روش نابجایی

اگر $f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، $f(a)f(b)<0$ باشد و معادله‌ی $f(x)=0$ در بازه (a, b) تنها یک ریشه داشته باشد، برای تعیین تقریبی از ریشه که آن را α می‌نامیم داریم:

$$x_1=\frac{af(b)-b\,f(a)}{f(b)-f(a)}$$

حالت اول اگر $f(a)\times f(x_1)<0$ باشد ریشه در (a, x_1) قرار دارد و $x_1=b$ و x_2 را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$x_2=\frac{af(x_1)-x_1\,f(a)}{f(x_1)-f(a)}$$

حالت دوم اگر $f(a)f(x_1)>0$ باشد ریشه در (x_1, b) قرار دارد و $x_1=a$ و x_2 بصورت زیر می‌نویسیم:

$$x_2=\frac{x_1\,f(b)-b\,f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}$$

حالت سوم اگر $f(a)f(x_1)=0$ پس x_1 ریشه معادله می‌باشد و مسئله حل شده است

مثال: تقریبی از ریشه مثبت $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را به روش نابجایی با دو رقم اعشار $2D$ بدست آورید: ریشه در فاصله ۱ و ۲ قرار دارد: محاسبات را تا دو تکرار از روش نابجایی بدست آورید:

$(\underset{a}{1} , \underset{b}{2})$

$$\left.\begin{aligned} f(a=1) &= -1 \\ f(b=2) &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(a)f(b) < 0$$ شرط مسئله

فرمول: $$x_1 = \frac{a(f(b)) - b(f(a))}{f(b)-f(a)} = \frac{(1)(2)-(2)(-1)}{2-(-1)} = \frac{4}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$f(x_1 = \tfrac{4}{3}) = \frac{16}{9} - 2 = -\frac{2}{9} = 0/222$$

$\underset{(-)}{f(a)}\ \underset{(-)}{f(x_1)} = (+)$ → حالت دوم: $\to (x_1 , b) , x_1 = a$

$$\to x_2 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{(\frac{4}{3})(2)-(2)(\frac{-2}{9})}{2-(\frac{-2}{9})}$$

$$\to x_2 = 1/4 \to \boxed{\alpha \simeq 1/40}$$

مثال: به روش نابجایی تقریبی از ریشه‌ی منفی $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}=0$ را که در فاصله (۱- و ۲-) قرار دارد با ۴D طوری بدست آورید که داشته باشیم:

$|f(x_n)|<10^{-2}$

چون گفته ۴D ما تا ۴ رقم گرد می‌کنیم

$f(a=-2)=0.09070$

$f(b=-1)=-0.34147$

n	a	b	$X_n=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	علامت $f(a)f(X_n)$	$f(X_n)$
1	-2	-1	X_1= -1.19013	(+)(-)=(+)	-.08098 (a,x_1),x_1 = b
2	-2	-1.79013	X_2= -1.88912		0.00520

$f(X_2)=0.00520$ چون کمتر از 0.01 در شرط مسئله است پس مقدار تقریبی ریشه :

X_2= -1.88912 و بعد از چهار رقم اعشار گرد کردن α= -1.8891

روش نیوتون - رفسون :

- با در دست داشتن x_n خواهیم داشت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

← فرمول روش تکرار نیوتون

$(f'(x) \neq 0)$

مثال: فرمول روش نیوتون را برای تعیین ریشه ی K ام عدد مثبت a بدست آورید و با استفاده از آن و $x_0 = 1$ تقریبی برای $\sqrt{3}$ را تا ۴ رقم اعشار بیابید (۴D):

$$\left(x = \sqrt[k]{a}\right)^k \to x^k = a \to f(x) = x^k - a = 0$$

$$f(x_n) = x_n^k - a$$

$$f'(x_n) = k x_n^{k-1}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}}$$

← فرمول روش نیوتون برای محاسبه ریشه Kام عدد a

$$x_0 = 1 \to \left(x = \sqrt{3}\right)^2 \to x^2 = 3 \to f(x) = x^2 - 3 = 0$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$$

$$n = 0 \to x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 3}{2x_0} \to x_0 = 1 \to x_1 = 1 - \frac{1-3}{2\times 1} = 2 \to \boxed{x_1 = 2}$$

Subject: محاسبات عددی

Year: ۸۹ Month. ۱۲ Date. ۱۵

$n=1 \to x_2 = x_1 - \frac{x_1^2-3}{2x_1} = 2 - \frac{2^2-3}{2\times 2} = \boxed{1.75}$

$n=2 \to x_3 = x_2 - \frac{x_2^2-3}{2x_2} = 1.75 - \frac{1.75^2-3}{2\times 1.75} = \boxed{1.73214}$

$n=3 \to x_4 = x_3 - \frac{x_3^2-3}{2x_3} = 1.73214 - \frac{1.73214^2-3}{2\times 1.73214} = \boxed{1.73205}$ *

$n=4 \to x_5 = x_4 - \frac{x_4^2-3}{2x_4} = 1.73205 - \frac{1.73205^2-3}{2\times 1.73205} = \boxed{1.73205}$ *

چون x_4 و x_5 تا ۵ رقم اعشار با هم برابر شد پس x_5 به عنوان تقریبی از ریشه در نظر گرفته می‌شود:

$\Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 1.7321}$ گرد شده تا ۴ رقم

مهم [در حول ریشه کدام عدد را باید حفظ کنیم]

<< تمرین >> ریشه معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد را به روش نیوتن با ۴۵ ... به دست آورید. بطوریکه $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ و قرار دهید $x_0 = 0.5$

$\alpha \simeq 0.7391$

<< تمرین >> تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^2 - 2^x = 0$ را که در فاصله $(0, -1)$ قرار دارد به روش نیوتن تا یافتن چهار رقم اعشار به دست آورید. بطوریکه $|f(x_{n+1})| < 10^{-2}$

$\alpha \simeq -0.76657$

$\boxed{\text{تمرین}}$ ریشه معادله $f(x) = x - \cos(x) = 0$ را که در فاصله $[0 , 1]$ قرار دارد را به روش نیوتن با ۴۵ بدست آورید بطوریکه $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad f'(x) = 1 + \sin x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}$$

$$x_0 = 0/5 \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0 - \cos(x_0)}{1 + \sin(x_0)} = 0/75522$$

$$n = 1 \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{x_1 - \cos(x_1)}{1 + \sin(x_1)} = 0/73914$$

$$n = 2 \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{x_2 - \cos(x_2)}{1 + \sin(x_2)} = 0/73909$$

چون $\rightarrow |x_3 - x_2| = |-0/00005| < 10^{-4}$

پس ریشه معادل برابر است با x_3 با گرد شدن ۴ رقم اعشار

$$\rightarrow \alpha \simeq 0/7391$$

$\boxed{\text{تمرین}}$ تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^2 - 2^x = 0$ را که در فاصله $(-1, 0)$ قرار دارد را به روش نابجایی تا چهار رقم اعشار بدست آورید بطوریکه

« $|f(x_n)| < 10^{-2}$ »

شرط مسئله: $f(a)f(b) < 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = f(-1) = 0/5 \\ f(b) = f(0) = -1 \end{array}\right\}$$

n	a	b	$x_n = \dfrac{af(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	-1	۰	$x_1 = -0/66667$	$(+)(-) = \ominus$	$f(x_1) = -0/18551$ → (a, x_1) ، $x_1 = b$
۲	-1	$-0/66667$	$x_2 = -0/75687$	$(+)(-) = \ominus$	$f(x_2) = -0/01893$ → (a, x_2) ، $x_2 = b$
۳	-1	$-0/75687$	$x_3 = -0/76574$		$f(x_3) = -0/00181$

چون $|f(x_3)| = 0/00181 < 10^{-2}$ مطابق

شرط پایان مسئله شد پس تقریبی از ریشه معادله x_3 است

$\alpha \simeq -0/7657$ ← x_3 گرد شده به چهار رقم اعشار