فصل پنجم

جابـــــــجایی

www.mohandesyar.com

۵-۱ مقدمه

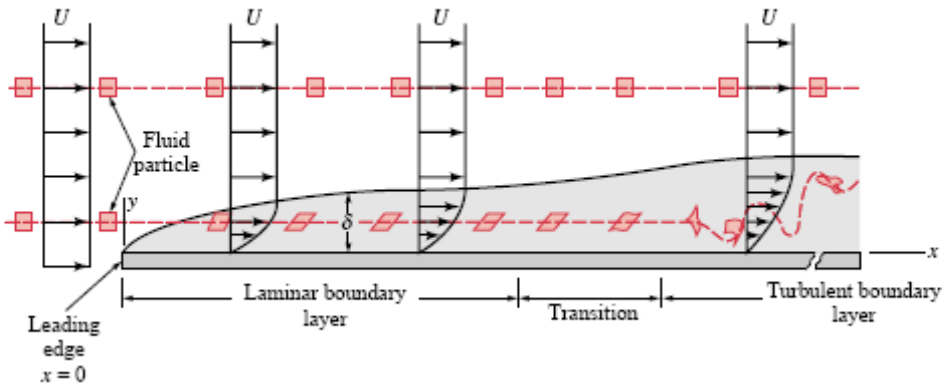
در فصلهای قبل انتقال گرما به روش رسانش بررسی شد.اکنون می خواهیم محاسبه انتقال گرما به روش جابجایی و به ویژه تکنیکهای بدست آوردن ضریب انتقال گرمای جابجایی h،را بررسی کنیم.در این فصل نخست برخی روابط دینامیک سیالات و لایه مرزی را بررسی خواهیم کرد.سپس رابطه موازنه انرژی را بر سیستم جریان اعمال می کنیم و اثرات جریان بر گرادیان دما را مطالعه خواهیم کرد. بحثهای ما در این فصل تحلیلی است و فقط به سیستمهای جابجایی اجباری مربوط می شود.

۵-۲ جریان سیال لزج

جریان روی یک ورق تخت مطابق شکل (۵-۱) را در نظر بگیرید.ابتدا در لبه جلوی ورق ناحیه ای ایجاد می شود که در ان نیروهای ناشی از لزجت احساس می شود.این نیروها بر حسب تنش برشی τ ،میان لایه های سیال توصیف می شوند.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (۱-۵)$$

ثابت تناسب μرا لزجت دینامیکی گویند که واحد آن $\frac{N.s}{m^2}$ است. ناحیه ای از جریان را که در لبه جلو ورق تولید می شود را لایه مرزی گویند .برای نشان دادن موقعیت لایه مرزی از یک نقطه اختیاری استفاده می شود که در آن سرعت ۹۹ درصد سرعت جریان آزاد است.



شکل ۵-۱ نمودار نشان دهنده جریان لایه مرزی مختلف بر روی یک ورق تخت

www.mohandesyar.com

ابتدا گسترش لایه مرزی به صورت آرام است، اما در فاصله بحرانی از لبه جلو ،بسته به میدان جریان و خواص سیال،آشفگیهای کوچکی ایجاد می شود.این آشفگیها تقویت می شوند و پس از یک فرآیند گذرا جریان متلاطم می شود. پس لایه مرزی به ۳ ناحیه تقسیم می شود.

۱- آرام

۲- گذرا(نیمه آشفته)

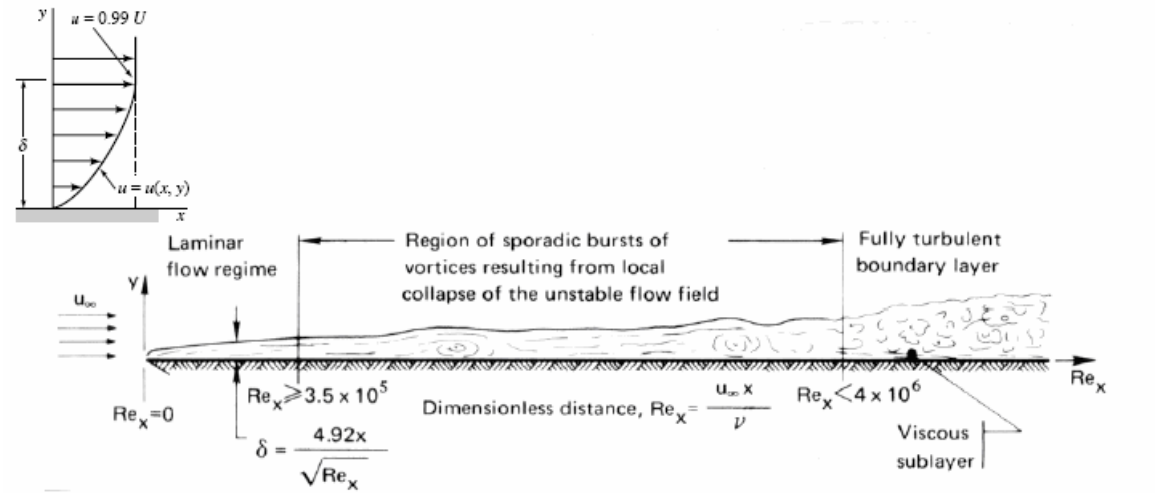
۳- آشفته

مرز سه قسمت بالا با عدد رینولدز معین می شود :

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} \qquad (۲-۵)$$

که در آن u_∞ سرعت جریان آزاد، x فاصله از جلو ورق، ν برابر لزجت سینماتیکی است.فرآیندیا انتقال از جریان آرام به متلاطم هنگامی رخ می دهد که $\mathrm{Re}_x > 5\times10^5$.باید توجه داشت عدد رینولدز بحرانی در وضعیتهای عملی وابسته به شرایط زبری سطح و میزان تلاطم جریان آزاد بستگی دارد.در واقع فرایند گذار،فرآیندی است که گستره ای از اعداد رینولدز،از گذار کامل تا جریان متلاطم را در بر می گیرد؛عدد رینولدز جریان متلاطم معمولا ۲ برابر عدد رینولدز در ناحیه گذرا است.

شکلهای تقریبی نیمرخ سرعت جریان آرام و متلاطم در شکل (۵-۱) نشان داده شده است. نیمرخ جریان آرام تقریبا سهموی است در حالیکه نیمرخ جریان متلاطم در قسمت نزدیک به دیوار تقریبا خطی است.این قسمت خطی ناشی از زیر لایه آرامی است که خیلی نزدیک به سطح است.خارج از این زیر لایه ، نیمرخ سرعت تقریبا تخت است.



شکل ۵-۲ رابطه جریان سیال لزج و عدد رینولدز

در جریان آرام ملکولها می توانند از یک لایه به لایه دیگر بروند و اندازه حرکتی متناسب با سرعت سیال با خود حمل کنند،بنابراین یک انتقال خالص خالص اندازه حرکت از نواحی سرعت بالا به نواحی کم سرعت

www.mohandesyar.com

وجود دارد که نیرویی در جهت جریان تولید می کند.در ناحیه جریان متلاطم لایه های سیال از هم متمایز نیستند و در این حالت برای بیان کیفی فرایند جریان متلاطم به جای بررسی حرکت میکروسکوپی مولکولهای انتقال ماکروسکوپی توده بزرگی از سیال حامل انرژی و اندازه حرکت را ملاحظه کرد.لذا در جریان متلاطم نیروهای برشی ،لزجت و رسانندگی گرمایی از مقادیر متناظر در جریان آرام بیشتر است.

جریان درون لوله را در نظر بگیرید.لایه مرزی در ورودی لوله تشکیل می شودو سرانجام لایه مرزی تمام لوله را پر می کند که این جریان را جریان کاملا توسعه یافته می گویند.اگر جریان آرام باشد نیمرخ سرعت سهموی است.در حالیکه اگر جریان متلاطم باشد نیمرخ تا حدودی تخت به نظر می رسد.در داخل لوله نیز عدد رینولدز به عنوان معیاری برای جریانهای آرام و آشفته استفاده می شود :

$$\mathrm{Re}_d = \frac{u_m d}{\nu} > 2300 \qquad (۳-۵)$$

رابطه پیوستگی برای جریان یک بعدی در لوله برابر است با :

$$\dot{m} = \rho\, u_m A \qquad (۴-۵)$$

سرعت جرم به صورت زیر تعریف می شود :

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho\, u_m \qquad (۵-۵)$$

بنابراین عدد رینولدز را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Gd}{\mu} \qquad (۶-۵)$$

۵-۳ جریان سیال غیر لزج

اگر چه در عمل سیال بدون ویسکوزیته وجود ندارد ولی تحت شرایطی می توان آنرا بدون لزجت در نظر گرفت.برای مثال در ورق تخت در فواصل دور از ورق،جریان به صورت غیر لزج رفتار می کند.

اگر موازنه نیروهای وارد بر یک المان سیال تراکم ناپذیر بنویسیم و این نیروها را با تغییر در اندازه حرکت المان سیال برابر بگیریم، به معادله برنولی برای سیال در امتداد خط جریان می رسیم.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{V^2}{g} = cons \qquad (۵-۷- \text{الف})$$

و به صورت دیفرانسیلی

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{VdV}{g_c} = 0 \qquad (۵-۷- \text{ب})$$

www.mohandesyar.com

که در روابط بالا ρ جرم مخصوص سیال، p فشار در یک نقطه از جریان و V سرعت جریان سیال در آن نقطه است.

اگر سیال تراکم پذیر باشد،باید یک معادله انرژی نوشته شود که در آن تغییرات انرژی گرمایی داخلی سیستم منظور گردد :

$$i_1 + \frac{1}{2g_c}V_1^2 + Q = i_2 + \frac{1}{2g_c}V_2^2 + W_k \qquad (۸-۵)$$

که در آن i آنتالپی است و به صورت زیر تعریف می شود :

$$i = e + pv \qquad (۹-۵)$$

که در آن e انرژی داخلی ، Q گرمای اضافه شده به حجم کنترل، W_k کار خالص انجام شده در طی فرآیند و v حجم ویژه سیال است. حالت ۱ ورودی به حجم کنترل و حالت ۲ خروجی از حجم کنترل بیان می کنند.برای محاسبه افت فشار در جریان تراکم پذیر از روابط زیر استفاده می کنیم :

$$p = \rho RT \qquad \Delta e = c_v \Delta T \qquad \Delta i = c_p \Delta T$$

ثابت گاز برای یک گاز بخصوص بر حسب ثابت جهانی گازها یعنی $\Re$ داده می شود :

$$R = \frac{\Re}{M}$$

که در آن M وزن ملکولی و $\Re = 8314.5 J/kg.mol.K$ است. برای حل یک مسئله ویژه باید فرآیند را مشخص کنیم.

برای مثال،جریان آدیاباتیک و برگشت پذیر از میان یک شیپوره روابط زیر را بدست می دهند :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2$$

$$\frac{p_o}{p} = (1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = (1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

که در روابط بالا T_0, p_0, ρ_0 خواص حالت رکود، γ نسبت گرماهای ویژه یعنی c_p / c_v و M عدد ماخ است :

$$M = \frac{V}{a}$$

که a سرعت موضعی صوت است و برای یک گاز ایده آل به صورت زیر محاسبه می شود :

$$a = (\gamma g_c RT)^{0.5} \qquad (۱۰-۵)$$

اگر هوا مانند گاز ایدهآل رفتار کند معادله بالا به صورت زیر در می آید :

$$a = 20.045\sqrt{T} \qquad (۱۱-۵)$$

که T بر حسب درجه کلوین است.

www.mohandesyar.com

۵-۴ لایه مرزی آرام بر روی یک ورق تخت

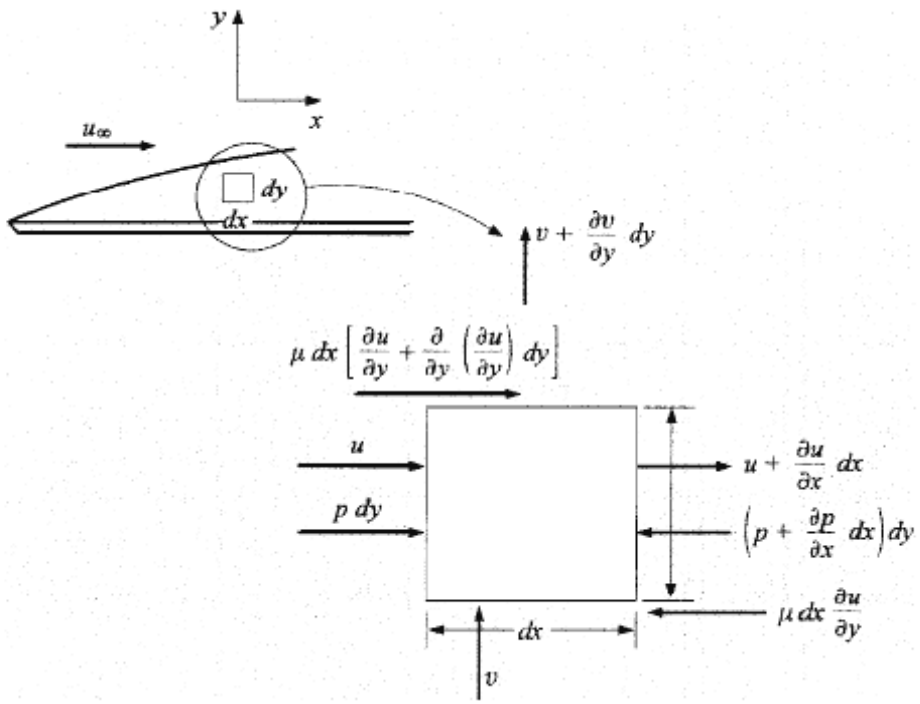
المان حجم کنترل نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید.برای لایه مرزی با استفاده از موازنه نیرو و اندازه حرکت وارد بر این المان،معادله حرکت را بدست می آوریم.برای ساده سازی فرضهای زیر را به کار می بریم :

۱- سیال تراکم ناپذیر و حالت پایا است.

۲- در جهت عمود بر ورق تغییرات فشار وجود ندارد.

۳- سرعت ثابت است.

۴- نیروهای برشی لزج در جهت y ناچیز است.



شکل ۵-۳ المان حجم کنترل در لایه مرزی آرام

از قانون دوم نیوتن استفاده می کنیم.بنابراین حجم کنترل المانی مانند شکل(۵-۳) در نظر می گیریم.برای این سیستم،موازنه نیرو به صورت زیر نوشته می شود :

افزایش شار اندازه حرکت در جهت $\sum F_x = x$

اگر در جهت z عمق را واحد فرض کنیم اندازه حرکت ورودی از رویه سمت چپ در واحد زمان به صورت زیر است :

$$\rho\, udyu = \rho\, u^2 dy$$

جرم ورودی به رویه سمت چپ در واحد زمان برابر است با

$$\rho\, udy$$

www.mohandesyar.com

جریان جرم خروجی از رویه سمت راست برابر است با

$$\rho(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)dy$$

و اندازه حرکت خروجی از رویه سمت راست برابر است با

$$\rho(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)^2 dy$$

جریان جرم ورودی از رویه پایینی برابر است با

$$\rho\, vdx$$

جریان جرم خروجی از رویه بالایی برابر است با

$$\rho(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy)dx$$

از موازنه جرم المان داریم :

$$\rho\, udy+\rho\, vdx=\rho(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)dy+\rho(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy)\, dx$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۱۲-۵)$$

که (۵-۱۲) معادله پیوستگی برای لایه مرزی است.

اندازه حرکت در جهت x که از رویه پایینی برابر است با :

$$\rho vudx$$

و اندازه حرکت در جهت x که از رویه بالایی خارج می شود عبارت است از :

$$\rho(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy)(u+\frac{\partial u}{\partial y}dy)dx$$

نیروی فشاری خالص در جهت حرکت برابر است با :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\ dx\ dy$$

نیروی برشی لزج وارد بر رویه پایینی برابر است با

$$-\mu\ \frac{\partial u}{\partial y}\ dx$$

و نیروی برشی وارد بر رویه بالایی برابر است با

$$\mu\ dx\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})dy\right]$$

نیروی برشی خالص در سوی حرکت از مجموع مقادیر بالا بدست می آید:

$$\textbf{نیروی برشی لزج خالص} = \mu\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dx\ dy$$

www.mohandesyar.com

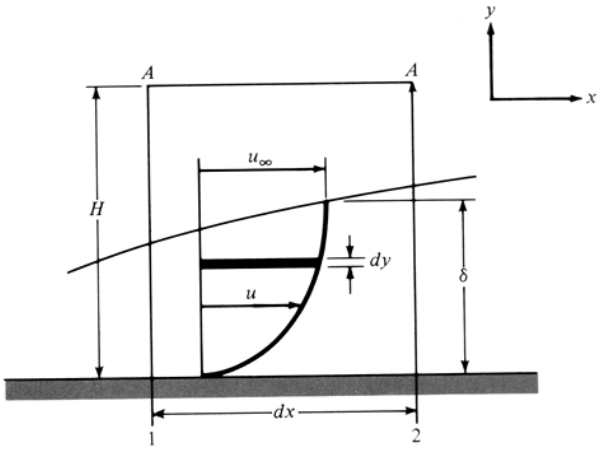
با برابر قرار دادن مجموع نیروهای برشی لزج و نیروهای فشاری با انتقال انـدازه حرکـت خـالص در جهـت x داریم :

$$\rho(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (۱۳-۵)$$

این معادله اندازه حرکت برای لایه مرزی با خواص ثابت است.این معادله را می توان برای بسیاری از شـرایط مرزی به طور دقیق حل کرد . در ادامه فصل یک روش تقریبی که توسط فومن کارمن ارائه شده مطـرح مـی گردد.

۵-۴-۱ محاسبه ضخامت لایه مرزی

المان نشان داده شده در شکل (۵-۴) را در نظر بگیرید.فرض کنید ضخامت لایه مرزی برابر δ اسـت.موازنـه نیرو و مومنتوم را برای حجـم کنتـرل محصـور توسـط صـفحات $1,2,A-A$ و دیـوار جامـد مـی نویسـیم و همچنین $H>\delta$



شکل ۵-۴ المان حجم کنترل برای بررسی انتگرال‌گیری در لایه مرزی آرام

جرم عبوری از صفحه ۱ عبارت است از

$$\int_0^H \rho u\ dy \qquad (الف)$$

و اندازه حرکت عبوری از صفحه۱ برابر است از

$$\int_0^H \rho\ u^2 dy$$

اندازه حرکت عبوری از صفحه۲ برابر است با

$$\int_0^H \rho\ u^2 dy+\frac{d}{dx}(\int_0^H \rho\ u^2 dy)dx \qquad (ج)$$

www.mohandesyar.com

جرم عبوری از صفحه ۲ عبارت است از:

$$\int_0^H \rho\ udy + \frac{d}{dx}(\int_0^H \rho\ udy)dx \qquad (د)$$

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho\ udy\right)dx$$

با در نظر گرفتن بقای جرم و این واقعیت که هیچ جرمی از دیوار جامد به حجم کنترل وارد نمی شود جرم افزوده شده در عبارت (د) افزون بر آنچه در عبارت (الف) است،باید از صفحه $A-A$ وارد شود. اندازه حرکت در جهت x این جرم عبارت است از

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho udy\right)dx$$

از این رو اندازه حرکت خالص خروجی از حجم کنترل به صورت زیر است :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho^2 udy\right)dx - u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho\ udy\right)dx$$

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho\ udy\right)dx = \frac{d}{dx}\left(u_\infty \int_0^H \rho\ udy\right)dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho\ udy\right)dx \qquad (۱۴-۵)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho\ uu_\infty dy\right)dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho\ udy\right)dx$$

نیروی برشی در دیوار برابر است با

$$-\tau_w dx = -\left(\mu\ dx \frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

چون شیب سرعت در لایه مرزی صفر است،هیچ نیروی برشی در صفحه $A-A$ وجود ندارد.با مساوی قرار دادن نیروهای وارد بر المان با افزایش اندازه حرکت و ساده کردن داریم :

$$-\tau_w - \frac{dp}{dx}H = -\rho \frac{d}{dx}\int_0^H (u_\infty - u)udy + \frac{du_\infty}{dx}\int_0^H \rho u\ dy \qquad (۱۵-۵)$$

اگر فشار جریان ثابت باشد :

$$\frac{dp}{dx} = 0 = -\rho\, u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \qquad (۱۶-۵)$$

برای شرایط فشار ثابت معادله انتگرالی لایه مرزی به صورت زیر بدست می آید :

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)udy = \tau_w = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} \qquad (۱۷-۵)$$

www.mohandesyar.com

برای تحلیل تقریبی ابتدا شرایطی را که تابع سرعت در آن صدق می کند، استخراج می کنیم :

الف) $y=0 \qquad u=0$

ب) $y=\delta \qquad u=u_\infty$

ج) $y=\delta \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0$

برای شرایط فشار ثابت معادله (۵-۱۳) چنین نتیجه می دهد:

د) $y=0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

تابع سرعت را به صورت کلی زیر در نظر می گیریم :

$$u=C_1+C_2y+C_3y^2+C_4y^3 \qquad (۵-۱۸)$$

با استفاده از چهار شرط (الف)تا (د) داریم :

$$\frac{u}{u_\infty}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (۵-۱۹)$$

با قرار دادن سرعت در معادله (۵-۱۷) داریم،

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho u^2{}_\infty\int_0^\delta\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1-\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy\right\}=\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}=\frac{3}{2}\frac{\mu\ u_\infty}{\delta}$$

با دیفرانسیل گیری عبارت زیر بدست می آید :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{39}{280}\rho u^2{}_\infty\delta\right)=\frac{3}{2}\frac{\mu\ u_\infty}{\delta}$$

چون ρ, u_∞ ثابت هستند، می توان متغیرها را از هم جدا کرد :

$$\frac{\delta^2}{2}=\frac{140}{13}\frac{vx}{u_\infty}+const$$

بنابراین در $x=0, \delta=0$ داریم :

$$\delta=4.64\sqrt{\frac{vx}{u_\infty}} \qquad (۵-۲۰)$$

این رابطه را بر حسب عدد رینولدز می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4.64}{\mathrm{Re}_x{}^{0.5}} \qquad (۵-۲۱)$$

اگر معادله لایه مرزی را به صورت دقیق حل کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{\delta}{x}=\frac{5}{\mathrm{Re}_x{}^{0.5}} \qquad (۵-۲۱-\text{الف})$$

www.mohandesyar.com

۵-۵ معادله انرژی لایه مرزی

المان حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۵-۵) را در نظر بگیرید،برای ساده سازی فرضـهای زیـر را مـی کنیم :

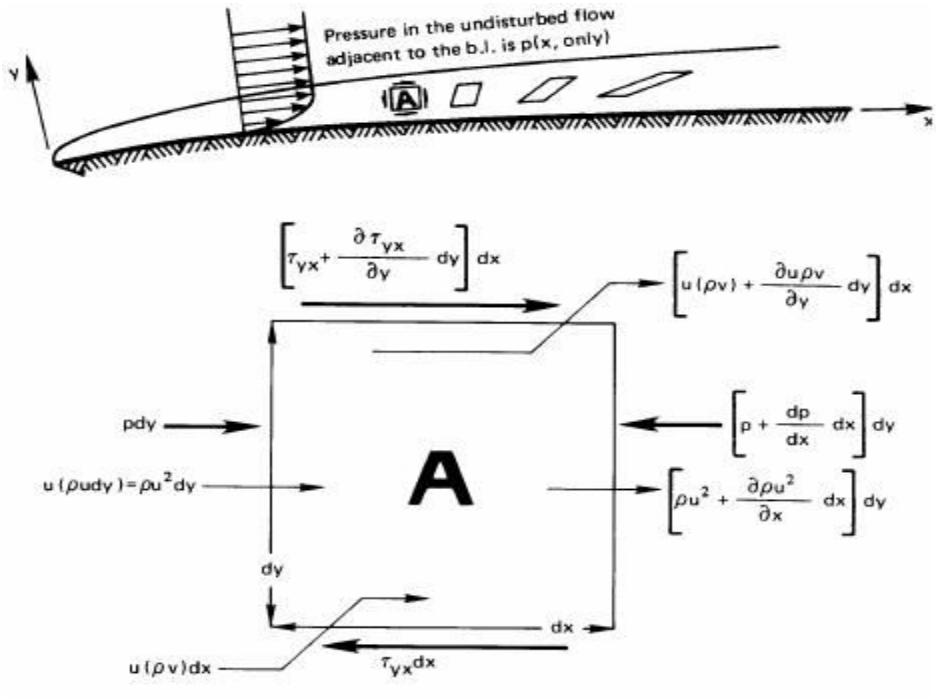
۱-جریان پایا و تراکم ناپذیر است.

۲-لزجت،رسانندگی گرمایی گرمای ویژه ثابت است.

۳-از رسانندگی گرمایی در جهت جریان چشمپوشی می کنیم.

بنابراین برای المان نشان داده شده موازنه انرژی به صورت زیر نوشته می شود:

+ انرژی منتقل شده از طریق جا به جایی به رویه پایینی+انرژی منتقل شده از طریق جا به جایی به رویه سمت چپ
+ کار خالص لزجت انجام شده روی المان + گرمای منتقل شده از طریق رسانش به رویه پایینی
= انرژی خارج شده از طریق جا به جایی از رویه سمت راست
انرژی خارج شده از طریق رسانش از رویه بالایی + انرژی خارج شده از طریق جا به جایی از رویه بالایی



شکل ۵-۵ المان حجم کنترل برای موازنه انرژی در لایه مرزی

نیروی برشی لزج برابر است با :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

www.mohandesyar.com

و مسافتی که در واحد زمان نسبت به حجم کنترل $dxdy$ حرکت می کند برابر است با :

$$\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

بنابراین انرژی لزج خالص المان برابر است با :

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

با نوشتن موازنه انرژی و چشمپوشی از دیفرانسیلهای مرتبه دوم داریم :

$$\rho\ c_p\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dxdy = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dxdy+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

با تقسیم رابطه پیوستگی بر $\rho\ c_p$ خواهیم داشت :

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu}{\rho\ c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (۲۲-۵)$$

که (۵-۲۲) معادله انرژی لایه مرزی آرام است.در سیالهایی که سرعت جریان آنها پایین است کار لزجت قابل صرفنظرکردن است.اگر نسبت زیر کوچک باشد یعنی:

$$\frac{u}{\rho\ c_p\alpha}\frac{u^2{}_\infty}{T}<<1 \qquad (۲۳-۵)$$

در این صورت اتلاف لزجت در مقایسه با رسانش،کوچک است.با معرفی عدد پرانتل رابطه(۵-۲۳) را باز نویسی می کنیم :

$$\Pr=\frac{\nu}{\alpha}=\frac{c_p\mu}{k}$$

$$\Pr\frac{u^2{}_\infty}{c_pT}<<1 \qquad (۲۴-۵)$$

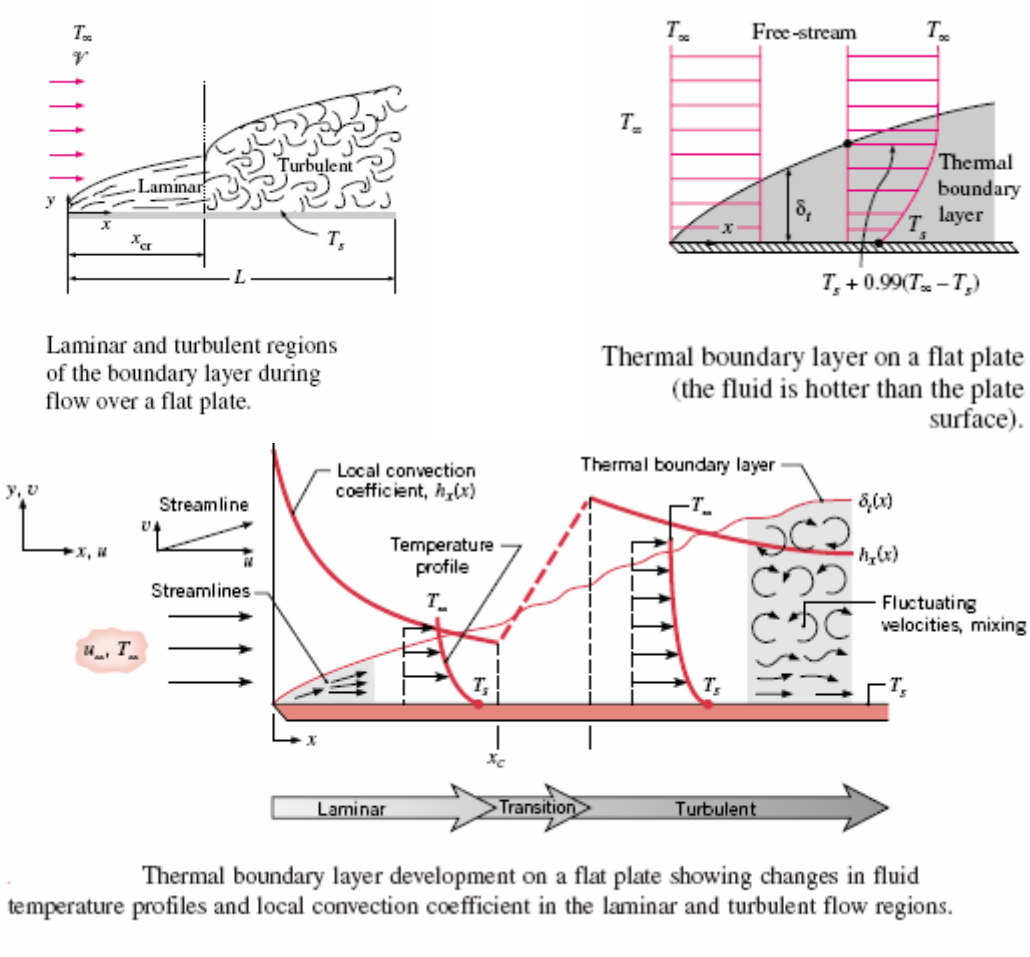
بنابراین برای جریان تراکم ناپذیر با سرعت کم داریم :

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (۲۵-۵)$$

۵-۶ لایه مرزی گرمایی

درست همانند لایه مرزی هیدرودینامیکی که به صورت ناحیه ای تعریف می شود که در آن نیروهای لزجت احساس می شود ،لایه مرزی گرمایی را می توان به صورت ناحیه ای تعریف کرد که در آن گرادیانهای دما وجود دارد.این گرادیانهای دما از تبادل گرما میان سیال و دیوار ناشی می شوند.

www.mohandesyar.com



Laminar and turbulent regions of the boundary layer during flow over a flat plate.

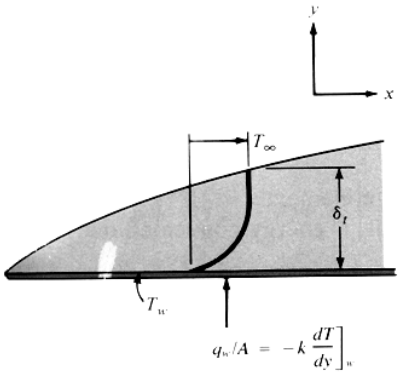
Thermal boundary layer on a flat plate (the fluid is hotter than the plate surface).

Thermal boundary layer development on a flat plate showing changes in fluid temperature profiles and local convection coefficient in the laminar and turbulent flow regions.

شکل ۵-۶ نمایش لایه مرزی گرمایی

سیستم شکل (۵-۷) را در نظر بگیرید.دمای دیوار T_w و دمای سیال خارج از لایه مرزی گرمایی T_∞ است و ضخامت لایه مرزی گرمایی با δ_t نشان داده می شود.سرعت سیال روی سطح دیوار صفر است و انتقال گرما به داخل سیال از طریق رسانش صورت می گیرد.گرمای موضعی بر واحد سطح ، q'' به صورت زیر است :

$$\frac{q}{A} = q'' = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{\text{wall}}$$



شکل ۵-۷ نیمرخ دما در لایه مرزی گرمایی

www.mohandesyar.com

$$\frac{q}{A} = q'' = -\left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{wall} \qquad (۲۷-۵)$$

$$q'' = h(T_w - T_\infty) \qquad (۲۸-۵)$$

$$h = \frac{-k(\partial T / \partial y)_{wall}}{T_w - T_\infty} \qquad (۲۹-۵)$$

شرایطی که توزیع دما باید در آنها صدق کند عبارتند از :

الف) $T = T_w \qquad y = 0$

ب) $\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad y = \delta_t$

ج) $T = T_\infty \qquad y = \delta_t$

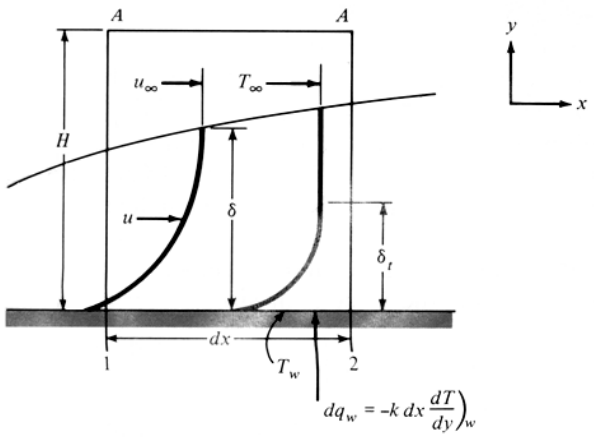
د) $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad y = 0$

شرایط بالا را می توان به صورت چند جمله ای درجه سوم نوشت، لذا خواهیم داشت :

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \qquad (۳۰-۵)$$

حجم کنترل محصور به سطوح ۱و۲و $A - A$ و دیوار را در شکل (۵-۸) در نظر بگیرید.فرض می شود لایه مرزی گرمایی از لایه مرزی هیدرودینامیکی باریکتر است.موازنه انرژی را می نویسیم :

انرژی داخل شده از طریق جابجایی+کار لزجت درون المان=انرژی خارج شده از طریق جابجایی (۳۱-۵)



شکل ۵- ۸ حجم کنترل برای بررسی انتگرالی انرژی لایه مرزی

www.mohandesyar.com

انرژی داخل شده از طریق جابجایی به سطح ۱ برابر است با :

$$\rho\ c_p \int_0^H uT\ dy$$

انرژی جابجایی خروجی از سطح ۲ برابر است با :

$$\rho\ c_p \left(\int_0^H uT\ dy \right) + \frac{d}{dx}\left(\rho\ c_p \int_0^H uT\ dy \right) dx$$

جریان جرمی از طریق سطح $A-A$ چنین است :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho\ u dy \right) dx$$

و این جرم مقدار انرژی زیر را با خود حمل می کند :

$$c_p T_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho\ u dy \right) dx$$

کار خالص لزجت در المان برابر است با :

$$\mu \left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dy \right] dx$$

و انتقال گرما در دیوار برابر است با :

$$dq_w = -k dx \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right]_w$$

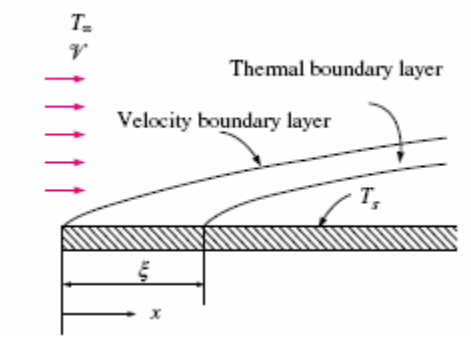
با مرتب کردن جمله ها داریم :

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T) u\ dy \right] + \frac{\mu}{\rho\ c_p}\left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dy \right] = \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right]_w \qquad (۳۲-۵)$$

این معادله انتگرالی انرژی در لایه مرزی با خواص ثابت و دمای جریان آزاد T_∞ است.برای محاسبه انتقال گرما در دیوار کافی است عبارتی برای ضخامت لایه مرزی گرمایی استخراج کنیم که بتوان آنرا همراه معادلات (۵-۲۹) و (۵-۳۰) برای تعیین ضریب انتقال گرما به کار برد.به دلیل کم بودن سرعت از جمله مربوط به لزجت چشمپوشی می کنیم.فرض می کنیم در ورق مورد نظر لایه مرزی هیدرودینامیکی از لبه جلو ورق ایجاد شده و گرمایش از $x = x_0$ شروع می شود .با قرار دادن توزیع دمای (۵-۳۰) و توزیع سرعت (۵-۱۹) در (۵-۳۲) و چشمپوشی از جمله لزجت در نهایت خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T) u\ dy \right] = \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right]_w = \frac{3\alpha\theta_\infty}{2\delta_t}$$

www.mohandesyar.com



شکل ۵-۹ جریان پیرامون یک صفحه صاف با طول اولیه گرم نشده

چون لایه مرزی گرمایی باریکتر از لایه مرزی هیدرودینامیکی است فقط لازم است تا $y=\delta_t$ انتگرال گیری کنیم.با انجام محاسبات و جایگذاری $\xi=\frac{\delta_t}{\delta}$ و چشمپوشی از ξ^4 داریم :

$$\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left[\delta\left(\frac{3}{20}\xi^2-\frac{3}{280}\xi^4\right)\right]=\frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\delta\xi} \qquad (۳۳-۵)$$

$$\frac{3}{20}\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}(\delta\xi^2)=\frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\xi\delta} \qquad (۳۴-۵)$$

با دیفرانسیل گیری و ساده کردن داریم :

$$\delta\, d\delta=\frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty}dx$$

$$\delta^2=\frac{280}{13}\frac{\nu x}{u_\infty}$$

لذا داریم :

$$\xi^3+4x\xi^2\frac{d\xi}{dx}=\frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu} \qquad (۳۵-۵)$$

با توجه به اینکه :

$$\xi^2\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\xi^3$$

معادله (۵-۳۵) خطی است و حل کلی آن به صورت زیر است :

$$\xi^3=Cx^{-3/4}+\frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu}$$

شرایط مرزی عبارتند از :

$$\delta_t=0 \qquad x=x_0$$
$$\xi=0 \qquad x=x_0$$

حل نهائی به صورت زیر است :

$$\xi=\frac{\delta_t}{\delta}=\frac{1}{1.026}\Pr^{-1/3}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3} \qquad (۳۶-۵)$$

www.mohandesyar.com

هنگامی که تمام طول ورق گرم شود :

$$\Pr = \frac{\nu}{\alpha} \qquad (۳۷-۵)$$

$$\xi = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1.026}\Pr^{-1/3} \qquad (۳۸-۵)$$

درتحلیل قبلی فرض بر این بود که $\Pr < 1$ که این فرض برای سیالهای با عدد پرانتل بزرگتر از 0.7 که بیشتر مایعات و گازها از این دسته اند رضایت بخش است اما فلزات مایع مستثنی هستندزیرا عدد پرانتل آنها حدود 0.01 است.

عدد پرانتل پارامتری است که ضخامت نسبی لایه مرزی هیدودینامیکی و لایه مرزی گرمایی را بهم مربوط می کند.اگر از یک سیستم واح استفاده شود عدد پرانتل بی بعد می شود:

$$\Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho\, c_p} = \frac{c_p \mu}{k} \qquad (۳۹-۵)$$

با بازگشت به تحلیل داریم :

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_w}{T_\infty - T_\infty} = \frac{3}{2}\frac{k}{\delta_t} = \frac{3}{2}\frac{k}{\xi\delta} \qquad (۴۰-۵)$$

با قرار دادن ضخامت لایه مرزی هیدودینامیکی از معادله (۵-۲۱) و با استفاده از معادله (۵-۳۶) نتیجه می شود :

$$h_x = 0.332k\Pr^{1/3}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3} \qquad (۴۱-۵)$$

معادله (۵-۴۱) با ضرب طرفین در $\frac{x}{k}$ بی بعد می شود که به افتخار ویلهم نوسلت عدد نوسلت نامیده می شود :

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} \qquad (۴۲-۵)$$

$$Nu_x = 0.332k\Pr^{1/3}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3} \qquad (۴۳-۵)$$

هنگامی که تمام طول ورق گرم شود :

$$Nu_x = 0.332\Pr^{1/3}\,\mathrm{Re}^{1/2} \qquad (۴۴-۵)$$

برای بدست آوردن ضریب انتقال گرمای متوسط باید از معادلات قبلی در طول ورق انتگرالگیری کرد :

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x dx}{\int_0^L dx} = 2h_{x=L} \qquad (۴۵-۵)$$

www.mohandesyar.com

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h}L}{k} = 2Nu_{x=L} \qquad (۴۶-۵)$$

هنگامی که تغییرات میان شراط دیوار و شرایط آزاد محسوس باشد خواص سیال را در دمای فیلم که به صورت زیر تعریف می شود بدست می آوریم :

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} \qquad (۴۷-۵)$$

۵-۶-۱ شار گرمایی ثابت

در مسایلی که شار گرمایی سطح ثابت است و منظور یافتن توزیع دمای سطح ورق برای شرایط جریان سیال است روابط زیر را داریم :

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = 0.453\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad (۴۸-۵)$$

که می توان آنرا برحسب شار گرمایی دیوار و اختلاف دما به صورت زیر بیان کرد :

$$Nu_x = \frac{q_w x}{k(T_w - T_\infty)} \qquad (۴۹-۵)$$

اختلاف گرمای متوسط در امتداد ورق را می توان با انتگرالگیری بدست آورد :

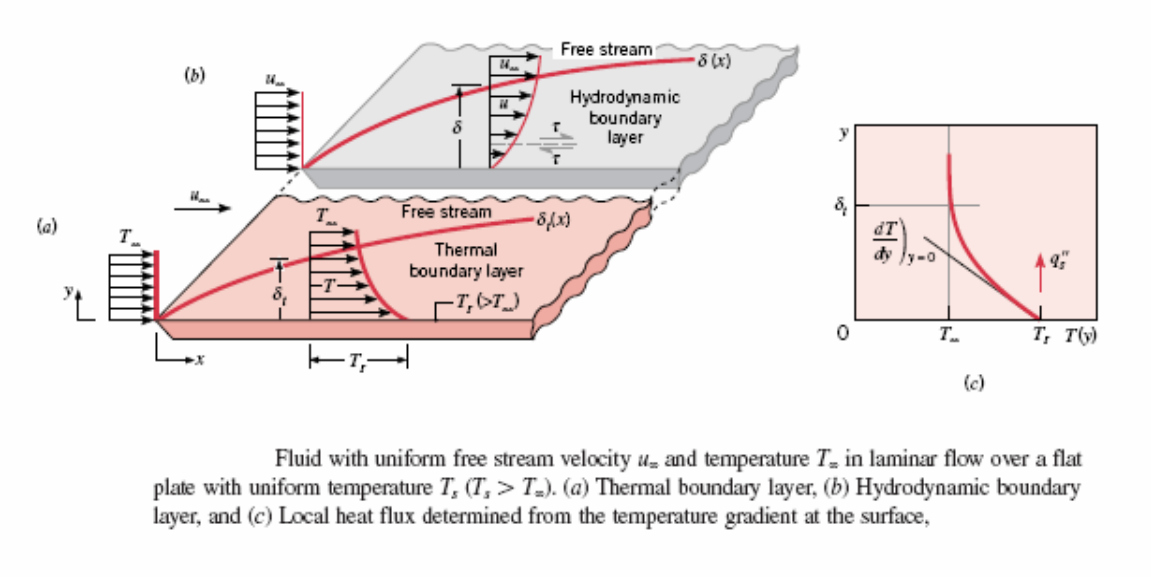
$$(T_w - T_\infty) = \frac{1}{L}\int_0^L (T_w - T_\infty)dx = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{q_w x}{kNu_x}dx = \frac{q_w L/k}{0.6795\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}} \qquad (۵۰-۵)$$

معادله (۵-۴۴) برای سیالهایی با عدد پرانتل بین ۰,۶ تا ۵۰ به کار می رود.این رابطه برای سیالهای با عدد پرانتل خیلی کوچک مانند فلزات مایع یا سیلاتی با با عدد پرانتل بسیار بزرگ مانند ردغنهای سنگین به کار نمی رود برای اینگونه سیالها از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$Nu_x = \frac{0.3387\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1+\left(\frac{0.0468}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \qquad (۵۱-۵)$$

www.mohandesyar.com

در شکل زیر لایه مرزی گرمایی و لایه مرزی هیدرودینامیکی نشان داده شده اند :



Fluid with uniform free stream velocity u_∞ and temperature T_∞ in laminar flow over a flat plate with uniform temperature T_s ($T_s > T_\infty$). (*a*) Thermal boundary layer, (*b*) Hydrodynamic boundary layer, and (*c*) Local heat flux determined from the temperature gradient at the surface,

شکل ۵-۱۰ مقایسه لایه مرزی گرمایی و هیدرودینامیکی

۵-۷ رابطه میان اصطکاک سیال و انتقال گرما

هدف در این قسمت این است که رابطه ای پیدا کنیم که مقاومت اصطکاکی را به انتقال گرما مربوط کند. تنش برشی دیوار را می توان بر حسب ضریب اصطکاک C_f بیان کرد :

$$\tau_w = C_f \frac{\rho u^2{}_\infty}{2} \qquad (۵۲-۵)$$

معادله بالا یک تعریف کننده برای ضریب اصطکاک است همچنین تنش برشی را از رابطه زیر می توان محاسبه کرد :

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\}_w$$

با استفاده از توزیع سرعت بدست آمده از معادله (۵-۱۹) داریم :

$$\tau_w = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

و با استفاده از ضخامت لایه مرزی ،خواهیم داشت :

$$\tau_w = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{4.64}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2} \qquad (۵۳-۵)$$

ترکیب معادله های (۵-۵۲) و (۵-۵۳) به رابطه زیر می انجامد :

$$\frac{C_{fx}}{2} = 0.325\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \qquad (۵۴-۵)$$

گروه سمت چپ بالا عدد استنانتون نامیده می شود :

$$St_x = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty}$$

www.mohandesyar.com

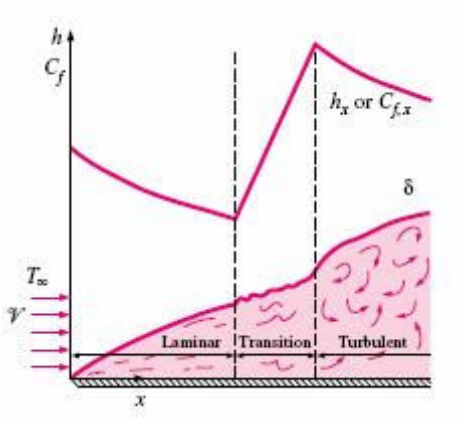
$$St_x \Pr^{2/3} = 0.332 \operatorname{Re}_x^{-1/2} \qquad (۵۵-۵)$$

معادله های (۵-۵۴) و(۵-۵۵) حدود سه درصد اختلاف دارند که ناشی از خطاهای محاسباتی است :

$$St_x \Pr^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2} \qquad (۵۶-۵)$$

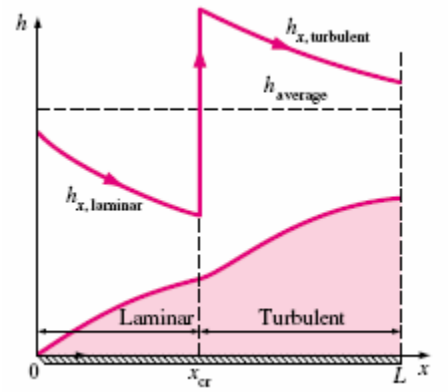
این معادله را آنالوژی رینولدز-کلبورن می نامند که رابطه بین اصطکاک سیال و انتقال گرمای مربوط به جریان آرام بر روی یک ورق تخت را بیان می کند ولی برای جریان لوله صادق نیست.

در شکل زیر تغییرات ضریب اصطکاک را در طول یک ورق تخت مشاهده می کنید :



شکل ۵-۱۱ تغییرات ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت در طول یک ورق تخت

همچنین در شکل زیر تغییرات تغییرات ضریب انتقال حرارت را در طول یک ورق تخت مشاهده می کنید :



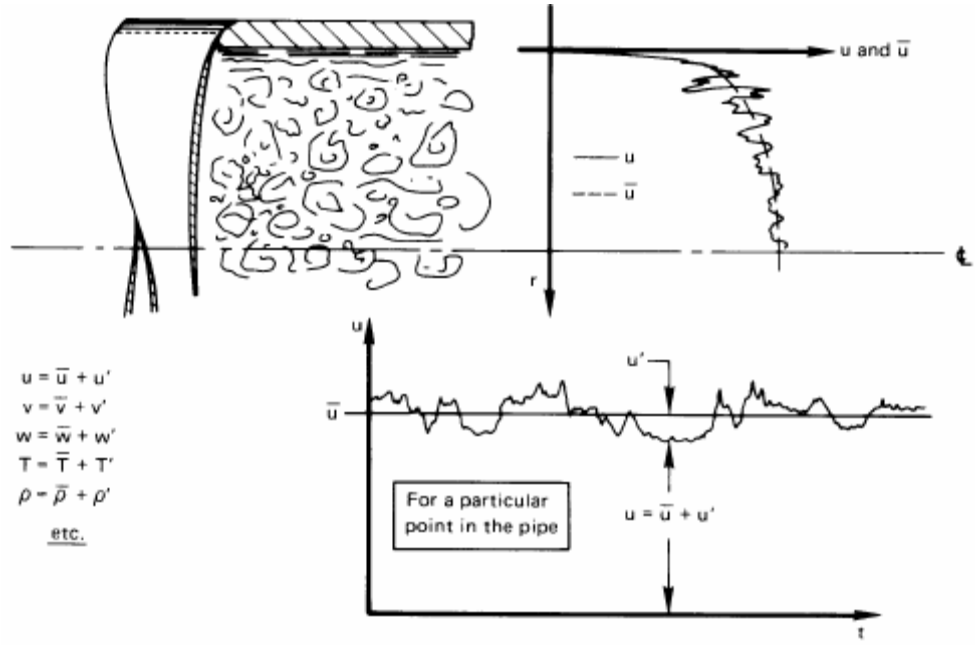
شکل ۵-۱۲ تغییرات ضریب انتقال حرارت متوسط در طول یک ورق تخت با نادیده گرفتن ناحیه انتقالی

www.mohandesyar.com

۵-۸ انتقال گرما در لایه مرزی متلاطم

در ناحیه متلاطم از خواصی مانند لزجت گردابی و رسانندگی گرمایی گردابی صحبت می کنیم که این خواص دهها برابر بزرگتر از خواص ملکولی هستند.مشکل عمده در تحلیل این قسمت آنست که که خواص گردابی در سرتاسر لایه مرزی تغییر می کند و این تغییرات را می توان از روش تجربی به دست آورد.

اگر سرعت ماکروسکوپی لحظه ای درون سیستم جریان متلاطم را که با دما سنج لیزری اندازه گیری شده را مشاهده کنیم نوسانات عمده ای حول سرعت متوسط جریان مشاهده می شود.



Fluctuation of u and other quantities in a turbulent pipe flow

شکل ۵-۱۳ تغییرات u و سایر کمیتهای جریان توربولانت داخل لوله

از اینرو سرعت لحظه ای برابر است با :

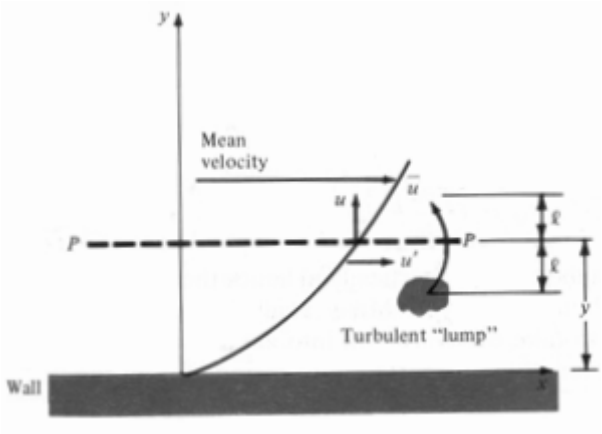
$$u = \bar{u} + u' \qquad (۵۷-۵)$$

به طور مشابه در مؤلفه عمودی داریم :

$$v = \bar{v} + v' \qquad (۵۸-۵)$$

www.mohandesyar.com

نوسانها به یک تنش برشی متلاطم منجر می شود که در شکل (۵-۱۴) مشهود است :



شکل ۵-۱۴ تنش برشی متلاطم و طول اختلاط

برای سطح واحد صفحه $P-P$ آهنگ انتقال جرم لحظهای و متلاطم از عرض صفحه برابر $\rho v'$ است.همراه با این انتقال جرم ،تغییراتی در سرعت مؤلفه افقی پدید می آید.شار اندازه حرکت خالص بر واحد سطح در جهت افقی یک تنش برشی متلاطم در صفحه $P-P$،یا $\rho u'v'$ را نشان می دهد.هنگامی که توده متلاطم به سمت بالا می رود به ناحیه ای با $\bar{u}$ بیشتر وارد می شود و باعث کم شدن سرعت نوسان در آن ناحیه می شود،یعنی $u'<0$.چنین استدلالی را می توان برای $v'<0$ نیز به کار برد به گونه ای که تنش برشی متلاطم و متوسط به صورت زیر خواهد بود :

$$\tau_t = -\rho u'v' \qquad (۵۹-۵)$$

۵-۸-۱ لزجت گردابی و طول اختلاط

مفهوم مسافت پویش آزاد یا متوسط فاصله میان برخوردهای ذرات مطرح می شود .پرانتل مفهوم مشابهی برای توصیف پدیده جریان متلاطم مطرح کرد.طول اختلاط پرانتل برابر فاصله ای است که توده سیال متلاطم به طور متوسط در جهت عمود بر جریان متوسط می پیماید.

$$\tau_t = -\rho u'v' = \rho \varepsilon_M \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۶۰-۵)$$

حالا یک توده متلاطم را که به فاصله ℓ مانند شکل (۵-۱۱) در بالا یا پایین صفحه $P-P$ قرار دارد ،در نظر می گیریم.در فاصله $y+\ell$ سرعت تقریباً به صورت زیر است :

$$u(y+\ell) \approx u(y) + \ell \frac{\partial u}{\partial y}$$

در حالیکه در فاصله $y-\ell$ ،

$$u(y-\ell) \approx u(y) - \ell \frac{\partial u}{\partial y}$$

www.mohandesyar.com

پرانتل فرض کرد که u' با میانگین دو مقدار بالا برابر است :

$$u' = \ell \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۶۱-۵)$$

فاصله ℓ را طول اختلاط پرانتل گویند. پرانتل فرض کرد که تنش برشی متلاطم معادله (۵-۶۱) را میتوان بـه صورت زیر نوشت :

$$\tau_t = -\rho u'v' = \rho \ell^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \rho \varepsilon_M \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۶۲-۵)$$

بنابراین لزجت گردابی به صورت زیر است :

$$\varepsilon_M = \ell^2 \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۶۳-۵)$$

فرضیه پرانتل این بود که طول اختلاط متناسب با فاصله از دیوار متناسب است یعنی :

$$\ell = Ky \qquad (۶۴-۵)$$

فرض دیگر این بود که در نزدیکی دیوار تنش برشی ثابت است.

هنگامیکه این فرض همراه معادله های(۵-۶۴) و (۵-۶۲) بکار رود نتیجه زیر را می دهد :

$$\tau_w = \rho K^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

با جذر گرفتن و انتگرال گیری نسبت به y داریم :

$$u = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + c \qquad (۶۵-۵)$$

تنش برشی را به صورت مجموع دو قسمت ملکولی و متلاطم بیان می کنیم :

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \varepsilon_M)\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۶۶-۵)$$

توزیع سرعت با معرفی دو کمیت بی بعد زیر بدست می آید :

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_w / \rho}} \qquad (۶۷-۵)$$

$$y^+ = \frac{\sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu} \qquad (۶۸-۵)$$

با فرض ثابت بودن تنش معادله (۵ -۶۶) را بازنویسی می کنیم :

$$du^+ = \frac{dy^+}{1 + \varepsilon_M / \nu} \qquad (۶۹-۵)$$

پس زیر لایه آرام جایی است که $\varepsilon_M \approx 0$ در لایه میانی $\varepsilon_M \approx \nu$ و در لایه متلاطم $\varepsilon_M \approx >> \nu$ است.با فرض $\varepsilon_M = 0$ در معادله (۵-۶۹) و انتگرالگیری داریم :

$$u^+ = y^+ + c$$

روی دیوار :

$$u^+ = y^+ \qquad (۷۰-۵)$$

www.mohandesyar.com

رابطه سرعت خطی برای زیر لایه آرام است،در ناحیه متلاطم $\varepsilon_M / \nu >> 1$ از معادله (۵-۶۶) داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\frac{1}{y}$$

با قرار دادن این رابطه و معادله (۵-۶۴) در (۵-۶۳) داریم:

$$\varepsilon_M = K\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}y \Rightarrow \frac{\varepsilon_M}{\nu} = Ky^+ \qquad (۵-۷۱)$$

با قرار دادن این رابطه در معادله (۵-۶۹) به ازای $\varepsilon_M / \nu >> 1$ و انتگرالگیری خواهیم داشت :

$$u^+ = \frac{1}{K}\ln y^+ + c \qquad (۵-۷۲)$$

معادله مشابهی برای لایه میانی بدست می آید.محدوده های هر ناحیه با مقایسه معادله های بالا با اندازه های تجربی سرعت،با ثابتهای عموماً پذیرفته شده زیر بدست می آیند :

زیر لایه آرام :	$0 < y^+ < 5$	$u^+ = y^+$	
لایه میانی :	$5 < y^+ < 30$	$u^+ = 5\ln y^+ - 3.05$	(۵-۷۳)
لایه متلاطم :	$30 < y^+ < 400$	$u^+ = 2.5\ln y^+ + 5.05$	

انتقال حرارت ناحیه متلاطم شبیه انتقال حرکت متلاطم است. شار اندازه حرکت متلاطم ، معادله (۵-۵۹) شامل نوسان انرژی متلاطمی است که متناسب با شیب دما است. لذا با قیاس با معادله (۵-۶۲) داریم :

$$\left(\frac{q}{A}\right) = -\rho c_p \varepsilon_H \frac{\partial T}{\partial y} \qquad (۵-۷۴)$$

برای نواحی که در آنها انتقال انرژی متلاطم و هم انتقال انرژی ملکولی غالب هستند :

$$\frac{q}{A} = -\rho c_p (\alpha + \varepsilon_H)\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (۵-۷۵)$$

در ناحیه جریان متلاطم که در آن $\varepsilon_H >> \nu, \varepsilon_H >> \alpha$ عدد پرانتل متلاطم به صورت زیر تعریف میشود :

$$\Pr_t = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H} \qquad (۵-۷۶)$$

اگر بپذیریم که انتقال اندازه حرکت ملکولی و انرژی گردابی،هر دو به یک نسبت در مقایسه با مقادیر مولکولیشان افزایش می یابد،می توان پیش بینی کرد که ضریب انتقال گرما را می توان با معادله ۵-۵۶ و با همان عدد پرانتل ملکولی به کار رفته در محاسبات تعیین کرد.

ضریب اصطکاک پوسته ای موضعی به ازای اعداد رینولدز بین 5×10^5 تا 10^7 به صورت زیر است :

$$C_{fx} = 0.0592\,\mathrm{Re}_x^{-1/5} \qquad (۵-۷۷)$$

برای اعداد رینولدز بین 10^7 تا 10^9 خواهیم داشت :

$$C_{fx} = \frac{0.455}{(\log \mathrm{Re}_L)^{2.584}} - \frac{A}{\mathrm{Re}_L} \qquad (۵-۷۸)$$

www.mohandesyar.com

۵-۹ ضخامت لایه مرزی متلاطم

آزمایشهای متعدد نشان داد که سرعت لایه مرزی متلاطم دز بیرون از زیر لایه آرام از رابطه زیر بدست می آید :

$$\frac{u}{u_\infty}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \qquad (۷۹-۵)$$

که در آن δ ضخامت لایه مرزی متلاطم است .برای بدست آوردن ضخامت لایه مرزی متلاطم از معادله (۵-۱۷) برای رابطه اندازه حرکت استفاده می کنیم و تنش برشی را از روابط تجربی اصطکاک پوسته ای بدست می آوریم . از معادله (۵-۵۲) داریم :

$$\tau_w=\frac{C_f\rho u_\infty{}^2}{2}$$

همچنین برای اعداد رینولدز بین 5×10^5 تا 10^7 آنرا از معادله (۵-۷۷) تعیین می کنیم :

$$\tau_w=0.0296\left(\frac{\nu}{u_\infty x}\right)^{1/5}x^{-1/5} \qquad (۸۰-۵)$$

حالا با استفاده از معادله (۵-۱۷) در شیب صفر همراه به توزیع سرعت و تنش برشی دیوار داریم :

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta\left[1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right]\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}dy=0.0296\left(\frac{\nu}{u_\infty x}\right)^{1/5}$$

با انتگرال گیری و جدا کردن عبارات چنین بدست می آید :

$$\frac{d\delta}{dx}=\frac{72}{7}(0.0296)\left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{1/5}x^{-1/5}$$

از معادله بالا برای دو وضعیت فیزیکی انتگرال می گیریم :

۱.لایه مرزی از لبه جلو کاملاً متلاطم است.

۲.لایه مرزی تا $\mathrm{Re}_{cr}=5\times10^5$ آرام است و سپس توسعه یافته و متلاطم می شود.

برای حالت ۱ از معادله (۵-۷۹) با شرط $\delta=0$ به ازای $x=0$ انتگرال می گیریم.نتیجه می شود :

$$\frac{\delta}{x}=0.381\mathrm{Re}_x{}^{-1/5} \qquad (۸۱-۵)$$

برای حالت ۲ شرایط زیر را داریم :

$$\delta=\delta_{lam} \qquad at\ \ x_{cr}=5\times10^5\frac{\nu}{u_\infty} \qquad (۸۲-۵)$$

در این صورت δ_{lam} از رابطه دقیق (۵-۲۱- الف) محاسبه می شود :

$$\delta_{lam}=5x_{cr}(5\times10^5)^{-1/2} \qquad (۸۳-۵)$$

www.mohandesyar.com

انتگرال معادله (۵-۷۹) به صورت زیر است :

$$\delta - \delta_{lam} = \frac{72}{7}(0.0296)\left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{1/5}\frac{5}{4}(x^{4/5} - x_{cr}{}^{4/5}) \qquad (۸۴-۵)$$

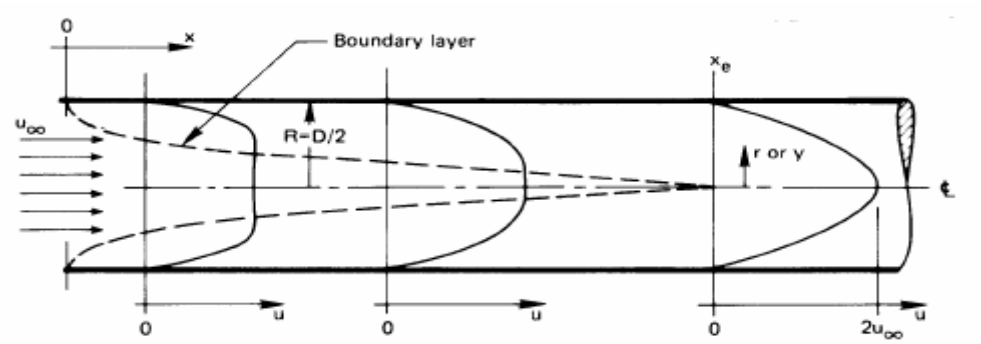
با ترکیب روابط نتیجه می شود :

$$\frac{\delta}{x} = 0.381\,\mathrm{Re}_x{}^{-1/5} - 10256\,\mathrm{Re}_x{}^{-1} \qquad (۸۵-۵)$$

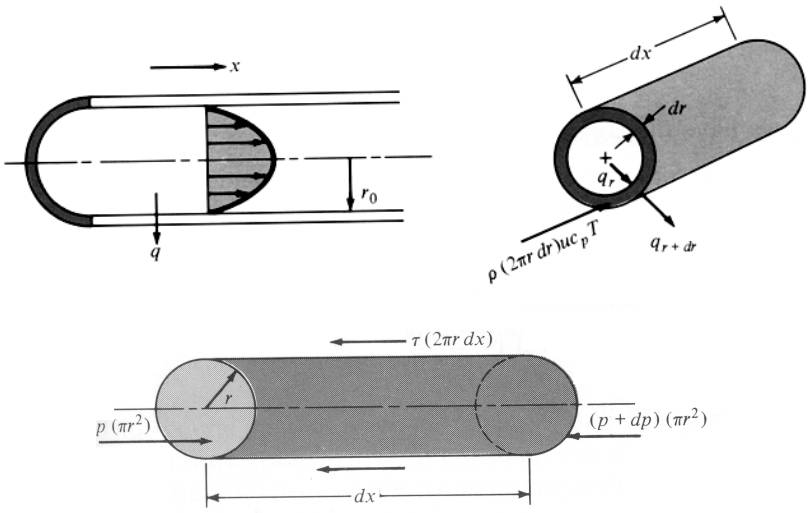
از این رابطه فقط برای $5\times10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$ استفاده می شود.

۵-۱۰ انتقال گرمای جریان آرام درون لوله

سیستم جریان لوله شکل (۵-۱۲) را در نظر بگیرید .می خواهیم انتقال گرمای جریان را برای شرایطی که جریان آرام باقی می ماند را محاسبه کنیم. T_w دمای دیوار ، r_0 شعاع لوله و u_0 سرعت در مرکز لوله است.فرض می شود که در تمامی سطح مقطعها فشار یکنواخت است.



شکل ۵-۱۵ گسترش لایه مرزی آرام در طول لوله



شکل ۵-۱۶ حجم کنترل و موازنه انرژی روی المان سیال در جریان لوله

www.mohandesyar.com

توزیع سرعت را می توان با در نظر گرفتن المان سیال نشان داده شده در شکل (۵-۱۶) بدست آورد. نیروهای فشاری با نیروهای برشی لزجت خنثی می شود،به گونه ای که :

$$\pi r^2 dp = \tau(2\pi r)dx = 2\pi r\mu dx\frac{du}{dr}$$

یا

$$du = \frac{1}{2\mu}r\frac{dp}{dx}dr$$

و خواهیم داشت :

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r^2 + const \qquad (۸۶-۵)$$

با شرط مرزی $r = r_0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$:

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(r^2 - r_0{}^2)$$

سرعت در مرکز لوله برابر است با :

$$u_0 = -\frac{r_0^2}{4\mu}\frac{dp}{dx} \qquad (۸۷-۵)$$

بنابراین توزیع سرعت را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \qquad (۸۸-۵)$$

۵-۱۰-۱ انتقال گرمای درون لوله با جریان آرام

برای ساده سازی فرض می کنیم که روی دیوار شار گرمایی ثابتی وجود دارد،یعنی:

$$\frac{dq_w}{dx} = 0$$

جریان گرمای منتقل شده به المان حلقوی برابر است با :

$$dq_r = -k(2\pi r)dx\frac{\partial T}{\partial r}$$

و گرمای رسانش شده به خارج لوله برابر است با :

$$dq_{r+dr} = -k2\pi(r+dr)dx\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}dr\right)$$

گرمایی جابجایی خروجی از المان برابر است با :

$$2\pi r dr\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial x}dx$$

موازنه انرژی به صورت زیر است :

گرمای رسانشی ورودی خالص = انرژی جابجایی خروجی خالص

www.mohandesyar.com

با چشمپوشی از دیفرانسیلهای مرتبه دوم :

$$r\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} dxdr = k\left(\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)dxdr$$

که می توان آنرا به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$\frac{1}{ur}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۸۹-۵)$$

اگر شار گرمایی در دیوار ثابت باشد یعنی $\frac{\partial T}{\partial x} = const$ به این معنی است که نیمرخهای دما در فواصل متفاوت x ثابت است.شرایط مرزی در معادله (۵-۸۹) به صورت زیر است :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad r = 0$$

$$k\frac{\partial T}{\partial r}]_{r=r_0} = q_w = const$$

برای بدست آوردن پاسخ معادله (۵-۸۹) ، معادله تغییرات سرعت را از معادله (۵-۸۸) در آن قرار میدهیم ،در اینصورت خواهیم داشت :

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16r_0^2}\right) + C_1 \ln r + C_2$$

با استفاده از شرط مرزی اول داریم :

$$C_1 = 0$$

شرط مرزی دوم خود به خود برآورده می شود.سرانجام توزیع دما را بر حسب دمای مرکز لوله می توان به صورت زیر نوشت :

$$T - T_c = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{u_0 r_0^2}{4}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\right] \qquad (۹۰-۵)$$

۵-۱۰-۲ دمای متوسط مخلوط

در جریان لوله،معمولاً ضریب انتقال گرمای جابجایی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{شار گرمایی موضعی} = q'' = h(T_w - T_b) \qquad (۹۱-۵)$$

که در آن T_w دمای دیوار و T_b دمای متوسط یا دمای انرژی متوسط سیال عبوری از لوله است که میتوان آنرا به صورت زیر محاسبه کرد :

$$T_b = \overline{T} = \frac{\int_0^{r_0} \rho 2\pi r dr u c_p T}{\int_0^{r_0} \rho 2\pi r dr u c_p} \qquad (۹۲-۵)$$

www.mohandesyar.com

در این حالت T_∞ آزاد نداریم و این درجه حرارتی است که اگر سیال بلافاصله پی از گذشت از مقطع مورد نظر به طور آدیاباتیک مخلوط شود دارای آن درجه حرارت باشد.

با محاسبه دمای متوسط از معادله (۵-۹۲) داریم :

$$T_b = T_c + \frac{7}{96}\frac{u_0 r_0^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۵-۹۳)$$

و برای دمای جداره لوله داریم :

$$T_w = T_c \frac{3}{16}\frac{u_0 r_0^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۵-۹۴)$$

ضریب انتقال گرما از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$h = \frac{k(\partial T/\partial r)_{r=r_0}}{T_w - T_b} \qquad (۵-۹۵)$$

شیب دما از رابطه زیر بدست می آید :

$$\frac{\partial T}{\partial r}]_{r=r_0} = \frac{u_0}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4r_0^2}\right)_{r=r_0} \qquad (۵-۹۶)$$

با قرار دادن معادله های (۵-۹۳)، (۵-۹۴) و (۵-۹۶) در معادله (۵-۹۵) داریم :

$$h = \frac{24}{11}\frac{k}{r_0} = \frac{48}{11}\frac{k}{d_0}$$

با بیان نتیجه بر حسب عدد نوسلت :

$$Nu_d = \frac{hd_0}{k} = 4.364 \qquad (۵-۹۷)$$

۵-۱۰-۳ جریان متلاطم درون لوله

توزیع سرعت مربوط به جریان متلاطم در لوله همانند شکل (۵-۱۵) خواهد بود.برای به دست آوردن توزیع دما باید اثر گردابهای متلاطم بر انتقال حرارت و اندازه حرکت را در تحلیل خود منظور کنیم.

شار گرمایی عبوری از المان سیال برابر است با :

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dy} \Rightarrow \frac{q}{\rho c_p A} = -\alpha\frac{dT}{dy}$$

برای جریان متلاطم می توان نشان داد که انتقال حرارت را می توان به صورت زیر نشان داد :

$$\frac{q}{\rho c_p A} = -(\alpha + \varepsilon_H)\frac{dT}{dy} \qquad (۵-۹۸)$$

به روش مشابه تنش برشی مربوط به جریان متلاطم را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_M\right)\frac{du}{dy} = (\nu + \varepsilon_M)\frac{du}{dy} \qquad (۵-۹۹)$$

با تقسیم معادله (۵-۹۸) بر (۵-۹۹) و فرضهای $\Pr = 1, \nu = \alpha, \varepsilon_M = \varepsilon_H$ بدست می آید :

www.mohandesyar.com

$$\frac{q}{c_p \tau A} du = -dT$$

فرض دیگر این است که نسبت انتقال گرما بر واحد سطح به تنش برشی در میدان جریان ثابتست،یعنی:

$$\frac{q}{\tau A} = const = \frac{q_w}{A_w \tau_w} \qquad (۱۰۰-۵)$$

سپس با انگرالگیری از معادله (۵-۹۹) بین شرایط دیوار و شرایط کپه ای داریم :

$$\frac{q_w}{A_w \tau_w c_p} \int_{u=0}^{u=u_m} du = \int_{T_w}^{T_b} dT$$

$$\frac{q_w u_m}{A_w \tau_w c_p} = T_w - T_b \qquad (۱۰۱-۵)$$

انتقال گرما در دیوار را را می توان به صورت زیر نشان داد :

$$q_w = hA_w (T_w - T_b)$$

و تنش برشی از رابطه زیر بدست می آید:

$$\tau_w = \frac{\Delta p (\pi d_0^2)}{4\pi d_0 L} = \frac{\Delta p d_0}{4L}$$

افت فشار را می توان بر حسب ضریب اصطکاک بیان کرد :

$$\Delta p = f \frac{L}{d} \rho \frac{u_m^2}{2} \qquad (۱۰۲-۵)$$

بنابراین :

$$\tau_w = \frac{f}{8} \rho u_m^2 \qquad (۱۰۳-۵)$$

با قرار دادن τ_w, q_w در معادله (۵-۱۰۱) چنین به دست می آید :

$$St = \frac{h}{\rho c_p u_m} = \frac{Nu_d}{\mathrm{Re}_d \, \mathrm{Pr}} = \frac{f}{8} \qquad (۱۰۴-۵)$$

معادله (۵-۱۰۴) را آنالوژی رینولدز برای جریان لوله می نامند.یک فرمول تجربی برای ضریب اصطکاک متلاطم تا اعداد رینولدز 2×10^5 برای لوله های صاف به صورت زیر است :

$$f = \frac{0.316}{\mathrm{Re}_d^{1/4}} \qquad (۱۰۵-۵)$$

با قرار دادن این رابطه در معادله (۵-۱۰۳) رابطه زیر به دست می آید :

$$Nu_d = 0.0395 \, \mathrm{Re}_d^{3/4} \qquad (۱۰۶-۵)$$

معادله های (۵-۱۰۴) و (۵-۱۰۶) را می توان با این ضریب تصحیح کرد :

$$St \, \mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{f}{8} \qquad (۵-۱۰۶- \text{الف})$$

$$Nu_d = 0.0395 \, \mathrm{Re}_d^{3/4} \, \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad (۵-۱۰۶- \text{ب})$$

برای اهداف محاسباتی رابطه صحیح تر مورد استفاده برای جریان متلاطم عبارت است از :

$$Nu_d = 0.023 \, \mathrm{Re}_d^{0.8} \, \mathrm{Pr}^{0.4}$$

www.mohandesyar.com