = k\, \frac{S^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}{G_n(f)}$$

این نرم‌کننده $20-30^{dB}$ سیگنال به نویز را افزایش می‌دهد.
در هر فرکانسی که $G_n(f)$ زیاد است در آنجا H_R کم است و برعکس پس $H_R(f)$ به نفع سیگنال و با ضرر نویز کار می‌کند.

حال می‌خواهیم سیگنال به نویز ماکسیمم را بدست آوریم.

$$(SNR)_{MAX} = \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{G_n(f)}\, df$$

k در سیگنال به نویز تأثیری ندارد.

فیلتر سازگار در حضور AWGN:

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow H_R(f) = \frac{2k}{N_0} S^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\therefore\ h_R(t) = \frac{2k}{N_0} \underbrace{S(t_0 - t)}_{S(-t) \to t \to t - t_0}$$

فرض کنیم گفته شود پالس مقابل وارد فیلتر تطبیقی شود.
می‌خواهیم پالس خروجی فیلتر را بدست آوریم.
اگر $t_0 < T$ باشد فیلتر علی نیست و قابل پیاده سازی نمی‌باشد پس
باید $t_0 \geq T$ بگیریم.

مطلوبست محاسبه انرژی سیگنال و نویز با تفکیک:

www.iran-ieee.com

محاسبه تحلیلی انرژی‌های سیگنال و نویز:

$$(SNR)_{max} = \frac{2E}{N_0}$$

$$(SNR)_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{G_n(f)} df = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

$$S_0^2(t_0) = ?$$

$$S_0(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df \Rightarrow S_0(t_0) = \int \frac{2k}{N_0} S^*(f) S(f) df = \frac{2k}{N_0} E$$

$$S_0^2(t_0) = \frac{4k^2 E^2}{N_0^2}$$

$$E\{n_0^2(t)\} = \int \frac{N_0}{2} \frac{4k^2}{N_0^2} |S(f)|^2 df = \frac{2k^2}{N_0} E$$

$$\Rightarrow (SNR)_{max} = \frac{2E}{N_0}$$

همانطورکه دیدیم k در انرژی هردوسیگنال به‌طور مستقل حضور دارد ولی در $(SNR)_{max}$ تأثیری ندارد.

مثال: یک رشته پالس $+a$ و $-a$ درحضور AWGN به گیرنده می‌رسد. برای این سیستم فیلتر تطبیق طراحی کنید. همچنین درغیاب نویز شکل موج خروجی از فیلتر تطبیق را رسم کنید.
اگر فیلتر برای پالس a تطبیق باشد آنگاه برای پالس $-a$ نیز تطبیق خواهد بود.

یک پالس $+a$ را درنظر می‌گیریم.
Match Filter هم به نویز وابسته است و هم به خود سیگنال

همانطورکه می‌بینیم شکل‌های مربوط به سایر پالس‌ها در نقطه نمونه‌گیری مربوط به پالسی خاص صفر بود. و در آن تأثیری ندارند.

می‌خواهیم بلوک دیاگرام مربوط به Match Filter را طراحی کنیم.

T عرض هر کدام از پالس‌هاست.

در مثال قبل به مثلث‌های متقابل رسیدیم:

می‌توانیم به جای المان تأخیر از I&D استفاده کردیم و با اینکار می‌توانیم ترک مثلث‌ها را بدست آوریم اما اینکار باعث می‌شود توان نویز دو برابر شود و به این حالت فیلتر نیمه‌تطبیق می‌گویند.

احتمال خطا در سیستم‌های مخابرات دیجیتال: Error Control Coding

با اضافه کردن Parity check می‌توانیم از خطا دار بودن یک سیگنال آگاه شده و بتواند آن را تصحیح نیز کند.

بررسی عملکرد سیستم باینری باند پایه (بهینه) در حضور AWGN:

در اینجا می‌خواهیم از گوسی بودن نویز نیز استفاده کنیم.

$\pm A$ (پالس فرستاده شده) $\quad \pm A_R$ (پالس گرفته شده) → تضعیف محیط

www.iran-ieee.com

امکان خطا وجود دارد. می‌خواهیم احتمال این خطا را محاسبه کنید.

k-امین نمونه

$$r_k = \underbrace{\pm A_0}_{S_0(kT)} + n_k$$

در بحث خود به جای $\frac{2k}{N_0} = 1$ گرفتیم و در نتیجه $k = \frac{N_0}{2}$

$$n_k = N(0, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = E\{n_k^2\} - (\cancel{E\{n_k\}})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 df = \frac{N_0 E}{2}$$

$$A_0 = E \qquad S_0(t_0) = \frac{2kE}{N_0} \Big|_{k = N_0/2} = E$$

$$\Rightarrow r_k = N\left(\pm A_0, \frac{N_0 E}{2}\right)$$

در محاسبات خود به جای k از $\frac{N_0}{2}$ استفاده کردیم زیرا k در سیگنال به نویز نقشی ندارد

$P(A_R | r_k) > P(-A_R | r_k) \Rightarrow$ A ارسال شده است.

$P(-A_R | r_k) > P(A_R | r_k) \Rightarrow$ -A ارسال شده است.

با انجام کار فوق احتمال خطای سیستم را حداقل کرده‌ایم.

$$\xRightarrow[\text{معادل}]{\text{با طور}} P(A | r_k) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} P(-A | r_k)$$

$$\frac{P(A, r_k)}{\cancel{P(r_k)}} \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} \frac{P(-A, r_k)}{\cancel{P(r_k)}} \Rightarrow P(A)\, P(r_k | A) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} P(-A)\, P(r_k | -A)$$

$P(A)$, $P(-A)$ را داریم و با آنها احتمالات پیشین می‌گویند.

$$P(r_k | A) = P(r_k | A_R) = P(r_k | A_0)$$

$$\Rightarrow P(r_k | A_R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(r_k - A_0)^2 / 2\sigma^2}$$

www.iran-ieee.com

$$P(r_k|-A_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_k+A_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{P(A)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_k-A_0)^2}{2\sigma^2}} > \frac{P(-A)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_k+A)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Longrightarrow \ln P(A) - \frac{(r_k-A_0)^2}{2\sigma^2} > \ln P(-A) - \frac{(r_k+A)^2}{2\sigma^2}$$

یک نامساری برحسب r_k بدست می آوریم که برمبنای آن A_0 یا $-A_0$ می گیریم.
r_k بدست آمده سطح آستانه را مشخص می کند.

مثال: نشان دهید

www.iran-ieee.com

تکمیل چند مطلب:

ترازگرها Equ

کانال‌های خطی: این کانال‌ها را می‌توان مثل یک سیستم LTI مدل کرد.

رابطه مقابل مربوط به کانالی ایده‌آل است

$$x(f) \xrightarrow{\text{کانال ایده آل}} y(f) = k\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_d} \Rightarrow H_i(jf) = k e^{-j2\pi f t_d}$$

در واقعیت کانال ایده آل نداریم یعنی هیچکدام از نمودارهای فوق نمی‌تواند برقرار باشد.

اگر اندازه‌ی پاسخ فرکانسی خط راست نباشد با پدیده‌ی حاصل اعوجاج دامنه می‌گویند
اگر فاز پاسخ فرکانسی خط راست مرور نباشد با پدیده‌ی حاصل اعوجاج فاز می‌گویند

معمولاً هر دو اعوجاج رخ می‌دهند اما اینکه کدام یک غالب است، به سیستم و ابسته است.

حال فرض کنیم که مشخصات کانال را می‌دانیم.

$$H_c(f)\,H_{eq}(f) = \underbrace{k e^{-j2\pi f t_d}}_{\text{پاسخ فرکانسی کانال ایده‌آل}} \Rightarrow H_{eq}(f) = \frac{k e^{-j2\pi f t_d}}{H_c(f)}$$

www.iran-ieee.com

هیچکس نمی‌تواند به ترازگر فوق دست یابد زیرا ترکیب دو سیستم به کانال ایده‌آل تبدیل شده و باز هم مشکل غیرعملی بودن را داریم.

حال می‌خواهیم $H_{eq}(f)$ را تست کنیم. برای این منظور از مدل زیر استفاده می‌کنیم

Tapped Delay Line

این مدل را خطوط تأخیر انشعاب یافته می‌گویند

می‌خواهیم با مقادیر فوق با گونه‌ای بازی کنیم که پاسخ فرکانسی کل بلوک پاسخ فرکانسی ترازگر گردد.

$$v_o(t) = c_{-M} v_i(t) + c_{-M+1} v_i(t-\Delta) + \dots + c_0 v_i(t - M\Delta) + \dots + c_M v_i(t - 2M\Delta)$$

$$\xrightarrow{F} V_o(f) = c_{-M} V_i(f) + c_{-M+1} V_i(f) e^{-j2\pi f\Delta} + \dots$$

$$\Rightarrow H_{eq}(f) = c_{-M} + c_{-M+1} e^{-j2\pi f\Delta} + c_{-M+2} e^{-j2\pi f(2\Delta)} + \dots + c_0 e^{-j2\pi f M\Delta} + \dots + c_M e^{-j2\pi f 2M\Delta}$$

$$\Rightarrow e^{-jM\omega\Delta} \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{-jm\Delta\omega}$$

مثال: می‌خواهیم یک ترازگر طراحی کنیم.
طراحی ترازگر برای مخابرات دو راهه:

سیگنال از دو راه به گیرنده می‌رسد، می‌توان کو را از سر راه برداشت و یا اینکه یک ترازگر قرار دهیم.
حال می‌خواهیم $H_c(f)$ را بدست آوریم تا با استفاده از آن ترازگر را طراحی کنیم.
پدیده‌ی Fading نیز حالتی است که دو سیگنال همدیگر را خنثی کنند که در این حالت تضعیف نداریم اما چون دو سیگنال با گونه‌ای تغییر فاز داده‌اند که همدیگر را خنثی کرده‌اند، سیگنال از بین می‌رود.
Fading باعث تغییر شرایط جوی نیز رخ می‌دهد.

www.iran-ieee.com

t_1 و t_2 و همچنین k_1 و k_2 با دقت بسیار زیادی داده می‌شوند.

$$y(t) = k_1 x(t-t_1) + k_2 x(t-t_2) \neq k\, x(t-t_d)$$

تقریب $k_2 << k_1$ فرض کاملاً معقول است زیرا با افزایش مسیر انرژی بسیار کاهش می‌یابد

ما دنبال $H_c(f)$ هستیم و بعد می‌خواهیم از روی آن ترازگر خود را طراحی کنیم.

$$H_c(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = k_1 e^{-j2\pi f t_1} + k_2 e^{-j2\pi f t_2}$$

$$H_{eq}(f) = \frac{\overset{\text{دلخواه}}{k}\, e^{-j2\pi f \overset{\text{سیستم}}{t_d}}}{k_1 e^{-j2\pi f t_1} + k_2 e^{-j2\pi f t_2}}$$

هیچگاه نمی‌توان $H_{eq}(f)$ فوق را طراحی کردن و تنها می‌توان با تقریبی از آن دست یافت.

$$H_{eq}(f) = \frac{k\, e^{-j2\pi f t_d}}{k_1 e^{-j2\pi f t_1}\left(1 + \frac{k_2}{k_1} e^{-j2\pi f (t_2 - t_1)}\right)}$$

با انگار و فرض های $\left.\begin{matrix} t_d = t_1 \\ k = k_1 \end{matrix}\right\}$ می‌خواهیم مسیر با تأخیر t_2 را حذف کنیم

$$\Rightarrow H_{eq}(f) \simeq \frac{1}{1+\epsilon} \simeq 1 - \epsilon + \epsilon^2$$

* اگر شرط $k_2 << k_1$ برقرار نمی‌بود، راه حل درست نبود.

$$\Rightarrow H_{eq}(f) = 1 - \frac{k_2}{k_1} e^{-j2\pi f (t_2 - t_1)} + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 e^{-j2\pi f 2(t_2 - t_1)}$$

$M=1$ باشد و تعداد Delay Line ها ۲ و در نتیجه سه جمله داریم.

$M = 1$

$\Delta = t_2 - t_1$

www.iran-ieee.com

$C_{-1} = 1$

$C_0 = -\frac{k_2}{k_1}$

$C_1 = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2$

پشت آنتن‌ها گیرنده ترازگر را قرار می‌دهیم

در مخابرات نوری محیط انتشار از جنس شیشه است. در مخابرات الکتریکی محیط‌های انتشار یا محیط آزاد است و یا مس می‌باشد.

در مس خام معمولاً فرکانس‌های بالا به خوبی ارسال نمی‌شود اما می‌توان هر بیت را با سمبلی نشان داد و در نتیجه عرض باند را کم کرد.

در کابل‌های هم‌محور نیز پاسخ فرکانسی کابل پهن‌تر می‌گردد.

اگر $A_i \cos 2\pi f_i t$ را وارد یک کابل کنیم داریم.

A_o فرکانس با فرکانس عوض می‌شود.

$$\frac{P_{in}}{P_{out}} = \frac{\frac{A_i^2}{2}}{\frac{A_o^2}{2}} = \left(\frac{A_i}{A_o}\right)^2 = L(f)$$

$$L_{dB}(f) = \underbrace{\alpha(f)}_{\text{ضریب تضعیف}} l$$

$l \rightarrow$ کیلومتر

اگر $L = 1$ بگذاریم آنگاه $\alpha(f)$ یعنی تضعیف هر کیلومتر در فرکانس خاص برحسب dB می‌باشد.

ثابت k روی کابل‌ها به این معنی است که سرعت نور در کابل k برابر سرعت نور در خلأ است.

اگر مثلاً در فرکانس بالا سروکار داریم تضعیف بیشتر بوده و لذا به کابل‌های بهتری نیاز داریم.

www.iran-ieee.com

اگر طول دو برابر شود اگرچه تضعیف برحسب dB دو برابر می‌شود اما تضعیف نمایی تغییر خواهد کرد.

$$L_L(f) = 10^{\frac{\alpha L}{10}}$$
$$L_{kL}(f) = (L_L)^k$$

⇒ در فواصل بلند نباید از کابل استفاده کرد مگر اینکه در فواصل کوتاه، سیگنال را از لحاظ SNR تصحیح کرد و سپس با ادامه راه رفت.

طول متوسط کابلی مورد استفاده 2^{km} است.

اگر تضعیف 1 کیلومتر 100 باشد آنگاه تضعیف در طول 2 کیلومتر $(100)^2$ است.

با همین دلیل به دنبال انتشار رادیویی می‌رویم.

بعد از یک ثانیه انرژی روی کره‌ای به شعاع $300{,}000^{km}$ تقسیم می‌شود.

در مخابرات رادیویی وقتی فاصله 4 برابر می‌شود، تضعیف در 4^2 ضرب می‌گردد.

بطور متوسط در هر 40^{km}، سیگنال رادیویی گرفته شده و یک چیزهایی به آن اضافه و چیزهایی از آن کم می‌شود ولی اگر نخواهیم تغییری در آن دهیم نیز با دلیل انحنای زمین باید این عمل انجام شود.

در انتشار رادیویی می‌توان کانال را تخت فرض کرد ولی ثابت آن تغییر می‌کند.

سیگنال به کانون می‌خورد و این کانون باعث می‌شود سیگنال در همه‌ی جهات پخش نشود و همه‌ی آن در جهت مورد نظر برود

نسبت توانی که در حالت با آنتن و بدون آنتن را کین آن می‌گویند. ویژگی آنتن ← directivity

ویژگی آنتن گیرنده ← collectivity

در LNB هم تقویت انجام می‌شود و هم تغییر فرکانسی از فرکانس های RF به IF صورت می‌گیرد.

www.iran-ieee.com

برای تولید SSB از DSB استفاده می‌کنیم. اما ما فرض کردیم فیلتر کردن DSB برای تولید SSB ایده‌آل است. اگر فرض ایده‌آل بودن را برداریم از DSB به VSB خواهیم رسید.

می‌توان به VSB یا SSB حامل بزرگی اضافه کرد تا بتوان آن را با

www.iran-ieee.com