فصل سوم

هدایت دائم چندبعدی

www.mohandesyar.com

۳-۱ هدایت دائم چند بعدی(دو یا سه بعدی)

در فصل قبل جریان یک بعدی را بررسی کردیم. در این جا جریان دو بعدی را بررسی می‌کنیم. برای جریان دائم، معادله دو بعدی را به کار می‌بریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad (۳-۱)$$

که در اینجا ضریب هدایت را ثابت فرض کرده‌ایم. از طرق مختلف می‌توان این معادله را حل کرد. با توجه به اینکه بررسی و تحلیل انتقال حرارت بر آنستکه جریان حرارت و درجه حرارت را بررسی کند، معادله (۳-۱) درجه حرارت را در دو بعد x و y بر حسب دو مستقل x و y بما می‌دهد. جریان حرارت را نیز می‌توان از معادله فوریه بدست آورد:

$$q_x=-kA_x\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۳-۲)$$

$$q_y=-kA_y\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (۳-۳)$$

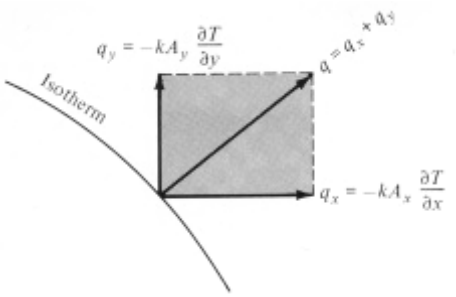
که در جهت x و y بما مقدار حرارت را می‌دهند. در هر نقطه، جریان حرارت برابر با مجموع جریان حرارت در دو جهت q_x و q_y است. بردار حریان گرمای کل بر خطوط دما ثابت جسم عمود است. (شکل(۳-۱)). فلذا با تعیین خطوط دما ثابت، می‌توان جریان را به سادگی تحلیل کرد.

در حالت کلی برای تحلیل انتقال حرارت دو بعدی از سه روش استفاده می‌شود:

۱.روش تحلیلی

۲.روش ترسیمی

۳.روش عددی



شکل ۳-۱ هدایت دائم چند بعدی

۳-۲ تحلیل ریاضی جریان دو بعدی

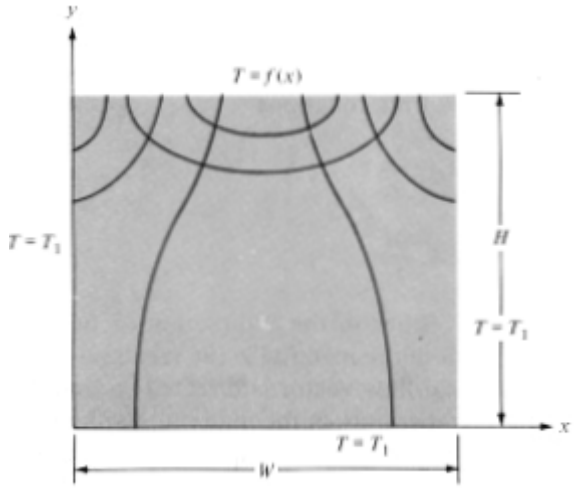
در ابتدا تحلیل دو بعدی را بررسی می‌کنیم و سپس روش عددی و ترسیمی را که هر یک به نوبه خود مزایایی دارند، بررسی می‌کنیم. بدیهی است در بعضی موارد، روش ترسیمی مشکل شده باید از روش عددی استفاده نمود.

www.mohandesyar.com

-باید توجه کرد که حل تحلیلی برای یک صفحه کار آسانی نیست؛ لذا بعنوان مثال یک مورد نادر را در نظر گرفته به حل آن می‌پردازیم.

به مربع شکل (۳-۲) توجه کنید. سه طرف ضلع ورقه را در درجه حرارت ثابت T_1 و ضلع بالائی دارای توزیع درجه حرارت معینی می‌باشد.این توزیع مثلاً میتواند به صورت موج سینوسی زیر باشد:

$$T = f(x) = T_m \sin(\frac{\pi x}{W}) + T_1$$



شکل ۳-۲ تحلیل ریاضی جریان دو بعدی

برای حل این مسئله خاص باید معادله (۳-۱) را حل کنیم. در اینجا از روش جدا کردن متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} T &= XY \\ Y &= Y(y) \\ X &= X(x) \end{aligned} \qquad (۴-۳)$$

شرایط مرزی را برای شرایط x و y بکار می‌گیریم. در ابتدا وضعیت نرخ سینوسی را بررسی میکنیم. (T_m دامنه تابع سینوسی می‌باشد)

$$\begin{aligned} &@\, x = 0 : T = T_1 \\ &@\, x = W : T = T_1 \\ &@\, y = 0 : T = T_1 \\ &@\, y = H : T = T_m \sin(\frac{\pi x}{W}) + T_1 \end{aligned} \qquad (۵-۳)$$

از معادله (۳-۴) مشتق گرفته در (۳-۱) قرار می‌دهیم.

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2 \qquad (۶-۳)$$

www.mohandesyar.com

مشاهده می‌کنیم که طرفین معادله (۳-۶) مستقل از x یا y هستند ولذا هر دو متغیر x و y از هم مستقل بوده برابر عدد ثابت λ^2 می‌باشند. می‌توان دو معادله دیفرانسیل را بر حسب این ثابت به دست آورد.

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2X=0 \qquad (۳-۷)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}-\lambda^2Y=0 \qquad (۳-۸)$$

λ^2 را ثابت جدائی می‌خوانند و مقدار آن از شرایط مرزی بدست می‌آید. باید توجه نمود که چگونگی حل معادله (۳-۷) و (۳-۸) بستگی به علامت λ^2 دارد و اگر $\lambda^2=0$ باشد، حل دیگری خواهیم داشت. برای بدست آوردن فرم صحیح ابتدا حلهای مختلف را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام‌یک مناسب کار ماست.

ابتدا اگر $\lambda^2=0$ باشد:

$$\begin{aligned} X &= C_1+C_2x \\ Y &= C_3+C_4y \\ T &= (C_1+C_2x)(C_3+C_4y) \end{aligned} \qquad (۳-۹)$$

با توجه به اینکه شرایط مرزی در معادله (۳-۹) صدق می‌کند یعنی در $y=H$ تابع درجه حرارت سینوسی صدق نمی‌کند و از قضیه ما خارج است.

اگر $\lambda^2<0$

$$\begin{aligned} X &= C_5e^{-\lambda x}+C_6e^{\lambda x} \\ Y &= C_7\cos\lambda y+C_8\sin\lambda y \\ T &= (C_5e^{-\lambda x}+C_6e^{\lambda x})(C_7\cos\lambda y+C_8\sin\lambda y) \end{aligned} \qquad (۳-۱۰)$$

در این حالت نیز شرایط مرزی سینوسی صادق نیست.

اگر $\lambda^2>0$

$$\begin{aligned} X &= C_9\cos\lambda x+C_{10}\sin\lambda x \\ Y &= C_{11}e^{-\lambda y}+C_{12}e^{\lambda y} \\ T &= (C_9\cos\lambda x+C_{10}\sin\lambda x)(C_{11}e^{-\lambda y}+C_{12}e^{\lambda y}) \end{aligned} \qquad (۳-۱۱)$$

که شرایط مرزی در اینجا صدق می‌کند و لذا کوشش می‌کنیم شرایط دیگر را نیز تطبیق دهیم. برای اینکه رابطه را ساده‌تر بنویسیم، از تغییر متغیر $\theta=T-T_1$ بهره می‌گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} &@X=0:\theta=0 \\ &@X=W:\theta=0 \\ &@Y=0:\theta=0 \\ &@Y=H:\theta=T_m\sin\frac{\pi x}{W} \end{aligned} \qquad (۳-۱۲)$$

www.mohandesyar.com

با اعمال این شرایط داریم:

(الف) $0=(C_9\cos\lambda x+C_{10}\sin\lambda x)(C_{11}+C_{12})$

(ب) $0=C_9(C_{11}e^{-\lambda y}+C_{12}e^{\lambda y})$

(ج) $0=(C_9\cos\lambda W+C_{10}\sin\lambda W)(C_{11}e^{-\lambda H}+C_{12}e^{\lambda H})$

(د) $T_m\sin\frac{\pi x}{W}=(C_9\cos\lambda x+C_{10}\sin\lambda x)(C_{11}e^{-\lambda H}+C_{12}e^{\lambda H})$

که در نتیجه:

$$C_{11}=-C_{12}\qquad \&\qquad C_9=0$$

واز معادله (ج) می‌توان نوشت:

$$0=C_{10}C_{12}\sin\lambda W\,(e^{\lambda y}-e^{-\lambda y})$$

و این مستلزم آنستکه :

$$\sin\lambda W=0 \tag{۱۳-۳}$$

$$\lambda=\frac{n\pi}{W}\qquad (n\in\square) \tag{۱۴-۳}$$

برای حل معادله دیفرانسیل فوق، پاسخ را به فرم یک سری نامتناهی به فرم زیر می‌نویسیم:

$$\theta=T-T_1=[\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{W}\sinh\frac{n\pi y}{W}] \tag{۱۵-۳}$$

که در اینجا ثابت‌ها یکی شده‌اند(C_n) و عبارت نهائی e به صورت تابع هیپربولیک درآمده است.

شرایط مرزی (د) را می‌توان چنین نوشت:

$$T_m\sin\frac{\pi x}{W}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{W}\sinh\frac{n\pi H}{W}$$

که برای صحت این شرط لازم است $n>1$ و $C_n=0$ باشد. جواب نهائی به فرم زیر خواهد بود:

$$T=T_m\frac{\sinh(\pi y/W)}{\sinh(\pi H/W)}\sin(\frac{\pi x}{W})+T_1 \tag{۱۶-۳}$$

در شکل منطقه درجه حرارت برای این مسئله داده شده است. توجه داشته باشید که خطوط جریان حرارت بر خطوط درجه حرارت ثابت عمود می باشد.

اکنون شرایط مرزی دیگری را بررسی می‌کنیم. بدین ترتیب که سه طرف همان T_1 باشد و ضلع بالا درجه حرارت T_2 داشته باشد.

$$@\,x=0,W:T=T_1$$
$$@\,y=0:T=T_1$$
$$@\,y=H:T=T_2$$

www.mohandesyar.com

با اعمال شرایط مرزی فوق دوباره به معادله (۳-۱۵) می‌رسیم:

$$T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W} \sinh\frac{n\pi y}{W} \qquad (۳-۱۷)$$

و با اعمال شرط چهارم داریم:

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W} \sinh\frac{n\pi H}{W} \qquad (۳-۱۸)$$

که این یک سری فوریه است و مقدار C_n را بوسیله گسترش درجه حرارت ثابت $T_2 - T_1$ در یک سری فوریه از $0 < x < w$ بدست می‌آوریم.

تمرین: ثابت کنید سری فوق‌الذکر عبارتست از:

$$T_2 - T_1 = (T_2 - T_1)^2 \times \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\frac{n\pi x}{W} \qquad (۳-۱۹)$$

با مقایسه معادلات (۳-۱۸) و (۳-۱۹) خواهیم داشت:

$$C_n = \frac{2}{\pi}(T_2 - T_1)\frac{1}{\sinh(n\pi H/W)}\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n}$$

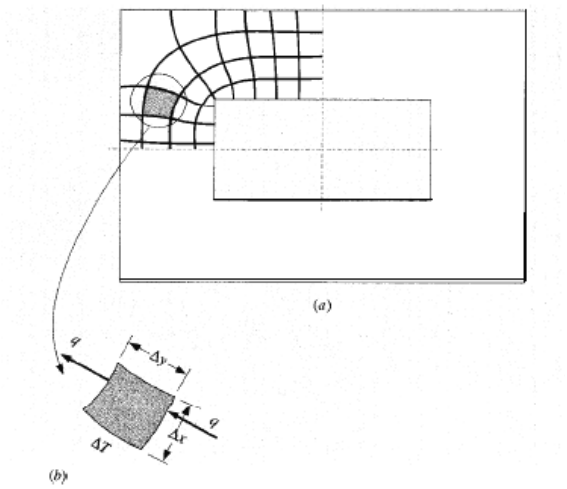
و معادله نهایی به فرم زیر خواهد شد:

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\frac{n\pi x}{W} \frac{\sinh(n\pi y/W)}{\sinh(n\pi H/W)} \qquad (۳-۲۰)$$

www.mohandesyar.com

۳-۳ آنالیز ترسیمی

در شکل (۳-۳) سیستم دو بعدی را در نظر بگیرید، سطوح داخلی را در یک حرارت T_1 نگه داشته و سطوح خارجی را در درجه حرارت خارجی قرار می‌دهیم.



شکل ۳-۳ سیستم دو بعدی

حال می‌خواهیم انتقال حرارت را حساب کنیم. خطوط ایزوترمال و جریان حرارت رسم شده. در محاسبه کمک می کند. جریان حرارت در طول (منحنی خط) بوسیله قانون فوریه برای واحد (z=1) عمق میشود:

$$q = -k\,\Delta x\,(1)\frac{\Delta T}{\Delta y} \qquad (۲۱-۳)$$

مجموع انتقال حرارت عبارتست از جمع کل انتقال حرارت‌ها از همه خطوط. اگر خطوط را طوری انتخاب کنیم که $\Delta x = \Delta y$ باشد جریان حرارت متناسب با ΔT در طول المان خواهد شد. چون این جریان ثابت است ΔT در طول هر المان باید یکسان باشد. درون یک خط جریان حرارت، ΔT در طول المان بوسیله معادله زیر بدست می آید:

$$\Delta T = \frac{\Delta T_{total}}{N}$$

که N تعداد رشد خانه‌های درجه حرارت بین سطح داخلی و خارجی است. جریان حرارت از هر خط یکسان است زیرا مستقل از ابعاد Δx و Δy است و (حتی که $\Delta x = \Delta y$) بنابراین مجموع انتقال حرارت می‌شود.

$$q = \frac{M}{N}k\,\Delta T_{total} = \frac{M}{N}k\,(T_2 - T_1) \qquad (۲۲-۳)$$

که M تعداد خطوط جریان حرارت است. بنابراین برای محاسبه انتقال حرارت لازم داریم فقط منحنی خط (المانها) را متساوی الفاصله انتخاب کنیم و خطوط افزایش درجه حرارت و خطوط جریان را بشماریم. دقت این متن به دقت در کشیدن خطوط بستگی دارد، هر چند خطوط حدودی نیز کمک در محاسبه می کند.

www.mohandesyar.com

باید در ترسیم، موارد زیر را برای نتیجه بهتر رعایت کند:

۱. تمام خطوط هم درجه را شناسائی کرد.

۲.شکل را به صورت متقارن مش بندی کرد (چه هندسی و چه در درجه حرارت) تا کار شمارش کمتر شود.

۳. خطوط جریان(آدیاباتیک) بایدگوشه‌های خطوط ایزو ترمال را نصف کند.

۴. اگر ممکن باشد از جائی شروع کنیم که بتوان خطوط آدیاباتیک را با فاصله مساوی رسم کرد.

۵. در شروع خطوط دستی احتمالی(تقریبی) را برای ایزونرمال و آدیاباتیک رسم کنید.

۶. بطور مداوم خطوط را به ترتیبی که خط جریان، عمود درجه حرارت باشد اصلاح کنید؛ بطوریکه شکل‌ها بصورت مربع‌های خطی در آیند.

۳-۴ ضریب شکل در هدایت

در یک سیستم دو بعدی که فقط دو حد درجه حرارت دارند، می‌توان ضریب شکل هدایت(S) را بصورت زیر تعریف کرد:

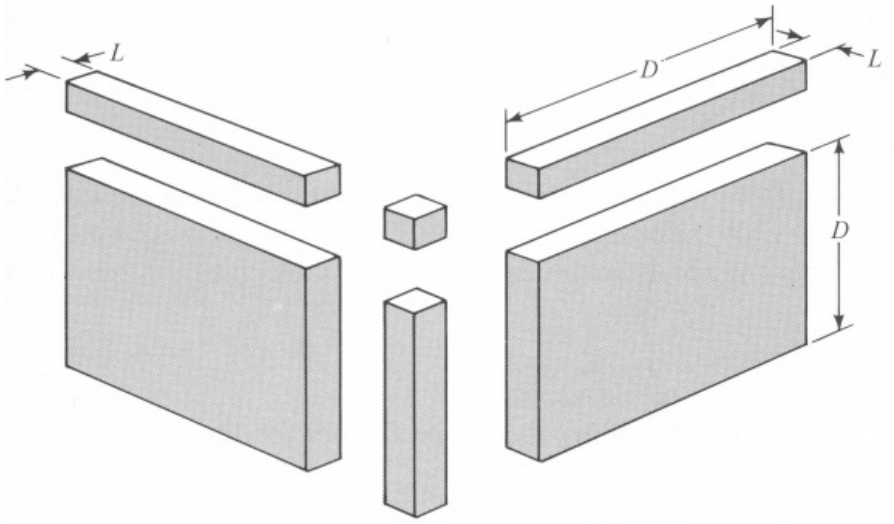
$$q = kS\,\Delta T \qquad (۲۳-۳)$$

مقدار S تعدادی از اشکال مهم، در جدول (۳-۱) آورده شده است.

توجه داشته باشید که عکس کسینوس هیپربولیک را می‌توان چنین محاسبه کرد:

$$\cosh^{-1} x = Ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

برای محاسبه جریان در یال و گوشه‌های دیواری سه بعدی-مثل یک کوره- از ضرایب شکل جداگانه‌ای استفاده می‌شود.(وقتی که ابعاد داخلی بزرگتر از $1/5$ ضخامت دیوار بزرگتر باشند.)



شکل ۳-۴ ابعاد به کار رفته در محاسبه ضرایب شکل سه‌بعدی

www.mohandesyar.com

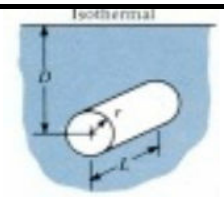
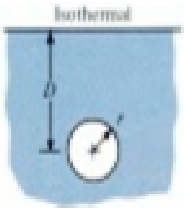
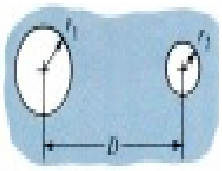
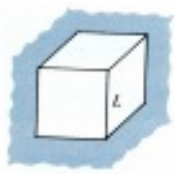
با توجه به شکل (۳-۴) داریم:

$$S_{wall} = \frac{A}{L} \qquad ؛S_{edge} = 0.54D \qquad ؛S_{corner} = 0.15L$$

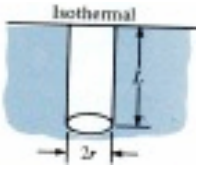
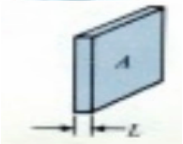
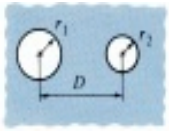
که در آن، A مساحت دیوار، L ضخامت دیوار و D طول یال می‌باشد.

توجه کنید که وقتی از روش مربع‌های منحنی‌الخط در محاسبات استفاده می‌شود، ضریب شکل به ازای واحد عمق به صورت نسبت $\frac{M}{N}$ داده می‌شود. (N تعداد افزایش خطوط درجه حرارت و M تعداد خطوط جریان حرارت می‌باشد.)

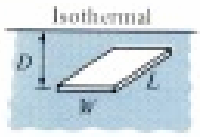
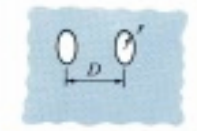
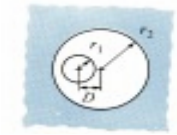
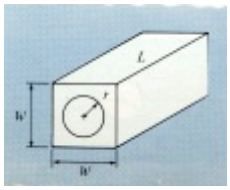
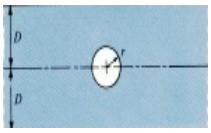
جدول ۳-۱ ضرایب شکل در هدایت

مشخصات فیزیکی	شکل	ضریب شکل	محدودیتها
استوانه همدما با شعاع r که درون محیطی بینهایت دفع شده است.		$\frac{2\pi l}{\cosh^{-1}(D/r)}$	$L \geq r$
		$\frac{2\pi l}{\ln(2D/r)}$	$L \geq r$ $D \geq 3r$
		$\frac{2\pi}{\ln\frac{L}{r}\left[1-\frac{\ln(L/2D)}{\ln(L/r)}\right]}$	$D \geq r$ $L \geq D$
کره همدما به شعاع r که در محیطی بینهایت دفن شده است.		$4\pi r$	
کره همدما به شعاع r که درون محیطی نیم‌بینهایت با سطوح همدما دفن شده است و اختلاف دما برابر اختلاف دمای سطح و دوردست می‌باشد.		$\frac{4\pi r}{1-r/2D}$	
رسانش گرمایی بین دو استوانه همدما به طول L که در محیطی بینهایت دفن شده‌اند.		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}\right)}$	$L \geq r$ $L \geq D$
مکعبی با اضلاع L که در محیطی بینهایت دفن شده است.		$8.24L$	

www.mohandesyar.com

$L \geq 2r$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(2L/r)}$		استوانه همدما به شعاع r که در محیطی نیم‌بینهایت مطابق شکل دفن شده است.
	$1.685L\left[\log(1+\dfrac{b}{a})\right]^{-0.95}\left(\dfrac{b}{c}\right)^{-0.078}$		متوازی‌السطوحی همدما که در محیطی نیم‌بینهایت با سطوح همدما دفن شده است.
جریان گرمایی یک بعدی	$\dfrac{A}{L}$		دیواره صاف
$L \geq r$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(r_0/r_i)}$		استوانه توخالی به طول L
	$\dfrac{4\pi r_o r_i}{r_o - r_i}$		کره توخالی
$D=0$	$4r$		حلقه نازک و افقی که در محیطی نیم‌بینهایت با سطوح همدما دفن شده است.
$D \geq 2$	$8r$		
$D/2r > 1$	$\dfrac{4\pi r}{\pi/2\tan^{-1}\left(r/2D\right)}$		
$\tan^{-1}(r/2D)$			
	$2\pi r$		نیم‌کره‌ای که در محیط نیمبینهایت با اختلاف دمای کره با دوردست دفن شده‌است.
	$\dfrac{4\pi r}{1+r/2D}$		کره همدما که در محیطی نیم‌بینهایت با سطوح عایق شده مدفون است.
$D > 5r_{\max}$	$\dfrac{4\pi r_2}{\dfrac{r_2}{r_1}\left[1-\dfrac{(r_1/D)^4}{1-(r_2/D)^2}\right]-\dfrac{2r_2}{D}}$		دو کره همدما که در محیطی بینهایت مدفونند.

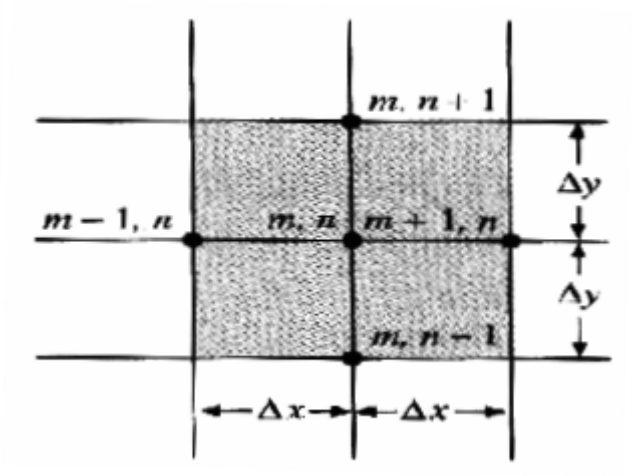
www.mohandesyar.com

صفحه نازکی به طول L که در محیطی نیم‌بینهایت با سطوح همدما دفن شده است.		$\frac{\pi W}{\ln(4W/L)}$	$D=0$
		$\frac{2\pi W}{\ln(4W/L)}$	$w>L$
		$\frac{2\pi W}{\ln(2W/L)}$	$D\geq W$
			$W>L$
			$W\geq L$
			$D>2W$
حلقه‌های موازی که در محیطی بینهایت دفن شده‌اند.		$\frac{4\pi r}{\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(r/D)\right]}$	$D>5r$
			r/D (in radians)
استوانه خارج از مرکز به طول L		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{r_1^2+r_2^2-D^2}{2r_1r_2}\right)}$	$L\geq r_2$
استوانه‌ای که در مرکز مکعب مستطیلی به طول L قرار گرفته است.		$\frac{2\pi L}{\ln(0.54W/r)}$	$L\geq W$
استوانه‌ای افقی به طول L که در مرکز یک صفحه بینهایت قرار دارد.		$\frac{2\pi L}{\ln(4D/r)}$	

۳-۵ آنالیز عددی(Numerical Analysis)

یک جسم دو بعدی که مطابق شکل (۳-۵) به مربع‌هائی به ابعاد واحد در جهت x و y تقسیم شده‌اند، در نظر بگیرید که در آن نقاط m نشان‌دهنده افزایش x ونقاط n نشان‌دهنده افزایش y است.

برای تعیین درجه حرارت نقاط تقاطع از معادله (۳-۱) بهره می‌گیریم.



شکل ۳-۵ آنالیز عددی

www.mohandesyar.com

از اختلاف محدود (finite difference) برای حدس دیفرانسیل افزایش در درجات و مختصات آن استفاده می‌کنیم. هر قدرخطوط به هم نزدیک‌تر باشند، نتیجه دقیق‌تر است.

گرادیان درجه حرارت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big]_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big]_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n}-T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\Big]_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\Big]_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n}-T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big]_{m,n} \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x}\Big]_{m+\frac{1}{2},n}-\frac{\partial T}{\partial x}\Big]_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\Big]_{m,n} \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial y}\Big]_{m+\frac{1}{2},n}-\frac{\partial T}{\partial y}\Big]_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta y} = \frac{T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

بنابراین معادله (۳-۱) به معادله زیر تقریب زده می‌شود:

$$\frac{T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}+\frac{T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}=0$$

اگر $\Delta x = \Delta y$ (شکل مربع)، خواهیم داشت:

$$T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}=0 \qquad (۲۴-۳)$$

چون ضریب انتقال حرارت را ثابت فرض کردیم، جریان حرارت را میتوان را بر حسب اختلاف درجه حرارت نوشت. معادله (۳-۲۴) بسادگی نشان می‌دهد که جریان حرارت خالص در هر نقطه (تقاطع اطلاع) در حالت دائمی صفر است.

اگر بخواهیم برای حالتی که تولید حرارت هم داریم، حساب کنیم؛ کافیست ترم $\frac{\dot{q}}{k}$ را بدان بیافزاییم:

$$\frac{T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}+\frac{T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

و برای حالتی که $\Delta x = \Delta y$ داریم:

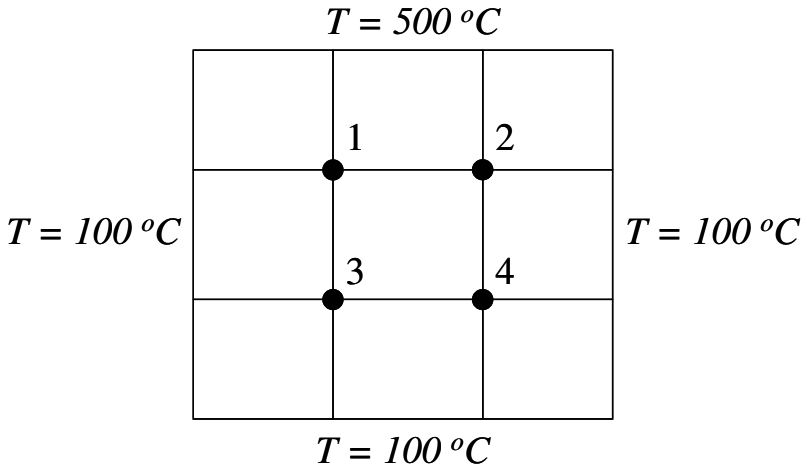
$$T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+\frac{\dot{q}(\Delta x)^2}{k}-4T_{m,n}=0 \qquad (۳-۲۴-الف)$$

www.mohandesyar.com

برای یکسان کردن متد، معادله (۳-۲۴-الف) را برای هر نقطه داخل جسم می‌نویسیم و نتیجه معادله را برای درجات حرارت مختلف در هر نقطه حل می‌کنیم.

مثال ۳-۱:

یک مثال ساده در شکل (۳-۶) نشان داده شده است. درجه حرارت نقاط ۱و۲و۳و۴ را بدست آورید. (با ذکر معادلات)



شکل ۳-۶

حل:

روش‌های حل در ادامه توضیح داده خواهند شد.

$$\left.\begin{aligned} &100+500+T_2+T_3-4T_1=0\\ &T_1+500+100+T_4-4T_2=0\\ &100+T_1+T_4+100-4T_3=0\\ &T_3+T_2+100+100-4T_4=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &T_1=T_2=250°C\\ &T_3=T_4=150°C \end{aligned}$$

زمانیکه درجه حرارت بدست آمد، جریان گرما از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$q=\sum k\,\Delta x\,\frac{\Delta T}{\Delta y}$$

جریان گرماها در مرزها به دو روش محاسبه می‌شود: یک بار به صورت جریان‌های هدایتی برای وجوه با دمای $500°C$ و بار دیگر به صورت جریان‌های سه وجه دیگر.اگر خانه‌ها را کوچک انتخاب کرده باشیم، پاسخها نباید زیاد متفاوت باشند.که در ادامه به تحقق این امر می‌پردازیم:

برای صفحه $500°C$:

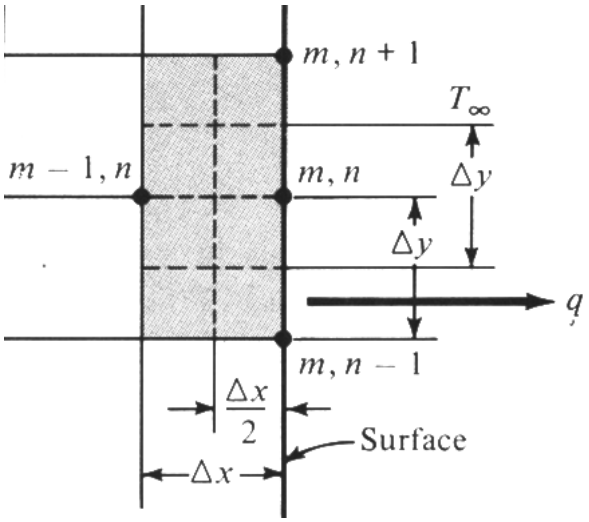
$$q=-k\,\frac{\Delta y}{\Delta x}[(250-500)+(250-500)]=500k$$

www.mohandesyar.com

برای صفحات $100°C$:

$$q = -k\,\frac{\Delta y}{\Delta x}[(250-100)+(150-100)+(150-100)+(150-100)+(250-100)] = -500k$$

مشاهده می‌کنید که هر دو عدد یک جریان را به ما می‌دهند.



شکل ۳-۷ جسم صلب با شرط مرزی جابجائی

وقتی جسم صلب یک شرط مرزی جابجائی داشته باشد، دماها را باید با روش دیگری غیر از آنچه گفته شد، محاسبه کنیم.

شکل (۳-۷) را در نظر بگیرید؛ رابطه تعادل انرژی برای نقطه (m,n) می‌شود:

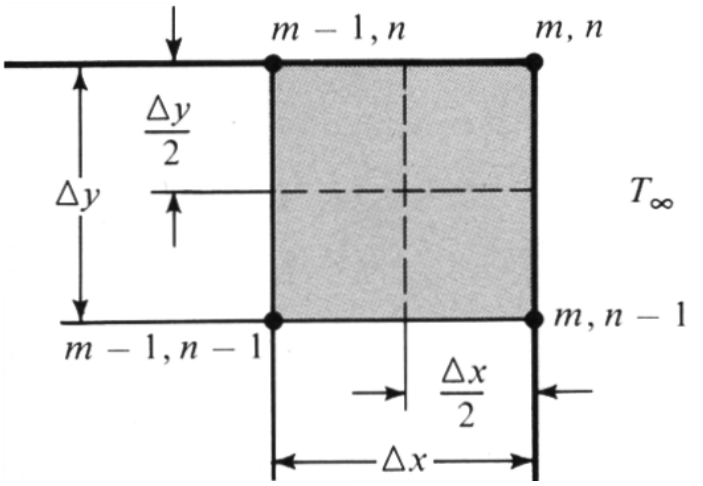
$$-k\,\Delta y\,\frac{T_{m,n}-T_{m-1,n}}{\Delta x} - k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{m,n}-T_{m,n+1}}{\Delta y} - k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{m,n}-T_{m,n+1}}{\Delta y} = h\Delta y\,(T_{m,n}-T_{\infty})$$

و اگر $\Delta x = \Delta y$ خواهیم داشت:

$$T_{m,n}\left(\frac{h\Delta x}{k}+2\right) - \frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - \frac{1}{2}(2T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}) = 0 \qquad (۲۵-۳)$$

چنین معادله‌ای باید برای هر گره (node) از سطح شکل (۳-۷) نوشته شود. لذا هرگاه در مرزها شرایط حالت جابجائی را داشته باشیم، معادله‌ای نظیر (۳-۲۵) استفاده می‌کنیم و معادله (۳-۲۴) را برای نقاط داخلی بکار می‌بریم.

www.mohandesyar.com



شکل ۳-۸ گوشه

معادله (۳-۲۵) برای سطح صاف با جابجائی بکار می‌رود، اما برای حالاتی نظیر سطوح عایق شده یا یک گوشه با شرایط جابجایی بکار نمی‌رود. برای گوشه نظیر شکل (۳-۸) داریم:

$$-k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_{m,n}-T_{m-1,n}}{\Delta x}-k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_{m,n}-T_{m,n-1}}{\Delta y}=h\frac{\Delta x}{2}(T_{m,n}-T_{\infty})+h\frac{\Delta y}{2}(T_{m,n}-T_{\infty})$$

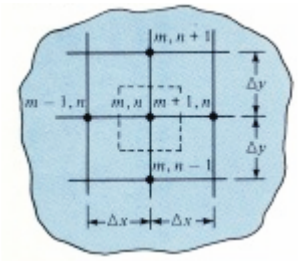
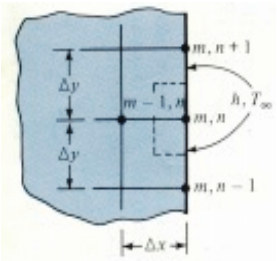
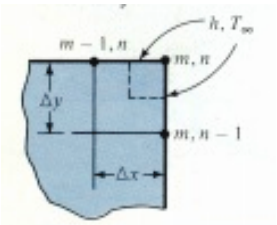
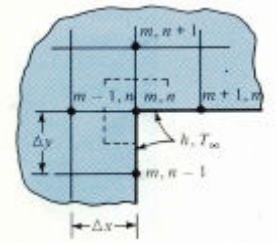
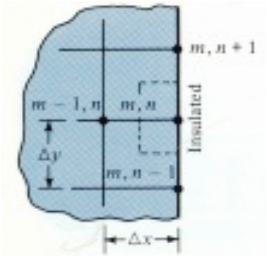
اگر $\Delta x=\Delta y$ خواهیم داشت:

$$2T_{m,n}(\frac{h\Delta x}{k}+1)-2\frac{h\Delta x}{k}T\infty-(T_{m-1,n}+T_{m,n-1})=0 \qquad (۳-۲۶)$$

در اشکال زیر انواع شرایط مرزی برای حالت مشابه داده شده است.

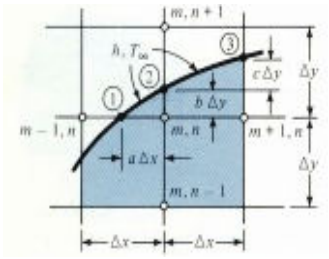
www.mohandesyar.com

جدول۳-۲ خلاصه‌ای از فرمول‌های گرهی برای محاسبات تفاضل محدود(خط‌چین ← حجم جزئی)

معادله گرهی برای افزایش‌های مساوی x و y (معادله دوم جهت استفاده در روش گوس-سایدل می‌باشد.)	موقعیت فیزیکی
$0=T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}$ $T_{m,n}=\left(T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}\right)/4$	الف)گره داخلی 
$0=\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty}+\frac{1}{2}(2T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1})$ $-(\frac{h\Delta x}{k}+2)T_{m,n}$ $T_{m,n}=\frac{T_{m-1,n}+(T_{m,n+1}+T_{m,n-1})/2+BiT_{\infty}}{2+Bi}$	ب)گره مرزی جابجایی* 
$0=2\frac{h\Delta x}{k}T\infty+(T_{m-1,n}+T_{m,n-1})-2(\frac{h\Delta x}{k}+1)T_{m,n}$ $T_{m,n}=\frac{(T_{m-1,n}+T_{m,n-1})/2+BiT_{\infty}}{1+Bi}$	ج)گوشه خارجی با مرز جابجایی 
$0=2\frac{h\Delta x}{k}T\infty+2T_{m-1,n}+2T_{m,n+1}+T_{m+1,n}+T_{m,n-1}$ $-2(3+\frac{h\Delta x}{k}+1)T_{m,n}$ $T_{m,n}=\frac{BiT_{\infty}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+(T_{m+1,n}+T_{m,n-1})/2}{3+Bi}$	د)گوشه داخلی با مرز جابجایی 
$0=T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+2T_{m-1,n}-4T_{m,n}$ $T_{m,n}=\left(T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+2T_{m-1,n}\right)/4$	ه)مرز عایق شده 

www.mohandesyar.com

و)گره داخلی نزدیک مرز منحنی**



$$0=\frac{2}{b(b+1)}T_2+\frac{2}{a+1}T_{m+1,n}+\frac{2}{b+1}T_{m,n-1}+\frac{2}{a(a+1)}T_1-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)T_{m,n}$$

ز)گره مرزی جابجایی روی مرز منحنی -گره ۲ از موقعیت "و" که در بالا امده است.***

$$0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}T_1+\frac{b}{\sqrt{c^2+1}}T_3+\frac{a+1}{b}T_{m,n}+\frac{h\Delta x}{k}(\sqrt{c^2+1}+\sqrt{a^2+b^2})T_\infty-\left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{a+1}{b}+(\sqrt{c^2+1}+\sqrt{a^2+b^2})\frac{h\Delta x}{k}\right]T_2$$

---

*با قرار دادن $H=0(Bi=0)$ می‌توان مرز جابجایی را به سطح عایق تبدیل کرد.

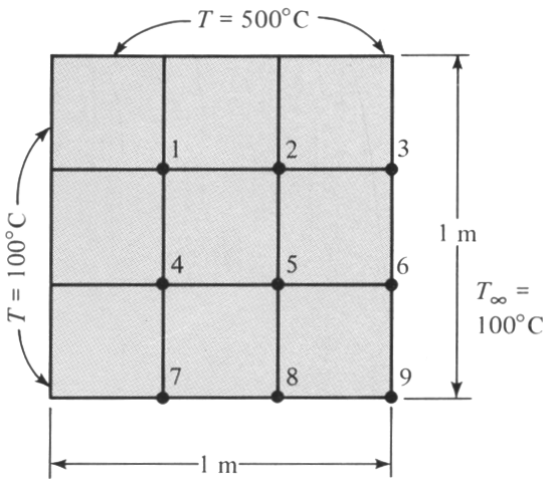
**این معادله با ضرب کردن فرمول‌بندی مقاومت در $4/(a+1)(b+1)$ به دست آمده است.

***این رابطه با تقسیم فرمول‌بندی مقاومت بر 2 به دست آمده است.

توجه: $Bi=\frac{h\Delta x}{k}$

مثال ۳-۲:

مربعی به ضلع واحد نظیر شکل (۳-۹) را در نظر بگیرید. با توجه به اعداد روی شکل، درجه حرارت نقاط ۱ تا ۹ و همچنین جریان حرارت در مرزها را حساب کنید.



شکل ۳-۹

www.mohandesyar.com

حل:

معادله نقاط گره‌های ۱ و ۲ و ۴ و ۵ بصورت زیر است.(معادله (۳-۲۴))

$$T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}=0$$

برای گره‌های ۳ و ۶ و ۷ و ۸ از معادله (۳-۲۵) داریم:

گره‌های ۳ و۶:

$$\begin{cases}2T_2+T_6+567-4.67T_3=0\\2T_5+T_3+T_9+67-4.67T_6=0\end{cases}$$

گره‌های ۷ و ۸:

$$\begin{cases}2T_4+T_8+167-4.67T_7=0\\2T_5+T_7+T_9+67-4.67T_8=0\end{cases}$$

و برای گره ۹ داریم:

$$T_6+T_8+67-2.67T_9=0$$

و لذا ۹ معادله و ۹ مجهول داریم که پاسخ نهائی بهمراه شکل (۳-۹) در بالا داده شده است. (روش‌های حل در انتهای فصل بحث شده‌اند.)

جریان حرارت در مرزها از دو طریق محاسبه می‌شود. نظیر جریان هدایت برای سطوح $100°C$ و $500°C$ و یا جابجائی برای دو سطح دیگر.

برای وجه با دمای $500°C$، جریان حرارت به "داخل" صفحه برابرست با:

$$q=\sum k\,\Delta x\,\frac{\Delta T}{\Delta y}=(10)[(500-280.67+500-330.30+(500-309.38)(\frac{1}{2})]=4843.4\frac{W}{m}$$

جریان گرمای "خروجی" از صفحه با دمای $100°C$ برابر است با:

$$q=\sum k\,\Delta x\,\frac{\Delta T}{\Delta y}=(10)[280.67-100+192.38-100+(157.70-100)(\frac{1}{2})]=3019\frac{W}{m}$$

جریان گرمای "خارج شده" از صفحه سمت راست برابر است با:

$$q=\sum h\Delta y\,(T-T_\infty)=(10)(\frac{1}{3})[309.38-100+217.19-100+(175.62-100)(\frac{1}{2})]=1214.6\frac{W}{m}$$

www.mohandesyar.com

و نهایتاً جریان گرمای "خروجی" از وجه تحتانی برابر است با:

$$q=\sum h\Delta x\,(T-T_{\infty})=(10)(\frac{1}{3})[(100-100)(\frac{1}{2})+157.7-100+184.71-100$$
$$+(175.62-100)(\frac{1}{2})]=600.7\frac{W}{m}$$

که جریان گرمای کل خارج شده عبارتست از:

$$q_{out}=3019+1214.6+600.7=4834.3\frac{W}{m}$$

اگر مقایسه کنیم، همین مقدار نیز از طریق هدایت به سطح بالائی نیز وارد شده است.

پاسخ نهائی

درجه حرارت	شماره گره
۲۸۰,۶۷	۱
۳۳۰,۳۰	۲
۳۰۹,۳۸	۳
۱۹۲,۳۸	۴
۲۳۱,۱۵	۵
۲۱۷,۱۹	۶
۱۵۷,۷۰	۷
۱۸۴,۷۱	۸
۱۷۵,۶۲	۹

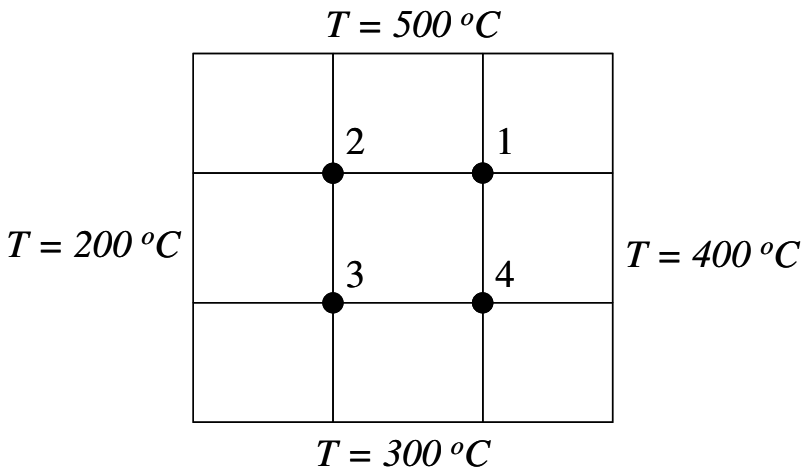
www.mohandesyar.com

۳- ۶ روش راحت‌نمائی تدریجی(Relaxation Technique)

روش تدریجی یکی از راه‌های حل سری معادلات جبری خطی بدون استفاده از کامپیوتر است. این روش معمولاً برای مسائل غیر تکراری که نسبتاً تعداد کمی گره داریم (در مبحث هدایت) استفاده می‌شود. برای توضیح این روش یک مثال حل می‌کنیم.

مثال ۳-۳:

درجه حرارت دائمی در چهار نقطه داخلی شکل(۳-۱۰) را حساب کنید.



شکل ۳-۱۰

حل:

به کمک معادله (۳-۲۴) داریم:

$$\rightarrow \begin{cases} 400+500+T_2+T_4-4T_1=0 \\ 500+200+T_1+T_3-4T_2=0 \\ 200+300+T_2+T_4-4T_3=0 \\ 300+400+T_1+T_3-4T_4=0 \end{cases}$$

که این در حقیقت سری، چهارمعادله جبری که چهار مجهول درجه حرارت گره دارد. روش راحت نمائی دارای حلی به ترتیبی زیر است:

۱. یک درجه حرارت مجهول را حدس میزنیم. حدس ابتدائی خوب کمک می‌کند محاسبات کمتر شود.

www.mohandesyar.com

۲. معمولاً حدس اول خطا است سمت راست هر کدام از گره‌ها غیر از صفر خواهد بود، یک خطا بعلت غیر دقیق مقدارفرضی داریم. نهایتاً صفر را در معادله، یک تا ۴ با R_1 ، R_2 ، R_3 و R_4 به ترتیب عوض می‌کنیم؛ یعنی:

$$\begin{cases} 400+500+T_2+T_4-4T_1=R_1 \\ 500+200+T_1+T_3-4T_2=R_2 \\ 200+300+T_2+T_4-4T_3=R_3 \\ 300+400+T_1+T_3-4T_4=R_4 \end{cases}$$

۳. یک جدول تغییر واحد، نظیر جدول زیر که نشان‌دهنده اثر یک درجه تغییر در درجه حرارت گره باقی مانده است.

	ΔR_1	ΔR_2	ΔR_3	ΔR_4
ΔT_1	-۴	+۱	۰	+۱
ΔT_2	+۱	-۴	+۱	۰
ΔT_3	۰	+۱	-۴	+۱
ΔT_4	+۱	۰	+۱	-۴

حال مجدداً مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱. طرف راست معادله (۳-۲۴) را معادل با $R_{m,n}$ قرار داده که باید آن را به صفر برسانیم. و درجات نقاط مختلف را حدس می‌زنیم.
۲. مقدار R را در هر نقطه بدست می‌آوریم.
۳. بزرگترین مقدار R را که مربوط به یکی از نقاط است صفر می‌کنیم و درجه حرارت آن را بدست می‌آوریم.
۴. با درجه حرارت جدید آن نقطه درجه حرارت‌های نقاط دیگر را بدست می‌آوریم.
۵. به همین ترتیب عمل می‌کنیم تا R تمام نقاط صفر شود

تذکر- اگر R=4 بشود خطا یک درجه است و اگر R=1 باشد خط ۰,۲۵ درجه. پس از بدست آوردن درجه حرارت از رابطه $q=\sum k\,\Delta x\,\frac{\Delta T}{\Delta y}$ و نتیجه باقیمانده اولیه بدست می‌آید. ستون سمت چپ مقدار تغییرات اولیه درجه حرارت فرضی را ثبت می‌نماید. توجه داشته باشید که روش تدریجی شروع می‌شود تا بزرگترین باقیمانده (یا شاید بوسیله ساختن یک بلوک تغییرات، یک روش مفید وقتی که باقیمانده‌ها یک علامت هستند.)

www.mohandesyar.com

	T_1	R_1	T_2	R_2	T_3	R_3	T_4	R_4
حدس اوّل	400	-25	325	+75	275	+75	350	-25
$\Delta T_2 = +20$	400	-5	345	-5	275	+95	350	-25
$\Delta T_3 = +25$	400	-5	345	+20	300	-5	350	0
$\Delta T_2 = +5$	400	-0	350	0	300	-5	350	0
R	0		0		0		0	
حل	400		350		300		350	

در مسئله فعلی باید با تقلیل R_2 و R_3 شروع کنیم: انتخاب اختیاری R_2 و پی‌گیری کردن روی تدریجی در این نقطه یک تدارک مناسب توسط جد.ل بالا بدیهی است. این، تسهیلات سریع تغییرات در باقی‌مانده و بازگشت به معادله است. توجه داشته باشید که تغییر T_2، باقی‌مانده گره ۱ و ۲ را تقلیل می‌دهد ولی متأسّفانه R_3 را افزایش می‌دهد.

اولین ردیف جدول فوق نشان می‌دهد که درجه حرارت باقی‌مانده جدید، آنها که تغییر کرده‌اند؛ زیرا آنها خط کشیده بوده است. مرحله بعدی، که بزرگترین نتبجه باقی مانده است و آن R_3 است. تغییر درجه حرارتی 25+ را در گره ۳ دنبال می‌کنیم، می‌بینیم $R_4 = 0$ می‌باشد. (این بدان معنی نیست که درجه حرارت صحیحی برای گره ۴ بدست آوردیم). ولی نسبتاً اینست که یک سری از مقدار درجه حرارت غیر صحیح کنونی اتفاق می‌افتد تا در معادله ۴ دقیقاً صدق می‌کند دنبال می‌کنیم. بزرگترین باقیمانده اینک R_2 است که با 5+درجه افزودن به T_2 به صفر تقلیل یافته است. این عمل همچنین مابقی باقیمانده‌ها را به صفر می‌رساند.یک کنترل توسط جایگذاری در معادلات ۱ تا ۴ صورت می‌گیرد.

۳-۷ روش تکرار گوس‌سایدل

در این روش از المان‌های مقاومتی استفاده می‌شود که وقتی تعداد نقاط زیاد باشد، می‌توان از این روش استفاده کرد.

از رابطه (۳-۳۱) استفاده می‌کنیم. درجه حرارت T_i را با استفاده مجموع مقاومت‌های نقاط اطراف آن و همچنین درجه نقاط اطراف بطریق زیر است.

$$T_i = \frac{q_i + \sum_j (T_j / R_{ij})}{\sum_j (1/R_{ij})} \qquad (۳۲-۳)$$

که استفاده از آن بصورت زیر است:

۱. برای T_iها یک حدس اولیه می‌زنیم.

۲. مقدار جدید T_i از رابطه (۳-۳۲) بدست می‌آید.

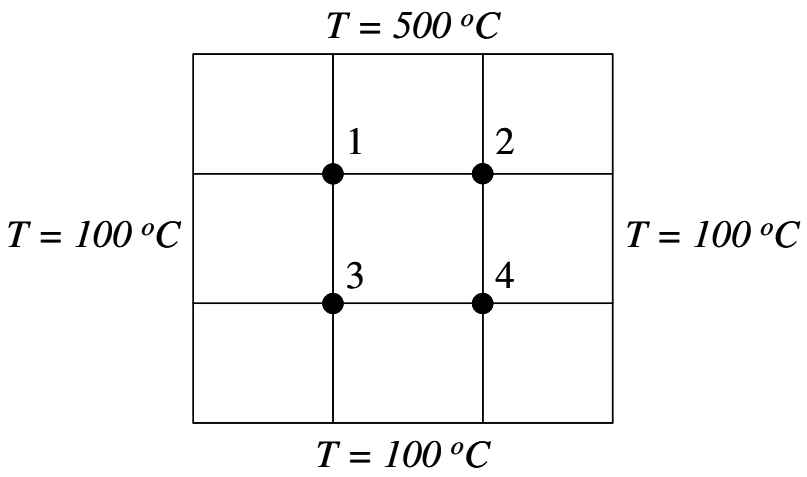
۳. مراحل را ادامه می‌دهیم تا درجات در مراحل متوالی اختلافشان –به اندازه کافی- کم شود.

www.mohandesyar.com

برای درک بیشتر این روش به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۴:

درجه حرارت نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ را از روش تکرارگوس‌سایدل بدست آورید.(۵ مرحله تکرار)



شکل ۳-۱۱

حل:

با چند حدس اولیه مناسب آغاز کرده و متغیر (T_i) را در سطر i ام بر حسب سایر متغیرها مرتب می‌کنیم. متغیر T_1را بر حسب اعداد حدس زده شده T_2 تا T_4 به دست می‌آوریم($T_1^{(1)}$).عدد به دست آمده را به همراه اعداد T_3 و T_4 در سطر دوم جایگذاری می‌کنیم تا به T_2 برسیم($T_2^{(1)}$).به همین ترتیب $T_3^{(1)}$ و$T_4^{(1)}$را بدست می‌آوریم.همین روش را تاجایی که مطلوب سوال باشد ادامه می‌دهیم.

$$T_1 = (T_2 + T_3 + 600)/4$$
$$T_2 = (T_1 + T_4 + 600)/4$$
$$T_3 = (T_1 + T_4 + 200)/4$$
$$T_4 = (T_3 + T_2 + 200)/4$$

n (شماره مراحل)	T_1	T_2	T_3	T_4
۰(حدس اولیه)	۳۰۰	۳۰۰	۲۰۰	۲۰۰
$T_i^{(1)}$	۲۷۵	۲۶۸,۷۵	۱۶۸,۷۵	۱۵۹,۳۸
$T_i^{(2)}$	۲۵۹,۳۸	۲۳۴,۶۹	۱۵۴,۶۹	۱۵۲,۳۵
$T_i^{(3)}$	۲۵۱,۷۶	۲۵۱,۰۳	۱۵۱,۰۳	۱۵۰
$T_i^{(4)}$	۲۵۰,۵۲	۲۵۰,۲۶	۱۵۰,۲۶	۱۵۰,۱۵
$T_i^{(5)}$	۲۵۰,۱۳	۲۵۰,۰۷	۱۵۰,۰۷	۱۵۰,۰۷

www.mohandesyar.com