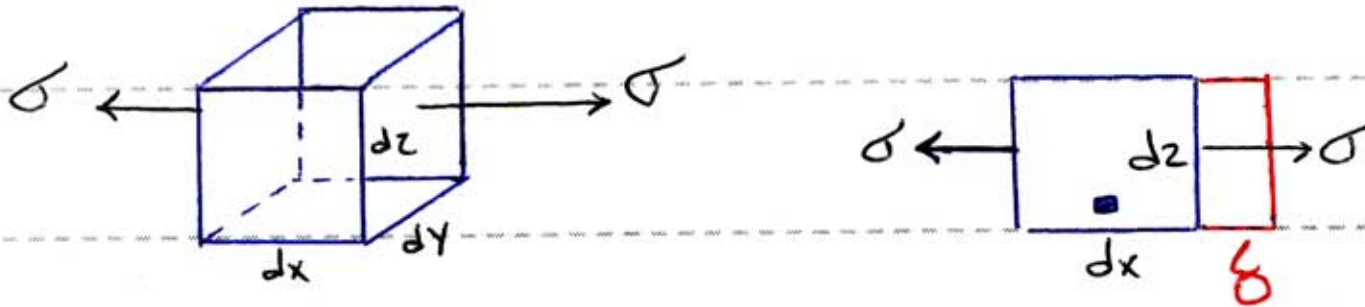


Subject :

Year :      Month.      Date.

انرژی کرنشی داخلی ذخیره شده در سازه‌های تحت تنش عمودی (نرمال)



جایگاه  $\times$  نیرو :  $\Delta$

$$du = \frac{\sigma \cdot dy \cdot dz}{2} \times \epsilon \cdot dx$$

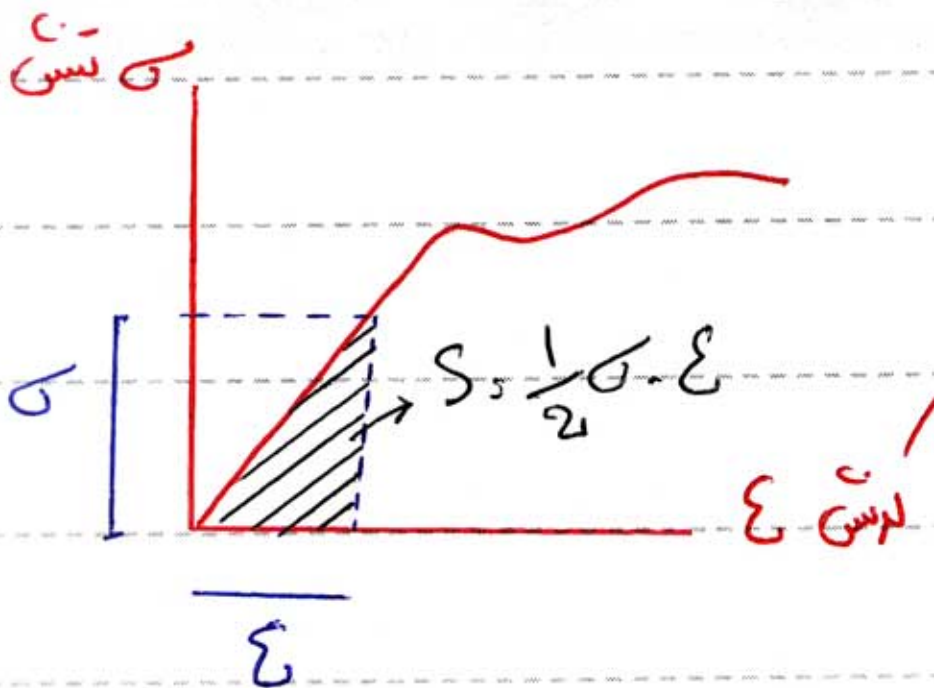
جایگاه  $\epsilon$  :  $\frac{\sigma}{\text{طول اول}}$  :  $\frac{\sigma}{dx}$

$$du = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$\epsilon = \frac{\sigma}{dx} = \sigma \cdot \epsilon \cdot dx$

$$du = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon \cdot dV$$

$$\frac{du}{dV} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon$$





Subject :

Year :      Month.      Date.



$$du = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon \cdot dV$$

$$\rightarrow du = \frac{1}{2} \sigma \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot dV = du = \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

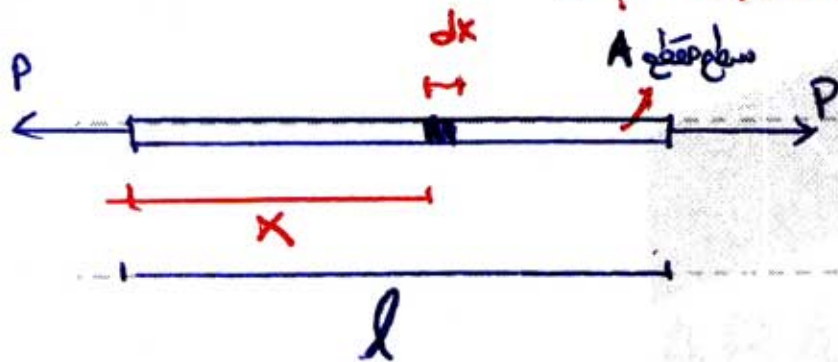
$$\sigma = E \cdot \epsilon \rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\Rightarrow U = \int du = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

انکه الی سکه فاست

دسته اول

لا اعضاءى سازهاى با سطح مقطع ثابت تحت تأثیر نیروى محوری ثابت



باتوجه به اینکه میزان تغییرات عضو با سطح مقطع و نیروی

ثابت تعیین شده است لذا نیروی کششی در همه سازه

$$dV = A \cdot dx \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

$$\text{در همه سازه ها} \quad U = \sum \frac{P_i^2 l_i}{2EA_i}$$

$$U = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int \frac{(P/A)^2}{2E} \cdot A \cdot dA = \int \frac{P^2/A^2}{2E} \cdot A \cdot dx = \int \frac{P^2}{2EA^2} dx$$

$$\int \frac{P^2}{2EA} \cdot du = \frac{P^2}{2EA} \cdot \int_0^l dx = \frac{P^2}{2EA} \cdot u \Big|_0^l \rightarrow \frac{P^2 l}{2EA} = U = \frac{P^2 l}{2EA} \checkmark$$

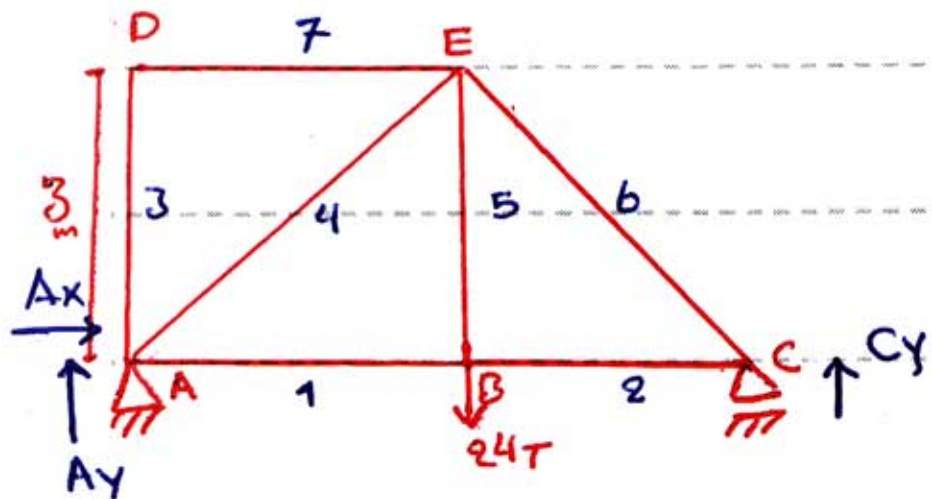


Subject :

Year :      Month.      Date.



مسئله) اندریم کمرشی دضربه سیده در ضربای فولادی سطح زیر را با سبب کشید.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 24 \times 4 - C_y \times 8 = 0 \rightarrow C_y = 12t$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 24 + 12 = 0 \rightarrow A_y = 12t$$



$$A_1 = A_2 = A_7 = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = A_5 = 6 \text{ cm}^2$$

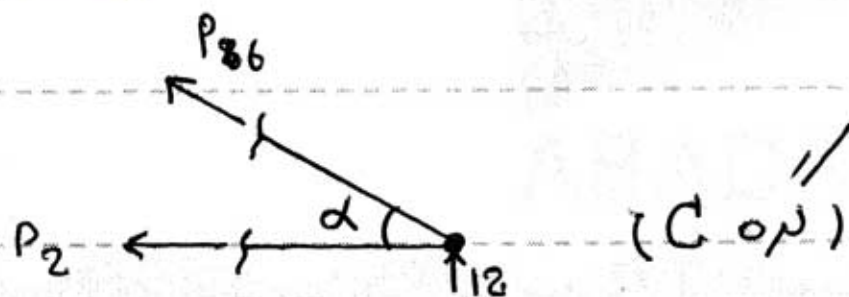
$$A_4 = A_6 = 10 \text{ cm}^2$$

↑ سطح مقطع اعضا  
(داده شده در مساله)

برای حل این مثال باید ابتدا ضربای داده شده را تحلیل

کنیم برای اینکار از گره ای که حداقل دو نیروی مجهول دارند

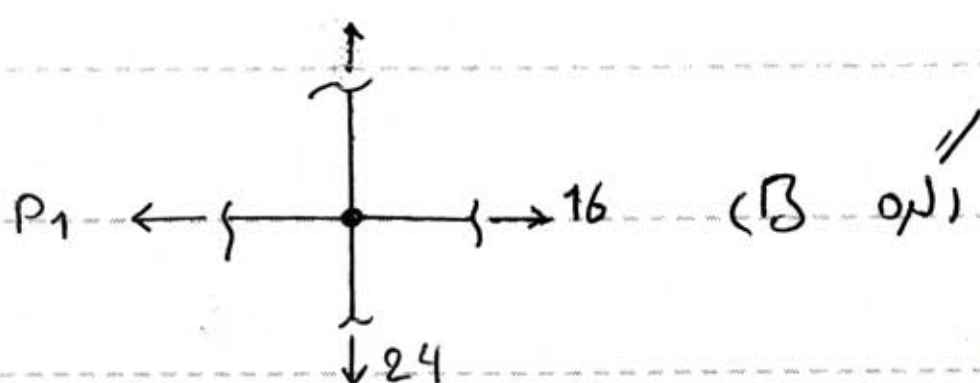
تحلیل را شروع می کنیم (گره C یا D)



$$\begin{cases} \sin \alpha = 3/5 = 0.6 \\ \cos \alpha = 4/5 = 0.8 \end{cases}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 12 + P_6 \sin \alpha = 0 \rightarrow P_6 = -12 / \sin \alpha = -12 / 0.6 = -20t$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -P_2 - P_6 \cos \alpha = 0 \rightarrow -P_2 - (-20) \times 0.8 = 0 \rightarrow P_2 = 16t$$



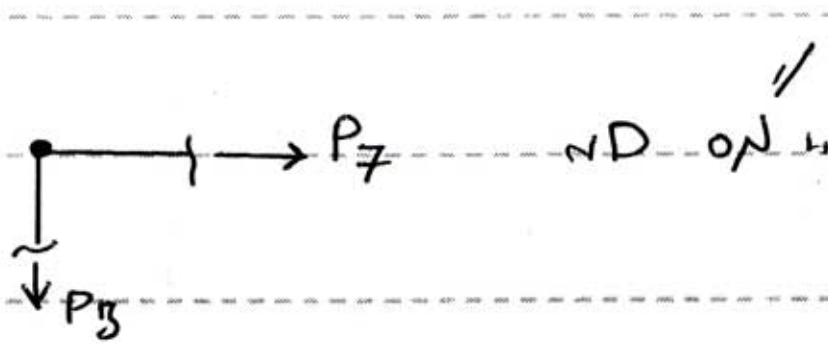
$$\sum F_x = 0 \rightarrow -P_1 + 16 = 0 \rightarrow P_1 = 16t$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow P_5 - 24 = 0 \rightarrow P_5 = 24t$$



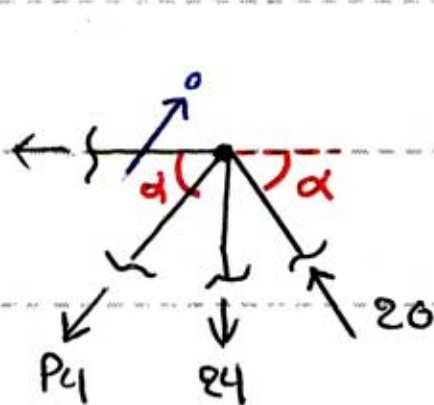
Subject :

Year :      Month.      Date.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow P_7 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow -P_3 = 0 \rightarrow P_3 = 0$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow -P_4 \cos \alpha - 20 \cos \alpha = 0$$

$$P_4 \cos \alpha = -20 \cos \alpha$$

$$P_4 = -20$$

و طول مقطع E در حساب  
به kg داده شود پس مقادیر  
بر حسب آمو را با آن تطبیق دهیم

ردیف اعضا	$P_i$ نیروی اعضا (kg) *	$L_i$ طول اعضا (cm)	$A_i$ مساحت مقطع اعضا (cm <sup>2</sup> )	
1	16--	4--	8	$\rightarrow 1,28 \times 10^{10}$
2	16--	4--	8	$1,28 \times 10^{10}$
3	0	3--	6	0
4	-2--	5--	10	$2 \times 10^{10}$
5	24--	3--	6	$2,88 \times 10^{10}$
6	-2--	5--	10	$2 \times 10^{10}$
7	0	4--	8	0



Subject :

Year :

Month.

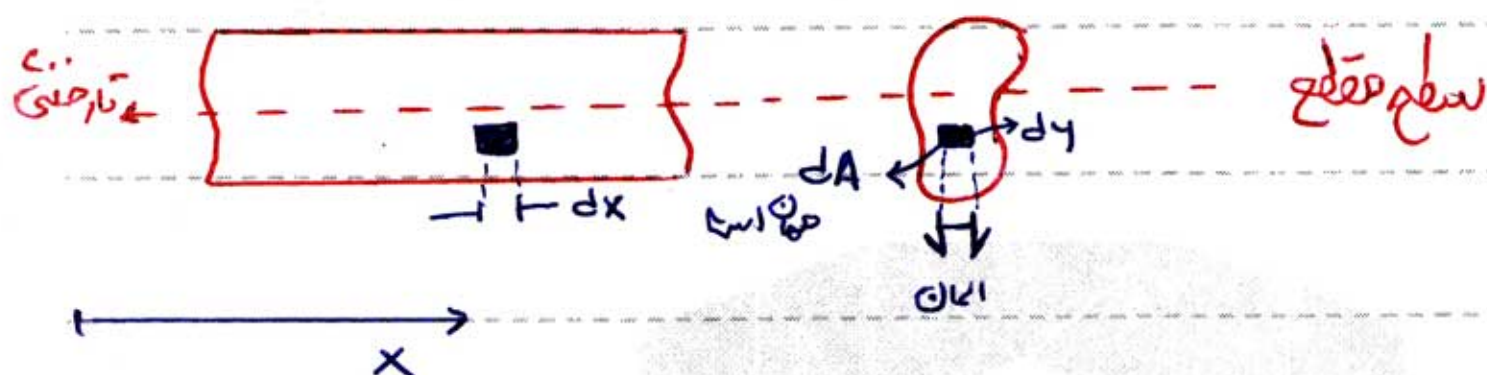
Date.

$$\frac{P_1^2 l_1}{2EA_1} + \frac{P_2^2 l_2}{2EA_2} + \dots \rightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1^2 l_1}{A_1} + \frac{P_2^2 l_2}{A_2} + \dots \right]$$

$$\rightarrow \sum \Rightarrow U = \frac{1}{2E} \sum \frac{P_i^2 l_i}{A_i} \Rightarrow U = 236 \dots$$

به مقدارش در مساله داده شده

↓ مساله ها : اعضای سازه ای با سطح مقطع ثابت تحت تأثیر نیروهای  
M ثابت است در سطح



$$\left. \begin{array}{l} dV = dA \cdot dx \\ \sigma = \frac{My}{I} \end{array} \right\} \rightarrow U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} \cdot dV = \int_V \frac{\left(\frac{My}{I}\right)^2}{2E} \cdot dA \cdot dx$$

$$\rightarrow \int_V \frac{\frac{M^2 y^2}{I^2}}{\frac{2E}{1}} \cdot dA \cdot dx = \int \frac{\frac{M^2 y^2}{1}}{2EI^2} \cdot dA \cdot dx = \int \frac{M^2}{2EI^2} \left( \int y^2 dA \right) dx$$

$$\rightarrow \int \frac{M^2}{2EI} \cdot I \cdot dx \rightarrow \int \frac{M^2}{2EI} \cdot dx = V = \frac{1}{2EI} \int M^2 dx$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2EI} \int M^2 dx \rightarrow \text{اینگاه کلی}$$



Subject :

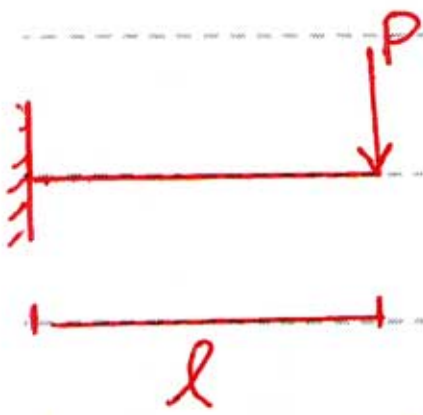
Year :

Month.

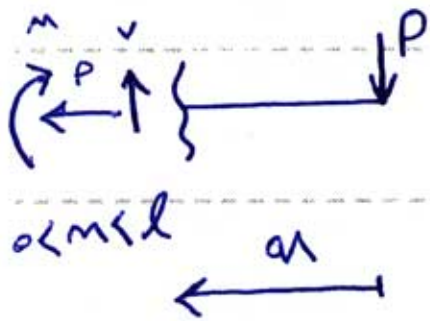
Date.



مثال: انرژی پستی ذخیره شده در تیر زیر را حساب کنید.



$$+ (\sum M_0 = 0 \rightarrow M + P \cdot l = 0 \rightarrow M = -Pl)$$

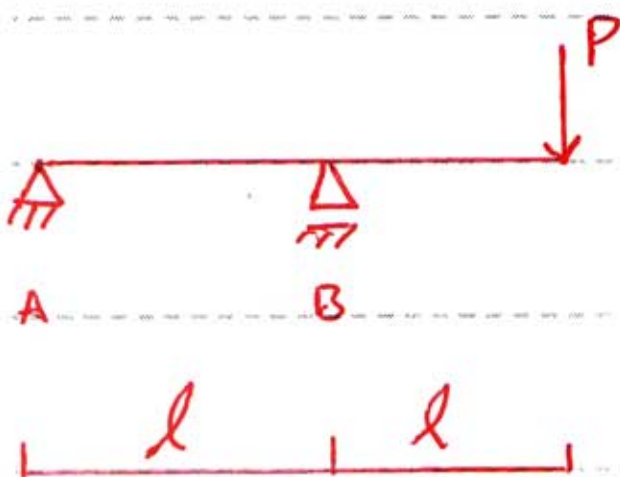


$$U = \frac{1}{2EI} \int M^2 dm = \frac{1}{2EI} \int_0^l (-Pl)^2 dm = \frac{1}{2EI} \int_0^l P^2 m^2 dm = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l m^2 dx$$

$$= \frac{P^2}{2EI} \Big|_0^l = \frac{P^2 l^3}{6EI}$$

نکته: مقدار U همیشه + است چون P و M همواره یکسان هستند.  
همیشه بتواند ۲ ی، ۳ ی، ...

مثال: انرژی پستی ذخیره شده در تیر زیر را حساب کنید.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$+ (\sum M_A = 0 \rightarrow -B_y \times l + P \cdot (2l) = 0$$

$$B_y \times l = 2Pl \rightarrow B_y = 2P$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + 2P - P = 0$$

$$\rightarrow A_y + P = 0 \rightarrow A_y = -P$$



Subject :

Year :      Month.      Date.



$\downarrow P$   $\downarrow$   $\uparrow M$   $\uparrow \Sigma M_o \rightarrow -Pm - M_o \rightarrow M_s - Pm$

$0 < m < l$

$\uparrow M$   $\leftarrow$   $\uparrow$   $\downarrow P$   $\uparrow \Sigma M_o \rightarrow M + Pm \rightarrow M_s - Pm$

$0 < m < l$

$\leftarrow z$

$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l (-Pm)^2 dm + \frac{1}{2(2EI)} \int_0^l (-Pm)^2 dm$

$\rightarrow \frac{1}{2EI} \int_0^l P^2 m^2 dm + \frac{1}{4EI} \int_0^l P^2 m^2 dm \rightarrow \frac{P^2}{2EI} \int_0^l m^2 dm + \frac{P^2}{4EI} \int_0^l m^2 dm$

$\rightarrow \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{m^3}{3} \Big|_0^l + \frac{P^2}{4EI} \cdot \frac{m^3}{3} \Big|_0^l = \frac{P^2 l^3}{6EI} + \frac{P^2 l^3}{12EI} = \frac{2P^2 l^3 + P^2 l^3}{12EI}$

$= \frac{3P^2 l^3}{12EI}$

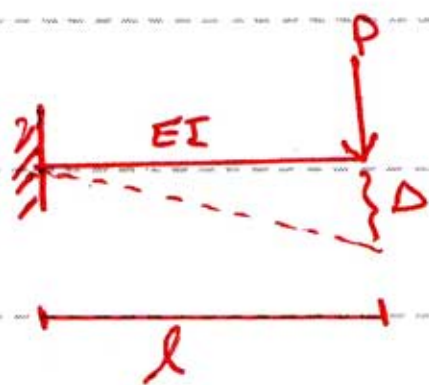


Subject :

Year :      Month.      Date.



اوش کار حقیقی برای می سبب تغییر شکل ها، اوش کار حقیقی مستقیماً از مفاهیم قضیه کاروانرژی  
بهره می برد. در این اوش انرژی کرنش داخلی برابر کار انجام شده توسط نیروی خارجی قرار  
دارد. می شود ولز این معادله تغییر شکل حساب می شود این اوش با تمام سادگی، اوش  
کار بردی نسبت زیر این اوش باید در صراحت ثابت، تکلیف ها نسبت نه است و با فقط  
یک نیرو به تیر ولز شود علاوه بر این با این اوش فقط می توان تغییر شکل کلی تیر نیرو را بدست  
آورد.



مثال، تغییر شکل استیجی که از تیر شکل داده شده را ببینید.

✓ عکس العمل های این تیر در دو مثال قبل بدست آورده شد!  
انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI} \quad \left\{ \begin{array}{l} W = U \rightarrow \frac{P}{2} \times \Delta = \frac{P^2 l^3}{6EI} \Rightarrow \Delta = \frac{Pl^3}{3EI} \end{array} \right.$$

$$W = \frac{P \times \Delta}{2}$$

کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

چون بار بصورت تدریجی  
ولز می شود

پایان جلسه ششم