تعریف: عملگر پسرو ∇ که به صورت زیر تعریف می‌کنیم: ∇ دلتا پلاس

$$\nabla^0 f_i = f_i$$

$$\boxed{\nabla f_i = f_i - f_{i-1}} \qquad \nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$$

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
x_0	f_0			
x_1	f_1	∇f_1		
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$	
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$

فرمول چند جمله‌ای درون یاب برحسب تفاضلات پسرو:

برای تخمین مقدار f_x وقتی x نزدیک به نقاط انتهایی جدول است، لازم است که از تفاضلات پسرو که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شود استفاده کنیم. چند جمله‌ای درون یاب f در نقاط مساوی الفاصله‌ی x_0 تا x_n و $x = x_n + \theta h$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \cdots + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)\cdots(\theta+n-1)}{n!} \nabla^n f_n$$

که فرمول بالا را تفاضلات پسرو نیوتن می‌نامیم.

مثال) جدول تفاضلات متناهی مربوط به تابع جدولی زیر را بدست آورده و چند جمله ای درون یاب آن را با استفاده از تفاضلات پسرو محاسبه نمایید

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
x_0 -1	0			
		∇f_1: -1		
x_1 0	-1		$\nabla^2 f_2$: 4	
		∇f_2: 3		$\nabla^3 f_3$: 0
x_2 1	2		$\nabla^2 f_3$: 4	
		∇f_3: 7		
x_3 2	9			

$\boxed{n=3}$

نکته: در تفاضلات پسرو n در f_n به n جدول بستگی دارد و برابر آن است.

$$P(x) = f_3 + \theta\nabla f_3 + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_3 + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!}\nabla^3 f_3 \quad \to n=3$$

$$\to P(x) = 9 + \theta(7) + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}(4) + 0 = 9\theta + 2\theta^2 + 9$$

$$x = x_n + \theta h \to x = x_3 + \theta(1) \to x - 2 = \theta$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2 + 9(x-2) + 9 \to \boxed{P(x) = 2x^2 + x - 1}$$

* انتگرال گیری عددی:

برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ هرگاه تابع اولیه‌ی f موجود نباشد و یا f را بصورت تابع جدولی داده شده باشد، از انتگرال گیری عددی استفاده می شود.

فرض می‌کنیم $[a,b]$ را به n قسمت مساوی بصورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$[x_i, x_{i+1}]$ $\quad i=0,1,\dots,n$

$x_{i+1}-x_i=h \qquad h=\frac{b-a}{n}$

* قاعده ذوزنقه ای (از روش های انتگرال گیری):

در $[x_i, x_{i+1}]$ تقریب زیر را به کار می‌بریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f_i+f_{i+1}\right]$$

رابطه‌ی بالا مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده های f_i و f_{i+1} و ارتفاع h می‌باشد.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h) = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n\right]}_{\text{فرمول قاعده‌ی ذوزنقه‌ای}}$$

T نماد قاعده‌ی ذوزنقه‌ای — h فاصله‌ی بازه

مثال تقریبی از $\int_0^1 x^2\,dx$ را به روش ذوزنقه‌ای به ازای $h=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

الف) $h=1 \rightarrow h=\frac{b-a}{n} \rightarrow 1=\frac{1-0}{n} \rightarrow \boxed{n=1}$

$f(x_0=0)=1 \qquad f(x_1=1)=1$

$x_0 \; (0) \qquad x_1 \; (1) \qquad h=1$

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq T(1)=\frac{h}{2}\left[f_0+f_1\right]=\frac{1}{2}[0+1]=\frac{1}{2}$$

ب) $h=\frac{1}{2} \rightarrow n=\frac{1-0}{1/2} \Rightarrow \boxed{n=2}$

$x_0=0 \qquad x_1=\frac{1}{2} \qquad x_2=1$

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq T\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{h}{2}\left[f_0+2f_1+f_2\right]=\frac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2}+1\right]=\frac{3}{8}$$

ج) $h = \frac{1}{4} \rightarrow n = \frac{1-0}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{n=4}$

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$

$$\int_0^1 x^2\,dx \simeq T\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{h}{2}\left[\underbrace{f_0}_{0} + 2\underbrace{f_1}_{\frac{1}{8}} + 2\underbrace{f_2}_{\frac{1}{2}} + 2\underbrace{f_3}_{\frac{9}{8}} + \underbrace{f_4}_{1}\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{22}{8}\right] = \frac{22}{64}$$

مثال: به روش ذوزنقه‌ای؛
تقریبی از انتگرال $\int_0^1 f(x)\,dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر بدست آورید:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_i	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f_i	۱	۱/۲۲۱۴	۱/۴۹۱۸	۱/۸۲۲۱	۲/۲۲۵۵	۲/۷۱۸۳

$\rightarrow \boxed{n=5}$

$\rightarrow h = 0/2 ,\ n = 5$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = T(0/2) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left[f_1 + f_2 + f_3 + f_4\right] + f_5\right] = 1/72$$

* قاعده سیمپسون:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right]$$

این قاعده فقط برای n زوج برقرار است. یعنی تعداد نقاط فرد باشد.

$$\int_{a\,(x_0)}^{b\,(x_n)} f(x)\,dx \simeq S(h) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

فرمول قاعده سیمپسون

مثال: تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ را با استفاده از قاعده‌ی سیمپسون و به ازای $h=\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ محاسبه کنید:

$$h=\frac{\pi}{4} \Rightarrow n=\frac{\overbrace{\frac{\pi}{2}-0}^{b-a}}{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{n=2}$$

$x_0=0$, $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \simeq S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{h}{3}\left[\overset{0}{f_0}+4\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{f_1}+\overset{1}{f_2}\right]=\frac{\pi}{12}\left[2\sqrt{2}+1\right]$$

$$h=\frac{\pi}{8} \rightarrow n=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{\frac{\pi}{8}} \Rightarrow \boxed{n=4}$$

x_0, $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{2\pi}{8}$, $x_3=\frac{3\pi}{8}$, $x_4=\frac{4\pi}{8}$

0 ... $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \simeq S\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4\right]$$

$$=\frac{\frac{\pi}{8}}{3}\left[0+4(0/383)+\frac{2\sqrt{2}}{2}+4(0/924)+1\right]=0/32\pi$$