*قاعده‌ی نقطه‌ی میانی:

این قاعده برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی که در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه تعریف نشده‌اند، استفاده می‌شود. برای یک زیربازه:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq h\, f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

فرمول قاعده‌ی نقطه‌ی میانی برای بازه‌ی a تا b می‌باشد:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq M(h) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right) + f\left(x_1+\frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right]$$

مثال: تقریبی از انتگرال از ۰ تا ۱ را $h=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ ، $\int_0^1 x^2\,dx$ حساب کنید؟

$$h=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1-0}{n} \Rightarrow \boxed{n=2}$$

$x_0=0$ ، $x_1=\frac{1}{2}$ ، $x_2=1$

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq M\left(\frac{1}{2}\right) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$f(x)=x^2 \rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16} ,\ f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{16}+\frac{9}{16}\right]=\boxed{\frac{5}{16}}$$

$$h=\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1-0}{n} \Rightarrow \boxed{n=4}$$

$x_0=0$ ، $x_1=\frac{1}{4}$ ، $x_2=\frac{2}{4}$ ، $x_3=\frac{3}{4}$ ، $x_4=\frac{4}{4}=1$

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq M\left(\frac{1}{4}\right) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_2+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_3+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$f(x)=x^2 \rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{64} ,\ f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{64} ,\ f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{25}{64} ,\ f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{49}{64}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{25}{64}+\frac{49}{64}\right]=\frac{1}{4}\times\frac{84}{64}=\boxed{\frac{21}{64}}$$

* قاعده‌ی دو نقطه‌ای گاوس:

فرمول های قاعده‌ی گاوس برای فاصله‌ی [۱ و ۱-] بدست می‌آیند. با استفاده از تغییر متغیر زیر بازه های [a و b] را به سادگی می‌توان به بازه [۱ و ۱-] تبدیل کرد.

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)u+(b+a)\right] \qquad dx = \frac{b-a}{2}du$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(u)\,du$$

$$g(u) = f\left[\frac{1}{2}(b-a)u+(b+a)\right]$$

فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

مثال: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ را با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس بدست آورید.

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}u + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}(u+1) \rightarrow dx = \frac{\pi}{4}du$$

$$\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{4}(u+1)\right)du = \frac{\pi}{4}\left[\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right] + \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right)\right]$$

$$= \boxed{0.998428}$$

روش های حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

در این فصل حل عددی دستگاه زیر را بررسی می‌کنیم که در آن $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره و مفروض است و x_0 و y_0 دو عدد معلوم می‌باشند.

* روش اول : روش سبط تیلور :

الگوریتم روش تیلور از مرتبه‌ی k :

برای پیدا کردن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$ در $[a,b]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

فاصله $[a,b]$ را به n قسمت مساوی به طول $h = \frac{b-a}{n}$ تقسیم کرده و قرار می‌دهیم

$x_0 = a , x_n = b \rightarrow x_i = x_0 + ih \rightarrow y(x_i) = y(a+ih)$

با داشتن y_i ، $y(x_{i+1})$ را که تقریبی از y_{i+1} می‌باشد را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i , y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i , y_i) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_i , y_i) \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

مثال: با استفاده از سبط تیلور مرتبه‌ی چهار مقدار $y(0.5)$ را محاسبه کرده ، به شرط آن که داشته باشیم $\left\{ \begin{array}{l} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$ و $h = 0.1$

$\boxed{k = 4}$ چهار

$x_i = x_0 + ih \rightarrow x_i = 0.1 i$

$i = 0 \rightarrow x_0 = 0$
$i = 1 \rightarrow x_1 = 0.1$
$i = 2 \rightarrow x_2 = 0.2$
$i = 3 \rightarrow x_3 = 0.3$
$i = 4 \rightarrow x_4 = 0.4$
$\boxed{i = 5 \rightarrow x_5 = 0.5}$

$y(0.5 = x_5) = y_5$

مشتق ضمنی

$f(x,y) = x + y$

$f'(x,y) = 1 + y' = 1 + x + y$

$f''(x,y) = 1 + y' = 1 + x + y$

$f^{(3)}(x,y) = 1 + y' = 1 + x + y$

Subject: محاسبات عددی

Year: 90 Month. 2 Date. 25

$$i=0 \rightarrow y_1 = y_0 + h\left(f(x_0,y_0)\right) + \frac{h^2}{2!} f'(x_0,y_0) + \frac{h^3}{3!} f''(x_0,y_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(3)}(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + 0.1(1) + \frac{(0.1)^2}{2!}(2) + \frac{(0.1)^3}{3!}(2) + \frac{(0.1)^4}{4!}(2) = 1.11$$

$$i=1 \rightarrow y_2 = y_1 + h\left(f(x_1,y_1)\right) + \frac{h^2}{2!} f'(x_1,y_1) + \frac{h^3}{3!} f''(x_1,y_1) + \frac{h^4}{4!} f'''(x_1,y_1)$$

$$\Rightarrow y_2 = 1.11 + 0.1(1.21) + \left[\frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^4}{4!}\right](2.21) = 1.24$$

$$i=2 \rightarrow y_3 = 1.24 + 0.1(1.44) + \left[5.17 \times 10^{-3}\right](2.44) = 1.39$$

$$i=3 \rightarrow y_4 = 1.39 + 0.1(1.69) + \left[5.17 \times 10^{-3}\right](2.69) = 1.57$$

$$i=4 \rightarrow y_5 = 1.57 + 0.1(1.97) + \left[5.17 \times 10^{-3}\right](2.97) = 1.78$$

$$y(0.5 = x_5) = \boxed{y_5 = 1.78}$$