ABADANOMRAN

روش وتری یا (خط قاطع):

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

x را نزدیک به x_n باشد، فرض کنیم x_{n-1}

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$ ⇐ فرمول روش وتری

* در این روش n از یک شروع می‌شود *

مثال با استفاده از روش وتری ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ را با سه ۳D رقم اعشار بدست آورید بطوری‌که داشته باشیم $|f(x_n)| < 0.001$ و قرار دهیم

$x_0 = 0$ و $x_1 = 1$. $f(x_0 = 0) = -1$, $f(x_1 = 1) = 1$

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - \frac{1(1-0)}{1-0} = \frac{1}{2}$$

$f(\frac{1}{2} = 0.5) = -0.375$

$$n = 2 \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.5 - \frac{(-0.375)(0.5-1)}{(-0.375) - 1} = 0.6364$$

$f(x_3 = 0.6364) = -0.1059$

$$n = 3 \rightarrow x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.6364 - \frac{(-0.1059)(0.6364 - 0.5)}{(-0.1059) - (-0.375)} = 0.6901$$

WWW.ABADANOMRAN.COM

$f(x_4 = 0.6901) = 0.0188$

$$n=4 \rightarrow x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)\,(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} = 0.6901 - \frac{(0.0188)\,(0.6901 - 0.6364)}{(0.0188) - (-0.1059)}$$

$$= 0.6820 \rightarrow f(x_5 = 0.6820) = -0.0008$$

شرط مسئله برقرار می‌باشد یعنی $|f(x_5)| = 0.0008 < 0.001$

و x_5 را بعنوان تقریبی از ریشه در نظر می‌گیریم. $\alpha \simeq 0.682$

روش تکرار ساده یا (نقطه ثابت یا تکرار تابعی):

در این روش پس از آزمون شرایط موجود بودن ریشه برای معادله‌ی $f(x)=0$ در $[a,b]$ معادله $f(x)=0$ پس از جابجایی‌های بصورت $x=g(x)$ نوشته می‌شود بطوری که α ریشه هر دو معادله باشد، معمولاً از روی معادله $f(x)=0$ بصورت های مختلفی می‌توان به شکل $x=g(x)$ رسید.

$f(\alpha)=0 \quad , \quad \alpha = g(\alpha)$

برای بدست آوردن فرمول؟ پس از نوشتن معادله $f(x)=0$ بصورت $x=g(x)$، x_nها بصورت زیر ساخته می‌شوند. بطور کلی با در دست داشتن x_n خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = g(x_n) \rightarrow x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1),\ \dots$$

رابطه‌ی بالا فرمول روش تکرار ساده برای بدست آوردن α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ نامیده می‌شود.

شرایط انتخاب $g(x)$ مناسب:

$$\forall x \in [a,b] \ , \ g(x) \in [a,b] \qquad (1)$$

$$\forall x \in [a,b] \ , \ |g'(x)| \leqslant 1 \qquad (2)$$

مثال برای تعیین تقریب ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 3xe^{x} - 1 = 0$ که در $(0,1)$ قرار دارد، از روش تکرار ساده استفاده کنید و قرار دهید $x_0 = 0.5$ و تقریب را با $3D$ محاسبه کنید. «تا جای ادامه می‌دهیم که دو ریشه متوالی ۳ رقم اعشار آن با هم مشابه باشد» $(3D)$

$$3xe^{x} = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3e^{x}} \rightarrow x = \frac{1}{3}e^{-x} = g(x)$$

برای ساختن $g(x)$ اعداد ثابت ضریب را در نظر نمی‌گیریم، توان منفی را می‌سازیم:

$$0 < x < 1 \xrightarrow[\text{تغییر جهت}]{-x} -1 < -x < 0 \xrightarrow[\text{جهت ثابت}]{e \text{ مثبت}} e^{-1} < e^{-x} < e^{0} \rightarrow 0 < \underbrace{\tfrac{1}{3}e^{-1}}_{0.123} < \underbrace{\tfrac{1}{3}e^{-x}}_{g(x)} < \underbrace{\tfrac{1}{3}e^{0}}_{1/3} < 1$$

$$\rightarrow 0 < \frac{1}{3}e^{-x} < 1 \rightarrow \boxed{0 < g(x) < 1}$$ شرط اول برقرار است

$$\forall \ 0 < x < 1 \rightarrow 0 < \frac{1}{3}e^{-x} < 1$$

$a > 1$ $\quad a^{x}$

چون بر تابع نمایی همیشه مثبت است ← $|g'| = \left|-\frac{1}{3}e^{-x}\right| = \frac{e^{-x}}{3}$: شرط دوم

$$\rightarrow \frac{e^{-x}}{3} < \frac{1}{3} < 1$$

$$x_{n+1} = g(x_n) \rightarrow x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

$$n = 0 \rightarrow x_1 = \frac{e^{-x_0}}{3} = \frac{e^{-0.5}}{3} = 0.2022$$

$$n = 1 \rightarrow x_2 = \frac{e^{-x_1}}{3} = \frac{e^{-0.2022}}{3} = 0.2723$$

$$n = 2 \rightarrow x_3 = \frac{e^{-x_2}}{3} = \frac{e^{-0.2723}}{3} = 0.2539$$

$$n = 3 \rightarrow x_4 = \frac{e^{-x_3}}{3} = \frac{e^{-0.2539}}{3} = 0.2586$$

$$n=4 \rightarrow x_5 = \frac{e^{-x_4}}{3} = \frac{e^{-0/25816}}{3} = 0/2574$$

$$n=5 \rightarrow x_6 = \frac{e^{-x_5}}{3} = \frac{e^{-0/2574}}{3} = 0/25777$$

۳ رقم گرد شده از x_6

شرط مسئله برقرار می‌باشد و x_6 به عنوان تقریب ریشه مورد نظر می‌باشد $\boxed{\alpha \simeq 0/258}$

تمرین ۲ ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $f(x)=2\sin x+x-2=0$ را تا 3D به روش وتری حساب کنید: ($x_0=0/5$ و $x_1=1$)

$\alpha \simeq 0/705$

تمرین تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=x-\cos x=0$ را که در فاصله‌ی $[0,1]$ قرار دارد، با 3D بدست آورید بطوری که $|f(x_n)|<10^{-2}$ و قرار دهید $x_0=1$. این مسئله را با استفاده روش تکرار ساده حل کنید:

$\alpha \simeq 0/744$

تمرین با فرض $x_0=1$ و انتخاب $g(x)$ مناسب تقریبی از ریشه‌ی مثبت معادله $f(x)=2x-\sin x-1=0$ طوری حساب کنید که $|f(x_n)|<10^{-3}$ باشد. با شرط 3D حل کنید.

$\alpha \simeq 0/888$

تمرین: ریشه مثبت معادله $f(x) = 2\sin x + x - 2 = 0$ را تا سه رقم اعشار ۳D به روش وتری حساب کنید: ($x_0 = ٫۵$ و $x_1 = 1$)

$f(x_0 = ٫۵) = -٫۵۴۱۱$

$f(x_1 = 1) = ٫۶۸۲۹$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$n=1 \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \Rightarrow x_2 = 1 - \frac{(٫۶۸۲۹)(٫۵ - 1)}{(٫۶۸۲۹) - (-٫۵۴۱۱)}$

$\rightarrow \boxed{x_2 = ۱٫۲۷۹} \rightarrow f(x_2) = ۱٫۱۹۴۵$

$n=2 \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Rightarrow x_3 = ۱٫۲۷۹ - \frac{(۱٫۱۹۴۵)(۱٫۲۷۹ - 1)}{(۱٫۱۹۴۵) - (٫۶۸۲۹)}$

$\rightarrow \boxed{x_3 = ٫۶۲۷۶} \rightarrow f(x_3) = -٫۱۹۸$

$n=3 \rightarrow x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \Rightarrow x_4 = ٫۶۲۷۶ - \frac{(-٫۱۹۸)(٫۶۲۷۶ - ۱٫۲۷۹)}{(-٫۱۹۸) - (۱٫۱۹۴۵)}$

$\rightarrow \boxed{x_4 = ٫۷۲۰۲} \rightarrow f(x_4) = ٫۰۲۹۳$

$n=4 \rightarrow x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \Rightarrow x_5 = ٫۷۲۰۲ - \frac{(٫۰۲۹۳)(٫۷۲۰۲ - ٫۶۲۷۶)}{(٫۰۲۹۳) - (-٫۱۹۸)}$

$\rightarrow \boxed{x_5 = ٫۷۰۴۹} \rightarrow f(x_5) = ٫۰۰۰۸$

$n=5 \rightarrow x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)(x_5 - x_4)}{f(x_5) - f(x_4)} \Rightarrow x_6 = ٫۷۰۴۹ - \frac{(٫۰۰۰۸)(٫۷۰۴۹ - ٫۷۲۰۲)}{(٫۰۰۰۸) - (٫۰۲۹۳)}$

$\rightarrow \boxed{x_6 = ٫۷۰۴۶}$ سه رقم بعد از اعشار x_5 و x_6 مشابه اند پس شرط مسئله برقرار است

پس x_6 به عنوان تقریبی از ریشه با ۳ رقم گرد کردن مورد نظر باشد: $\boxed{\alpha \simeq ٫۷۰۵}$

Subject: محاسبات عددی

Year: ۹۰ Month. ۱ Date. ۲۱

تمرین تقریبی از ریشه معادله ی $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد، با 3D بدست آورید، بطوری که $|f(x_n)| < 10^{-2}$ و همچنین $x_0 = 1$ بوده و مسئله را به روش تکرار ساده حل کنید:

$$x - \cos x = 0 \longrightarrow g(x) = \cos x$$

راه حل: $\boxed{x = \cos x} \longrightarrow 0 < x < 1 \Longrightarrow \underbrace{\cos(1)}_{0.5403} < \cos(x) < \underbrace{\cos(0)}_{1}$

$$0 < 0.5403 < \cos(x) < 1$$

$\longrightarrow 0 < \cos(x) < 1$ شرط اول برقرار است

$$g(x) = \cos(x) \Rightarrow g'(x) = -\sin(x) \Rightarrow |-\sin(x)| \xrightarrow{0 \le x \le 1} |g'(x)| \le 1$$

$0 \le x \le 1 \longrightarrow \sin(0) \le \sin(x) \le \sin(1) \Rightarrow 0 \le \sin x \le 0.841 < 1$ شرط دوم نیز برقرار است.

$$\longrightarrow \boxed{x_{n+1} = \cos(x_n)} \to n=0 \to x_1 = \cos(x_0) = \cos(1) \Rightarrow$$

$$x_1 = \cos(1) = 0.5403 \longrightarrow f(x_1) = 0.5403 - \cos(0.5403) = -0.3173$$

$$n=1 \to x_2 = \cos(x_1) = 0.8576 \to f(x_2) = 0.2033$$

$$n=2 \to x_3 = \cos(x_2) = 0.6543 \to f(x_3) = -0.1392$$

$$n=3 \to x_4 = \cos(x_3) = 0.7935 \to f(x_4) = 0.0921$$

$$n=4 \to x_5 = \cos(x_4) = 0.7014 \to f(x_5) = -0.0625$$

$$n=5 \to x_6 = \cos(x_5) = 0.7639 \to f(x_6) = 0.0418$$

$$n=6 \to x_7 = \cos(x_6) = 0.7221 \to f(x_7) = 0.0283$$

$$n=7 \to x_8 = \cos(x_7) = 0.7504 \to f(x_8) = 0.0190$$

$$n=8 \to x_9 = \cos(x_8) = 0.7314 \to f(x_9) = -0.0128$$

WWW.ABADANOMRAN.COM

$n=9 \to x_{10} = 0/7442 \to f(x_{10}) = 0/0086 \to |f(x_{10})| < 10^{-2}$

پس شرط مسئله برقرار است و چون $f(x_{10}) = 0/0086 < 10^{-2}$ است x_{10} بعداز گرد کردن بعنوان تقریبی از ریشه ما خواهد بود:

$\boxed{\alpha \simeq 0/744}$

تمرین با فرض $x_0 = 1$ و انتخاب $g(x)$ مناسب تقریبی از ریشه مثبت معادله زیر را طوری حساب کنید که $|f(x_n)| < 10^{-3}$ باشد. $f(x) = 2x - \sin x - 1 = 0$ و [illegible]

$0<x<1 \to \sin(0) < \sin x < \sin(1) \to \frac{\sin(0)+1}{2} < \frac{\sin x + 1}{2} < \frac{\sin(1)+1}{2} < 0/[illegible] < 1$

$2x - \sin x - 1 = 0 \to x = \frac{\sin x + 1}{2} \xrightarrow{g(x)} \boxed{x_{n+1} = \frac{\sin(x_n)+1}{2}}$ $\quad g'(x) < 1$

$n=0 \to x_1 = \frac{\sin(x_0)+1}{2} = 0/9207 \to f(x_1) = 0/0452$

$n=1 \to x_2 = \frac{\sin(x_1)+1}{2} = 0/898 \to f(x_2) = 0/0139$

$n=2 \to x_3 = \frac{\sin(x_2)+1}{2} = 0/891 \to f(x_3) = 0/0043$

$n=3 \to x_4 = \frac{\sin(x_3)+1}{2} = 0/8889 \to f(x_4) = 0/0014$

$n=4 \to x_5 = \frac{\sin(x_4)+1}{2} = 0/8882 \to f(x_5) = 0/0004$ ✓

چون $f(x_5) = 0/0004 < 10^{-3}$ است شرط مسئله برقرار بوده و می‌توان x_5 را به عنوان تقریبی از ریشه پذیرفت ←

$\boxed{\alpha \simeq 0/888}$