چند جمله‌ای درون یاب

تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

می‌خواهیم مقدار تابع f را در نقطه‌ای مانند x^* که عضو (x_0, x_n) باشد و بعلاوه $x^* \neq x_i$ که i از $(i=0,1,\dots,n)$ را برآورد کنیم که این عمل درون‌یابی نامیده می‌شود. برای این کار روش‌های متفاوتی وجود دارد، که یکی از این روش‌ها پیدا کردن چند جمله‌ای مانند $P(x)$ است به گونه‌ای که $P(x_i)=f_i \quad (i=0,1,\dots,n)$

حال بجای $f(x)$ می‌توان از $P(x)$ در بازه‌ی $[x_0, x_n]$ استفاده نمود.

به این ترتیب مسئله‌ای که مطرح می‌شود تعیین $f(x) \simeq P(x)$

چند جمله‌ای $P(x)$ می‌باشد که به چند جمله‌ای درون یاب معروف است.

* معرفی چند روش برای تعیین $P(x)$ که در شرط $P(x_i)=f_i$ صدق کند: *

چند جمله‌ای های لاگرانژ:

در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ هر یک یک چند جمله‌ای از درجه n باشد و داشته باشیم

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$$

$$\begin{cases} f(x_0)=f_0 \\ f(x_1)=f_1 \end{cases}$$

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} \quad (j=0,1,\dots,n)$$

تعریف: چند جمله‌ای $L_j(x)$ که بصورت بالا تعریف می‌شود، چند جمله‌ای لاگرانژ نامیده...

می‌شود که یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌باشد.

$\boxed{\text{مثال}}$ چندجمله‌ای $P(x)$ مربوط به تابع جدولی زیر را بنویسید:

x_i	x_0: ۰	x_1: ۱	x_2: ۳	x_3: ۴
f_i	f_0: ۱۲-	f_1: ۰	f_2: ۶	f_3: ۱۲

آخرین اندیس $\boxed{n=3}$

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{-12} = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{-12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x^3-7x^2+12x}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{x^3-5x^2+4x}{-6}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{x^3-4x^2+3x}{12}$$

$$P(x) = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{\cancel{-12}}(\cancel{-12}) + \left(\frac{x^3-7x^2+12x}{6}\right)(0) + \left(\frac{x^3-5x^2+4x}{\cancel{-6}}\right)(\cancel{6})$$
$$+ \left(\frac{x^3-4x^2+3x}{\cancel{12}}\right)(\cancel{12}) = \boxed{x^3-7x^2+18x-12}$$

چندجمله‌ای درون‌یاب برحسب تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

فرض کنید x_0 تا x_n نقاط دو به دو متمایز می‌باشند و $(f_0, \dots, f_n)$ مقادیر تابع در این نقاط باشند، تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی متفاوت را برای نقاط x_i به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

① تفاضلات مرتبه‌ی اول بین دو نقطه x_i و x_{i+1} ایجاد می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$$

② تفاضل مرتبه دوم بین سه نقطه x_i و x_{i+1} و x_{i+2} روی می دهد.

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

مثال: $f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$

③ تفاضل مرتبه i ام بین $i+1$ نقطه‌ی x_i و ... و x_1 و x_0 روی می دهد

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i] = \frac{f[x_0, \dots, x_{i-1}] - f[x_1, \dots, x_i]}{x_0 - x_i}$$

مثال: چندجمله‌ای درونیاب تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن تابع جدولی زیر را بدست آورید.

$\boxed{n = 3}$

x_i	$\overset{x_0}{0}$	$\overset{x_1}{1}$	$\overset{x_2}{2}$	$\overset{x_3}{5}$
f_i	$\underset{f_0}{2}$	$\underset{f_1}{3}$	$\underset{f_2}{12}$	$\underset{f_3}{147}$

	x_i	f_i	اول $f[x_i, x_{i+1}]$	دوم $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	سوم $f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i]$
x_0	0	f_0 2	$f[x_0, x_1]$: $\frac{2-3}{0-1} = 1$	$f[x_i, x_1, x_2]$: $\frac{1-9}{0-2} = 4$	$f[x_0, \dots, x_3]$: $\frac{4-9}{0-5} = 1$
x_1	1	f_1 3	$f[x_1, x_2]$: $\frac{3-12}{1-2} = 9$	$f[x_1, x_2, x_3]$: $\frac{9-45}{1-5} = 9$	
x_2	2	f_2 12	$f[x_2, x_3]$: $\frac{12-147}{2-5} = 45$		
x_3	5	f_3 147			

* فرمول چندجمله‌ای درون یاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتون *

چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_n و ... و x_0 به صورت زیر می‌باشد:

$$P(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$ فرمول کلی.

ادامه مثال: $$P(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] =$$
$$= 2 + (x-0)(1) + (x-0)(x-1)(4) + (x-0)(x-1)(x-2)(1) =$$
$$= 2 + x + 4x^2 - 4x + x^3 - 3x^2 + 2x = \boxed{x^3 + x^2 - x + 2}$$

تمرین: چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شده نیوتون محاسبه کرده و به کمک آن f_6 را تقریب بزنید.

x_i	۵	۷	۱۱	۱۳	۲۱
f_i	۱۵۰	۳۹۲	۱۴۵۲	۲۳۶۶	۹۷۵۲

$$\boxed{f(6) = 252}$$

تمرین: چندجمله درونیاب تابع جدولی زیر را به روش لاگرانژ بدست آورید؟

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	۱	۱	۳	۷

$$\boxed{P(x) = x^2 + x + 1}$$

تمرین | چند جمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی زیر را با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن محاسبه و $f(6)$ را تقریب بزنید:

x_i	۵	۷	۱۱	۱۳	۲۱
f_i	۱۵۰	۳۹۲	۱۴۵۲	۲۳۶۶	۹۷۰۲

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
x_0 ۵	f_0 ۱۵۰	$\frac{150-392}{5-7}=121$	$\frac{121-265}{5-11}=24$	$\frac{24-32}{5-13}=1$	$\frac{1-1}{5-21}=0$
x_1 ۷	f_1 ۳۹۲	$\frac{392-1452}{7-11}=265$	$\frac{265-457}{7-13}=32$	$\frac{32-46}{7-21}=1$	
x_2 ۱۱	f_2 ۱۴۵۲	$\frac{1452-2366}{11-13}=457$	$\frac{457-917}{11-21}=46$		
x_3 ۱۳	f_3 ۲۳۶۶	$\frac{2366-9702}{13-21}=917$			
x_4 ۲۱	f_4 ۹۷۰۲				

$$P(x)=150+(x-5)(121)+(x-5)(x-7)(24)+(x-5)(x-7)(x-11)(1)$$

$$+\underbrace{(x-5)(x-7)(x-11)\cancel{(x-13)(0)}}_{0}=x^3+x^2$$

$$\Rightarrow P(x)\simeq f(x)=\boxed{x^3+x^2}\ \checkmark$$

$$\rightarrow f(6)=6^3+6^2=\boxed{252}\ \checkmark$$

تمرین: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی زیر را به روش لاگرانژ بدست آورید؟ $\boxed{n=3}$

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	3	7
	f_0	f_1	f_2	f_3

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{+2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1-(-1))(1-0)(1-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{+6}$$

$$P(x) = \left(\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}\right)(1) + \left(\frac{x^3-2x^2-x+2}{+2}\right)(1) +$$

$$+\left(\frac{x^3-x^2-2x}{-2}\right)(3) + \left(\frac{x^3-x}{+6}\right)(7) = x^2+x+1$$

$$\longrightarrow \boxed{P(x) = x^2+x+1}$$