

Subject : تحلیل سازه ها / فصل سوم

Year :      Month.      Date.



علاسم تغییر شکل سازه ها :

۱) روش انرژی (نظریه کار مجازی)

مدول الاستیسیته

محصول دو تغییر شکل سازه

$$EI y'' = M \rightarrow y'' = \frac{M}{EI}$$

همان انرژی

تغییر سازه = تغییر خطی و غیر خطی تغییر شکل سازه

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI} dx$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{M}{EI}$$

$$dy = \left( \int \frac{M}{EI} dx \right) dx$$

$$EI y = \int \int M dx$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{M}{EI}$$

$$\int dy = \int \left( \int \frac{M}{EI} dx \right) dx$$

$$dy' = \frac{M}{EI} dx$$

$$y = \int \int \frac{M}{EI} dx$$

$$\int dy' = \int \frac{M}{EI} dx$$

$$q \leftarrow V \leftarrow \int q dx, M \leftarrow V \leftarrow \int V dx$$

$$y' = \int \frac{M}{EI} dx$$

$$EI \theta = \int M dx$$

$$y = \int \theta dx$$

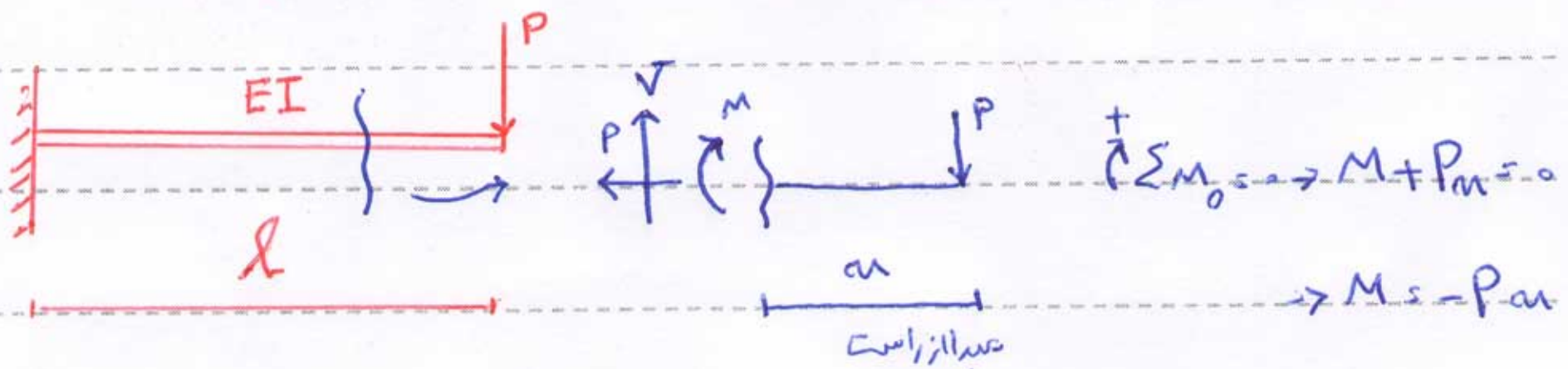
$$\theta = \frac{1}{EI} \left( \int dx \cdot M \right) = EI \theta = \int M dx$$



Subject :

Year :      Month.      Date.

معادلات تعریف شده را در دست آورده و تبدیل و تغییر مکان انتهای آزاد آن را در دست آورده.



$$0 < m < l$$

$$EI \theta = \int m dx = \int (-Pm) dm = -P \frac{m^2}{2} + C$$

↓

$$EI y = \int EI \theta dx = \int \left( -\frac{Pm^2}{2} + C \right) dx = -\frac{Pm^3}{6} + Cm + D$$

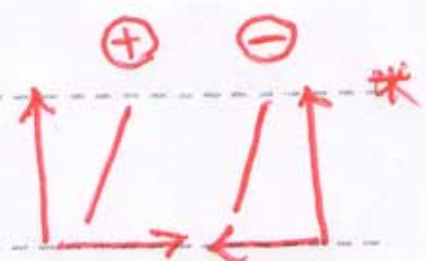
با استفاده از شروط مرزی

$$\left\{ \begin{array}{l} x=l \\ y=0 \end{array} \right. \Rightarrow EI(0) = -\frac{Pl^3}{6} + \frac{Pl^2}{2}(l) + D$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{Pl^3}{6} + \frac{3Pl^3}{6} + D \Rightarrow D = -\frac{Pl^3}{3}$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{Pm^2}{2} + \frac{Pl^2}{2} \right]$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{Pm^3}{6} + \frac{Pl^2}{2}m - \frac{Pl^3}{3} \right]$$





Subject :

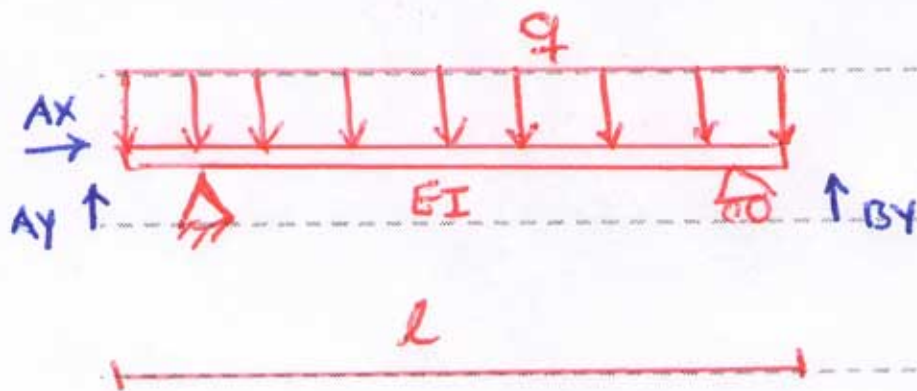


Year :      Month.      Date.

$$\text{استفاده از: } \alpha = 0 \rightarrow \theta = \frac{-1}{EI} \left[ -\frac{P\alpha^2}{2} + \frac{Pl^2}{2} \right] \rightarrow \theta = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P(0)^3}{6} + \frac{Pl^2}{2} (0) - \frac{Pl^3}{3} \right] \rightarrow y = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

مثال: مقدار سبب و تغییر مکان شکل داده شود، ایستگاه و تغییر مکان وسط دهانه نیز و سبب در تکیه ها، ایستگاه نیز.



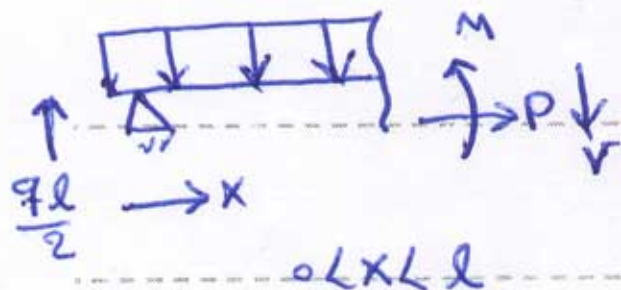
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{Ax = 0}$$

$$+\uparrow \sum M_A = 0 \rightarrow ql \left( \frac{l}{2} \right) - By l = 0$$

$$\rightarrow \boxed{By = \frac{ql}{2}}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow Ay - ql + \frac{ql}{2} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{Ay = \frac{ql}{2}}$$



$$+\uparrow \sum M_o = 0 \rightarrow \frac{ql}{2} (x) - qx \left( \frac{x}{2} \right) - M = 0$$

$$\rightarrow M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}$$

4

$$EI \theta = \int M dx = \int \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C$$

$$EI y = \int EI \theta dx = \int \left( \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C \right) dx = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + Cx + D$$



Subject :



Year :

Month.

Date.

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right. \rightarrow EI(0) = \frac{ql}{12} (0)^3 - \frac{q(0)^4}{24} + C(0) + D \rightarrow D=0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=l \\ y=0 \end{array} \right. \rightarrow EI(l) = \frac{ql}{12} (l)^3 - \frac{q(l)^4}{24} + C(l) + 0$$

$$0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + Cl \rightarrow 0 = \frac{2ql^4 - ql^4}{24} + Cl \rightarrow 0 = \frac{ql^4}{24} + Cl \rightarrow C = -\frac{ql^3}{24}$$

$$Q = \frac{1}{EI} \left[ \frac{ql}{4} m^2 - \frac{qm^3}{6} - \frac{ql^3}{24} \right]$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qlm^3}{12} - \frac{qm^4}{24} - \frac{ql^3}{24} m \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{در وسط پل } x = \frac{l}{2} \\ \text{در انتهای پل } x = l \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{1}{EI} \left[ \frac{ql^3}{16} - \frac{ql^3}{48} - \frac{ql^3}{24} \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{9ql^3 - 9ql^3 - 2ql^3}{48} \right] = 0 \\ y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{ql^4}{96} - \frac{ql^4}{384} - \frac{ql^4}{48} \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4ql^4 - ql^4 - 8ql^4}{384} \right] = \frac{-5ql^4}{384EI} \end{array} \right.$$

$$\text{در انتهای پل } (x=0) \rightarrow Q = \frac{1}{EI} \left[ 0 - 0 - \frac{ql^3}{24} \right] = -\frac{ql^3}{24EI}$$

$$\text{در وسط پل } (x=l) \rightarrow Q = \frac{1}{EI} \left[ \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{6} - \frac{ql^3}{24} \right] = \frac{1}{EI} \frac{6ql^3 - 4ql^3 - ql^3}{24}$$

$$\frac{ql^3}{24EI}$$

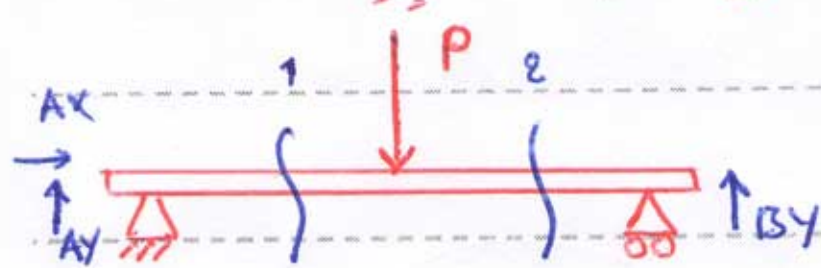


Subject :

Year :      Month.      Date.



مثال: یک تیر افقی با طول ۲ متر و یک نیرو عمودی به سمت پایین  $P$  در وسط آن قرار دارد. تیر را در دو نقطه از دو طرف آن به گونه‌ای مهار می‌کنیم که تیر در حالت تعادل باشد. تیر را در دو نقطه از دو طرف آن به گونه‌ای مهار می‌کنیم که تیر در حالت تعادل باشد.



و سبب تعادل آن ها؟

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P \cdot 1 - B_y \cdot 2 = 0 \rightarrow B_y = \frac{P}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - P + B_y = 0 \rightarrow A_y = \frac{P}{2}$$



$$0 < x < l/2$$

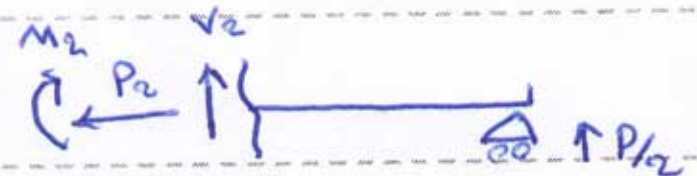
$$\sum M_0 = 0 \rightarrow \frac{P}{2} x - M = 0 \rightarrow M = \frac{P}{2} x$$

$$EI \theta_1 = \int M_1 dx = \int \frac{P}{2} x dx = \frac{Px^2}{4} + C_1$$

$$EI y_1 = \int EI \theta_1 dx = \int \left( \frac{Px^2}{4} + C_1 \right) dx = \frac{Px^3}{12} + C_1 x + D_1$$

$$= \frac{Px^3}{12} + C_1 x + D_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow EI(0) = 0 + 0 + D_1 \rightarrow D_1 = 0 \\ y_1=0 \end{array} \right.$$



$$0 < z < l/2$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow M_2 - \frac{P}{2} z = 0 \rightarrow M_2 = \frac{P}{2} z$$

$$EI \theta_2 = \int M_2 dz = \int \frac{P}{2} z dz = \left[ \frac{Pz^2}{4} + C_2 \right]$$

$$EI y_2 = \int EI \theta_2 dz = \int \left( \frac{Pz^2}{4} + C_2 \right) dz = \frac{Pz^3}{12} + C_2 z + D_2$$

$$= \frac{Pz^3}{12} + C_2 z + D_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z=0 \rightarrow EI(0) = 0 + 0 + D_2 \rightarrow D_2 = 0 \\ y_2=0 \end{array} \right.$$

در هر یک از دو نیمی که در دو طرف تیر قرار دارد، یک نیرو عمودی به سمت پایین  $P/2$  قرار می‌دهیم. این دو نیرو باعث تعادل تیر می‌شوند.

این دو نیرو باعث تعادل تیر می‌شوند.



Subject :

Year :

Month.

Date.

$$\left\{ \begin{array}{l} m = l/2, z = l/2 \\ EIQ_1 = \frac{Pl^2}{16} + C_1 \\ EIQ_2 = -\frac{Pl^2}{16} - C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{Pl^2}{16} + C_1 = \frac{Pl^2}{16} - C_2$$
$$\left\{ \begin{array}{l} EIQ_1 = EIQ_2 \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow C_1 + C_2 = -\frac{Pl^2}{16} - \frac{Pl^2}{16} = C_1 + C_2 = -\frac{Pl^2}{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = l/2, z = l/2 \\ EII_1 = \frac{Pl^3}{96} + C_1 \frac{l}{2} \\ EII_2 = \frac{Pl^3}{96} + C_2 \frac{l}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow EII_1 = EII_2$$

$$\hookrightarrow \frac{Pl^3}{96} + C_1 \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{96} + C_2 \frac{l}{2} \rightarrow C_1 = C_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = -\frac{Pl^2}{8} \\ C_1 = C_2 \end{array} \right. \rightarrow C_1 = C_2 = -\frac{Pl^2}{16}$$

1.  $\text{نقطه 1} \rightarrow Q_1 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pl^2}{4} - \frac{Pl^2}{16} \right], \quad y_1 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pl^3}{12} - \frac{Pl^2}{16} m \right]$

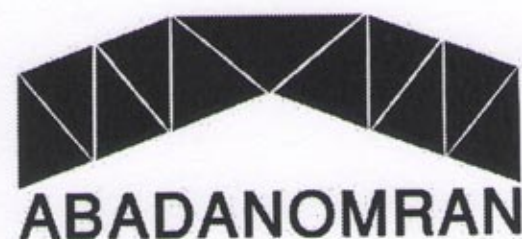
2.  $\text{نقطه 2} \rightarrow Q_2 = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{Pl^2}{4} - \frac{Pl^2}{16} \right], \quad y_2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pl^3}{12} - \frac{Pl^2}{16} z \right]$

$m = z = l/2$   $\text{نقطه 2 و 1 هم‌زمان}$   $y_1 = y_2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pl^3}{96} - \frac{Pl^3}{96} \right] = \frac{1}{EI} \frac{Pl^3 - 3Pl^3}{96}$

$$\hookrightarrow y_1 = y_2 = -\frac{Pl^3}{48EI}$$



Subject :



Year :

Month.

Date.

سبب بلک (x=z=0) و تفریق  $Q_1 - Q_2$

$$Q_1 = \frac{1}{EI} \left[ 0 - \frac{Pl^2}{16} \right] \rightarrow Q_1 = \frac{-Pl^2}{16EI} \xrightarrow{Q_2} Q_2 = + \frac{Pl^2}{16EI}$$

سبب  $\frac{Pl^2}{16EI}$

