خطای چند جمله ای درون یاب

تابع خطای $E(x)$ در چند جمله ای درون یاب بصورت زیر تعریف می شود:

$$E(x) = f(x) - P(x)$$

می خواهیم یک کران بالا برای $E(x)$ بدست آوریم:

اگر M_{n+1} یک کران بالای $f^{(n+1)}(\eta)$ باشد، (یعنی $f^{(n+1)}(\eta) \leq M_{n+1}$)

آنگاه رابطه ی زیر برای خطای چند جمله ای درون یاب برقرار است.

$$E(x) = |f(x) - P(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$، یک تابع جدولی در نقاط: $\left.\begin{matrix} x_0=-1 \\ x_1=0 \\ x_2=1 \end{matrix}\right\}$

باشد، چند جمله ای درون یاب f را در نقاط فوق محاسبه کنید و

یک کران بالا برای خطای آن بدست آورید؟

$\boxed{n=2}$

x_i	f_i	اول	دوم
-1	-1		
		$\frac{-1-0}{-1-0}=1$ $f[x_0,x_1]$	
0	0		$\frac{1-1}{-1-1}=0$ $f[x_0,x_1,x_2]$
		$\frac{0-1}{0-1}=1$	
1	1		

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)\, f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\, \cancel{f[x_0,x_1,x_2]}$$

$$\Rightarrow P(x) = -1 + (x-(-1)) \times 1 = x+1-1 = x \rightarrow \boxed{P(x) = x}$$

$$|f^{(3)}(\eta)| \le M_3$$

$$\begin{cases} f' = \frac{\pi}{2}\times\cos\frac{\pi}{2}x \\ f'' = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x \\ f^{(3)} = -\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi}{2}x \end{cases}$$

مشتق سوم تابع $f(x)$

$$|f^{(3)}| = \frac{\pi^3}{8}\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right| \le 1 \quad \le \frac{\pi^3}{8}\times 1 = \frac{\pi^3}{8} = M_3$$

$|\cos x| \le 1$, $|\sin x| \le 1$

$$|f(x)-P(x)| \le |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\frac{M_3}{3!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-P(x)| \le \boxed{|(x+1)x(x-1)|\frac{\frac{\pi^3}{8}}{6}}$$

$$|f(\tfrac{1}{2})-P(\tfrac{1}{2})| \le \left|(\tfrac{1}{2})^3-(\tfrac{1}{2})\right|\times\frac{\pi^3}{48} \le \boxed{0.242}$$

کران بالا برای خطا در نقطه $\frac{1}{2}$

* تفاضلات متناهی و درون یابی یک تابع هرگاه نقاط درون یابی متساوی الفاصله باشند:

روش های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده ی نیوتون در حالت کلی برای نقاط x_0 تا x_n چه متساوی الفاصله باشند چه نباشند چند جمله ای درون یاب را بدست می آورد. اما وقتی x_i ها متساوی الفاصله باشند روش های دیگری را برای محاسبه ی چند جمله ای درون یاب معرفی می کنیم.

هرگاه فاصله ی $[a,b]$ را به n زیر فاصله ی مساوی بصورت $[x_{i-1}, x_i]$ به طول h تقسیم کنیم داریم:

$$x_i = x_0 + ih \quad i = 0,1,\dots,n$$

$x_i - x_{i-1} = h$

تعریف عملگر پیشرو : (Δ) $\Delta^0 f_i = f_i$

$$\boxed{\Delta f_i = f_{i+1} - f_i}$$

فرمول کلی ← $\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i$

مشابه جدول تفاضلات تقسیم شده ی نیوتن هرگاه نقاط x_i مساوی الفاصله باشند، می توان جدول تفاضلات را یک جدول تفاضلات متناهی نامیده می شود تشکیل داد.

$\boxed{n=3}$ $n=3$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0			
		$f_1 - f_0$ Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta f_1 - \Delta f_0$ $\Delta^2 f_0$	
		$f_2 - f_1$ Δf_1		$\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$ $\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta f_2 - \Delta f_1$ $\Delta^2 f_1$	
		$f_3 - f_2$ Δf_2		
x_3	f_3			

مثال: تفاضلات متناهی مربوط به تابع جدولی زیر را محاسبه نمایید:

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	f_0 0			
		Δf_0 $-1-0=-1$		
0	f_1 -1		$\Delta^2 f_0$ $3-(-1)=4$	
		$2-(-1)=3$ Δf_1		$\Delta^3 f_0$ $4-4=0$
1	f_2 2		$7-3=4$ $\Delta^2 f_1$	
		$9-2=7$ Δf_2		
2	f_3 9			

فرمول چندجمله‌ای درون‌یاب برحسب تفاضلات متناهی:

هرگاه x_i نقاط مساوی الفاصله باشند و $\boxed{x = x_i + \theta h}$ در این صورت چندجمله‌ای درون‌یاب f برحسب تفاضلات پیشرو بصورت زیر می‌باشد:

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0$$

مثال: فرمول چندجمله‌ای درون‌یاب را برای تابع جدولی مثال قبل به روش تفاضلات متناهی پیشرو بدست آورید.

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$\Rightarrow P(x) = 0 + \theta(-1) + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\times 4 + \overset{\Delta^3 f_0 = 0}{0} = 2\theta^2 - 2\theta - \theta = 2\theta^2 - 3\theta$$

$$x = x_i + \theta h \xrightarrow{i=0} x = x_0 + \theta \underbrace{h}_{\text{فاصله بین نقاط}} \Rightarrow x = -1 + \theta \times 1 \Rightarrow \boxed{\theta = x+1}$$

$$\Rightarrow P(x) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) = \boxed{2x^2 + x - 1}$$ چندجمله‌ای درون‌یاب