
فصل دوم

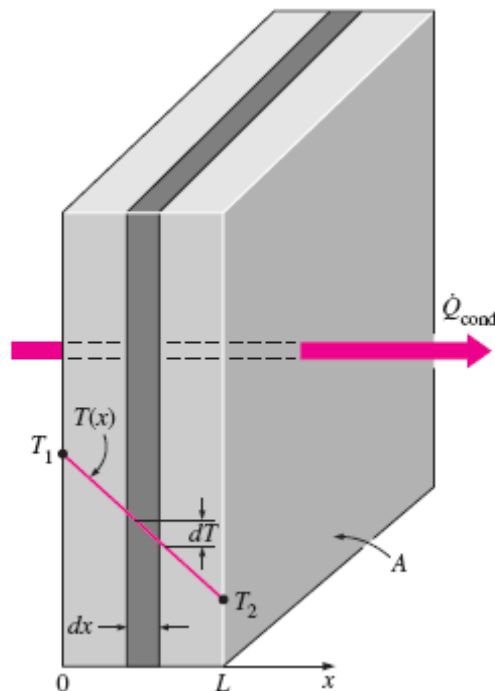
هدایت حرارتی

۱-۲ هدایت حرارتی در جریان ثابت و یک بعدی

در بیشتر مسائل علمی انرژی از یک سیال به سیال دیگر از طریق یک دیوار منتقل می‌شود. چون هدایت مهم‌ترین بخش انتقال حرارت است، لذا فهمیدن مکانیسم انتقال حرارت از یک جسم جامد را در ابتدا مورد بررسی قرار می‌دهیم. منظور از شرایط دائمی این است که جریان در هر جای منطقه مستقل از زمان است و برداری است که جهتش عمود بر سطح یا خطوط دما ثابت می‌باشد.

۱-۱-۲ جداره مسطح

ساده‌ترین مسئله انتقال حرارت، همان هدایت دائمی یک بعدی از یک دیوار ساده همگون است که ضریب هدایتی ثابت داشته باشد و هر دو صفحه در دو درجه حرارت ثابت قرار گرفته باشند.



شکل ۱-۲ هدایت حرارت از یک دیوار ساده

از فرمول اولیه که یک قانون تجربی است داریم:

$$qdx = -kAdT \quad (۱-۲)$$

$$q = -kA \frac{T_2 - T_1}{X_2 - X_1} = -kA \frac{T_2 - T_1}{\Delta X} \quad (۲-۲)$$

اگر k با درجه حرارت تغییر کند و به صورت $k = k_0 (1 + \beta T)$ باشد معادله فوق به صورت زیر در می آید:

$$qdx = -k_0 (1 + \beta T) A dT$$

$$q \int_{x_1}^{x_2} dx = -k_0 A \int_{T_1}^{T_2} (1 + \beta T) dT$$

$$q(x_2 - x_1) = -k_0 A \left[\int_{T_1}^{T_2} dT + \int_{T_1}^{T_2} \beta T dT \right] = -k_0 A \left[(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right]$$

$$q = -\frac{k_0 A}{x_2 - x_1} \left[(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right] \quad (3-2)$$

که مقدار β ثابت است.

۲-۱-۲ تشابه الکتریکی

اگر بیش از یک دیوار داشته باشیم از تشابه الکتریکی استفاده می نماییم.

معادله اول (۱-۲) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Delta X / kA}$$

همچنان که می بینیم مقاومت حرارتی با ضخامت دیوار نسبت مستقیم داشته و با سطح نسبت معکوس دارد. حال اگر این معادله را با اختلاف پتانسیل و مقاومت الکتریکی مقایسه کنیم، داریم:

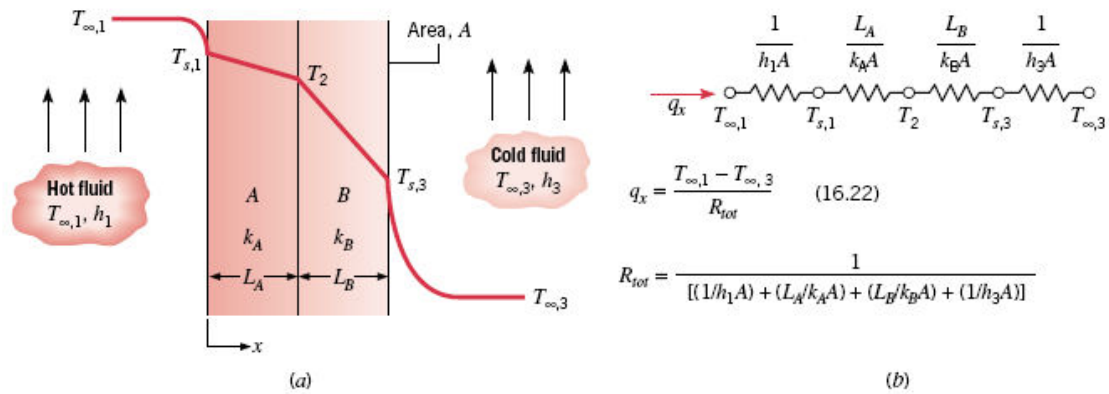
$$V = IR \quad \text{یا} \quad I = \frac{V}{R}$$

$$I \propto q \quad \text{و} \quad V = T_2 - T_1$$

$$R = \frac{\Delta X}{KA} \quad (4-2)$$

حال اگر در نظر بگیریم که دیواره از دو فلز مشابه (هم جنس) ساخته شده باشد، حرارت وارد شده از یک سطح مساوی حرارت خارج شده از سطوح دیگر است. لذا با حذف T_2 خواهیم داشت:

$$q = \frac{T_1 - T_3}{(\Delta x_a / k_a A) + (\Delta x_b / k_b A)} \quad (5-2)$$



شکل ۲-۲ تشابه الکتریکی

این معادله نشان می‌دهد که یک تشابه بین قانون فوریه و اهم وجود دارد. یعنی می‌توان نوشت:

$$\text{جریان حرارت هدایت} = \frac{\text{اختلاف درجه حرارت کل}}{\text{جمع کل مقاومت های حرارتی}}$$

از این تشابه استفاده می‌کنیم و اگر ترکیب دیگری از جنس‌های مختلف واسطه حرارتی داشته باشیم و همین‌طور اگر دیواره‌ها به‌صورت موازی بهم وصل باشند خواهیم داشت:

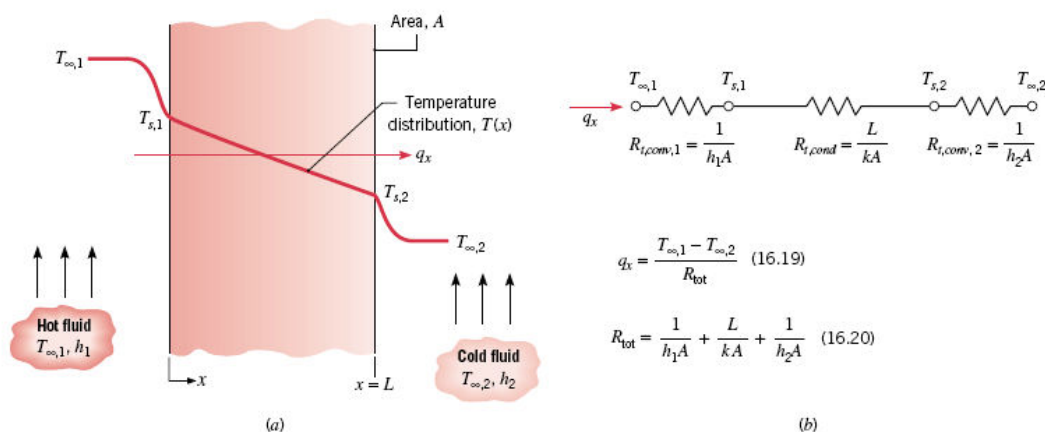
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\Delta X_a / k_a A} + \frac{1}{\Delta X_b / k_b A} \quad (6-2)$$

و اگر به‌صورت سری باشند داریم:

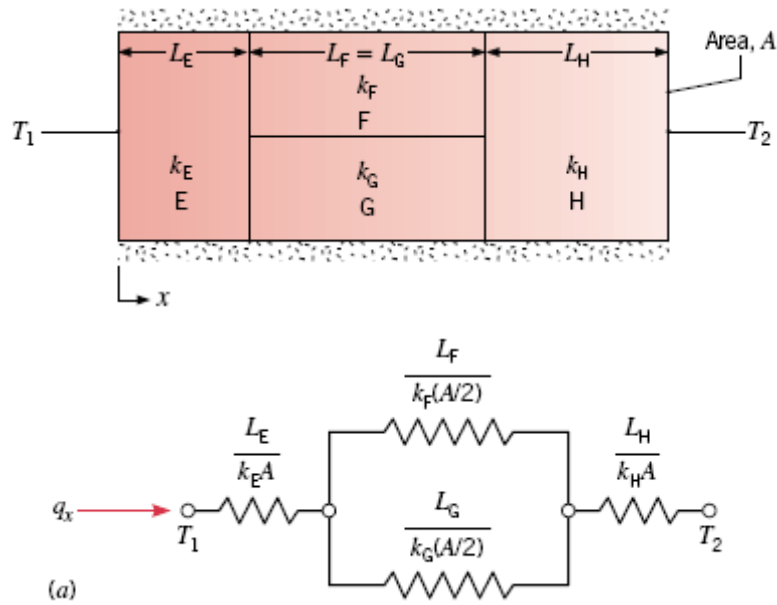
$$R = \frac{\Delta X_a}{k_a A} + \frac{\Delta X_b}{k_b A} \quad (7-2)$$

و در مورد جابجایی هم مقاومت می‌شود:

$$R = \frac{1}{hA} \quad (8-2)$$



شکل ۲-۳ تشابه الکتریکی



شکل ۲-۴ تشابه الکتریکی

۳-۱-۲ هدایت حرارتی از یک دیوار ساده

معادله انتقال و درجه حرارت در سیستم کارتزین عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

نشان دهید در شرایط توزیع درجه حرارت خطی است.

۱- سطح دیوار خیلی بزرگ است (در جهت z و y)،

$$\frac{\Delta T}{\Delta y} = \frac{\Delta T}{\Delta z}$$

لذا نرخ تغییرات درجه حرارت نیز در جهت y و z کوچک خواهد بود بنابراین داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

۲- انرژی تولید شونده داخلی نداریم یعنی $q'' = 0$

۳- سیستم در حالت دائمی است یعنی تغییرات درجه حرارت نسبت به زمان صفر است

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

مقادیر را در معادله فوق می گذاریم در نتیجه:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 0 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

اگر دو بار انتگرال بگیریم می شود:

$$T = C_1 x + C_2 \quad (9-2)$$

۴-۲-۲ هدایت حرارتی برای سیلندر

$\frac{dt}{dr}$ را برای یک سیلندر یک لایه از فرمول هدایت دائمی بدست آورید. آن را در قانون فوریه جایگذاری کرده و معادله مورد نظر بدست می آید.

فرض: طول سیلندر زیاد، انرژی داخلی نداریم، تغییرات درجه حرارت زاویه ای نداریم، لذا معادله مناسب عبارتست از:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

چون سیلندر طولانی است $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ و چون تغییر درجه حرارت زاویه ای نداریم $\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0$ لذا معادله به صورت زیر تقلیل می یابد.

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

انتگرال اول خواهد داد،

$$r \frac{dT}{dr} = B \quad \Rightarrow \quad T = B \ln r + c$$

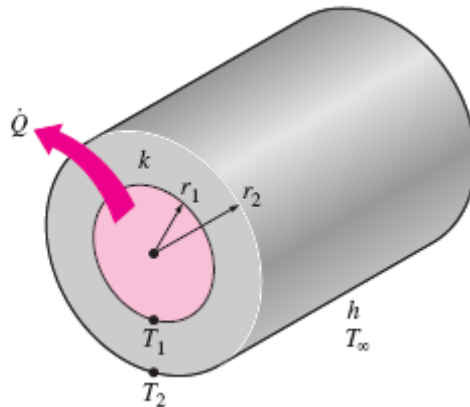
$$B = \frac{T_1 - T_2}{\ln r_1 / r_2} \quad (10-2)$$

و لذا قانون فوریه می شود،

$$q = -k(2\pi r L) \frac{dT}{dr} = -K(2\pi L) B = 2\pi k L \frac{T_1 - T_2}{\ln r_1 / r_2} \quad (11-2)$$

۲-۲ هدایت حرارتی در جدار ساده سیلندری

شکل زیر یک سیلندر یک جداره است که از یک جسم هموژن با k ثابت تشکیل شده است و دارای درجه حرارت یکنواخت داخلی و خارجی است. برای یک شعاع معین عمود بر سطح، سطح انتقال حرارت $2\pi rL$ می باشد که L طول سیلندر است. این موارد را در (۱-۱) جایگزین می کنیم:



شکل ۲-۵- هدایت حرارتی در جدار ساده سیلندری

$$q_r = -2\pi k r L \frac{dT}{dr} \quad (۱۲-۲)$$

$$\begin{aligned} T &= T_0 & \text{at } r &= r_0 \\ T &= T_i & \text{at } r &= r_i \end{aligned}$$

حل معادله (۸-۲) می شود:

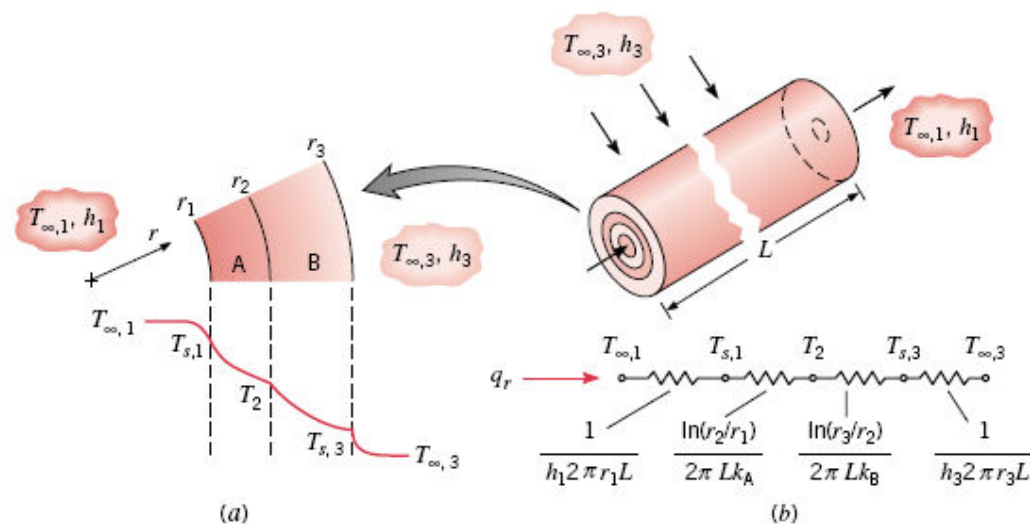
$$q = \frac{2\pi k r L (T_i - T_0)}{\ln(r_0 / r_i)} \Rightarrow R_{th} = \frac{\ln(r_0 / r_i)}{2\pi L k}$$

با توجه به تشابه الکتریکی اگر دو یا چند جدار داشته باشیم:

$$R_{th} = \frac{\ln(r_0 / r_i)}{2\pi k L} \quad (۱۳-۲)$$

اگر جسم به شکل کره باشد، سطح انتقال حرارت $4\pi r^2$ می شود. این را در معادله (۱-۱) جایگزین می کنیم و خواهیم داشت:

$$q = \frac{4\pi k (T_i - T_0)}{1/r_i - 1/r_0} \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (۱۴-۲)$$

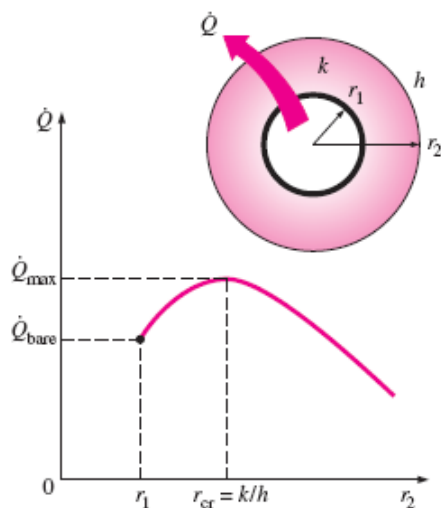


شکل ۲-۶ تشابه الکتریکی در جدار ساده سیلندری

۳-۲ شعاع بحرانی عایق در لوله

با توجه به رابطه فوریه در استوانه داریم:

$$q = \frac{2\pi L(T_i - T_\infty)}{\frac{\ln(r_o/r_i)}{k} + \frac{1}{r_o h}}$$



شکل ۲-۷ شعاع بحرانی عایق در استوانه

اگر از شار حرارتی نسبت به شعاع خارجی مشتق گرفته و مقدار مشتق را برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{dq}{dr_0} = 0 \Rightarrow \frac{-2\pi L(T_i - T_\infty) \left(\frac{1}{kr_o} - \frac{1}{hr_o^2} \right)}{\left[\frac{\ln(r_o/r_i)}{k} + \frac{1}{r_o h} \right]^2} = 0$$

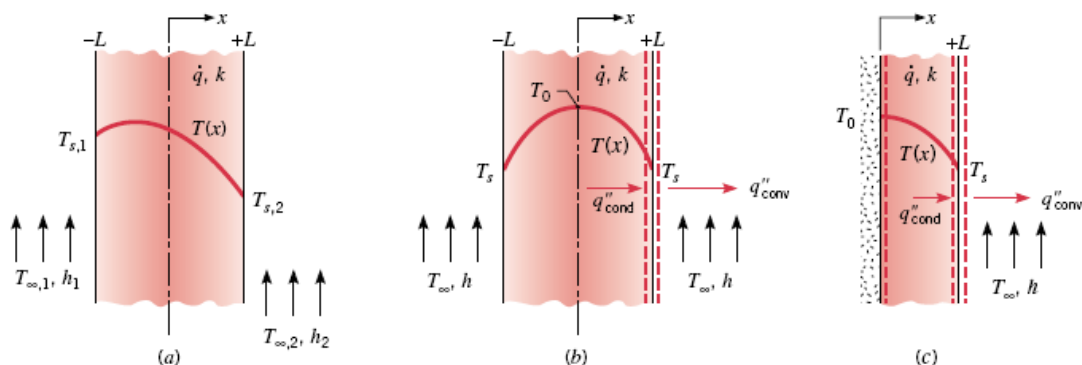
در نتیجه شعاع بحرانی عایق عبارت است از:

$$\frac{1}{kr_o^2} - \frac{1}{kr_o^2} = 0$$

$$r_o = \frac{k}{h} \quad (۱۵-۲)$$

حال اگر از رابطه شار حرارتی q نسبت به شعاع خارجی مشتق دوم بگیریم چون مشتق دوم همواره کوچکتر از صفر می باشد لذا منحنی انتقال حرارت در شعاع خارجی دارای ماکزیمم می باشد. به عبارتی در این شعاع (شعاع بحرانی) بیشترین انتقال حرارت را داریم. به همین طریق برای کره هم می توانیم بدست آوریم که مقدار $r_o = \frac{2k}{h}$ می شود.

۴-۲ جدار مسطح با منبع حرارتی



شکل ۲-۸ جدار مسطح با منبع حرارتی

در سیستم های عمومی نظیر مقاومت درون آبگرمکن الکتریکی، وسیله های سوخت هسته ای، منبع حرارت در همان جسمی که هدایت هم می کند تولید می شود. بدیهی است شکل توزیع درجه حرارت در این حالت با حالت ساده فرق دارد. لذا دو مثال زیر را برای دیواره ساده و سیلندر می آوریم.

شکل بالا را در نظر بگیرید که دیواری است با ضخامت $2L$ و طول و عمق آن آن قدر طولانی است که انتقال حرارت یک بعدی باشد و یک منبع حرارتی نیز در مرکز دیوار داریم (در $x = 0$).

اگر حرارت تولید شده در واحد حجم دیواره q° بوده و ضریب هدایت k باشد و منبع حرارتی داشته باشیم معادله انرژی می شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q^\circ}{k} = 0 \quad (۱۶-۲)$$

و حل این معادله خواهد شد:

$$T = -\frac{q^\circ}{2k}x^2 + c_1x + c_2$$

در $x = \pm L$ شرط مرزی $T = T_w$ میباشد، بنابراین داریم:

$$T - T_w = -\frac{q^\circ}{2k}x^2 + c_1x$$

$$T_0 = C_2$$

که معادله یک سهمی است. می توان معادله را به صورت زیر نوشت اگر در فرمول سهمی بجای T_0 جایگذاری کنیم، داریم:

$$T_0 = \frac{qL^2}{2k} + T_w$$

این دو معادله را به هم تقسیم می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{T - T_0}{T_w - T_0} &= \left(\frac{x}{L}\right)^2 \\ \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} &= 1 - \frac{x^2}{L^2} \end{aligned} \quad (۱۷-۲)$$

۲-۵ سیلندر با منبع حرارتی (سیلندر توپر)

برای سیلندری که طولش زیاد باشد و در مرکز یک منبع حرارتی باشد رابطه زیر صادق است. شرایط مرزی درونی عبارتند از: در $r = R$ داریم $T = T_w$ و از طرف دیگر حرارت تولید شده برابر با حرارت منتقل شده از سطح خارجی است. یعنی

$$q\pi RL = -K2\pi RL\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=R} \quad (۱۸-۲)$$

چون تابع درجه حرارت در مرکز سیلندر باید پیوسته باشد، در $r = 0$ می توان نوشت:

$$\frac{dT}{dr} = 0$$

اگرچه احتیاج به این شرط نیست، زیرا وقتی دو شرط قبل را بگذاریم این نیز بدست می آید. معادله اول را بازنویسی می کنیم:

$$r \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = \frac{-qr}{k}$$

از طرف دیگر می‌دانیم که

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right)$$

که بعد از انتگرال گیری می‌شود:

$$r \frac{dT}{dr} = \frac{-qr^2}{2k} + C_1$$

لذا می‌شود:

$$T = \frac{-qr^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

از شرط مرزی دوم ($r = 0$) استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right) r = R = \frac{-qR}{2k} = \frac{-qR}{2k} + \frac{C_1}{R}$$

از شرط مرزی اول در $r=R$ داریم:

$$T = T_w = \frac{-qR^2}{4k} + C_2 \quad C_2 = T_w = \frac{qR^2}{4K}$$

و لذا فرمول نهایی خواهد شد:

$$T - T_w = \frac{q}{4k} (R^2 - r^2) \quad (۱۹-۲)$$

و یا به صورت بدون بعد داریم:

$$\frac{T - T_w}{T_o - T_w} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (۲۰-۲)$$

$$T_o = T_w + \frac{q R^2}{4k} \quad (۲۱-۲)$$

که T_o درجه حرارت در $r = 0$ است.

و برای سیلندری که توخالی باشد شرایط مرزی به صورت زیر فرق می‌کند.

$$\begin{aligned} T &= T_i & \text{at } r &= r_i \\ T &= 0 & \text{at } r &= r_o \end{aligned}$$

راه حل عمومی همان راه حل قبلی است.

$$T = -\frac{qr^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

شرایط مرزی جدید را می‌گذاریم:

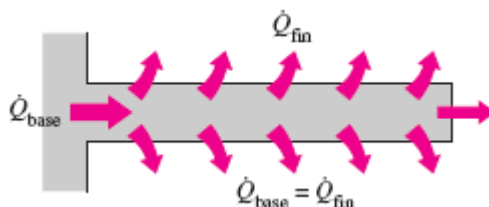
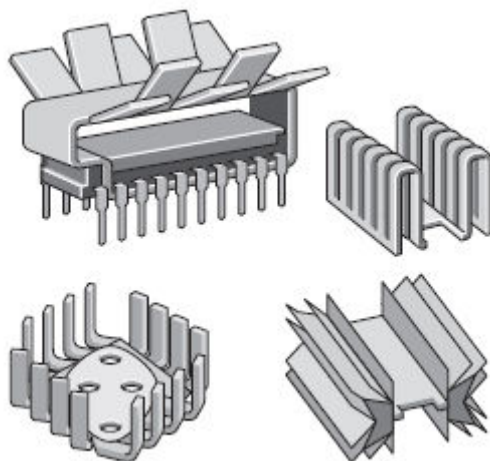
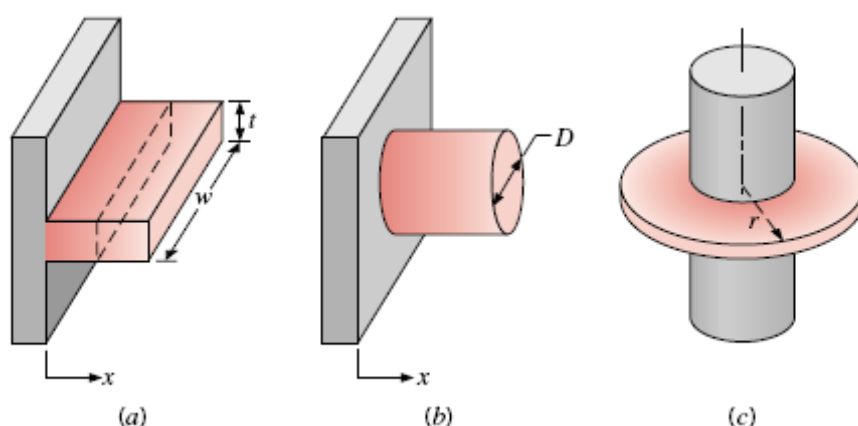
$$T - T_o = \frac{q}{4k} (r_o^2 - r^2) + c_1 \ln \frac{r}{r_o}$$

که C_1 بصورت زیر حساب می‌شود:

$$C_1 = \frac{T_i - T_o + q(r_i^2 - r_o^2)/4k}{\ln(r_i / r_o)} \quad (۲۲-۲)$$

۶-۲ سیستم‌های هدایت و کنوکسیون پره‌ها

برای خنک کردن جسم داغ آن را در مجاورت محیط سردتر از خود قرار می‌دهند. از طریق جابجایی جسم شروع به سرد شدن می‌کند. اگر بخواهیم سرعت سرد شدن را بیشتر کنیم، یعنی در حقیقت حرارت بیشتری از جسم به محیط منتقل شود، باید مطابق فرمول کنوکسیون، یا درجه حرارت محیط را کاهش دهیم که علاقه‌ای به آن نداریم و در ضمن گران هم تمام می‌شود و یا این که سطح جسم را زیاد کنیم که این مقرون به صرفه است. برای این کار در اطراف جسم داغ ورقه‌هایی به شکل‌های مختلف اضافه می‌کنند که حرارت از طریق هدایت به آن‌ها منتقل می‌شود و از آن جا به صورت کنوکسیون به خارج منتقل می‌شود.



شکل ۹-۲ انواع پره‌ها

۷-۲ انواع پره ها (Fins)

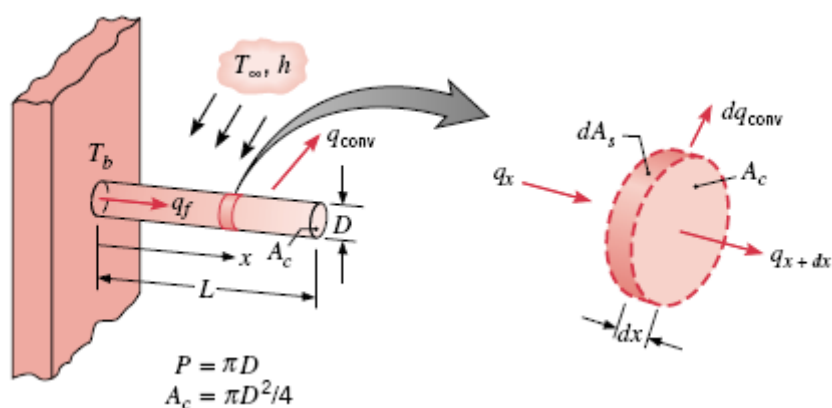
الف - پره با سطح مقطع غیر مشخص (non-uniform cross section)
اگر پره با سطح مقطع غیر مشخص به سطح صاف متصل باشد، خواهیم داشت:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

$$-kA \frac{dT}{dx} = -\frac{dT}{dA} - \frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) dx + hds(T - T_\infty) \quad (2-23)$$

A - سطح المان

ds - سطح جانبی المان



شکل ۲-۱۰ هدایت یک بعدی و جابجایی در یک پره میله ای استوانه ای

اگر $T - T_\infty = \theta$ بگیریم پس از حذف عبارت مشابه خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{d\theta}{dx} \right) - h \frac{ds}{dx} \theta = 0$$

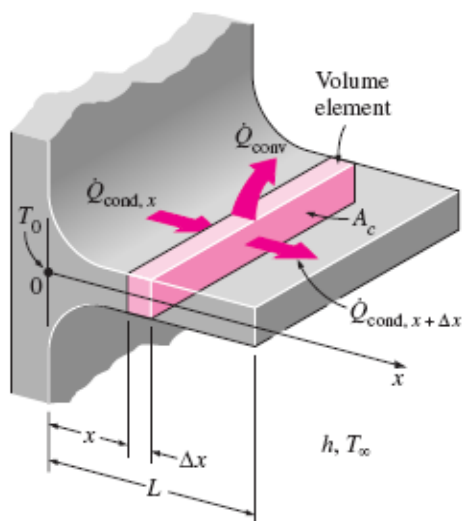
با ثابت فرض کردن k خواهیم داشت:

$$kA \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} + k \frac{dA}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} - h \frac{ds}{dx} \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{\bar{h}}{kA} \cdot \frac{ds}{dx} \theta = 0 \quad (2-24)$$

۲-۷-۱ پره با سطح مقطع مستطیل

حرارت منتقل شده به محیط از طریق کنوکسیون + انرژی خروجی از سمت راست = انرژی ورودی از سمت چپ



شکل ۲-۱۱ پره با سطح مقطع مستطیل

$$-kA \frac{dT}{dx} = -kA \left(\frac{dT}{dx} + h \cdot p \cdot dx (T - T_\infty) + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) \quad (2-25)$$

که مشابه رابطه کلی فوق است و چون A ثابت است،

$$\frac{ds}{dx} = cte = P, \frac{dA}{dx} = 0$$

با ساده کردن قسمت‌های متناظر و تقسیم همه بر KA نتیجه نهایی می شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{kA} (T - T_\infty) = 0$$

اگر در رابطه فوق فرض کنیم $\theta = T - T_\infty$ باشد،

در نتیجه داریم:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{kA} \theta = 0 \quad (2-26)$$

اگر $n^2 = \frac{hP}{kA}$ گیریم رابطه می شود،

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - n^2 \theta = 0 \quad (2-27)$$

حل عمومی معادله کنوکسیون فوق به صورت زیر است:

$$\theta(x) = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$$

سه حالت شرط مرزی جهت بدست آوردن C_1 و C_2 داریم:

- ۱- پره خیلی بلند بوده به طوری که درجه حرارت انتهای پره برابر درجه حرارت محیط باشد.
- ۲- انتهای پره عایق باشد و لذا از آنجا انتقال حرارت صورت نگیرد.
- ۳- طول پره محدود و انتقال حرارت از انتهای پره هم انجام شود (از طریق کنوکسیون در انتهای پره).

برای حالت اول شرط مرزی چنین است،

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 & \text{at } x &= 0 \\ \theta &= 0 & \text{at } x &= \infty \end{aligned}$$

با اعمال شرایط مرزی داریم،

$$\begin{aligned} C_1 e^0 + C_2 e^0 &= C_1 + C_2 = \theta_0 \\ C_1 \cdot \infty + C_2 \cdot 0 &= 0 \Rightarrow C_2 = 0, \quad C_1 = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم،

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta_0 e^{-nx} \\ \frac{\theta}{\theta_0} &= e^{-nx} \end{aligned} \quad (28-2)$$

۲- وقتی در پایان پره عایق داریم شرایط مرزی می شود:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 & \text{at } x &= 0 \\ \theta &= 0 & \text{at } x &= L \end{aligned}$$

و لذا با شرط اول داریم:

$$C_1 + C_2 = \theta_0$$

و با شرط دوم می شود.

$$\begin{aligned} n(C_1 e^{+nL} - C_2 e^{nL}) &= 0 \\ C_1 e^{+nL} &= C_2 e^{-nL} \Rightarrow C_2 = C_1 e^{2nL} \end{aligned}$$

در نتیجه داریم،

$$\theta_0 = C_1 + C_1 e^{2nL} = C_1 (1 + e^{2nL})$$

و لذا به صورت زیر در می آید،

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\theta_0}{e^{2nL} + 1} \\ C_2 &= \frac{\theta_0}{e^{-2nL} + 1} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\theta_0 e^{nx}}{e^{2nl} + 1} + \frac{\theta_0 e^{-nx}}{e^{-2nl} + 1} = \theta_0 \left[\frac{e^{nx}}{e^{2nl} + 1} + \frac{e^{-nx}}{e^{-2nl} + 1} \right]$$

اگر θ_0 را به طرف دیگر برده و صورت مخرج کسر اول را در e^{-nL} و کسر دوم را در e^{+nL} ضرب کنیم چون داریم $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ لذا نتیجه می شود،

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh[n(l-x)]}{\cosh nl} \quad (29-2)$$

برای حالت دوم با توجه به گستردگی حجم محاسبات خواهیم داشت:

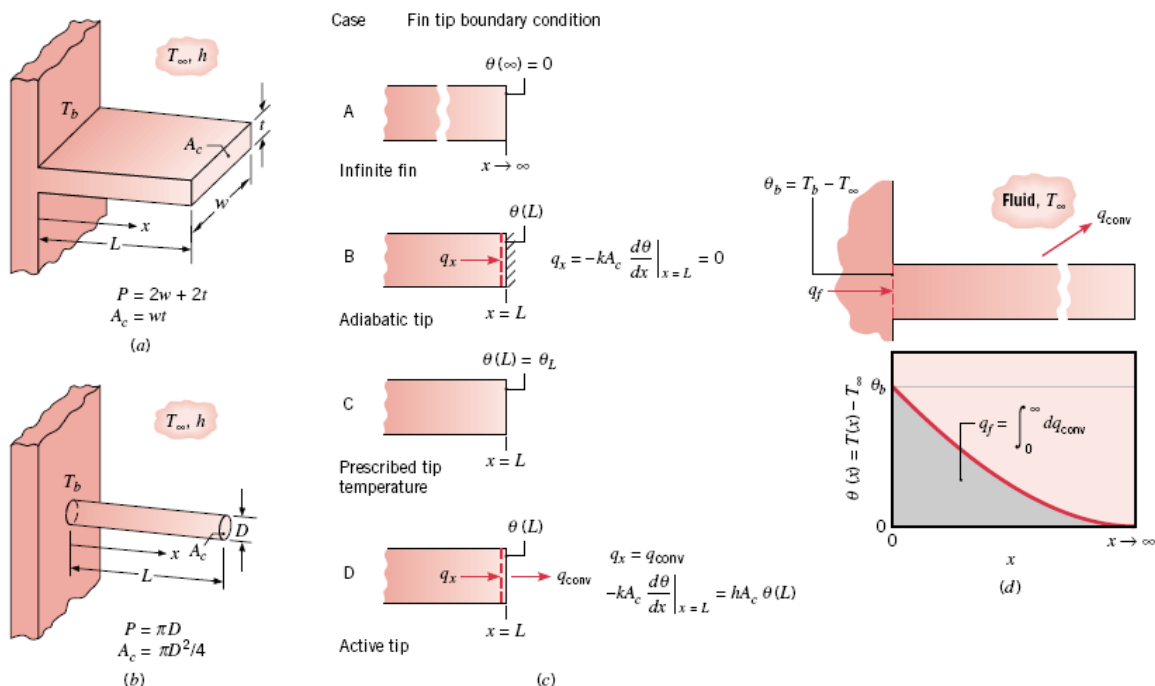
$$q = -kA\theta_0 n \left(\frac{1}{e^{2nl} + 1} + \frac{1}{e^{-2nl} + 1} \right) = \sqrt{hPkA}\theta_0 \tanh nl \quad (30-2)$$

حل برای حالت سوم: در این حالت به عملیات جبری بیشتری نیاز است و نتیجه چنین است:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh n(L-x) + (h/nk) \sinh n(L-x)}{\cosh nL + (h/nk) \sinh nL} \quad (31-2)$$

در این حالت جریان حرارت عبارت است از:

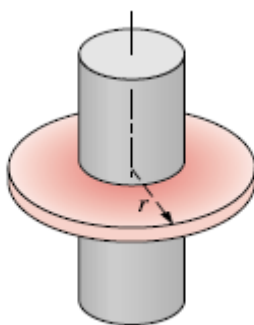
$$q = \sqrt{hPkA}(T_0 - T_\infty) \frac{\sinh nL + (h/nk) \cosh nL}{\cosh nL + (h/nk) \sinh nL} \quad (32-2)$$



شکل ۲-۱۲ پره های مستطیلی و میله ای استوانه ای و انواع شرایط مرزی انتهای پره ها

۲-۷-۲ پره های دایره ای یکنواخت حول یک میله

پره شکل زیر را در نظر بگیرید. برای حالتی که تغییرات درجه حرارت ناچیز باشد و ضخامت t کوچک باشد (در مقایسه با $r_2 - r_1$)، درجه حرارت فقط تابعی از r می شود. سطح مقطع خواهد بود $A(r) = 2\pi r t$ و سطح جانبی می شود $S(r) = 2\pi(r^2 - r_1^2)$. لذا اگر در معادله قبل جایگذاری کنیم می شود:



شکل ۲-۱۳ پره دایره ای یکنواخت حول یک میله

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2\bar{h}}{kt} \theta = 0 \quad (2-33)$$

که این رابطه از جایگذاری dr بجای dx و $\frac{dA}{dr} = 4\pi r$ و $\frac{ds}{dr} = 4\pi r$ و لذا

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{2\pi r t} \cdot 2\pi r \cdot \frac{d\theta}{dr} - \frac{\bar{h}}{k} \left(\frac{1}{2\pi r t} \right) (4\pi r) \theta = 0 \quad (2-34)$$

معادله فوق یک فرم از تابع معادله دیفرانسیل بسل از درجه صفر است که فرمول عمومی زیر را دارند:

$$\theta = C_1 I_0(nr) + C_2 K_0(nr) \quad (2-35)$$

$$n = \sqrt{2h/kt}$$

I_0 - تابع بسل اصلاح شده از نوع اول

K_0 - تابع بسل اصلاح شده از نوع دوم

C_1 و C_2 ثابت هستند که توسط شرایط مرزی بدست می آید.

$$\theta(r_1) = T_b - T_\infty = \theta_b$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_2} = 0$$

شرط دوم این است که فرض کنیم افت حرارت از انتهای پره نداریم این فرض برای حالت دایره ای بیشتر به واقعیت نزدیک است زیرا سطح سرعت با ازدیاد r افزایش پیدا می کند.

اگر شرط اول و دوم را در معادله بالا قرار دهیم

$$\theta_0 = C_1 I_0(nr_1) + C_2 k_0(nr_2)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_2} = nC_1 I_1(nr_2) - nC_2 k_0(nr_2) = 0$$

دو معادله و دو مجهول داریم و C_1 و C_2 را حساب می کنیم، لذا فرمول بالا بصورت زیر در می آید،

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{I_0(nr_1)K_1(nr_2) + K_0(nr_1)I_1(nr_2)}{I_0(nr_1)k_1(nr_2) + k_0(nr_1)I_1(nr_2)} \quad (۳۶-۲)$$

I_0 و I_1 را از جداول استاندارد بدست می آوریم.

$$A = \frac{tx}{L} \times 1$$

$$S = 2(x - x_e) \sqrt{1 + \left(\frac{t}{2L}\right)^2} = 2(x - x_e)f$$

$$f = \sqrt{1 + \left(\frac{t}{2L}\right)^2}$$

در خیلی از موارد $f \approx 1$ می گیرند چون

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - P^2 \frac{\theta}{dx} = 0$$

و حل می شود،

$$\theta = C_1 I_0(2Px^{1/2}) + C_2 k_0(2Px_0^{1/2})$$

برای پره تمام مثلث $C_2=0$ زیرا تابع بسل k_0 نا محدود می شود. لذا برای مثلث کامل

$$\theta = C_1 I_0(2Px^{1/2})$$

اگر درجه حرارت مبدأ $\theta = \theta_0 = t - t_f$ در $x=L$ داریم:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{I_0(2Px^{1/2})}{I_0(2PL^{1/2})}$$

$$q = 2\pi k t \theta_0(nr_1) \frac{k_1(nr_1)I_1(nr_2) - I_1(nr_1)k_1(nr_2)}{I_0(nr_1)k_1(nr_2) + k_0(nr_1)I_1(nr_2)} \quad (۳۷-۲)$$

یک جدول تابع بسل با دقت لازم در کتاب های ریاضی مختلف یافت می شود.

۲-۸ راندمان پره

با توجه به طولانی بودن روابط فوق از یک روش که راندمان پره ها است استفاده می کنیم. بدین ترتیب که راندمان پره عبارت است از حرارت حقیقی منتقل شده از پره به حرارتی که می توانست منتقل گردد اگر همه پره دارای درجه حرارت پایه باشد.

بر حسب η_f نرخ انتقال حرارت به وسیله یک معادله ساده می شود:

$$q = \bar{h}(A_b + \eta_f A_f) \Delta T_b \quad (38-2)$$

که A_f مجموع سطح پره و A_b سطح دیواره، لوله یا غیره بین پره ها است

توضیح آنالیزی برای η_f به آسانی برای حالت های مختلف بدست می آید. به عنوان مثال حالت مستطیل ساده که در انتهای آن انتقال حرارت نداریم به صورت زیر خواهد شد:

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hPkA} \theta_b \tanh nL}{hPL \theta_b} = \frac{1}{nL} \tanh nL$$

$$nL = \sqrt{\frac{hP}{kA}} \cdot L = \sqrt{\frac{h(2z + 2t)}{kzt}} \cdot L$$

$$\text{که } n^2 = \frac{hp}{kA} \text{ بود.}$$

Z عمق پره و t ضخامت پره است. اگر پره خیلی عمیق باشد و t در مقابل Z کوچک باشد (یعنی اگر پره نازک باشد) داریم:

$$nL = \sqrt{\frac{h2z}{kzt}} \cdot L = \sqrt{\frac{2h}{kt}} \cdot L$$

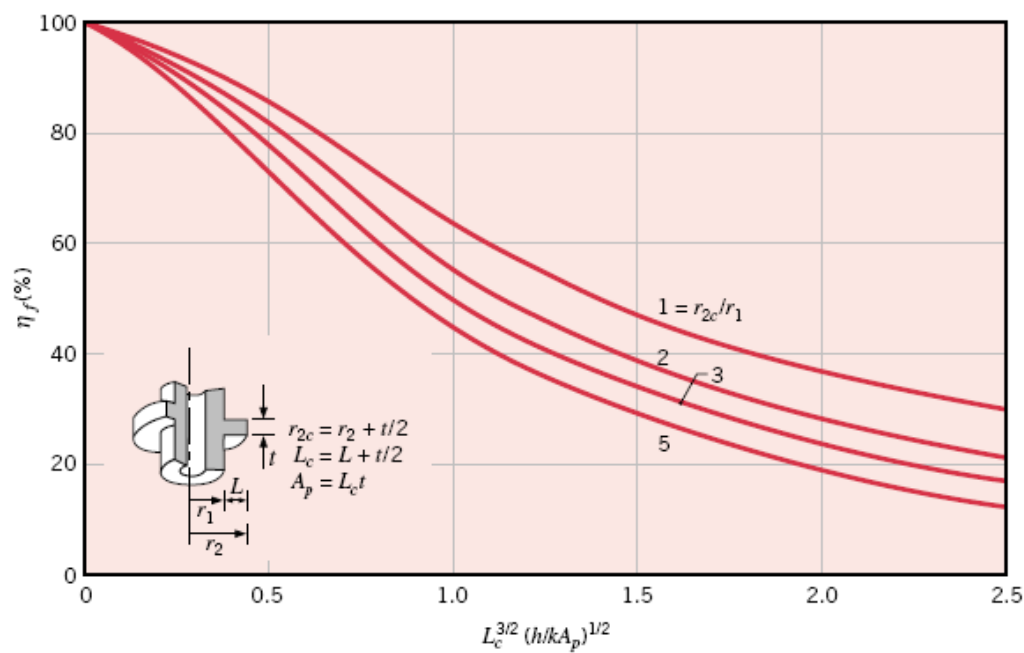
اگر صورت و مخرج را در $L^{1/2}$ ضرب کنیم می شود:

$$n \cdot L = \sqrt{\frac{2h}{kLt}} \cdot L^{3/2}$$

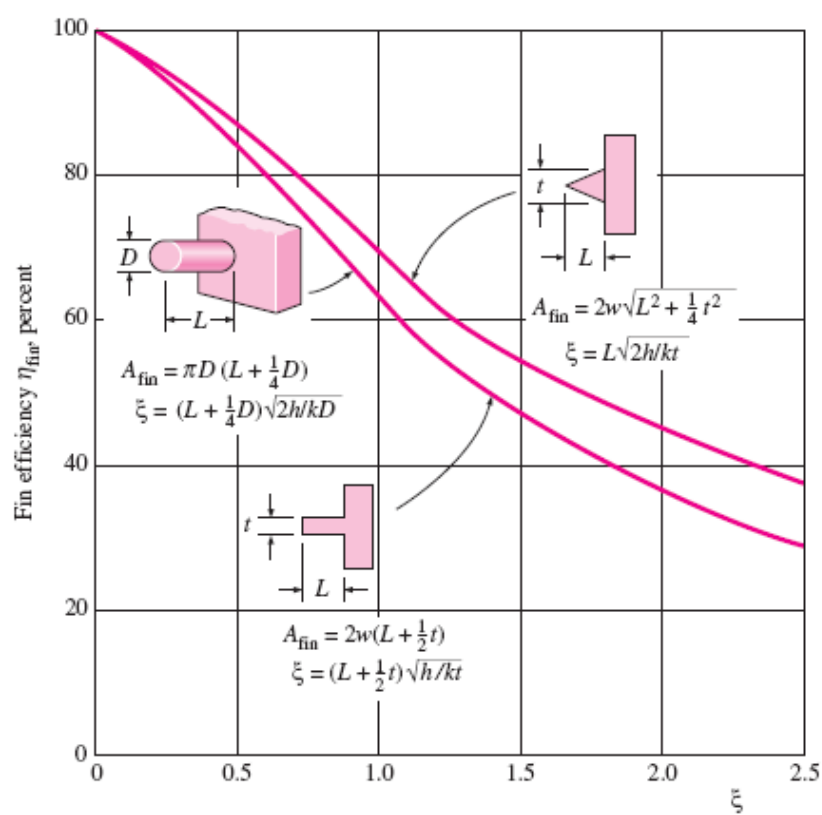
که $L \cdot t$ سطح پروفیل پره است و $A_p = L \cdot t$ لذا

$$m \cdot L = \sqrt{\frac{2h}{A_p \cdot K}} \cdot L^{3/2}$$

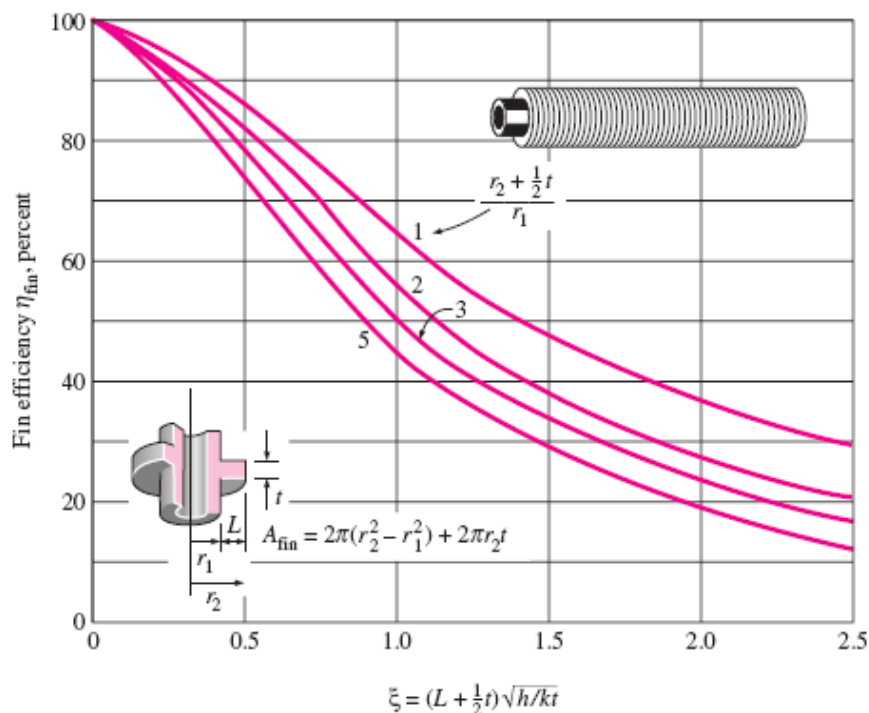
در شکل زیر راندمان پره بر حسب $nL/\sqrt{2}$ رسم شده است که در آن L را با $L_c = L + t/2$ جایگزین می کنند تا افت حرارت در نوک را هم شامل شود. چنین نموداری برای مثلث مستقیم و استوانه با پره های با ضخامت نیز کشیده شده است. توجه داشته باشید که $L_c t = A_p$ سطح پروفیل برای پره های مستطیل و استوانه ای است ولی A_p نصف $L \cdot t$ برای حالت مثلثی. بدیهی است که ضریب اصلاح طول برای پره مثلث نداریم و برای حالت استوانه $r_{2c} = r_2 + t/2$ می شود.



شکل ۲-۱۴ بازده پره های محیطی با پروفیل مستطیلی



شکل ۲-۱۵ بازده پره های مستطیلی و مثلثی و میله ای استوانه ای



شکل ۲-۱۶ بازده پره های محیطی با پروفیل مستطیلی

$$q = q_1 + q_2$$

$$q_1 = hA_b(T_b - T_\infty)$$

$$q_2 = hA_f\eta_f(T_b - T_\infty)$$

$$\eta = \frac{Q_{real}}{Q_{hansportable}} = \frac{hA_b(T_b - T_\infty)}{hA_f\eta_f(T_b - T_\infty)} \eta(T_b - T_\infty) = T - T_\infty \quad (39-2)$$

۹-۲ مقایسه کار پره

اگر بخواهیم پره را مشاهده کنیم نسبت حرارت منتقل شده در حالتی که پره داشته باشیم با حالتی که پره نداشته باشیم را می‌نویسیم.

$$\frac{\text{With Fin}}{\text{Without Fin}} = \frac{\eta_f A_f h \theta_0}{h A_b \theta_0} = \frac{\tanh nL}{\sqrt{hA/kp}} \quad (40-2)$$

$$PL = \text{سطح پره } A_f$$

A_b - سطح پایه پره A (اگر پره نداشتیم با توجه به رابطه فوق)

در مخرج اگر h بزرگ باشد مثلاً سیال در حال جوش یا با فشار بگذرد پره زیاد مؤثر نیست. یعنی نسبت کم می‌شود. یا در حالت دیگر اگر k خیلی کوچک باشد باز هم نسبت کم می‌شود و پره بی‌اثر می‌شود.

۲-۱۰ محاسبه مقدار حرارت منتقل شده از پره ها

با داشتن توزیع درجه حرارت در پره ها و استفاده از رابطه فوریه برای سه حالت پره به صورت زیر بدست می آید.

$$Q = -kA \frac{dT}{dx} = -kA \frac{d\theta}{dx}$$

۱- حالت اول: پره طولانی (طول بینهایت):

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-nx}$$

$$d\theta|_{x=0} = -n\theta_0 e^{-nx} = -n\theta_0$$

$$Q = -kA(-n\theta_0) = \sqrt{kA^2} \cdot \sqrt{\frac{hP}{kA}} Q_0 = \sqrt{kAhP} Q_0 \quad (41-2)$$

۲- حالت دوم: پره کوتاه که انتهایش عایق باشد:

$$\frac{d\theta}{dx}|_{x=0} \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh nL}$$

$$d\theta = \theta_0 \left[\frac{-ne^{n(L-x)} + ne^{-n(L-x)}}{e^{nL} + e^{-nL}} \right] = \theta_0 \left[\frac{-n[e^{n(L-x)} - e^{-n(L-x)}]}{e^{nL} + e^{-nL}} \right]$$

$$d\theta|_{x=0} = -\theta_0 n \frac{\sinh nL}{\cosh nL} = -\theta_0 n \tanh nL$$

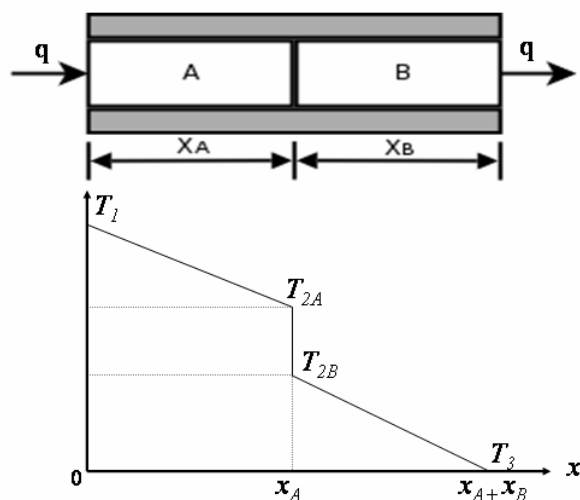
$$Q = \sqrt{kA\theta_0} \cdot \sqrt{\frac{hP}{kA}} \cdot \tanh nL = \theta_0 \sqrt{hPkA} \tanh nL \quad (42-2)$$

۳- حالت سوم: پره کوتاه که از انتهایش حرارت منتقل می شود:

$$Q = \theta_0 \sqrt{hPkA} \left[\frac{\sinh nL + h/kn \cosh nL}{\cosh nL + h/kn \cosh nL} \right] \quad (43-2)$$

۱۱-۲- مقاومت حرارتی در اثر تماس دو جسم

آزمایش می‌گویید در سطح تماس درجه حرارت افت می‌کند، این مطلب در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱۷-۲ افت حرارتی در نقطه تماس

$$q = k_A A \frac{T_1 - T_{2A}}{\Delta x_A} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{1}{h_c A}} = k_B A \frac{T_{2B} - T_3}{\Delta x_B}$$

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\Delta x_A}{k_A A} + \frac{1}{h_c A} + \frac{\Delta x_B}{k_B A}} \quad (۴۴-۲)$$

مقاومت حرارتی سطح تماس است. $\frac{1}{h_c A}$

حرارت در این فضا از دو طریق منتقل می‌شود:

- ۱- انتقال حرارت از جسم جامد به جسم جامد بعدی (سطوح اتصال)
- ۲- از کنوکسیون - چون ضریب هدایت گازها در مقایسه با جامدات کوچکتر است قسمت دوم رابطه مقاومت مهم می‌نماید و آن را به دلیل وجود گاز h_c نشان می‌دهیم. لذا رابطه کلی برای سطح اتصال می‌شود:

$$q = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{L_g}{2k_A A_C} + \frac{L_g}{2k_B A_C}} + k_f A_v \frac{T_{2A} - T_{2B}}{L_g} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{1}{h_c A}} \quad (۴۵-۲)$$

A_c - سطح تماس بین دو جامد

A_v - سطح خالی بین دو میله

L_g - طول فضای خالی

A - سطح تماس کل

$$h_c = \frac{1}{L_g} \left(\frac{A_c}{A} \cdot \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B} + \frac{A_v}{A} \cdot k_f \right) \quad (۴۶-۲)$$

K در مقایسه k_A و k_B کوچک است و برای بدست آوردن آن از جدول استفاده می شود و آن قدر کوچک است که بعضی مواقع می توان از آن صرف نظر کرد.

- مقاومت سطح تماس با کاهش فشار گاز محیط اطراف افزایش می یابد.
- مقاومت سطح تماس با ازدیاد فشار در دو طرف اجسام کم می شود.