انواع خطا : همه‌ی خطاها مثبت هستند

الف) **خطای مطلق** : اگر a تقریبی از A باشد خطای مطلق a را با نماد $e(a)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$e(a) = |A - a|$$

خطای مطلق نسبی : هر کران بالای خطای مطلق a را خطای مطلق نسبی a نامیده و با نماد e_a نشان می‌دهیم.

$$e(a) \leq e_a$$

مثال در زیر چند عدد تقریبی و اعداد واقعی داده شده‌اند ، خطای مطلق و خطای مطلق نسبی هر کدام را محاسبه کنید ،

خطای مطلق :

الف) $A = \pi \qquad a = ۳/۱۴۲$

$$e(a) = |A - a| = |\pi - ۳/۱۴۲| = ۰/۰۰۰۴$$

ب) $A = \sqrt{۲} \qquad a = ۱/۴۱$

$$e(a) = |A - a| = |\sqrt{۲} - ۱/۴۱| = ۰/۰۰۴۲$$

خطای مطلق نسبی :

$$e(a) = ۰/۰۰۰۴ \leq ۰/۰۰۰۵$$

$$e(a) = ۰/۰۰۴۲ \leq ۰/۰۰۵$$

یک واحد به اولین عدد بعد صفرهای اعشار اضافه می‌کنیم و نیازی به عدد بعد از آن نیست.

توجه : e_a منحصر به فرد نمی‌باشد اما $e(a)$ منحصر به فرد است.

ب) خطای نسبی: اگر a تقریبی از A باشد، خطای نسبی a را با نماد $\delta(a)$ نشان داده و بصورت زیر می نویسیم:

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|}$$

مثال قبل

الف) $\delta(a) = \frac{e(a)}{|A|} = \frac{0.004}{\pi} = 0.00127$

* حل عددی معادلات $f(x)=0$

مقدمه: یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه می شویم، حل معادله به شکل $(f(x)=0)$ است که در آن (f) یک تابع مفروض است. منظور از حل معادله ی $(f(x)=0)$ یافتن مقادیری از متغیر x است که به ازای آنها مقدار تابع صفر شود. هرگاه $(f(\alpha)=0)$ آنگاه α را یک ریشه ی معادله می نامیم و یا می نویسیم α یک صفر تابع (f) می باشد. با حل معادله ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ و تعیین ریشه های آن آشنا هستیم، اما معادلاتی مانند معادلات زیر را با روش های قبلی نمی توان حل نمود و برای حل آن ها باید از روش های تقریبی استفاده شود. $x+\cos x=0$ و $e^{-x}+\cos x=0$

معمولا برای تعیین ریشه ای از یک معادله با دقت مورد نظر لازم است تقریبی از آن ریشه یا فاصله ی کوچکی را که حاوی آن ریشه باشد معلوم کرد، بدین منظور

محدودیت های زیر را در نظر می گیریم:

الف- فاصله ای موجود باشد که شامل ریشه باشد. (بازه) فاصله

ب- باید ریشه در فاصله ی مورد نظر یکتا باشد. از نظر ریاضی محدودیت الف را بصورت زیر بیان می کنیم:

۱- تابع $f(x)$ در فاصله ی (a,b) پیوسته باشد

۲- $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامت باشند یا $f(a) \cdot f(b) < 0$

در نتیجه بنابه قضیه ی مقدار میانی عددی مانند α در فاصله ی $[a,b]$ وجود دارد بطوریکه $f(\alpha)=0$ باشد.

با داشتن شرایط ① و ② محدودیت ب از نظر ریاضی بصورت زیر بیان می شود:

③ برای هر $x \in [a,b]$ ، $f'(x)=0$

* روش های عددی حل معادلات « $f(x)=0$ »:

① روش تنصیف (دوبخشی): در این روش فرض می کنیم بازه های مانند $[a,b]$ وجود داشته باشند، بطوریکه: الف) تابع $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد، ب) $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد. ج) معادله ی $f(x)=0$ در (a,b) تنها یک ریشه داشته باشد.

$[a,b]$ را به دو بخش مساوی تقسیم می کنیم، یعنی قرار می دهیم: $x_1 = \frac{a+b}{2}$

x_1 را وسط بازه $[a,b]$ در نظر می گیریم تا $[a,b]$ به دو بخش مساوی

$[x_1, b]$ و $[a, x_1]$ تقسیم شود.

در روش دو بخشی وسط فاصله $[a, b]$ یعنی x_1 را به عنوان اولین تقریب ریشه ی α (مورد نظر) در نظر می گیریم.

① اگر $f(a)f(x_1)<0$ باشد، آنگاه ریشه در $[a, x_1]$ قرار دارد و $x_1=b$ و عمل را تکرار می کنیم.

② اگر $f(a)f(x_1)>0$ باشد، آنگاه ریشه در $[x_1, b]$ قرار دارد و $x_1=a$ در نظر گرفته و عمل را تکرار می کنیم.

③ اگر $f(a)f(x_1)=0$ باشد، x_1 ریشه معادله است و عملیات پایان می پذیرد.

«معیارهای توقف»

معیار توقف یعنی تعیین n (یک عدد) ای که تقریب $x_n \simeq \alpha$ را بدهد، معیار توقف محاسبه ی x_n ها نامیده می شود.

① $|f(x_n)| < \varepsilon$

② $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

③ گاهی از ما خواسته می شود که پس از m تکرار (m معلوم) حل معادله را به پایان رسانده و ریشه معادله را تقریب بزنیم.

مثال: تقریبی از ریشه ی معادله ی $x^3+x-1=0$ را که در $(0,1)$ قرار دارد بدست آورید بطوری که $f(x_n) < 10^{-2}$ باشد. تقریب را تا ۴ رقم اعشار (4D) بیابید:

حل: باید دو شرط برقرار باشد: پیوستگی: تابع چند جمله ای همیشه پیوسته است. و $f(a)\cdot f(b)<0$

$$f(a)=f(0)=-1,\quad f(b)=f(1)=1 \longrightarrow f(a)\cdot f(b)<0$$

نکته: همیشه تا یک رقم بیشتر از آنچه خواسته است گرد می کنیم.

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)\cdot f(b)$	$f(x_n)$
1	0	1	$x_1=\frac{0+1}{2}=0.5$	$(-)(-)=+$	$f(x_1)=f(0.5)=-0.375$ → $[x_1,b]$ و $x_1=a$
2	$x_1=0.5$	1	$x_2=\frac{0.5+1}{2}=0.75$	$(-)(+)=-$	$f(x_2=0.75)=0.17188$ → $[a,x_2]$ و $x_2=b$
3	0.5	$x_2=0.75$	$x_3=\frac{0.5+0.75}{2}=0.625$	$(-)(-)=+$	$f(x_3=0.625)=-0.13086$ → $[x_3,b]$ و $x_3=a$
4	0.625	0.75	$x_4=0.6875$	$(-)(+)=-$	$f(x_4=0.6875)=0.01245$ → $[a,x_4]$ و $x_4=b$
5	0.625	0.6875	$x_5=0.65625$	$(-)(-)=+$	$f(x_5=0.65625)=-0.06113$ → $[x_5,b]$ و $x_5=a$
6	0.65625	0.6875	$x_6=0.67188$	$(-)(-)=+$	$f(x_6=0.67188)=-0.02483$ → $[x_6,b]$ و $x_6=a$
7	0.67188	0.6875	$x_7=0.67969$		$f(x_7=0.67969)=-0.00631$

با توجه به این که شرط پایان $|f(x_n)|<10^{-2}$ لذا این شرط برای x_7 برقرار است:

$$|f(x_7)|<10^{-2} \rightarrow |-0.00631|<0.01$$

و تقریب ریشه با چهار رقم اعشار بصورت زیر می باشد: x_7 را تا ۴ رقم اعشار گرد می کنیم:

$$x_7 \simeq \alpha \longrightarrow \alpha \simeq 0.6797$$

تمرین: تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $x^3-(1-x)^5=0$ را که در $(0,1)$ قرار دارد را با ۴D بدست آورید بطوریکه داشته باشیم $|f(x_n)|<10^{-2}$

حل: شروط { تابع چندجمله‌ای همیشه پیوسته است و

$f(a)=f(0)=-1$ و $f(b)=f(1)=+1 \Rightarrow f(a).f(b)<1$

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{2}$	علامت $f(a).f(x_n)$	$f(x_n)$
1	0	1	$x_1=\frac{0+1}{2}=0.5$	$(-)(+)=(-)$	$f(x_1=0.5)=0.21875$ $\to [a,x_1]$, $x_1=b$
2	0	$x_1=0.5$	$x_2=\frac{0+0.5}{2}=0.25$	$(-)(-)=(+)$	$f(x_2)=-0.1748$ $\to [x_2,b]$, $x_2=a$
3	$x_2=0.25$	0.5	$x_3=0.375$	$(-)(+)=(-)$	$f(x_3)=0.04526$ $\to [a,x_3]$, $x_3=b$
4	0.25	$x_3=0.375$	$x_4=0.3125$	$(-)(-)=(+)$	$f(x_4)=0.05593$ $\to [x_4,b]$, $x_4=a$
5	$x_4=0.3125$	0.375	$x_5=0.34375$		$f(x_5)=-0.00355$

با توجه به این که مقدار $f(x_5)$ از 10^{-2} کوچکتر است شرط پایان مسئله برقرار است

$|f(x_n)|<10^{-2} \longrightarrow |f(x_5)|<10^{-2} \rightarrow |-0.00355|<0.01$

پس تقریب ریشه معادله از $x_n \simeq \alpha \rightarrow x_5 \simeq \alpha$ بدست می‌آید:

$x_5 \simeq \alpha \longrightarrow \boxed{\alpha \simeq 0.3438}$ ⟵ ۰/۳۴۳۷۵ تا ۴ رقم اعشار گرد شود

تمرین: تقریبی از ریشه معادله $3x - e^{-x} = 0$ را که در $(0.25 , 0.27)$ قرار دارد با ۳D بدست آورید، بطوریکه داشته باشیم: $|f(x_n)| < 10^{-3}$

شرط مسئله: $f(a)f(b) < 1$

$f(a) = f(0.25) = -0.0288$

$f(b) = f(0.27) = +0.0466$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
1	0.25	0.27	$x_1 = \frac{0.25+0.27}{2} = 0.26$	$(-)(+) = -$	$f(x_1 = 0.26) = 0.0089$
2	0.25	$x_2 = 0.26$	$x_2 = \frac{0.25+0.26}{2} = 0.255$	$(-)(-) = +$	$f(x_2 = 0.255) = -0.0099$
3	$x_2 = 0.255$	0.26	$x_3 = \frac{0.255+0.26}{2} = 0.2575$		$f(x_3 = 0.2575) = -0.00048$

شرط پایان مسئله برقرار است $|f(x_n)| < 10^{-3}$

$\hookrightarrow |f(x_3)| < 10^{-3} \rightarrow |(-0.00048)| < 10^{-3}$

پس تقریب ریشه می‌شود:

$x_n \simeq \alpha \rightarrow \alpha = x_3$

$x_3 = 0.2575$ را تا ۳ رقم اعشار گرد می‌کنیم ← $\alpha \simeq 0.258$

توجه : این پاسخ ممکن است اشتباه باشد