دینامیک سازه‌ها

استاد: دکتر امینی

دینامیک سازه‌ها

استاد: دکتر امینی

منابع:

1. Dynamics of Structures — R.W. Clough, J. Penzein.

*2. Structural Dynamics theory and application — M. PAZ
(بخش [illegible])

*3. Dynamics of Structures — A. Chopra

4. Seismic Design Handbook — F. Naeim. [illegible]
([illegible])

5. Structural Dynamics — R. Craig (تمرین)

6. Theory of vibration with Applications — W. Thomson
(تمرین)

7. Dynamics of Framed Structures — G. Rogers

8. Dynamic of Structures — J.L. Humar

نمره: میان‌ترم %30 — پایان‌ترم %56
پروژه اول %3 — پروژه دوم %3
تحقیق %5 — تمرینات %3

رئوس مطالب درس: مفاهیم و تعاریف کلی در دینامیک سازه‌ها:

SDOF
- سازه‌های یک درجه آزادی
- روش‌های تحلیل: روش‌های [illegible] و سری فوریه

MDOF
- سازه‌ها با چند درجه آزادی

۱) بخش اول: [illegible]

۲) بخش دوم: [illegible]

- روش تفاضلات محدود
- روش جرم گسترده

رفتار غیرخطی سازه‌ها

• مباحث جدید دینامیک سازه‌ها: کنترل فعال و غیرفعال

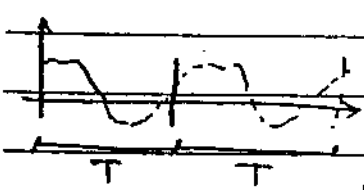
I) مفاهیم و تعاریف کلی در دینامیک سازه‌ها

1. انواع نیروها: نیروها به دو دسته تقسیم می‌شوند: ۱. استاتیکی

۲. دینامیکی: نیرویی که تابع زمان است.

نیروهای دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: ۱. نیروهای معین: نیرویی است که بتوان آن را با روابط ریاضی معرفی کرد مانند: $P(t) = P_0 \sin \omega t$

۲. نیروهای نامعین: نیروهایی هستند که نتوان به روابط ریاضی معین کرد مانند نیروی زلزله و نیروی باد و یا اثر امواج دریا. (البته می‌توان بصورت تقریبی آنها را معین کرد.) در این حالت روش‌های عددی مطرح می‌شوند.



نیروهای معین به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. تناوبی: در بازه‌ی پریود مشخص تکرار می‌شوند مانند نیروهای سینوسی و کسینوسی

۲. غیرتناوبی: نیرویی که تناوبی نباشد مانند: $P = e^{-t}$ و ...

اگر سازه‌ای تحت اثر بار دینامیکی قرار گیرد از حالت تعادل خارج شده و به ارتعاش در می‌آید.

2. انواع ارتعاش: ۱. ارتعاش اجباری (Forced vibration): ارتعاش تحت اثر نیرو.

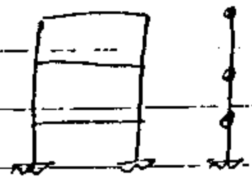
۲. ارتعاش آزاد (Free Vib.): ارتعاش تحت شرایط اولیه.

در دینامیک سازه‌ها منظور از شرایط اولیه جابجایی و سرعت اولیه می‌باشند.

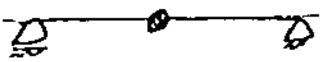
3. مدل‌سازی در دینامیک سازه‌ها و درجات آزادی:

مسائل اصلی در دینامیک سازه‌ها، جرم گسترده سازه‌ها می‌باشد.

برای هر نقطه یک معادله دیفرانسیل درجه دوم حاصل می‌شود. برای اجتناب از حل بی‌نهایت معادله، می‌توان جرم سازه را در چند نقطه متمرکز فرض کرد. مانند شکل‌های زیر:



روش جرم متمرکز



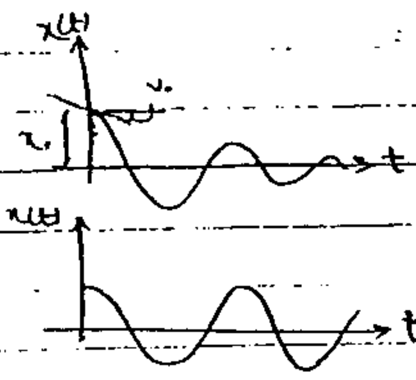
در روش یکپارچگی جرم را به صورت خود گره‌ها و در اتصالات سازه را حدس می‌زنیم. به این روش، روش مختصات تعمیم یافته گویند.

می‌توانیم در این روش به تعداد حرکت‌ها و جابجایی‌های ممکن با شکل سازه، درجه آزادی در نظر بگیریم.

درجه آزادی: پارامترهای مورد نیاز برای مشخص کردن رفتار سازه.

طبیعی است هرچه تعداد جرم‌های متمرکز و تعداد درجات آزادی را بیشتر کنیم، به رفتار واقعی سازه نزدیک‌تر می‌شویم.

4. میرایی (Damping):

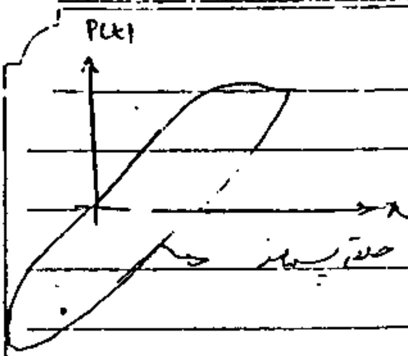


این دو نمودار نشان دهنده‌ی عدم وجود یک عامل در دینامیک سازه است، عاملی که باعث استهلاک انرژی در حرکت می‌شود. به این عامل میرایی می‌گوییم.

میرایی در سازه‌ها از چهار جا نشأت می‌گیرد: ۱. چسبندگی ذرات ماده (به این میرایی، میرایی ویسکوز نیز گویند) مکانیزم پیش‌بینی‌پذیرند، میرایی ویسکوز هستند. ۲. فضای اطراف سازه (به این میرایی، میرایی خارجی گوییم).

۳. میرایی اصطکاکی وابسته به اصطکاک بین قطعات و اتصالات و...

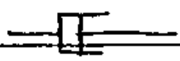
۴. میرایی هیسترزیس مانند Hysteresis



اگر سازه ای تحت اثر نیرو وارد منطقه غیرخطی شود
سطح زیر نمودار بیانگر انرژی ای است که در سازه مستهلک شده است
یا همان انرژی جذب شده در سازه. برای رسیدن به این مسئله
سازه باید از حد خطی غیرخطی شود و حلقه را بپیماید.

به این انرژی جذب شده، انرژی پسماند یا میرایی پسماند گوییم.

میرایی مورد نظر ما مجموع چهار میرایی گفته شده می باشد و این کار مشکلی است. به دلیل به جای این چهار میرایی از میرایی معادل استفاده می کنیم.



میرایی فرضی

ثابت میرایی، نیرویی لازم برای ایجاد سرعت ثابت را گویند.
میرایی فرضی را لزج بینید

c ضریب ثابت میرایی

میرایی کلاسیک ← $F = c\dot{x}$
(تابعی خطی از سرعت)

ثابت میرایی فرضی با روابط تجربی به دست می آید.

5. انواع روش های آنالیز دینامیکی سازه ها:

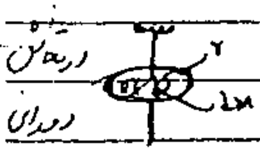
$x = x(t)$ $\qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ $\qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$

1) روش اول: استفاده از قانون نیوتن:

قانون دوم نیوتن: $\sum F = m\ddot{x}$
نیروی اینرسی F_I

$\longrightarrow \sum F - m\ddot{x} = 0$

$\longrightarrow \sum F = 0$ شامل نیروی اینرسی



$\sum M = I_{mo} \cdot \ddot{\theta}$ $\qquad \theta = \theta(t)$

ممان اینرسی جرمی حول نقطه دوران O

$$I_{mo} = \int_m r^2 dm$$

۲) روش دوم: با استفاده از روش کار مجازی

در استاتیک: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه به علت یک تغییر مکان مجازی کوچک، برابر با صفر است.

در دینامیک: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه (شامل نیروی اینرسی) به علت یک تغییر مکان مجازی کوچک، برابر صفر است.

۳) روش انرژی:

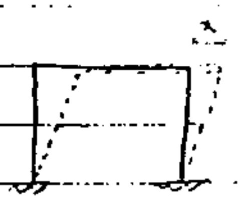
$$\underbrace{P}_{\text{انرژی پتانسیل}} + \underbrace{T}_{\text{انرژی جنبشی}} = cte$$

دوشنبه ۸۴/۷/۱۱

بخش اول: مدل‌های یک درجه آزادی Single Degree of Freedom Systems (SDOF)

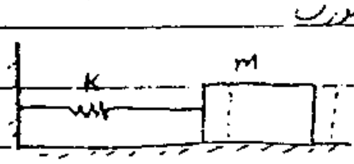
می‌توان معادلات همبسته MDOF را به چند معادله SDOF (به منظور سادگی) تبدیل کرد. در هر معادله SDOF تنها یک متغیر وجود دارد.

بیشترین کاربرد SDOF در حل MDOF می‌باشد.



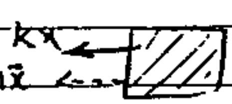
قابی را در نظر بگیرید که تنها جابجایی آن مد نظر است. این مدل، مدلی با یک درجه آزادی است.

اگر سختی مجموع ستون‌ها را با K نمایش دهیم، قاب فوق را می‌توان به صورت زیر مدل کرد. (K = مجموع سختی‌های برشی ستون‌ها)



شرایط اولیه $t=0 \begin{cases} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{cases}$

هدف یافتن جابجایی در هر لحظه از زمان است. برای این کار از قانون دوم نیوتن استفاده کرده و می‌نویسیم.



$\sum F = 0$ شامل نیروی اینرسی

$\Sigma F=0 \longrightarrow m\ddot{x}+kx=0$ یا $m\ddot{a}+ka=0$

با استفاده از معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که جواب معادله‌ی فوق به صورت $x=Ge^{st}$ است که G و s از شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

با قرار دادن فرم عمومی جواب در معادله، مقادیر G و s بدست می‌آیند:

$s^2Ge^{st}\cdot m+kGe^{st}=0$

$$\longrightarrow s^2=-\frac{k}{m}=-\omega^2$$

$$\longrightarrow s_{1,2}=\pm i\omega$$

$$\longrightarrow x=G_1e^{+i\omega t}+G_2e^{-i\omega t}$$

در نظر می‌گیریم:

$$e^{\pm i\omega t}=\cos\omega t\pm i\sin\omega t$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x=G_1(\cos\omega t+i\sin\omega t)+G_2(\cos\omega t-i\sin\omega t)$$

$$\longrightarrow x=i(G_1-G_2)\sin\omega t+(G_1+G_2)\cos\omega t$$

از آنجا که سیستم واقعی است جواب آن نیز باید واقعی باشد پس باید ارتباطی بین G_1 و G_2 باشد تا i از معادله‌ی x حذف گردد. بنابراین G_1 و G_2 باید مزدوج هم باشند.

$$G_1,G_2=\alpha\pm i\beta$$

$$\longrightarrow x=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

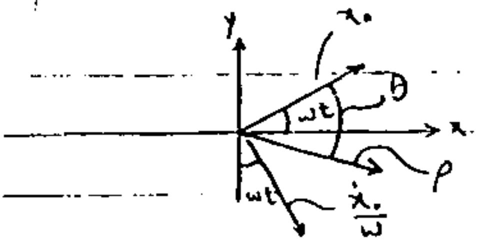
A و B از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

$t=0 \longrightarrow x=B=x_0$

$t=0 \longrightarrow \dot{x}=A\omega=\dot{x}_0 \longrightarrow A=\frac{\dot{x}_0}{\omega}$

$$\longrightarrow \boxed{x=\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t+x_0\cos\omega t}$$

با دانستن جابجایی x در یک سازه، به سادگی می‌توان پارامترهای دیگر مانند تنش و ... را بدست آورد.



جواب بدست آمده در صفحه ی قبل:
در محور مختصات مقابل، برابر است با
مجموع مقادیر دو بردار روی محور x.
برای این کار، برآیند دو بردار را پیدا کرده و تصویر آن
را بر روی محور x بدست می آوریم. پس داریم

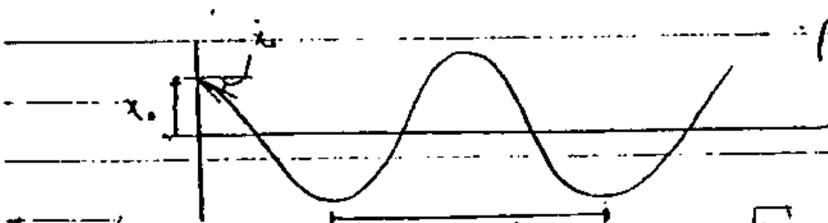
$$x=\rho\cdot\cos(\omega t-\theta)$$

حال بایستی ρ و θ را تعیین نمائیم:

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2+x_0^2}$$

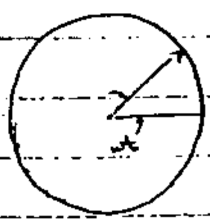
$$\theta=\arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$$

در نوشتن معادله به صورت مقابل، این حسن را دارد که به سادگی می توان حداکثر ارتعاش یا ρ را که آن را دامنه حرکت می نامیم، بدست آورد.
θ به زاویه انحراف فاز می گوئیم.



$T=\frac{2\pi}{\omega}$ آن را زمان تناوب یا پریود یک [illegible]   و $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

ω را فرکانس دایره ای (زاویه ای یا دورانی) و یا فرکانس طبیعی سازه می گوئیم. و واحد آن rad/s است.



اگر نقطه ای روی محیط دایره ای با سرعت زاویه ای ω دوران کند، پس از زمان t به اندازه ی ωt زاویه طی خواهد کرد که تصویر این حرکت بر محور x، همان حرکت ارتعاشی سیستم خواهد شد.

$f=\frac{\omega}{2\pi}$ با واحد ($\frac{دور}{sec}$) را فرکانس می نامیم.

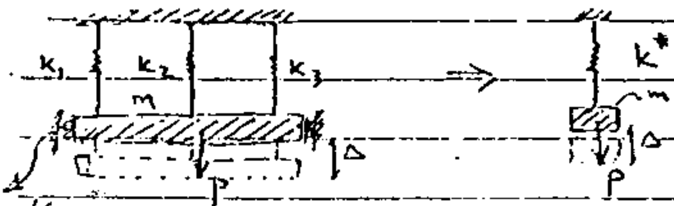
منظور از فرکانس بدون میرایی ω_n می باشد. این فرکانس از مشخصات سازه است و با سختی سازه رابطه مستقیم دارد. بنابراین فرکانس می تواند مشخص کننده ی سختی یک سازه باشد.

باید دقت نمود که معادله ی حرکت بدست آمده بدون در نظر گرفتن اثر میرایی می باشد.

فنرهای معادل:

I) فنرهای موازی: سختی فنر معادل $k^* = ?$

فنرهای با Δ یکسان



برای جلوگیری از دوران

$$\Delta = cte$$

$$F_1 = k_1 \Delta \qquad\qquad P = k^* . \Delta \quad (\mathrm{I})$$

$$F_2 = k_2 \Delta$$

$$F_3 = k_3 \Delta$$

$$\vdots \qquad \vdots \;\; \vdots$$

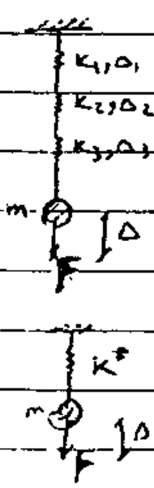
$$\underbrace{F_1 + F_2 + F_3 + \dots}_{P} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \Delta$$

$$\longrightarrow P = \left(\sum k_i\right) \Delta \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}) \longrightarrow \boxed{k^* = \sum k_i}$$

II) حالت سری:

فنرهای با F یکسان



نیرو = cte

$$F = k_1 \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1 = \frac{F}{k_1}$$

$$F_2 = k_2 \Delta_2 \longrightarrow \Delta_2 = \frac{F}{k_2}$$

$$F_3 = k_3 \Delta_3 \longrightarrow \Delta_3 = \frac{F}{k_3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\longrightarrow \underbrace{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots}_{\Delta} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots\right)$$

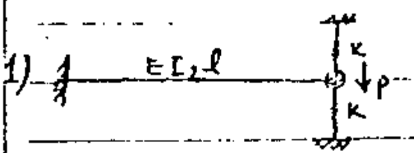
$$\longrightarrow \Delta = F\left(\sum \frac{1}{k_i}\right) \quad (\mathrm{III})$$

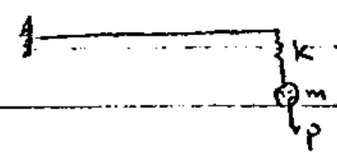
در فنر معادل: $F = k^* \Delta \longrightarrow \Delta = \dfrac{F}{k^*} \quad (\mathrm{IV})$

$$(\mathrm{III}), (\mathrm{IV}) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{k^*} = \sum \frac{1}{k_i}}$$

سختی: مقدار نیروی لازم در نقطه‌ای تا جهت این تغییر شکل را بدهیم. در نقطه‌ای که نیرو را گذاشتیم عمودی که در تغییر نقاط ثابت باشد. (نیرو می‌تواند مال دینامیکی می‌تواند دوران باشد).

مثال: $\omega = ?$

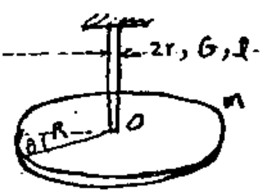
1) 

2) 

1) $\Delta = cte \Longrightarrow K^* = \sum k \Longrightarrow K^* = 2k + \frac{3EI}{l^3} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k + 3EI/l^3}{m}}$

2) $P = cte \Longrightarrow \frac{1}{K^*} = \sum \frac{1}{k} \Longrightarrow \frac{1}{K^*} = \frac{1}{k} + \frac{l^3}{3EI} \Longrightarrow K^* = \frac{3EIk}{kl^3 + 3EI}$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3EIk}{m(kl^3+3EI)}}$$



مثال زیر یک مقاومت را تحت شرایط اولیه مقداری چرخانده و آن را رها می‌کنیم، $\omega = ?$
هدف یافتن فرکانس ارتعاش است.

رابطه تعادل: $\sum M = 0$ سختی پیچشی ستون ممان اینرسی قطبی ستون

$$I_{mo} \cdot \ddot{\theta} + M_T = 0 \qquad M_T = \frac{GJ}{l}\theta$$

$J = \frac{\pi r^4}{2}$ $I_{mo} = \int r^2 dm$

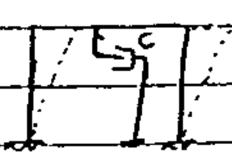
برای صفحه دایره‌ای $\longrightarrow I_{mo} = \frac{1}{2} m R^2$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m R^2}_{m} \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{G\left(\frac{\pi r^4}{2}\right)}{l}}_{K}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{G\left(\frac{\pi r^4}{2}\right)}{l\left(\frac{1}{2} m R^2\right)}} = \frac{r^2}{R}\sqrt{\frac{\pi G}{ml}}$$

$\theta = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ اگر شرایط اولیه داده می‌شد A و B قابل محاسبه بودند

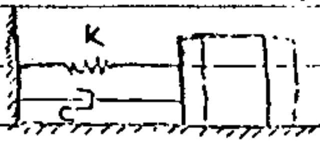
سیستم‌های SDOF:
برای در نظر گرفتن سیستم‌های معادل یک سیستم فنری برای سازه در نظر می‌گیریم

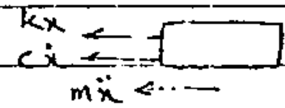


این میرایی ویسکوز، متناسب با سرعت سازه، نیرویی به آن وارد می‌کند.

* واحد c برابر (نیرو تقسیم بر واحد سرعت) است.

معادله دیفرانسیل حرکت با در نظر گرفتن میرایی (ارتعاش آزاد برای SDOF):





$t=0 \begin{cases} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{cases}$

با استفاده از قانون نیوتن داریم:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \\ x = Ge^{st} \end{cases}$$ رابطه کلی جواب

در معادله $\longrightarrow m(\cancel{G}s^2\cancel{e^{st}}) + (\cancel{G}s\cancel{e^{st}})c + (\cancel{Ge^{st}})k = 0$

$\longrightarrow ms^2 + cs + k = 0 ; s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad , \quad \xi = \frac{c}{\underbrace{2m\omega}_{C_{cr}}}$ = نسبت میرایی (بدون بعد)

C_{cr}: میرایی بحرانی، میرایی حدی

$\longrightarrow s^2 + 2\omega\xi s + \omega^2 = 0$

$\longrightarrow s_1, s_2 = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2} = \omega\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$

برای جواب‌های s_1 و s_2 سه حالت ممکن است رخ دهد:

• حالت اول: زیر رادیکال صفر باشد یعنی $\xi = 1$ که به آن میرایی حدی می‌گوییم.

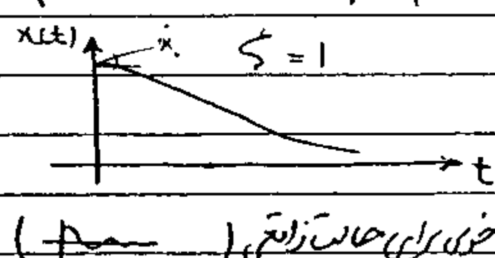
$\xi = 1 \longrightarrow s_1 = s_2 = -\xi\omega = -\omega$

ریشه مضاعف
جواب معادله درجه ۲ $\longrightarrow x = G_1 e^{-\omega t} + G_2 t e^{-\omega t} = e^{-\omega t}(G_1 + G_2 t)$

G_1 و G_2 از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

$G_1 = x_0 \qquad\qquad G_2 = \omega x_0 + \dot{x}_0$

$\longrightarrow x = e^{-\omega t}\left(x_0 + (\omega x_0 + \dot{x}_0)t\right) = \left(x_0(1 + \omega t) + \dot{x}_0 t\right)e^{-\omega t}$



حالتی که $\xi = 1$، نماینده خوبی برای حالت واقعی ( ) نمی‌باشد.

• حالت دوم: میرایی بالاتر از حد (میرایی زیاد): زیر رادیکال مثبت ($\zeta>1$) یا $C>2m\omega$

Over Damping

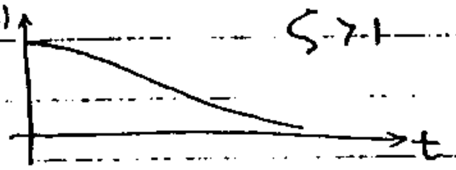
با فرکانس $\omega^* = \omega\sqrt{\zeta^2-1}$ (فرکانس میرایی زیاد)

$$S_1, S_2 = -\zeta\omega \pm \omega^*$$

$$\Longrightarrow x = G_1 e^{(-\zeta\omega+\omega^*)t} + G_2 e^{(-\zeta\omega-\omega^*)t} = e^{-\zeta\omega t}\left(G_1 e^{\omega^* t} + G_2 e^{-\omega^* t}\right)$$

می‌توان برحسب Sinh و Cosh بصورت زیر نوشت:

$$x = e^{-\zeta\omega t}\left(G_1 \sinh \omega^* t + G_2 \cosh \omega^* t\right)$$



این حالت نیز مناسب برای نمایش حالت دامنه نیست.

• حالت سوم: میرایی پایین‌تر از حد (میرایی کم): زیر رادیکال منفی $\zeta<1$ یا $C<2m\omega$

(فرکانس میرایی کم) $\omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$

$$S_1, S_2 = -\zeta\omega \pm i\omega_D$$

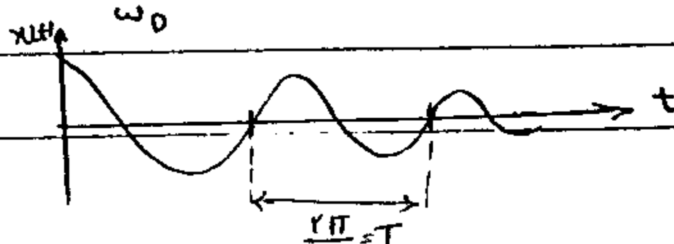
$$x = G_1 e^{(-\zeta\omega+i\omega_D)t} + G_2 e^{(-\zeta\omega-i\omega_D)t}$$

$$= e^{-\zeta\omega t}\left(G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}\right)$$

$$= e^{-\zeta\omega t}\left(A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)\right)$$

$$t=0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{\dot{x}_0 + x_0\zeta\omega}{\omega_D} \qquad B = x_0$$

$$\Longrightarrow x = e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\zeta\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t + x_0 \cos\omega_D t\right)$$

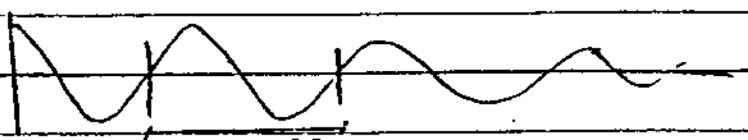


این حالت می‌توان نشان داد منجر به ارتعاش واقعی باشد (یعنی برای ارتعاش واقعی باید $c < 2m\omega$ باشد)

چهارشنبه ۸۴/۷/۱۳

در جلسه قبل دیدیم که اگر $\xi = \frac{c}{2m\omega} < 1$ باشد حرکت رفت و برگشتی خواهیم داشت و جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$x = e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\sin(\omega_D t) + x_0\cos(\omega_D t)\right)$$



$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$

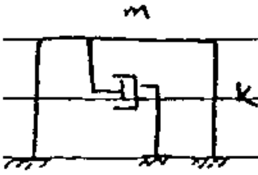
$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$

* با توجه به اینکه ξ حدود 10% است، مشاهده می‌شود که $\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{0.99} \approx 1$ یعنی $\omega_D \approx \omega$

می‌توان رابطه $x = e^{-\xi\omega t} \dots$ را به صورت کسینوسی نیز نوشت:

$$\begin{cases} \rho = \left[\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\right)^2 + (x_0)^2\right]^{1/2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{x_0\,\omega_D}\right) \end{cases} \Rightarrow x = \rho\, e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \theta)$$

مثال: $\omega_D = ?$ معادله حرکت = ?

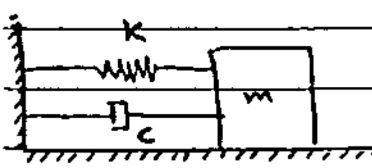


مفروضات:

$\omega = 5\ \mathrm{rad/sec}$ $\quad \xi = 20\%$ $\quad x_0 = 0$ $\quad \dot{x}_0 = 20\ \mathrm{cm/sec}$

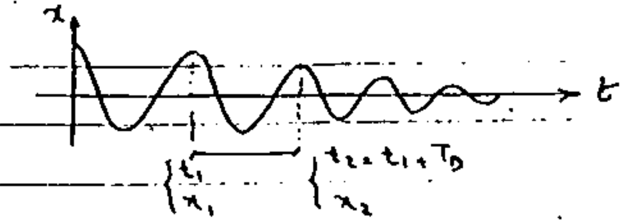
$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 5\sqrt{1-0.2^2} = 4.90$$

با جایگذاری در رابطه $x = e^{-\xi\omega t} \dots$ داریم:



$$x = e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\sin\omega_D t + x_0\cos\omega_D t\right)$$

$$\rightarrow x = e^{-0.2\times5t}\cdot\left(\frac{20}{4.9}\right)\sin(4.9t) = 4.08\,e^{-t}\sin(4.9t)$$



نحوه‌ی محاسبه‌ی ζ برحسب x_1 و x_2 .

اگر در لحظه‌ی t_1 جابجایی x_1 و در لحظه‌ی $t_2 = t_1 + T_D$ جابجایی x_2 باشد.

جابجایی در رابطه سینوسی داریم:

$$x = \rho \cdot e^{\zeta \omega t} \cdot \cos(\omega_D t - \theta)$$

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

$$t_1, x_1 \Rightarrow x_1 = \rho e^{-\zeta \omega t_1} \cos(\omega_D t_1 - \theta)$$

$$t_1 + T_D, x_2 \longrightarrow x_2 = \rho \cdot e^{-\zeta \omega (t_1 + T_D)} \cdot \cos(\omega_D (t_1 + T_D) - \theta)$$

$$x_2 = \rho\, e^{-\zeta \omega (t_1 + T_D)} \cdot \cos(\omega_D t_1 + 2\pi - \theta)$$

$$= \quad '' \quad \cdot \cos(\omega_D t_1 - \theta)$$

حال از تقسیم $\frac{x_1}{x_2}$ داریم:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta \omega T_D} = e^{\zeta \omega \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{\frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

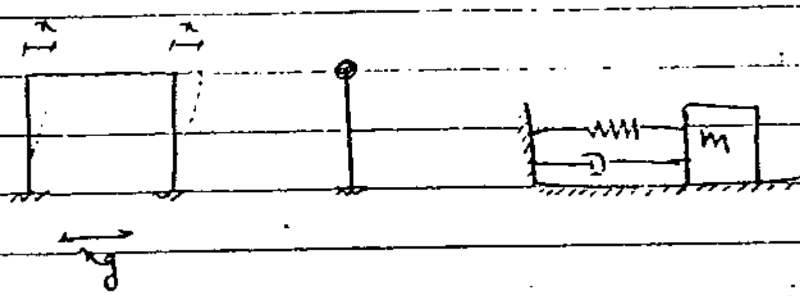
$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

حال اگر با تقریب خوبی $\sqrt{1-\zeta^2} = 1$ در نظر گرفته شود داریم:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{2\pi\zeta} \Rightarrow 2\pi\zeta = \mathrm{Ln}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Ln}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

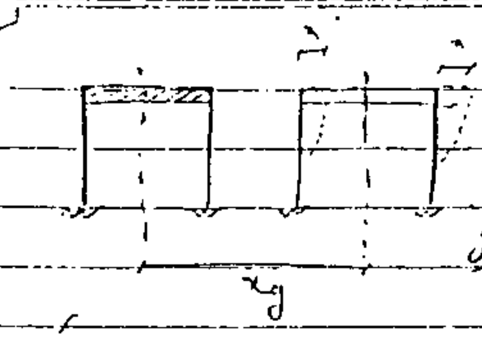
III) اثر زمین لرزه بر سازه‌ها:



x_g حرکات زمین

۱) نیروی معادل زلزله:

با جابجایی زمین، تکیه‌گاه جابجا می‌شود. علاوه بر این جرم تحت جابجایی (تغییرمکان) قرار است.



جابجایی $\leftarrow kx = F_S$
میرایی $\leftarrow c\dot{x} = F_D$
برش در همان ستونها تابع تغییر شکل

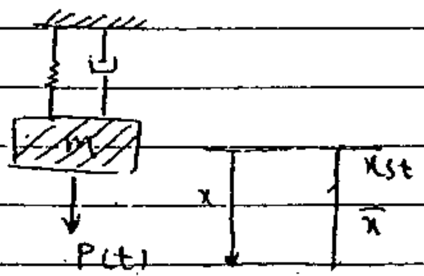
اینرسی $m(\ddot{x}+\ddot{x}_g) = F_I$ ---> اینجا جابجایی کل مطرح است
نه جابجایی زمین
هم تغییر شکل و هم جابجایی زمین

معادله دیفرانسیل حرکت : $m(\ddot{x}+\ddot{x}_g) + c\dot{x} + kx = 0$

$(F_I + F_D + F_S = 0)$ $\quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g$

نیروی معادل زلزله چنین خواهد شد : $\boxed{m\ddot{x}_g}$

۲) اثر وزن در معادله دیفرانسیل حرکت :



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) + W$$

اگر $x = x(t)$ و $\bar{x} = \bar{x}(t)$ داشته باشیم :

$x = \bar{x} + x_{st}$ $\quad$ (جابجایی استاتیکی (تحت اثر وزن W : $\quad x_{st} = \dfrac{W}{k}$

$$x = \bar{x} + x_{st} \longrightarrow \dot{x} = \dot{\bar{x}} \;,\; \ddot{x} = \ddot{\bar{x}}$$

$$\longrightarrow m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k(\bar{x} + x_{st}) = P(t) + kx_{st}$$

$$\boxed{m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = P(t)}$$

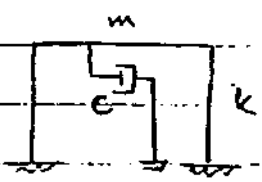
دوشنبه ۸۴/۷/۱۸

۳) ارتعاش تحت اثر بارهای هارمونیکی :

۱) ارتعاش تحت اثر نیروی سینوسی با میرایی :

نیروهای سینوسی، مدلهای مناسبی برای مدل‌سازی برخی نیروهای واقعی موجود در طبیعت می‌باشند. همچنین هنگام استفاده از سری‌های فوریه این مدل نیروها مناسب می‌باشند.

قاب زیر را با بارگذاری $P = P_0 \sin \bar{\omega} t$ که در آن $\bar{\omega}$ فرکانس بارگذاری است و مستقل از فرکانس سازه می‌باشد را در نظر می‌گیریم



معادله دیفرانسیل حرکت سازه را می‌نویسیم :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \bar{\omega} t$$

$$\longrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P_0}{m}\sin\bar{\omega} t$$

با فرض داشتن $\zeta = \frac{c}{2m\omega}$ داریم :

$$\ddot{x} + 2\omega\zeta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m}\sin\bar{\omega} t$$

با استفاده از معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که جواب معادله فوق از دو قسمت (جواب عمومی و جواب خصوصی) تشکیل شده است.

$$x = x_c + x_p$$

که جواب عمومی — جواب خصوصی

از جلسه قبل می‌دانیم :

- $x_c = e^{-\zeta\omega t}\left(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right)$

از طرفی برای جواب خصوصی می‌نویسیم :

- $x_p = G_1 \sin\bar{\omega} t + G_2 \cos\bar{\omega} t$

با جایگذاری x_p در معادله دیفرانسیل، G_1 و G_2 به صورت زیر بدست می‌آیند :

$$\begin{cases} G_1 = \dfrac{P_0}{k} \times \dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \\[2ex] G_2 = \dfrac{P_0}{k} \times \dfrac{-2\zeta\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \end{cases}$$

$\beta = \dfrac{\bar{\omega}}{\omega}$ نسبت فرکانس

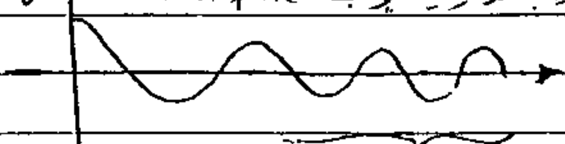
از آنجا که عبارت حاصل از قرار دادن جواب خصوصی در معادله دیفرانسیل باید به ازای تمامی مقادیر زمان برقرار باشد، اتحاد خواهیم داشت و لذا یک دستگاه دو معادله دو مجهول G_1 و G_2 بدست می‌آیند.

$$\Rightarrow x = e^{-\xi \omega t}\left(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t\right) + \frac{P_0}{k}\left\{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin \bar{\omega} t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega} t\right]\right\}$$

که A و B با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

قسمت دوم جواب را جواب دائم یا جواب Steady-State می‌نامند.

قسمت اول جواب را جواب گذرا یا جواب Transit Response می‌نامند.



چون نیروی خارجی $P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t$ به سازه اعمال می‌شود، برخلاف ارتعاش آزاد این حرکت به سمت صفر نخواهد رفت.

از ادغام سینوس و کسینوس داریم:

$$x_s = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$\rho = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)^2 + (-2\xi\beta)^2\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{P_0}{k}\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{-1/2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{-2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

دامنه از جواب

پارامتر بدون بعد D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = \frac{\rho}{(P_0/k)}$$

و به آن ضریب بزرگنمایی می‌گوییم.

$$\Rightarrow D = \left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{-1/2}$$

Dynamic Magnification Factor

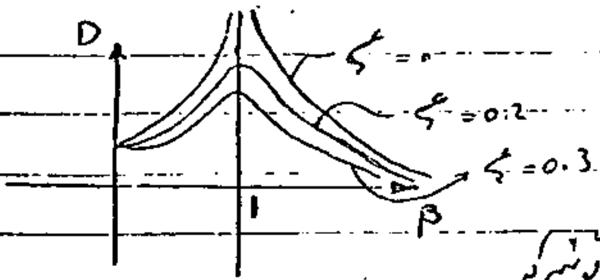
$\frac{P_0}{k}$ جابجایی استاتیکی سازه (جابجایی ماکزیمم) تحت اثر بار سینوسی. و D ضریب بزرگنمایی این مقدار جابجایی ماکزیمم دینامیکی را به ما می‌دهد.

$$\rho = \left(\frac{P_0}{k}\right) D$$

افزایش D، موجب افزایش جابجایی می‌شود و این مقدار با β (نسبت فرکانس‌ها) رابطه دارد.

۲) حالت همسانی (تشدید Resonant):

نمودار D-β را بدست می‌آوریم:



$\beta=1 \longrightarrow D=\frac{1}{2\xi}$ (در حالت تشدید)

حالت β = 1 را حالت همسانی (تشدید) گوییم که حالت خطری برای سازه‌ها می‌باشد.

سازه‌ها باید طوری ساخته شوند که فرکانس آن با فرکانس نیروی خارجی تفاوت کند. یکی از نیروهای خارجی نیروی زلزله است.

ساختن چنین سازه‌هایی تحت اثر بارهای مختلف مشکل می‌باشد که عوامل اتفاقی یکی از آنها و شناخت طیف زلزله یکی دیگر از آنها می‌باشد.

همچنین روش دیگر این است که سیستم‌ها باید عضوی در سازه قرار داد تا فرکانس سازه را از فرکانس زلزله دور کند. این کار با تغییر دادن سختی سازه انجام می‌شود. یکی از این روش‌ها استفاده از میراگرهای مختلف، تا سختی سازه یا عدم بارگذاری آنها می‌باشد. (در بعضی سازه‌ها سختی در زمان خود عوض می‌کند)

البته برای تغییر فرکانس سازه می‌توان از تغییر جرم نیز استفاده کرد اما تقریباً عملی مشکل است. وان بیشترین D حداکثر را داریم:

$$\frac{dD}{d\beta}=0 \Longrightarrow \beta_{p}=\sqrt{1-2\xi^2} \quad , \quad D_{p_{max}}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که در عمل در حالت میرایی که D حداکثر تقریباً با D در حالت تشدید برابر است.

* اگر حل جواب در حالت همسانی را بخواهیم (از نقطه شروع سکون داریم) داریم:

بنابراین در حالت β = 1 در معادله x در زمان t داریم:

$$t=0 \begin{cases} x_0=0 \\ \dot{x}_0=0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ حالت همسانی: $x=\frac{1}{2\xi}\cdot\frac{P_0}{k}\left[(e^{-\xi\omega t}-1)\cos\omega t\right]=\frac{P_0}{k}\cdot R$

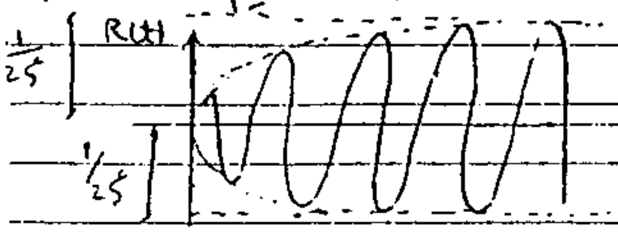
پارامتر R(t) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(t)=\frac{x(t)}{(P_0/k)}$$

$$\Longrightarrow R(t)=\frac{1}{2\xi}\left[(e^{-\xi\omega t}-1)\cos\omega t\right]$$

فرق D و R(t) این است که D پاسخ حالت ماندگار است ... پاسخ ... را در بر می‌گیرد.

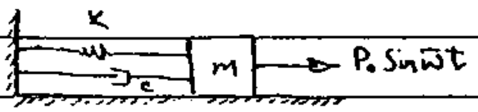
R(t) را ضریب نسبت جواب (Response Ratio Factor) می‌نامیم. دیاگرام آن بر حسب زمان به صورت زیر است:



که نشان رزنانسی می‌باشد حرکت حرکت در نهایت با دامنه ثابت است.

با توجه به نمودار فوق هر چه زمان می‌گذرد اثر شرایط اولیه کاهش می‌یابد.

مثال: سیستم داده شده در حالت رزونانس قرار دارد.



$W = 49\,N$

$k = 45\ N/cm = 4500\ N/m$

$c = 60\ N.Sec/m \qquad P_0 = 25N$

$\rho_{Res} = ? \qquad \rho_{max} = ?$

a) $\rho_{res} = D_{res} \cdot \frac{P_0}{k}$, $\quad D_{res} = \frac{1}{2\zeta} \qquad m = \frac{49}{9.81}\ kg$

$\zeta = \frac{c}{2m\omega}$, $\frac{4500}{49/9.81} = \frac{k}{m} = \omega^2 \longrightarrow \omega = 30\ rad/sec$

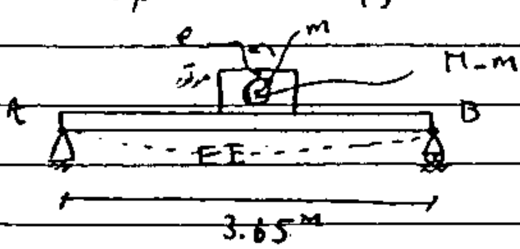
$\zeta = \frac{60}{2\left(\frac{49}{9.81}\right)(30)} = 0.2 \longrightarrow D_{res} = \frac{1}{2(0.2)} = 2.5$

$\rho_{res} = 2.5\ \frac{25}{45} = 1.39^{cm}$ در حالت تشدید

b) $D_{p_{peak}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2(0.2)\sqrt{1-(0.2)^2}} = 2.55$

$\longrightarrow \rho_p = 2.55\ \frac{25}{45} = 1.44^{cm}$

M: وزن کل موتور



مثال:

W (وزن موتور) = 72000N

w (وزن جرم m) = 180N

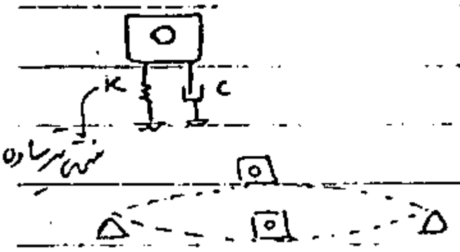
e (خروج از مرکز جرم) = 25.4^{cm}

E (تیر) = $21\times10^6\ N/cm^2$ $\qquad$ I (ممان اینرسی مقطع تیر) = $5360\ cm^4$

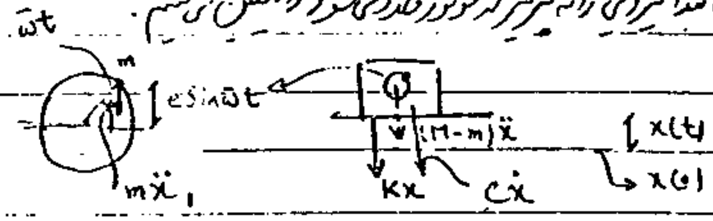
f (سرعت چرخش موتور) $= 300\ rpm$ ، $\zeta = 10\%$

دامنه ارتعاش تیر = ؟ (نسبت دامنه جواب را در نظر بگیرید) وزنه روی این تیر با سرعت ثابت در حال ... شده.

کدام را حداکثر ... ؟ (...)



ابتدا نیرویی را که به تیر از موتور وارد می‌شود را تعیین می‌کنیم.



m جابجایی جرم: $x_1 = x(t) + e\sin(\bar{\omega}t)$ — $\bar{\omega}$: سرعت چرخش موتور

m نیروی اینرسی جرم: $m\ddot{x}_1 = m(\ddot{x} - e\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t)$ ...

در اینجا نیروی ... در ... حرکت ... را در نظر می‌گیریم.

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow (M-m)\ddot{x} + m(\ddot{x} - e\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t) + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\longrightarrow M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \underbrace{me\bar{\omega}^2}_{P_0}\sin\bar{\omega}t$$

سمت راست معادله بیانگر اثر جرم کوچک در معادله حاکم می‌باشد.

برای نسبت دامنه جواب داریم:

$$\underset{(\%)}{\rho} = \left[(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2\right]^{-1/2} \quad , \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\bar{\omega} = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{300}{60}\right) = \boxed{31.41\ rad/sec} \quad , \quad k = \frac{48EI}{l^3}$$

$$\longrightarrow k = 109864\ N/cm = 1098.64\times10^4\ N/m$$

حتی باید ... تیر ... تا $\bar{\omega}$ ... نشود.

$$M = \frac{72000}{9.81} = 7339.45\ kg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1098.64\times10^4}{7339.45}} = \boxed{38.68\ rad/sec}$$

$$\longrightarrow \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{31.41}{38.68} = 0.81$$

$$P_0 = \left(\frac{180}{9.81}\right)(0.254)(31.41)^2 = 4598\ N$$

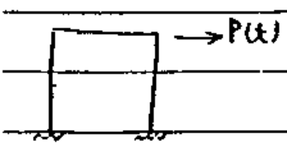
$$\Rightarrow \rho = \frac{4598}{1098.64\times10^{4}}\left[(1-0.811^2)^2+(2\times0.1\times0.811)^2\right]^{-1/2}$$

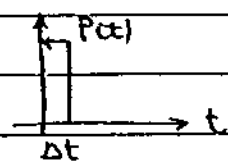
$$\Rightarrow \rho = 1.1^{mm}$$

تمرینات اول و چهارم که در سری دوم حل شود (تحویل بعدی).

دوشنبه ۸۴/۷/۲۵

۷- ارتعاش SDOF تحت بار غیر مشخص - انتگرال دوهامل   Duhamel's Integral





۱) اثر ضربه بر SDOF - بدون میرایی:

از انتگرال دوهامل برای هر نوع بار می‌توان استفاده کرد البته به شرطی که رفتار سازه خطی باشد.

می‌دانیم حرکت = تغییرات سرعت × جرم برابر است با سطح زیر منحنی نیرو ، $m\dot{x} = P(t).\Delta t$

یعنی می‌دانیم سرعت اولیه صفر است لذا تغییرات سرعت $\dot{x}$ می‌شود

در صورت تغییر اثر ضربه، سرعت اولیه است: $\dot{x} = \frac{P(t).\Delta t}{m}$ ،

$$t=0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = \frac{P(t)\Delta t}{m} \end{cases}$$

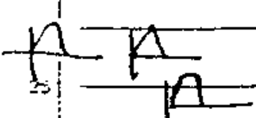
حل حرکت آزاد را قبلاً هم داشتیم:

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$$

و حالا مقادیر اولیه را قرار می‌دهیم:

$$\boxed{x = \frac{P(t)\Delta t}{m\omega}\sin\omega t}$$

اگر رفتار سازه خطی باشد، می‌توان از تقسیم جمع آثار استفاده کرد. لذا اگر در لحظه $t=0$ یعنی در شرایط اولیه جابجایی و سرعت را داشته باشیم می‌توانیم آنها را جداگانه محاسبه کنیم و جوابها را با هم جمع کنیم. همچنین می‌توان جابجایی اولیه را صفر (مربوط به ضربه) و سرعت اولیه را با $\frac{P(t)\Delta t}{m}$ (مربوط به ضربه) جمع کنیم



هر یک از صورتهای مقابل حل می‌شود:

۲) اثر ضربه بر SDOF - با میرایی:

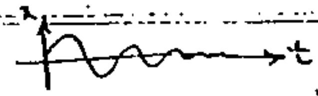
این بار از جواب کلی ارتعاش آزاد با میرایی که قبلاً بدست آوردیم، استفاده می‌کنیم:

$$x = e^{-\xi\omega t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t)$$

$$t=0 \longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x} = \frac{P(t)\Delta t}{m} \end{cases} \Rightarrow x_0 = 0 \longrightarrow B = 0$$

$\dot{x}$ ، مشتق گیری $\longrightarrow A = \frac{P(t).\Delta t}{m\omega_D}$

$e^{-\xi\omega t}\,P(t).\Delta t$ ... $\frac{P(t).\Delta t}{\ldots}e^{-\xi\omega t}$ ...



واضح است که جواب به صورت مستهلک شونده خواهد بود.

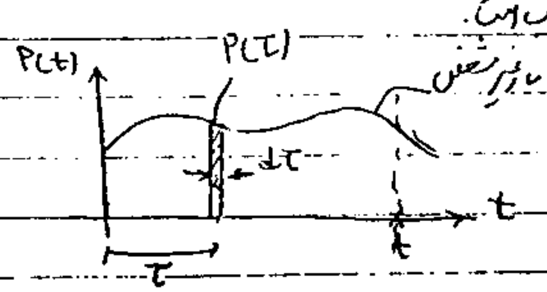
از این روش وقتی می‌توان استفاده کرد که زمان کوتاه باشد. مثلاً $\frac{1}{5}$ تا $\frac{1}{10}$ زمان تناوب SDOF می‌تواند عدد قابل قبولی باشد. (در حقیقت تقریبا).

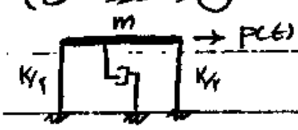
هرچه Δt کوچکتر، تقریب جوابمان بهتر است. پس

$$x=\frac{P(t)\,\Delta t}{m\omega_D}\,e^{-\xi\omega t}\cdot\sin\omega_D t$$

این روش برای بارهای ضربه‌ای مثل انفجار مناسب است.

۳- انتگرال دوهامل (بار غیر مشخص)





پاسخ در لحظه t در اثر ضربه $P(\tau)d\tau$

$$dx=\frac{P(\tau)d\tau}{m\omega_D}\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)$$

$$\Longrightarrow x=\int_0^t\frac{P(\tau)d\tau}{m\omega_D}\cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin(\omega_D(t-\tau))$$

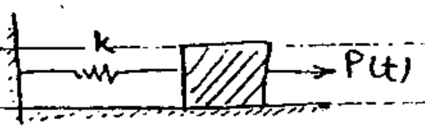
$$\longrightarrow\ \boxed{x=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cdot\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau}$$

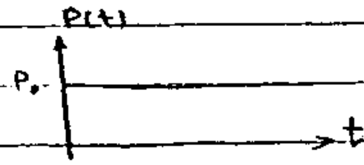
اینجا متغیر ما τ است.

بنابراین dx را با هم جمع (انتگرال) کردیم و به همین دلیل سرعت و جابجایی اولیه (در لحظه τ) را نادیده در نظر گرفتیم. انتگرال گیری یعنی اثر جزء که حرکت‌های قبلی را هم در نظر گرفته‌ایم. چون جمع آثار کردیم رفتار سازه باید خطی باشد.

هنگام زلزله، نیروی زلزله به صورت فرمولی باشد $P(t)$ قابل بیان نیست. چرا که اطلاعات ما به صورت رکوردها گسسته می‌باشد. بنابراین مقدار انتگرال فوق با روش‌های عددی قابل محاسبه خواهد بود.

مثال:

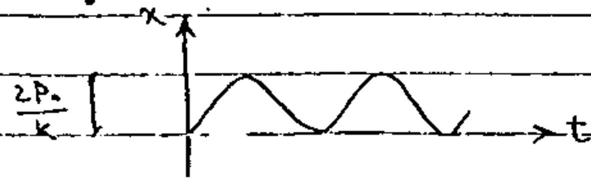




$$x=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cdot\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

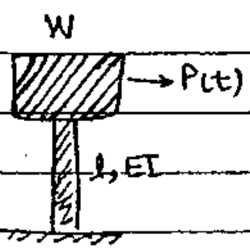
چون برای سیستم فوق میرایی را در نظر نگرفتیم بگذاریم $\xi=0$ و انتگرال به ترتیب زیر $P(t)=P_0$ به صورت زیر در می‌آید:

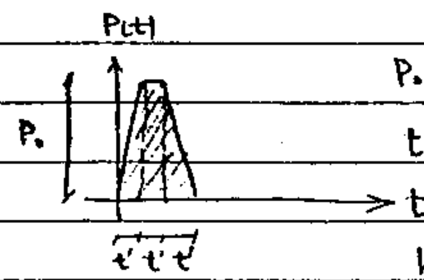
$$x=\frac{1}{m\omega}\int_0^t P_0\,\sin\omega(t-\tau)\,d\tau=\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega t)$$



یعنی اگر بار P_0 به صورت ناگهانی بر سیستم وارد شود، جابجایی ماکزیمم (از حالت استاتیک در حالتی سازه‌ای که میزان x ثابت برابر $\frac{P_0}{k}$ بود) برابر $\frac{2P_0}{k}$ خواهد بود.

مثال:





$P_0 = 50\,kN$

$t' = 0.1^{sec}$

$k=\frac{3EI}{l^3}=51.1\,{}^{kN}/_{cm}$

$W = 5078\,kN$

مطلوبست حداکثر برش پایه ستون با فرض ضربه‌ای بودن بار؟

چون بار ضربه‌ای است، نیروی P(t) را به صورت یک ضربه مثل می‌کنیم آنگاه جابجایی در هر لحظه به صورت زیر خواهد بود:

$$x=\frac{P(t).\Delta t}{m\omega}\,\sin\omega t$$

برای یافتن حداکثر برش پایه، حداکثر جابجایی انتهای آزاد کنسول ستون را حساب می‌کنیم:

$$\Longrightarrow x_{max}=\frac{P(t).\Delta t}{m\omega}$$

$$m=\frac{W}{g}=\frac{5078}{9.81}=517.6\ ton$$

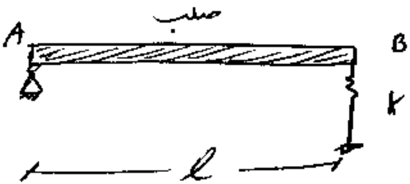
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{51.1\times 180}{517.6}}=3.14\ {}^{rad}/_{sec}$$

* برای ضربه به دلیل دقیق، سطح زیر نمودار (مساحت ذوزنقه) را به جای P(t)Δt در رابطه جابجایی قرار می‌دهیم

$$x_{max}=\frac{\frac{1}{2}(0.1+0.3)\,50}{517.6 * 3.14}\times 100=0.615^{cm}$$

برای حل دقیق‌تر مسئله باید انتگرال را برای بازه‌ی وارد شدن P(t) محاسبه کنیم:

مثال: جرم واحد طول m است.

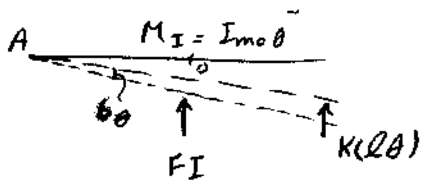


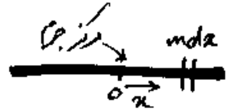
• قانون نیوتن: $\sum M = 0 \rightarrow I_{mA}\ddot{\theta} + K(l^2\theta) = 0$

$$I_{mA} = \int r^2 dm = \int_0^l x^2 m\,dx = \frac{ml^3}{3} \rightarrow \frac{ml^3}{3}\ddot{\theta} + Kl^2\theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + Kl\theta = 0$$

• کار مجازی: $F_I = (ml)\frac{l}{2}\ddot{\theta}$





$$I_{mo} = 2\int_0^{l/2} r^2 dm = 2\int_0^{l/2} (m\,dx)\,x^2 = \frac{ml^3}{12}$$

$$\Delta W = 0 \rightsquigarrow \frac{ml^3}{12}\ddot{\theta}\,\delta\theta + \frac{ml^2}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{l}{2}\delta\theta\right) + Kl^2(\delta\theta) = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + Kl\theta = 0$$

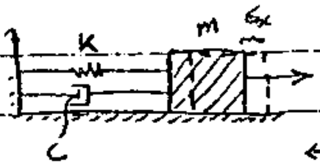
VI) روش بارمجازی برای SDOF :

1- اصل بارمجازی:

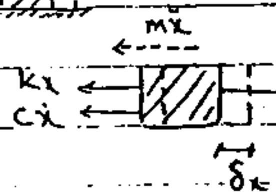
در استاتیک: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه به جهت تغییرمکان مجازی برابر صفر است.

در دینامیک: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه (شامل نیروهای اینرسی) به ازای تغییرمکان مجازی کوچک برابر صفر است.
(و نیروی اینرسی نسبت به مرکز جرم)
$\delta W = 0$

مثال:



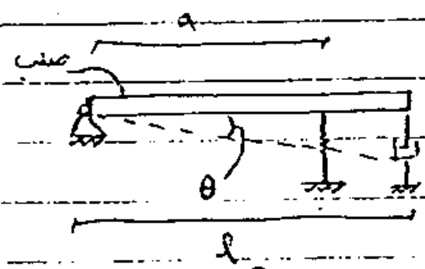
ابتدا دیاگرام آزاد جسم را رسم می‌کنیم



رابطه بارمجازی: $-\left[m\ddot{x}(\delta x)+c\dot{x}(\delta x)+kx(\delta x)\right]+P(t)\,\delta x=0$

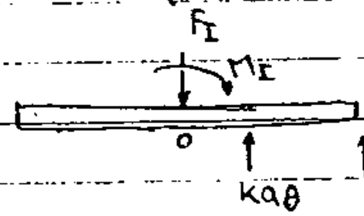
$$\longrightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P(t)$$

مثال:



جرم واحد طول $\frac{m}{l}$ است.

* برای بار یا جسم سیستمی با جرم گسترده قرار دارد، تمامی نیروهای اینرسی معادل در مرکز جرم را باید در مرکز جرم قرار داد.



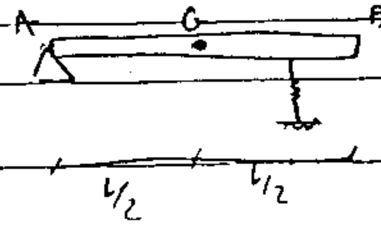
$F_I = m(\frac{l}{2}\ddot{\theta})$

M_I حول مرکز جرم:

$$M_I=\left(\int r^2 dm\right)\ddot{\theta}$$

$$\longrightarrow M_I = I_m\ddot{\theta}$$

همه نیروهای مذکور نسبت به هر نقطه‌ای انجام می‌شود، ولی مهم این است که I_m نسبت به مرکز جرم محاسبه شود.



A نسبت $I_m = \frac{ml^2}{3}$

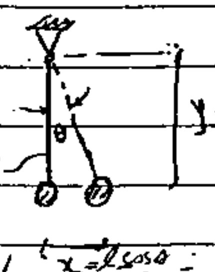
G نسبت $I_m = \frac{ml^2}{12}$

G ≡ c.m

* بردوش بارگذاری نیرو یا لنگر نسبت به مرکز جرم حساب می‌شود مستقل از اینکه دوران حول چه نقطه‌ای صورت می‌گیرد. اما بردوش نیروی اینرسی و لنگر اینرسی (دوران اینرسی جرم) نسبت به مرکز دوران محاسبه می‌شود.

* جرم نقطه‌ای بردوش بارگذاری تنها نیروی اینرسی دارد و لنگر اینرسی نخواهد داشت.

۲. مختصات تعمیم یافته Generalized Cordinate



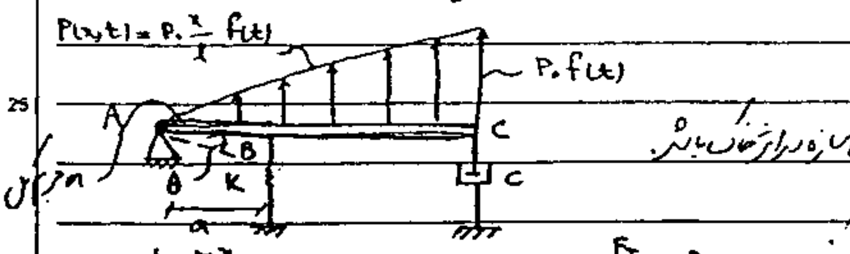
فرض کنید یک آونگ داریم و آن را به حرکت در می‌آوریم، این سیستم یک SDOF است چون با داشتن θ می‌توان موقعیت آن را مشخص کرد. حال اگر بخواهیم موقعیت جرم m را در هر لحظه با دو مختصات x و y نمایش دهیم، نمی‌توان گفت که این سیستم چند درجه آزادی است چرا که x و y به هم وابسته‌اند.

می‌توانیم x و y را مختصات محلی (تغییر مکانی) (Local Cordinate) بنامیم و θ را مختصات تعمیم یافته کلی.

بنابراین می‌توان گفت در مختصات محلی، مختصات با هم وابسته خواهند بود اما مختصات تعمیم یافته با درجات آزادی مختصاتی از هم مستقل خواهند بود.

اگر مطمئن باشیم سیستم ما یک SDOF است و ضریب شتاب را جرم در مختصات تعمیم یافته و ضریب سرعت را ثابت میرایی در مختصات تعمیم یافته و ... بنامیم

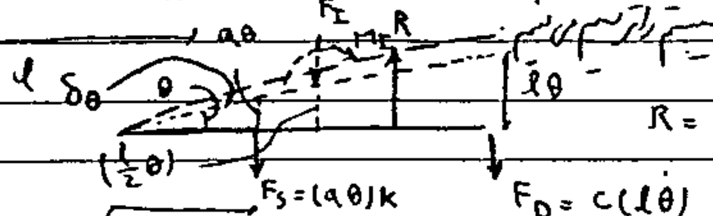
$$\underbrace{M^*}_{\text{جرم در مختصات تعمیم یافته}} \ddot{x} + \underbrace{C^*}_{\text{ثابت میرایی در مختصات تعمیم یافته}} \dot{x} + \underbrace{K^*}_{\text{سختی در مختصات تعمیم یافته}} x = \underbrace{P^*(t)}_{\text{نیروی خارجی در مختصات تعمیم یافته}}$$



مثال: معادله حرکت برحسب θ

این میله می‌تواند مثلاً مدلی برای سازه در راستای خاک باشد.

استفاده از دیاگرام آزاد سیستم را ترسیم می‌کنیم.



$$R = \frac{1}{2}(l)(P_0 f(t)) = \frac{P_0 L}{2} f(t)$$

با اعمال جابجایی مجازی $\delta\theta$، رابطه کار مجازی را می‌نویسیم: $\delta W = 0$

$$\longrightarrow -m\left(\frac{l}{2}\ddot{\theta}\right)\left(\frac{l}{2}\delta\theta\right) - \left(\frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}\right)(\delta\theta) - (cl\dot{\theta})(l\,\delta\theta)$$

$$-(a\theta)k(a\,\delta\theta) + \frac{1}{2}(l)(P_0 f(t))\left(\frac{2}{3}l\,\delta\theta\right) = 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{\left(\frac{ml^2}{3}\right)}_{M^*}\ddot{\theta} + \underbrace{(cl^2)}_{C^*}\dot{\theta} + \underbrace{(ka^2)}_{K^*}\theta = \underbrace{\left(\frac{P_0 l^2}{3}\right)f(t)}_{P^*(t)}$$

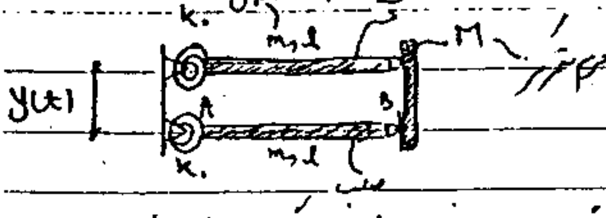
$$\longrightarrow M^*\ddot{\theta} + C^*\dot{\theta} + K^*\theta = P^*(t)$$

اگر می‌خواستیم مسأله فوق را با استفاده از قانون نیوتن حل کنیم، داشتیم:

$\sum M = 0$, $F_x = 0$, $I_{m0} \longrightarrow$ حول مرکز دوران باید حساب شود.

تمرین: مسائل سوم و چهارم از سری سوم تحویل شود.

۸۴/۸/۲ درس ششم

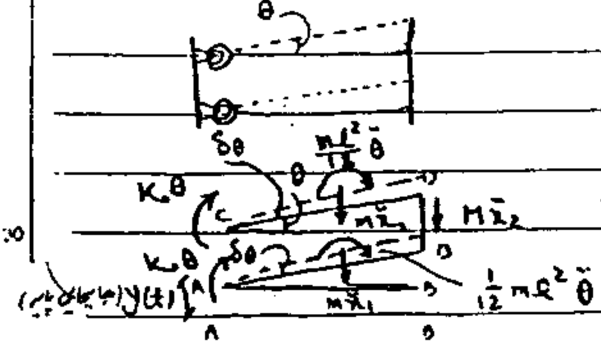


مطلوبست معادله دیفرانسیل حرکت، M^*, K^*؟ (برای حرکت دورانی کوچک میله‌ها)

اگر جرم متمرکز داشته باشیم از روش کار مجازی در کل جرم و هم انرژی استفاده می‌کنیم ولی اگر جرم گسترده داشته باشیم، علاوه بر روش انرژی، نشر انرژی هم لازم.

سیستم مقابل دارای یک درجه آزادی θ است.

ابتدا دیاگرام آزاد سیستم را رسم می‌کنیم:



حرکت سیستم ترکیبی از دو حرکت است: حرکت تکیه‌گاه‌ها و حرکت خود سیستم.

$$x_2 = y(t) + l\theta \rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{y}(t) + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\ ,\ \delta_{x_1} = \frac{l}{2}\delta_\theta$$

$$x_1 = y(t) + \frac{l}{2}\theta \rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{y}(t) + l\ddot{\theta}\ ,\ \delta_{x_2} = l\delta_\theta$$

$$I_{AB} = I_{CD} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = m\left(\ddot{y}(t) + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\right) \\ M\ddot{x}_2 = M\left(\ddot{y}(t) + l\ddot{\theta}\right) \end{cases}$$

روش کار مجازی: برحسب δ_θ را به سیستم اعمال کرده و کار کلیه نیروهای وارد بر سیستم را تحت اثر δ_θ برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\delta_W = 0 \Rightarrow 2(k\theta)\delta_\theta + 2m\left(\ddot{y}(t) + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\right)\left(\frac{l}{2}\delta_\theta\right) + 2\frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}(\delta_\theta) + M\left(\ddot{y}(t) + l\ddot{\theta}\right)(l\delta_\theta) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(M + \frac{2m}{3}\right)l^2}_{M^*}\ddot{\theta} + \underbrace{2k}_{k^*}\theta = \underbrace{-(m+M)\,l\,\ddot{y}(t)}_{P^*(t)}$$

VII) روش ریلی:

روش ریلی، روشی تقریبی برای یافتن فرکانس پایه حرکت است. سیستم با این حالت الزامی ندارد با یک درجه آزادی باشد و ممکن است MDOF باشد.

در این روش با تقریب خوبی فرکانس حرکت را بدون تبدیل به جرم متمرکز و با در نظر گرفتن جرم گسترده، بدست می‌آوریم.

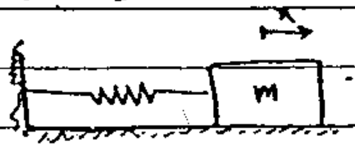
مبنای این روش سادگی و تقریب خوب آن بدون متمرکز کردن اجرام می‌باشد.

از آنجا که سازه‌ها چندین درجه آزادی (به تعداد درجات آزادی) فرکانس دارند، باید بدانیم روش ریلی چه فرکانسی از سازه را بیان می‌کند.

۱- روش انرژی: در این روش از اصل بقای انرژی برای بدست آوردن معادله حرکت استفاده می‌شود:

$$\underbrace{P}_{\text{پتانسیل}} + \overbrace{T}^{\text{جنبشی}} = cte$$

این روش، روش خوبی برای سیستم‌های مکانیکی است. (برای سیستم‌های سازه‌ای، روش ریلی بهتر است).



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\ ,\ P = \frac{1}{2}kx^2$$

اصل بقای انرژی: $\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = cte$

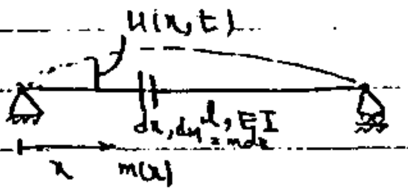
$\xrightarrow[\text{زمان}]{\text{مشتق نسبت به}} \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}} m\ddot{x}\dot{x} + \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}} k\cancel{x}\dot{x} = 0 \longrightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$

۲- روش ریلی:

هنگامی که انرژی جنبشی ماکزیمم است، انرژی پتانسیل صفر است و برعکس

$\begin{cases} T=0 \longrightarrow P_{max}=cte \\ P=0 \longrightarrow T_{max}=cte \end{cases} \longrightarrow P_{max}=T_{max} \quad (I)$

* قسمت تقریبی این روش، حدس تابع تغییر شکل سازه در اثر ارتعاش است.



تیر مقابل را تحت شرایط الاستیک مرتعش نموده‌ایم، می‌خواهیم فرکانس حرکت سازه را بدست آوریم:

هر جابجایی هر نقطه از تیر تابعی از محل نقطه و زمان است [u(x,t)]. در ریلی u را به صورت حرکت رفت و برگشتی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$u(x,t) = \Psi(x)\cdot \sin\omega t$ یا $u = \Psi\cdot\sin\omega t$

ω فرکانسی است که به دنبال آن می‌گردیم.

$\Psi(x)$ شکل ارتعاش و $\sin\omega t$ سرعت ارتعاش را نشان می‌دهد.

$\Psi(x)$ را تابع شکلی یا Shape Function می‌نامیم. این تابع به دلخواه انتخاب می‌شود و البته باید شرایط مرزی را ارضا کند. (همین مسئله روش ریلی تقریبی است):

(در اثر خمش) $P = \frac{1}{2}\int_l \frac{M^2 dx}{EI}$ و $M = EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = EI\,\Psi''\sin\omega t$

مشتق نسبت به مکان را با ′ و مشتق نسبت به زمان را با ˙ نشان می‌دهیم

$\longrightarrow P_{max} = \frac{1}{2}\int_l EI(\Psi'')^2 dx \longrightarrow \sin\omega t = 1$: در P_{max} باید داشته باشیم

$\dot{u}(t) = \Psi\omega\cos\omega t$

$T_{max} = \frac{1}{2}$ جرم $\times$ (ماکزیمم سرعت)^2 $\longrightarrow$ برای سرعت ماکزیمم $\cos\omega t = 1$ می‌باشد.

$\longrightarrow T_{max} = \frac{1}{2}\int_l (m\,dx)(\Psi\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\int_0^l m\Psi^2 dx$

با استفاده از رابطه (I) یعنی $P_{max} = T_{max}$ می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow \int_l EI(\psi'')^2 dx = \omega^2 \int_l m(x)\,\psi^2 dx$$

حتی در مقاطع با EI متغیر می‌توانند تابعی از مکان باشد.

رابطه ریلی

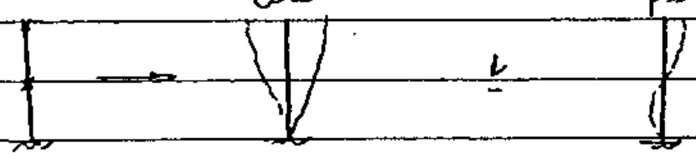
$$\boxed{\omega^2 = \frac{\int_l EI(\psi'')^2 dx}{\int_l m(x)\cdot\psi^2\cdot dx} = \frac{\text{انرژی پتانسیل خمشی}}{\text{انرژی جنبشی}}}$$

از آنجا که به ازای توابع شکلی مختلف، ω های مختلفی بدست می‌رسد. باید بهترین این فرکانس‌ها را انتخاب کرد. تا سعی شود که کمترین فرکانس بدست آمده، نزدیک‌ترین فرکانس به فرکانس اصلی سازه می‌باشد.

فرکانس در یک سازه‌ی چند درجه آزادی با چند فرکانس، فرکانس اصلی خوانده می‌شود که بیشترین اثر را در حرکت سازه دارد.

کوچکترین ω بدست آمده از روش ریلی را انتخاب می‌کنیم، چون به واقعیت نزدیک‌تر است.

مود اول　　　　　مود دوم



ω_1　　یا　　ω_2

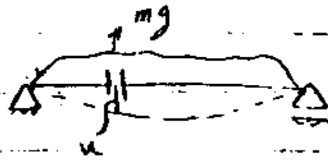
سازه‌ی چند درجه آزادی ممکن است به شکل‌های مختلف ارتعاش کند (در حقیقت ترکیبی از آنها را دارد) حال اگر تابع شکلی نظیر اولی را در نظر بگیریم، جواب حاصل از روش ریلی، ω_1 خواهد بود و اگر تابع شکلی نظیر دومی را در نظر بگیریم، ω_2 بدست می‌آید. (کوچکترین ω مربوط به مود ارتعاش نظیر تابع ψ می‌باشد).

بنابراین بهتر است در انتخاب تابع ψ، سعی در نزدیکی آن به مود اول (که مود غالب است) شود.

بنابر مطالب فوق معمولاً روش ریلی برای سازه‌ای ساخته شده که مود اول آنها قابل حدس است استفاده می‌شود.

به علاوه این روش برای کنترل جواب دقیق استفاده می‌شود.

* اگر تابع شکل Ψ را شکل سازه تحت اثر بارهای ثقلی در نظر بگیریم، می‌توان انرژی پتانسیل ماکزیمم را ناشی از بارهای خارجی بدست آورد که با انرژی نیروهای داخلی معادل است.



انرژی = وزن × جابجایی مرکز

$$P_{max} = \frac{1}{2}\int_l \left[g\, m(x)\, dx\right](\bar{\Psi}) \longrightarrow P_{max} \leftarrow \sin\omega t = 1$$

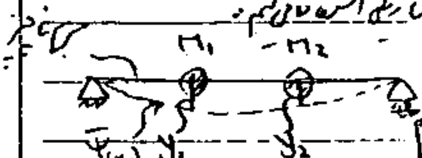
منحنی تغییرشکل بار ثقلی

و برای ω^2 خواهیم داشت:

$$\boxed{\omega^2 = g\,\frac{\int_l m\bar{\Psi}\, dx}{\int_l m\bar{\Psi}^2\, dx}} \quad \text{(II)}$$

$\bar{\Psi}$: تابع شکل متناظر شکل سازه تحت بارهای ثقلی (مثل وزن سازه)

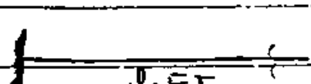
* برای این سازه‌ها ... از جرم تمرکز ... استفاده می‌کنیم.
حالت خاص تیر، حالتی است که سازه شامل n جرم متمرکز باشد:



$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}M_1 g y_1 + \frac{1}{2}M_2 g y_2 \\ \frac{1}{2}M_1(\omega y_1)^2 + \frac{1}{2}M_2(\omega y_2)^2\end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\omega^2 = g\,\frac{\sum My}{\sum My^2}} \quad \text{(III)} \quad \text{یا} \quad \boxed{\omega^2 = g\,\frac{\sum Wy}{\sum Wy^2}} \quad \text{(IV)}$$

اگر در سازه فنری داشته باشیم و جرم آن در نظر گرفته نشود (که معمولاً اینطور است)، این فنر در انرژی پتانسیل تاثیر می‌گذارد و به راحتی نمی‌توانیم مستقیماً از روابط فوق استفاده کنیم و باید انرژی پتانسیل جدید را با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل فنر بدست آوریم. مثلاً انرژی مدنظر باید محاسبه شود یعنی انرژی پتانسیل فنر ... اندازه در نظر گرفته شود.

مثال: m: جرم واحد طول



فرکانس را با استفاده از رابطه ریلی برای دو حالت زیر بدست آورید:

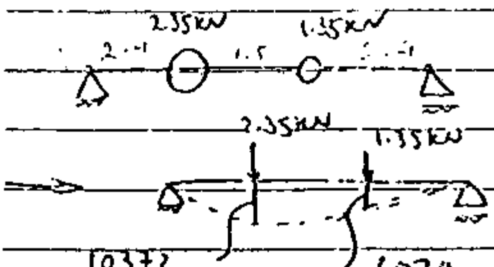
I) $\Psi(x) = a\left[\frac{3}{2}(x/l)^2 - \frac{1}{2}(x/l)^3\right]$

II) $\Psi(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2$

I) از رابطه (I) داریم: $$\omega^2 = \frac{EI\int_0^l a^2\left(3/l^2 - 3x/l^3\right)^2 dx}{m\int_0^l a^2\left[\frac{3}{2}(x/l)^2 - \frac{1}{2}(x/l)^3\right]^2 dx}$$

$$\longrightarrow \omega = 3.56\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

II) $\omega = 4.47\sqrt{\dfrac{EI}{m\ell^4}}$



مثال : اگر در تیر مقابل فرض کنیم و با منظور کردن تابع شکل به صورت Ψ ، فرکانس حرکت را از روش ریلی بدست آورید.

تابع شکل تیر را از بار ثقلی

$y_1 = \dfrac{10372}{EI}$ $\quad y_2 = \dfrac{6874}{EI}$

با استفاده از کمک آن رتبه که حاصل از ... است

از رابطه IV استفاده می‌کنیم :

$$\omega^2 = g\frac{\sum wy}{\sum wy^2} = 9.81\,\frac{(2.35)(10372)+(1.35)(6874)}{(2.35)(10372)^2+(1.35)(6874)^2}\times EI$$

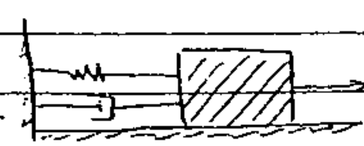
$$\longrightarrow \omega^2 = 1.046\times10^{-3}\,EI \longrightarrow \boxed{\omega = 0.0323\sqrt{EI}}$$

تمرینات سری چهارم ، ۴-۱ و ۴-۳ را تحویل دهید.

دوشنبه ۱۳۸۴/۸/۹

VIII) تحلیل دینامیکی SDoF با روش فرکانس : Frequency Domain

۱. تبدیل بارهای تناوبی به مجموعه‌ای از بارهای هارمونیک با استفاده از سری فوریه :



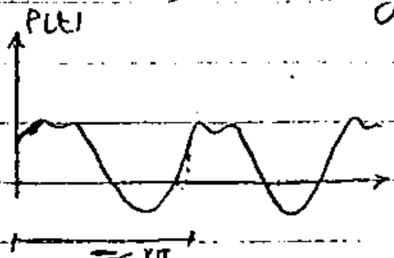
در روش انتگرال دوهامل ، ما بارها را به بارهای ضربه‌ای از جنس تقسیم می‌کردیم . معادل روش کمی در ... تحلیل‌ها حوزه زمان بود (Time Domain . ... در روش تحلیل مسائل این است که با استفاده از سری فوریه P(t) را به ترکیبی سینوسی و کسینوسی با هم جمع شده تقسیم کنیم

تبدیل بار P(t) به سری بارهای سینوسی - کسینوسی از مزایای این روش شمار می‌آید . چرا که ما با امکان

nde

تفاوت و تقدیم سری را می‌دهد. یکی از این تفاوت‌ها در مورد شناسایی فرکانس‌های غالب و موثر سازه می‌باشد.

شناسایی فرکانس‌های غالب مثلاً در مورد زلزله می‌تواند ما را در filtering کمک کند.



سری فوریه: تناوبی $P(t)$ را در نظر می‌گیریم. این نیرو را می‌توان به صورت یک سری از توابع سینوسی ـ کسینوسی به صورت زیر نوشت:

بصورت سری فوریه نوشته می‌گردد: $P(t)=a_0+a_1\cos\bar{\omega}t+a_2\cos 2\bar{\omega}t+\dots+b_1\sin\bar{\omega}t+b_2\sin 2\bar{\omega}t+\dots$

$$\Longrightarrow P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\bar{\omega}t+b_n\sin n\bar{\omega}t\right)$$

که در آن:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T P(t)\,dt\ ,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_T P(t)\cos n\bar{\omega}t\,dt\quad n=1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T P(t)\sin n\bar{\omega}t\,dt\quad n=1,2,\dots$$

البته برای این تبدیل باید معادله‌ی $P(t)$ در یک دوره تناوب معلوم باشد.

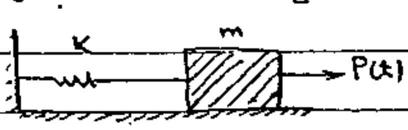
Even Function: $P(-t)=P(t)$

Odd Function: $P(-t)=-P(t)$

اگر تابع مورد نظر فرد باشد داریم: $a_n=0\ ,\ n=0,1,2,\dots \leftarrow P(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin n\bar{\omega}t$

و اگر تابع زوج باشد داریم: $b_n=0\ ,\ n=1,2,\dots \leftarrow P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\bar{\omega}t$

۲ـ جواب SDoF تحت اثر $P(t)$ (که بصورت سری فوریه نوشته شده است) ـ بدون میرایی



I) $P(t)=P_0\sin\bar{\omega}t \longrightarrow x=\frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\sin\bar{\omega}t$

$\beta=\frac{\bar{\omega}}{\omega}$

II) $P(t) = P_0 \cos\bar{\omega}t \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cos\bar{\omega}t$

III) $P(t) = P_0 \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}$

* در رفتار فوق، قسمت دائم جواب می‌باشد.

- در حالت بدون میرایی:

با استفاده از ترتیب حالات I، II و III می‌توان نوشت:

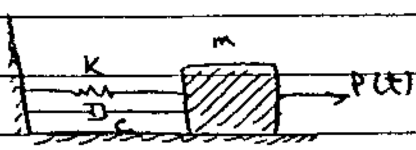
$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\bar{\omega}t + b_n\sin n\bar{\omega}t\right)$$

$$x = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta_n^2}\cdot\cos n\bar{\omega}t + \frac{b_n}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta_n^2}\sin n\bar{\omega}t\right]$$

$$x = \frac{1}{k}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\beta_n^2}\right)\left(a_n\cdot\cos n\bar{\omega}t + b_n\sin n\bar{\omega}t\right)\right]$$

که در آن $\beta_n = \frac{n\bar{\omega}}{\omega}$ می‌باشد.

۳- جواب SDoF تحت اثر بار P(t) با میرایی.



جواب: جواب Steady State حرکت را داریم:

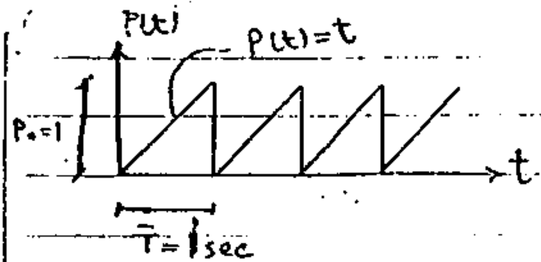
I) $P(t) = P_0\sin\bar{\omega}t \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t\right]$

II) $P(t) = P_0\cos\bar{\omega}t \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[2\xi\beta\sin\bar{\omega}t + (1-\beta^2)\cos\bar{\omega}t\right]$

III) $P(t) = P_0 \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}$

همانند حالت بدون میرایی، با تلفیق سه قسمت فوق برای P(t) به صورت سری فوریه داریم: (بررسی شود)

$$x = \frac{1}{k}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\left\{\left[a_n(2\xi\beta_n) + b_n(1-\beta_n^2)\right]\sin n\bar{\omega}t + \left[a_n(1-\beta_n^2) - b_n(2\xi\beta_n)\right]\cos n\bar{\omega}t\right\}\right)$$



مثال: P(t) را بصورت سری فوریه بنویسید:
[illegible]

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T P(t)\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

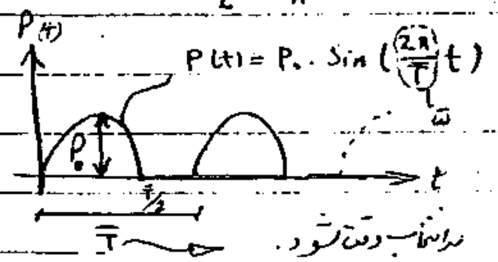
$$a_n = \frac{2}{T}\int_T P(t)\cos n\bar{\omega} t\,dt = \frac{2}{1}\int_0^1 t\cos n\bar{\omega} t\,dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T P(t)\sin n\bar{\omega} t\,dt = \frac{2}{1}\int_0^1 t\sin n\bar{\omega} t\,dt = \frac{-1}{n\pi}$$

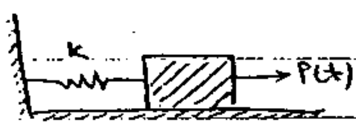
$$\longrightarrow P(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin \overbrace{n\bar{\omega}}^{2n\pi} t \quad , \quad \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin 2\pi t + \frac{1}{2}\sin 4\pi t + \cdots\right)$$

مثال:



در انتخاب دقت شود.



$$\frac{\bar{T}}{T} = \frac{4}{3}$$

الف) P(t) را برحسب سری فوریه بنویسید.

ب) جواب حاصل را بیابید.

با صرف نظر از عملیات جبری داریم:

$$a_0 = \frac{P_0}{\pi} = \frac{P_0}{\bar{T}}\int_0^{\bar{T}/2}\sin\frac{2\pi}{\bar{T}} t\,dt$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ \frac{P_0}{\pi}\cdot\frac{2}{1-n^2} & n \text{ زوج} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} P_0/2 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\bar{T}}\int_0^{\bar{T}/2}\sin\frac{2\pi}{\bar{T}} t\cos\frac{2\pi}{\bar{T}} t\,dt\right) \qquad \left(b_n = \frac{2}{\bar{T}}\int_0^{\bar{T}/2}\sin\frac{2\pi}{\bar{T}} t\cos\frac{2\pi}{\bar{T}} t\,dt\right)$$

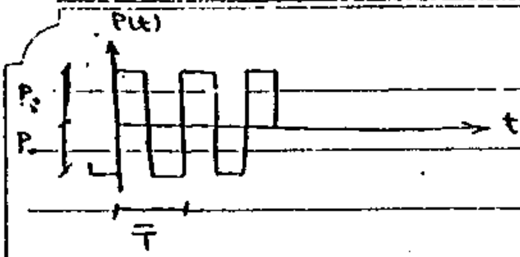
$$\longrightarrow P(t) = \frac{P_0}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\sin\bar{\omega} t - \frac{2}{3}\cos 2\bar{\omega} t - \frac{2}{15}\cos 4\bar{\omega} t - \cdots\right]$$

$$\longrightarrow x = \frac{1}{k}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\beta_n^2}\left(a_n\cos n\bar{\omega} t + b_n\sin n\bar{\omega} t\right)\right]$$

$$\beta_1 = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{3}{4} \qquad \beta_2 = 2\beta_1 = \frac{3}{2} \;, \; \ldots \;, \; \beta_n = n\beta_1 = \frac{3n}{4}$$

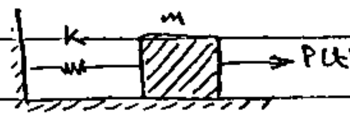
$$\longrightarrow x = \frac{P_0}{k\pi}\left[1 + \frac{8\pi}{7}\sin\bar{\omega} t + \frac{8}{15}\cos 2\bar{\omega} t + \frac{1}{60}\cos 4\bar{\omega} t + \cdots\right]$$

مثال: $P(t) = ?$ $\quad x(t) = ?$



$\beta = \frac{\omega}{\bar{\omega}} = \frac{1}{6}$ $\quad$ رسم طیف $\begin{cases} \text{طیف نیرو؟} \\ \text{طیف جواب؟} \end{cases}$

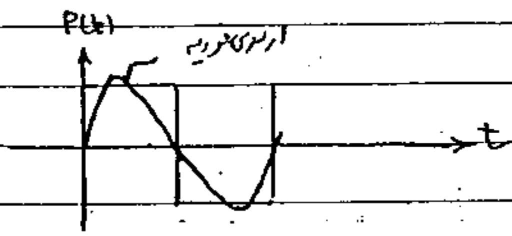
تابع P(t) نشان داده شده، تابعی فرد است بنابراین: $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$ $\quad P_{(t)} = -P_{(-t)}$



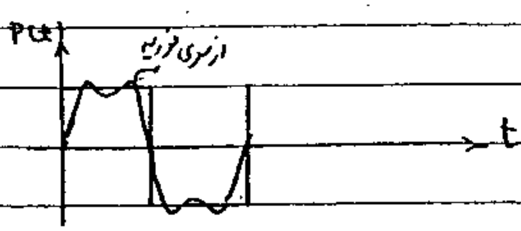
$$b_n = \frac{2}{\bar{T}}\left[\int_0^{\bar{T}/2} P_0 \sin n\bar{\omega}t + \int_{\bar{T}/2}^{\bar{T}} -P_0 \sin n\bar{\omega}t\, dt\right]$$

$$\longrightarrow b_n = \frac{4P_0}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, 2k+1$$

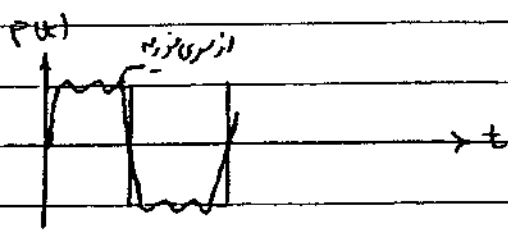
$$\longrightarrow P(t) = \frac{4P_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\bar{\omega}t, \quad 2k+1 = n$$



با در نظر گرفتن یک جمله از سری فوریه ←



با در نظر گرفتن دو جمله از سری فوریه ←



با در نظر گرفتن سه جمله از سری فوریه ←

$$x = \frac{4P_0}{k\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin n\bar{\omega}t}{n(1-\beta_n^2)} \qquad n = 2m+1$$

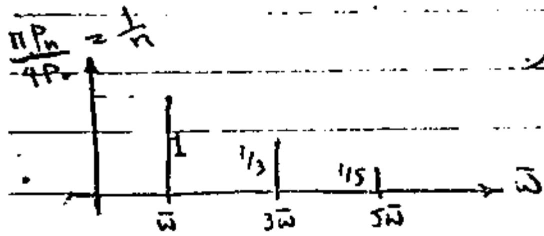
حال میدانیم که قادر هستیم تا با در نظر گرفتن جملات متفاوتی از P(t)، مقدار P(t) را بدست آوریم و سپس برای هر کدام از آنها جواب x را حساب کنیم. حال اگر بخواهیم x ها را در نهایت در یک محور مختصات برحسب فرکانس رسم کنیم

یعنی طیف نیرو عبارت است از دیاگرام نیروی P(t) به ازای فرکانس‌های متفاوت.

(جزوه)

$$P(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4P_0}{n\pi}\sin n\bar{\omega}t=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\sin n\bar{\omega}t$$

$P_n=\frac{4P_0}{n\pi}$ ، دیاگرام نیروی هر یک از جملات سری فوریه می‌باشد.



در رسم طیف‌ها معمولاً از حالت پیوسته برای نمایش آن استفاده می‌کنند.

نمودار فوق را طیف نیرو در حیطه فرکانس می‌نامند.

این نمودار نشان می‌دهد که فرکانس $\bar{\omega}$، بیشترین مقدار نیرو را نسبت به سایر فرکانس‌های P(t) دارد.

(۱ر۸)

$$x=\frac{4P_0}{k\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\bar{\omega}t}{n(1-\beta_n^2)}$$

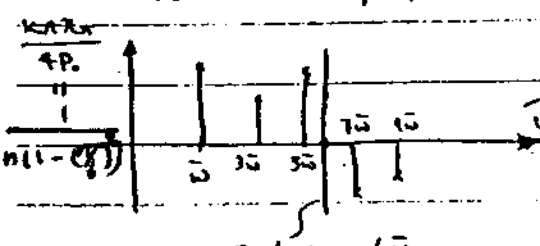
حال می‌خواهیم طیف جابجایی را رسم کنیم:

(۱ر۸)

$$\Rightarrow x=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{4P_0}{k\pi n(1-\beta_n^2)}}_{x_n}\sin n\bar{\omega}t$$

از داده‌های مسأله

$$\frac{k\pi x_n}{4P_0}=\frac{1}{n(1-\beta_n^2)}=\frac{1}{n(1-(n/6)^2)}\leftarrow\beta_n=\frac{n}{6}$$



طیف جواب با سری فوریه $\bar{\omega}$

طیف در $6\bar{\omega}$ تغییر جهت می‌دهد.

اما باید توجه داشت $6\bar{\omega}$ جزو مؤلفه‌ها نیست چرا که n زوج است.

طیف‌ها به ما در انتخاب تعداد جملات مناسب کمک می‌کنند.

۴- جواب SDOF به بارهای تناوبی با استفاده از صورت مختلط سری فوریه:

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\bar{\omega}t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\bar{\omega}t$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos n\bar{\omega}t = \frac{e^{in\bar{\omega}t} + e^{-in\bar{\omega}t}}{2} \qquad \sin n\bar{\omega}t = \frac{e^{in\bar{\omega}t} - e^{-in\bar{\omega}t}}{2i}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه سری فوریه P(t) داریم:

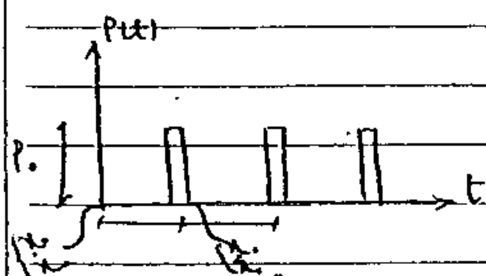
$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{in\bar{\omega}t}$$

زوج فوریه ←

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, e^{-in\bar{\omega}t}\, dt = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

C_n را ضریب فوریه می‌نامیم.

مثال: تمرین ۴-۳:



$$t = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

x تحت شرایط اولیه $x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + x_0 \cos\omega t$

این است سرعت و جابجایی را پس از ضربه به دست آورده و از ضربه بعد آن اضافه کنیم (ضربه اثر سرعتی دارد ولی اثر جابجایی ندارد)

$$\begin{cases} \text{سرعت اولیه} = \text{سرعت پس از اثر ضربه} \\ x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t = x_0 \end{cases}$$

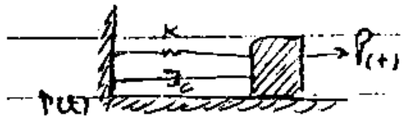
از دو معادله فوق به جواب می‌رسیم.

SDOF با میرایی:

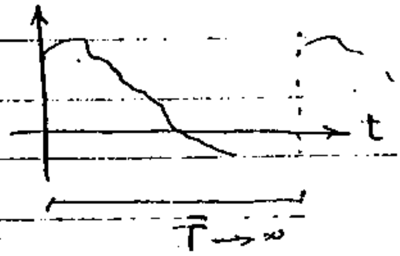
$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H(n\bar{\omega})\, e^{in\bar{\omega}t}$$

$$H(n\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-n^2\beta_n^2 + 2in\beta_n\zeta + 1)}$$

چهارشنبه ۸۴/۸/۱۱



۵) جواب SDoF در اثر بار غیرمشخص ، با استفاده از انتگرال فوریه :



برای استفاده از سری فوریه برای چنین نیرویی ، ابتدا یک پریود دلخواه برای این بار در نظر میگیریم (یعنی تناوبی بودن نیرو را که از شرایط سری فوریه است برقرار سازیم). حال برای محاسبه ی دقیق جواب ، باید این پریود را به سمت ∞ میل دهیم. تا شرایط واقعی مساله (غیر تناوبی بودن نیرو) به هم نخورد. جواب این مساله ، انتگرال فوریه خواهد بود. در ضمن تابع نیرو به صورت انتگرال زیر خواهیم داشت

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\bar\omega) \cdot e^{-i\bar\omega t} \cdot d\bar\omega$$

که در آن $C(\bar\omega)$ تبدیل فوریه ، به صورت زیر می باشد :

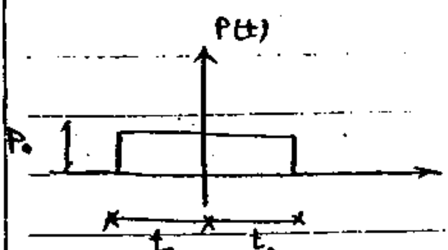
$$C(\bar\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-i\bar\omega t} \cdot dt$$

$$\longrightarrow x = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\bar\omega) \cdot H(\bar\omega) \cdot e^{i\bar\omega t} \cdot d\bar\omega$$

که در آن :

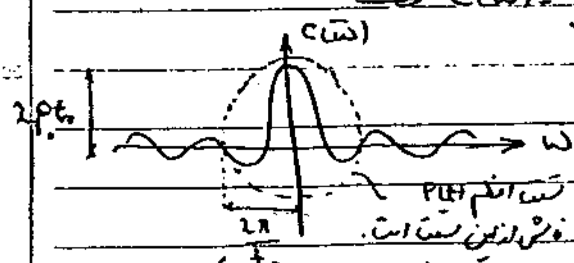
$$H(\bar\omega) = \frac{1}{k(-\beta^2+2i\beta\zeta+1)}$$ می باشد.

مثال :



تبدیل فوریه : $C(\bar\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \cdot e^{-i\bar\omega t} dt$

$$\longrightarrow C(\bar\omega) = \int_{-t_0}^{+t_0} P_0 \cdot e^{-i\bar\omega t} \cdot dt = 2P_0 t_0 \left(\frac{\sin \bar\omega t_0}{\bar\omega t_0}\right)$$



نمودار $C(\bar\omega)$ نشان می دهد که قسمت اعظم P(t) (که به انتگرال فوریه مربوط است) ، قسمت مرکزی $C(\bar\omega)$ است یعنی $-\frac{2\pi}{t_0} < \bar\omega < \frac{2\pi}{t_0}$.

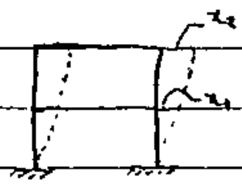
اگر تابع P(t) تابعی پیوسته نیست و یا برای انتگرال فرم بسته ای به روش های ریاضی قابل انجام نیست و باید روش های عددی محاسبه می شود.

IV) مدل های چند درجه آزاد:

Multi Degree of Freedom Systems (MDOF)

۱) مبانی حرکت مدل های چند درجه آزاد:

اگر برای سیستم بیش از یک درجه تغییر مکان قائل شویم، سازه ی ما چند درجه آزاد خواهد بود. (معمولاً تشخیص MDOF و SDOF بر عهده ی ما می باشد).



واقعیت این است که در سازه تغییر مکان های بسیاری، اعم از دورانی و انتقالی، حاصل می شود و بنابراین تعیین تعداد درجات آزادی سازه، بر عهده ی تشخیص ما می باشد.

در سازه پیش روی ما ترادبری، اول اینکه به مدل سازی چند درجه آزادی در نظر بگیریم. دوم اینکه جرم را چگونه در نظر بگیریم.

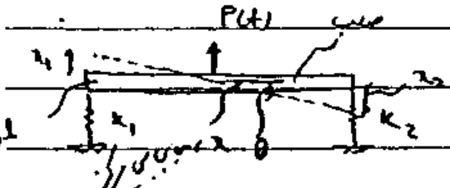
در MDOF به جای جرم، سختی و ضریب میرایی، ماتریس آنها را داریم و به جای تغییر مکان و سرعت و شتاب، بردارهای آنها را خواهیم داشت. یعنی معادلات تعادل دینامیکی به صورت زیر خواهند بود:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\}$$

ماتریس جرم — ماتریس میرایی — ماتریس سختی — بردار نیروی خارجی

به مجموعه ی [m]، [c] و [k] ماتریس سیستم می گویند.

* ابعاد ماتریس های فوق و نیز بردارهای تغییر مکانی، بستگی به درجات آزادی و تعداد آنها دارد. شکل انتخاب درجات آزادی، در شکل ماتریس های سیستم مؤثر است.

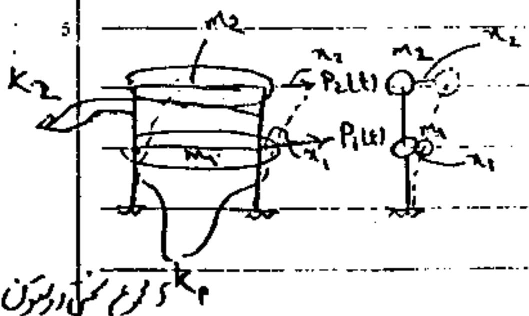


مثلاً اگر x_1 و x_2 را به عنوان درجات آزادی انتخاب کنیم، شکل معادلات با حالتی که x و θ را به عنوان درجات آزادی در نظر بگیریم، متفاوت خواهد بود. اما باید توجه داشت که در هر دو حالت جواب مسئله یکسان می باشد.

یعنی جواب سازه در $t=t_0$ به صورت حالت تیپ خواهد بود.

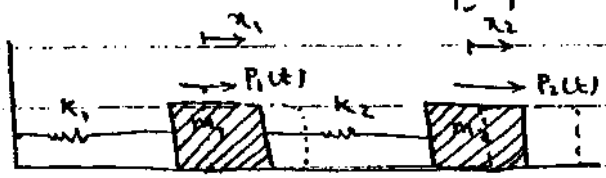
* سازه‌های بهم فشرده، نیاز به نیروی اثر نیروهای خارجی در محل درجات آزادی می‌باشد.

مثال:

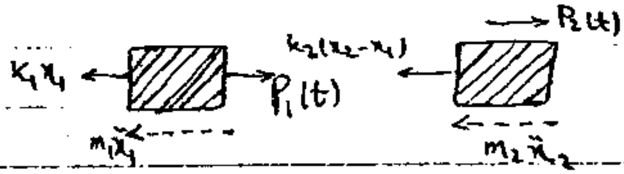


در SDOF درجه آزادی را رسم می‌کردیم و با نوشتن معادلات تعادل مناسب با اثرهای دینامیکی، درجه آزادی را با لاگرانژ و سایر روش‌ها حل می‌کردیم.

در MDOF، درجات آزادی را رسم می‌کنیم:



x_1 و x_2 جابجایی‌های مطلق جرم‌های m_1 و m_2 می‌باشند.



$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow \quad m_1 \text{ برای جرم}: \quad m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2-x_1) = P_1(t)$$

$$m_2 \text{ برای جرم}: \quad m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2-x_1) = P_2(t)$$

$$\xrightarrow[\text{ماتریسی}]{\text{به صورت}} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس قطری جرم}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\text{بردار شتاب}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی سازه}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\text{بردار جابجایی}} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

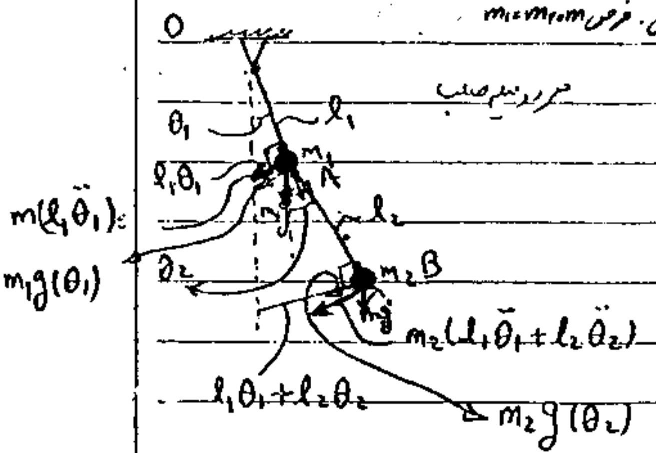
k_{ij}: نیروی لازم در نقطه i در جهت جابجایی واحد در نقطه j، اگر نقاط دیگر ثابت باشند.

تمرین: ۵-۱ و ۵-۲ تحویل داده شوند.
تا سر MDOF میان‌ترم خواهیم داشت.

nde

مثال: دوشنبه ۸۴/۸/۱۶

مطلوبست تشکیل معادلات حرکت جرم متمرکز - حرکت حدود معادلات دیفرانسیل. فرض $m_1=m_2=m$



اساس کار در MDOF مانند SDOF، ترسیم دیاگرام آزاد بخش های مختلف سازه می باشد.

ماتریس های ضرایب در MDOF، بستگی به مدلسازی سازه ما دارد (مکان و تعداد درجات آزادی). البته جواب نهایی تغییری حاصل نمی شود و تنها شکل معادلات دیفرانسیل تغییر می کند.

تمامی نیروها را به نقطه A می بریم و سپس حول O لنگر می گیریم (چون در A مفصل داریم، لنگر ناشی از m_1 در A صفر است)

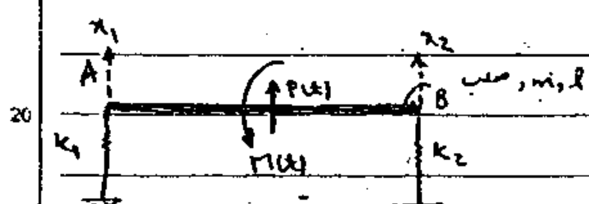
$$\sum_O M = 0 \rightarrow [m_2(l_1\ddot{\theta}_1+l_2\ddot{\theta}_2)+m_1(l_1\ddot{\theta}_1)]l_1 + [m_2 g(\theta_2)+m_1 g(\theta_1)]l_1 = 0$$

$$\sum_A M = 0 \rightarrow m_2(l_1\ddot{\theta}_1+l_2\ddot{\theta}_2)(l_2) + m_2 g(\theta_2) l_2 = 0$$

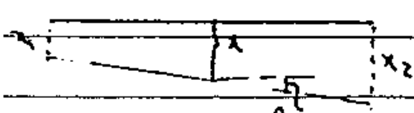
(جرم m_1 را با m_2 ... و بر دو را l تقسیم کردیم)

$$m_1=m_2=m \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2g/l & 0 \\ 0 & g/l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

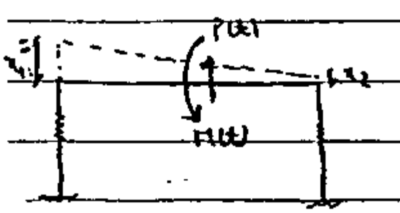
مثال: میله صلب AB، جرم کل m، صلب و با جرم یکنواخت می باشد. مطلوبست معادله دیفرانسیل حرکت:



این سیستم، یک سیستم دو درجه آزادی است:

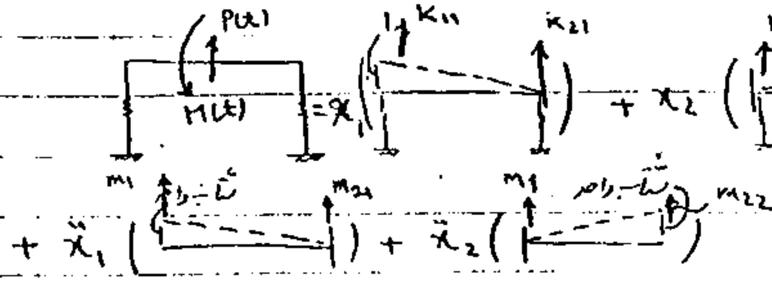


می توان این درجات آزادی را x_1 و x_2 اختیار کرد. و یا جابجایی مرکز جرم و دوران میله (x و θ) را به عنوان درجات آزادی انتخاب کرد. حال مسئله را برای هر دو حالت درجات آزادی حل می نماییم.



نکته در این مسئله این است که چون جرم گسترده است، برداری داریم.

نیروهای خارجی را باید با نیروهای داخلی معادل کرد. بنابراین می توان نوشت:



بخش استاتیکی

بخش نیروهای دینامیکی

برای رسیدن به معادلات دیفرانسیل حرکت، معادلات تعادل مناسب را در محل درجات آزادی را می نویسیم

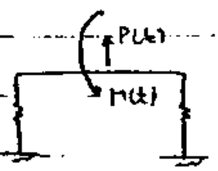
K_{ij} : نیروی لازم در نقطه ی i به جهت جابجایی واحد در نقطه ی j وقتی درجات آزادی محدود شوند.

m_{ij} : نیروی لازم در نقطه ی i جهت شتاب واحد در نقطه ی j ~~وقتی درجات آزادی محدود شوند~~

به این ترتیب تعریف ماتریس جرم با استفاده از رابطه ی $F=ma$ به صورت زیر تغییر می کند:

جرم عبارت است از نیروی لازم جهت شتاب واحد.

حال نیروهای خارجی را در محل درجات آزادی معادل می کنیم



$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{P(t)}{2}-\frac{M(t)}{l}}_{P_1(t)} \qquad \underbrace{\frac{P(t)}{2}+\frac{M(t)}{l}}_{P_2(t)}$$

اکنون از دیاگرام بالای صفحه استفاده کرده داریم:

جمع نیروهای متناظر در A برابر صفر

در محل درجه آزادی ۱ : $x_1K_{11}+K_{12}x_2+m_{11}\ddot{x}_1+m_{12}\ddot{x}_2=P_1(t)$

B

در محل درجه آزادی ۲ : $x_1K_{21}+x_2K_{22}+m_{21}\ddot{x}_1+m_{22}\ddot{x}_2=P_2(t)$

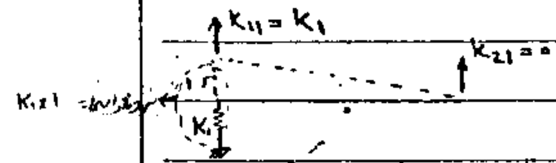
در معادلات فوق، در حقیقت معادلات تعادل در راستای درجه آزادی در نقاط درجه آزادی مربوط را نوشتیم.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{22} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{P(t)\}$$

و در نتیجه حل مسئله به یافتن ماتریس سختی و ماتریس جرم تبدیل می‌شود. $\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}P(t) - \frac{1}{l}M(t) \\ \frac{1}{2}P(t) + \frac{1}{l}M(t) \end{Bmatrix}$

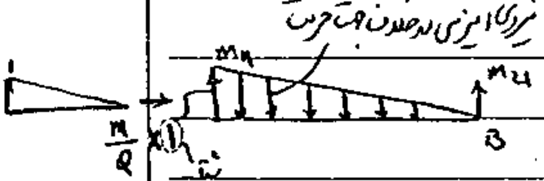
- یافتن ماتریس های $[K]$:



(حال با بدست آوردن k_{ij} ها دقت شود)

به همین ترتیب: $k_{22}=k_2$ و $k_{12}=0$.

$\rightarrow [K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$



دیاگرام نیروهای اینرسی:

- یافتن ماتریس $[m]$:

چون جرم AB گسترده است بنابراین نیروهای اینرسی حاصل از آن نیز گسترده است و از ضرب جزء جرم در شتاب آن بدست می‌آید.

در مورد شکل ① $\rightarrow \sum_B M = 0 \Rightarrow m_{11}\cdot l - \frac{m}{l}\times\frac{1}{2}l\times\frac{2}{3}l = 0$

$\rightarrow m_{11} = \frac{m}{3}$

$\sum_A M = 0 \rightarrow -m_{21}(l) + \frac{m}{l}\times\frac{1}{2}l\times\frac{1}{3}l = 0 \rightarrow m_{21} = \frac{m}{6}$

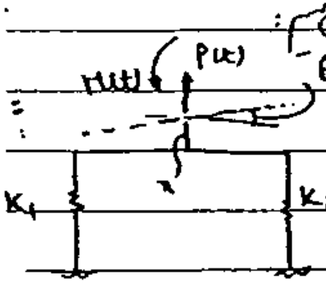
به همین ترتیب بدست می‌آید: $m_{22} = \frac{m}{3}$ $\quad m_{12} = \frac{m}{6}$

و معادلات دیفرانسیل حرکت به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} m/3 & m/6 \\ m/6 & m/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

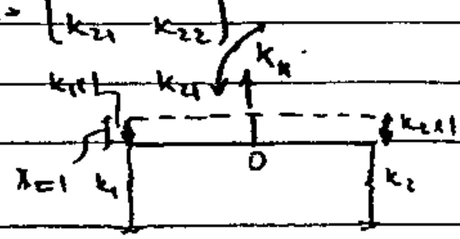
* هر دو ماتریس $[m]$ و $[k]$ متقارن‌اند.
* نیز یادداشت کنید که [illegible] جواب بشوند.

حال قصد داریم تا شکل فوق را با در نظر گرفتن درجات آزادی به صورت x و θ حل کنیم:



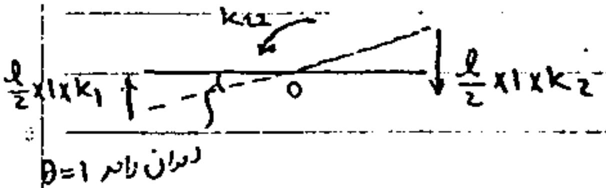
x: درجه آزادی ۱
θ: درجه آزادی ۲

$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$



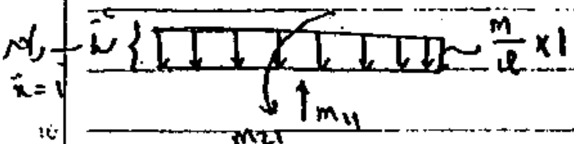
$\sum F_y = 0 \Longrightarrow k_{11} = k_1 + k_2$

$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum_O M = 0 \Longrightarrow -k_{21} + k_2(\frac{l}{2}) - k_1(\frac{l}{2}) = 0 \Longrightarrow k_{21} = \frac{l}{2}(k_2 - k_1)$



$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum_O M = 0 \longrightarrow -k_{22} + (\frac{l}{2})(\frac{l}{2})(k_1 + k_2)$

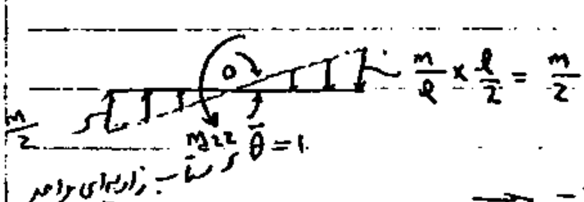
$\longrightarrow k_{22} = \frac{l^2}{4}(k_1 + k_2)$



$\sum F_y = 0 \longrightarrow m_{11} = \frac{m}{l} \times l = m$

$\longrightarrow m_{11} = m$

$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum_O M = 0 \longrightarrow m_{21} = 0$



$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum_O M = 0$

$\longrightarrow -m_{22} + \frac{m}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3} l \times \frac{1}{2}$

$\longrightarrow m_{22} = \frac{ml^2}{12}$

به جای منتقل بردار $\{P(t)\}$ به نقطه O آن را می‌پذیریم:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & \frac{l}{2}(k_2 - k_1) \\ \frac{l}{2}(k_2 - k_1) & \frac{l^2}{4}(k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{Bmatrix}$$

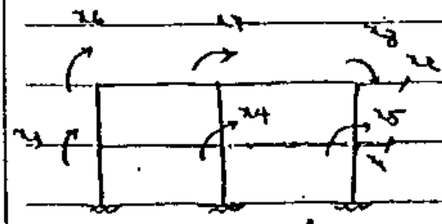
~~* معادلات هستند ، معادلات x و θ در هر دو معادلات وجود دارند کوپل~~

ماتریس جرمی بالا به سبب توزیع جرم ناشی می‌شود را ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix) می‌نامیم.

~~* شرط عدم وابستگی معادلات از حالت همبستگی این است که المان‌های قطری ماتریس سختی صفر باشد یعنی سختی دو فنر برابر باشند~~

nde

۲) مدل‌سازی سازه‌ها:



قاب مقابل را در نظر می‌گیریم:
این قاب را با 8 درجه می‌توان مدل‌سازی کرد:

سه درجه آزادی انتقالی و دورانی برای هر عضو.

درست است که تمام درجات آزادی (جابجایی‌ها) در ایجاد تنش‌ها موثرند. اما انتخاب درجات آزادی مناسب برای یک سازه، وابسته به تشخیص ما از اهمیت تاثیر آنها (درجات آزادی) بر تنش‌ها می‌باشد.

فرض کنید برای قاب فوق 8 درجه آزادی در نظر بگیریم. (اعضای قاب صلب نمی‌باشند).

۱) محاسبه‌ی [m] و [k] (با هشت درجه آزادی)

در سه روش بعدی فرض بر این است که دوران‌ها تاثیر چندانی بر ایجاد تنش‌ها ندارد. بدین منظور دوران‌ها را در قسمت‌های استاتیکی در نظر می‌گیریم ولی در قسمت مربوط به دینامیکی (انرژی دورانی)، صرف‌نظر می‌کنیم. جواب مدل‌سازی با هر سه روش یکسان خواهد شد.

فرض کنید x_1 و x_2 اهمیت اصلی را دارند و x_3 تا x_8 در دینامیک قابل صرف‌نظر کردن می‌باشند.

۲) دینامیک: $[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} \\ k_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ k_{81} & & & k_{88} \end{bmatrix}_{8\times8}$ و $[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}_{8\times8}$

۳) $m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$, $[k'] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$

K'_{ij}: نیروی لازم در نقطه‌ی i برای جابجایی واحد در نقطه‌ی j در حالی که سایر نقاط حرکت خود را دارند. K'_{ij} را سختی اصلاح شده می‌نامند.

البته در این قسمت درجات آزادی حذف شده، حرکت دارند ولی نقاط در نظر گرفته شده تغییر مکان ندارند.

ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی ماتریس سختی اصلاح شده، محاسبه ماتریس نرمی است. $[k']$ عکس ماتریس نرمی می‌باشد.

nde

$$m=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \underbrace{[k_{con}]_{2\times 2}}_{\text{ماتریس سختی متراکم}} = \cdots \qquad (4$$

در عمل، روش اول انجام نمی‌شود (مگر در بحث‌های تحقیقاتی) و معمولاً از سه روش دیگر (عمدتاً روش ④) استفاده قرار می‌گیرد.

5) در این روش تنها درجات آزادی‌ای را در نظر می‌گیریم که تأثیر بسزایی در ایجاد نیروی اینرسی دارند یعنی آن درجات آزادی‌ای که جرم یا ممان اینرسی آن بسیار کم باشد (مثل دوران‌ها)، را اصلاً در نظر نمی‌گیریم. شرط این حالت این است که مثلاً سقف‌ها کاملاً صلب باشند...

$$m=\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \qquad [k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

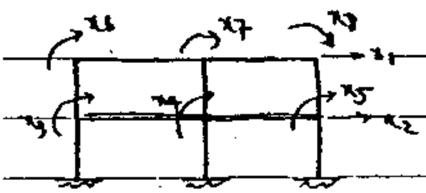
۱۴ از این به بعد MDOF ، پایان ترم دینامیک سازه ۲.

تمرینات ۶-۴ و ۶-۳ تحویل داده شود

دوشنبه ۸۴/۸/۲۳

Static ۳) تراکم استاتیکی

سازه‌ی مقابل را در نظر بگیریم:



R: Remain

O: Omit

$$m=\left[\begin{array}{cc|cccc} m_1 & & & 0 & & \\ & m_2 & & & & \\ \hline & & 0 & & & \\ & 0 & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{array}\right] \leftarrow m_R \qquad [k]=\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{k_{RR}}^{2\times 2} & k_{RO} \\ \hline k_{OR} & \underbrace{k_{OO}}_{6\times 6} \end{array}\right]_{8\times 8}$$

k_{ij}: سختی استاتیکی دارد.

با نوشتن معادلات حرکت، داریم:

$$\begin{bmatrix} m_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{R0} \\ K_{0R} & K_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_R(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_R \\ \ddot{x}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{R0} \\ K_{0R} & K_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_R \\ x_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_R(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای کنار گذاشتن درجات آزادی x_0، باید در طرف دوم تساوی، نیروی متناظر آنها صفر باشد. البته کنار گذاشتن این مقادیر در محاسبات دینامیکی است و نه استاتیکی.
یعنی اگر در یک المان گره‌ها را داشتیم، آن نیروها نیز احتمالاً در محاسبات دینامیکی وارد می‌گردد.

با انجام ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{cases} m_R \cdot \ddot{x}_R + K_{RR} \cdot x_R + K_{R0} \cdot x_0 = P_R(t) \\ K_{0R} \cdot x_R + K_{00} \cdot x_0 = 0 \longrightarrow x_0 = -K_{00}^{-1} K_{0R} x_R \end{cases}$$

با جایگذاری x_0 از معادله دوم در معادله اول داریم:

$$K_{R0} = K_{0R}^T$$

$$m_R \cdot \ddot{x}_R + K_{RR} \cdot x_R - K_{R0} K_{00}^{-1} K_{0R} x_R = P_R(t)$$

$$\longrightarrow \underbrace{m_R}_{2\times1} \ddot{x}_R + \underbrace{(K_{RR} - K_{0R}^T K_{00}^{-1} K_{0R})}_{2\times2 \;\; K_{con}} x_R = \underbrace{P_R(t)}_{2\times1}$$

ماتریس متراکم شده سختی

بنابراین معادلات دیفرانسیل حرکت به صورت زیر در می‌آید:

$$[m_R]\{\ddot{x}_R\} + [K_{con}]\{x_R\} = \{P_R(t)\}$$

به روش فوق، درجات آزادی x_3 تا x_8 در معادلات استاتیکی لحاظ شده‌اند ولی در دینامیک قرار داده نشده‌اند.

ماتریس سختی متراکم شده همان ماتریس سختی اصلاح شده می‌باشد.

حل مثال ۱

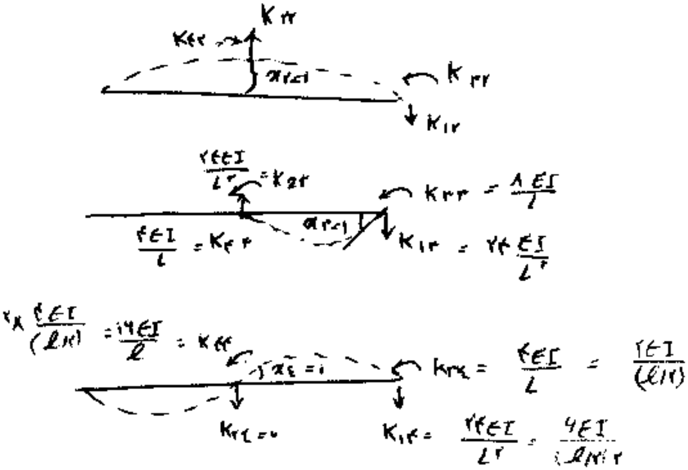
الف) با درنظر گرفتن چهار درجه آزادی :

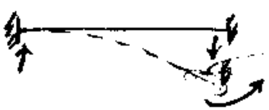
$$[m] = \begin{bmatrix} \frac{ml}{4} & & & \\ & \frac{ml}{2} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

• $x_2 = 1 \longrightarrow$

• $x_3 = 1 \longrightarrow$

• $x_4 = 1 \longrightarrow$





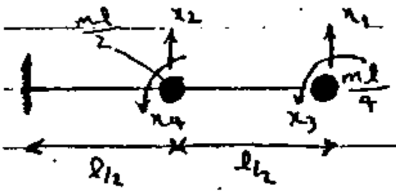
• برای تعیین جهت ممان پیچش : ممان ها لازم است تا شود → اگر گیردار بشود تمایل داشت اینگونه شود

ب) دو درجه آزادی (ماتریس نرمی اصلاح شده)

→ K : ماتریس نرمی $\xrightarrow{\text{معکوس}}$ K : سختی اصلاح شده

* ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی ماتریس سختی اصلاح شده (غیر از روش ماتریس تراکم)، یافتن ماتریس نرمی است که عناصر آن تغییر مکان‌هایی باشند. ماتریس سختی اصلاح شده، عکس ماتریس نرمی است.

مثال:



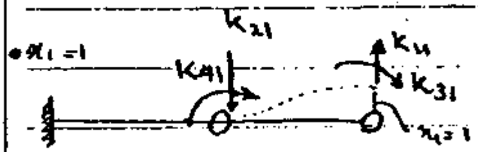
معادلات حرکت را برای درجات آزادی x_1 و x_2 با تراکم کردن ماتریس سختی (4×4) بنویسید.

$$[m]=\begin{bmatrix} \frac{ml}{4} & 0 \\ 0 & \frac{ml}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1=1 & x_2=1 & & \end{array} \\ [k]=\left[\begin{array}{cc|cc} 12 & -12 & -3l & -3l \\ -12 & 24 & 3l & 0 \\ \hline -3l & 3l & l^2 & \frac{l^2}{2} \\ -3l & 0 & \frac{l^2}{2} & 2l^2 \end{array}\right]\times\frac{8EI}{l^3} \\ \begin{array}{cccc} & & x_3=1 & x_4=1 \end{array} \end{array}$$

k_{RR} ، k_{RO} ، k_{OR} ، k_{OO}

$\pm\frac{4EI}{l^3}$ در وسط ایجاد می‌شود که علامتش را اضافی می‌کنند



برای یافتن هر یک از عناصر ماتریس $[k]$ را بدست می‌آوریم:

k_{11}: نیروی لازم در امتداد x_1، جهت جابجایی واحد در امتداد x_1، وقتی سایر درجات آزادی ثابت باشند.

$$k_{11}=\frac{12EI}{(l/2)^3} \qquad k_{21}=\frac{12EI}{(l/2)^3} \qquad k_{31}=\frac{6EI}{(l/2)^2} \qquad k_{41}=\frac{6EI}{(l/2)^2}$$

نیرو در امتداد ۳ وقتی جابجایی در امتداد ۱

جهت مثبت در جهت درجات آزادی می‌باشد.

ج) روش ماتریس تراکم:

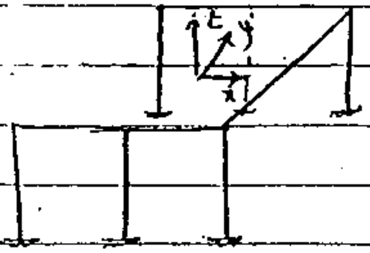
$$k_{con}=k_{RR}-k_{OR}^{T}\cdot k_{OO}^{-1}k_{OR} \longrightarrow k_{con}=\frac{48EI}{7l^2}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}$$

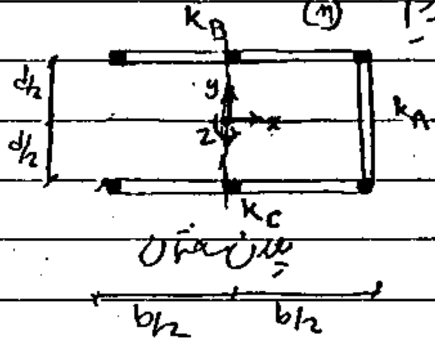
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{ml}{4} & 0 \\ 0 & \frac{ml}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{con} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

۴) بررسی ارتعاش سازه یک طبقه با سه درجه آزادی Δx، Δy و θ_z (دو حرکت جانبی و یک حرکت پیچشی) حول محور قائم در صفحه افقی سازه (z):

نیروی اینرسی، نیروی اینرسی است که در جرم سازه اثر می‌کند. حال اگر مرکز سختی و مرکز جرم بر هم منطبق نباشند، سازه حول مرکز سختی تمایل به دوران دارد. در ساختمان‌هایی که عدم تقارن زیاد دارند، این درجه آزادی نیز ممکن است اثر زیادی بر آن موثر باشد.

قاب یک طبقه زیر را در نظر می‌گیریم: (٩)

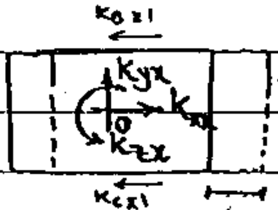




پلان ساختمان

تحت اثر زلزله: $\ddot{x}_{gx}, \ddot{y}_{gy}, \ddot{\theta}_z$

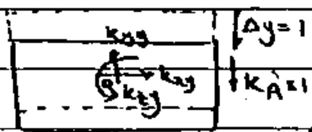
• تشکیل ماتریس سختی:



$k_{xx}=k_B+k_C \qquad k_{yx}=0$

$$\sum_o M=0 \longrightarrow -k_{zx}+k_C\left(\frac{d}{2}\right)-k_B\left(\frac{d}{2}\right)=0$$

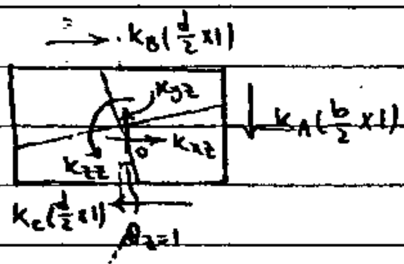
$$\longrightarrow k_{zx}=\frac{d}{2}(k_C-k_B)$$



$k_{yy}=k_A \qquad k_{xy}=0$

$$\sum_o M=0 \longrightarrow -k_{zy}+\frac{b}{2}k_A=0 \longrightarrow \boxed{k_{zy}=\frac{b}{2}k_A}$$

تنها k_{zz} نیاز به تعیین است چون $k_{xz}=k_{zx}$, $k_{yz}=k_{zy}$



$$\sum_o M=0 \longrightarrow -k_{zz}+k_C\left(\frac{d}{2}\right)^2+k_B\left(\frac{d}{2}\right)^2+k_A\left(\frac{b}{2}\right)^2=0$$

$$\longrightarrow k_{zz}=\frac{d^2}{4}(k_B+k_C)+\frac{b^2}{4}k_A$$

$$\longrightarrow [k]=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_B+k_C & 0 & (k_C-k_B)\frac{d}{2} \\ 0 & k_A & k_A\cdot\frac{b}{2} \\ (k_C-k_B)\frac{d}{2} & k_A\frac{b}{2} & (k_B+k_C)\frac{d^2}{4}+k_A\frac{b^2}{4}\end{bmatrix}$$

$$[m]=\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & \frac{m(b^2+d^2)}{12}\end{bmatrix} \qquad [P(t)]=-\begin{Bmatrix} m\ddot{x}_{gx} \\ m\ddot{x}_{gy} \\ I_{mo}\ddot{\theta}_z\end{Bmatrix}$$

I_{mo} برای شکل مستطیل

معادله دیفرانسیل کلی: $[m]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=-\{P(t)\}$

در این حالت ۲ درجه ...

nde

حالت خاص I) $k_B=k_C=k$:

ماتریس سختی به صورت زیر در می‌آید:

$$[k]=\begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & k_A & k_A\cdot\frac{b}{2} \\ 0 & k_A\cdot\frac{b}{2} & k\frac{d^2}{2}+k_A\frac{b^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$m\ddot{x}+kx=P_1(t)$$

بنابراین می‌توان گفت معادله حرکت در راستای x مستقل از دو امتداد دیگر می‌شود. و این اثر تقارن است:

معادله دیفرانسیل حرکت در امتداد x:

$$m\ddot{u}_x+2k_x u_x=-m\ddot{u}_g(x)$$

یعنی اگر سازه نسبت به امتداد خاصی متقارن باشد، معادله حرکت در آن امتداد مستقل از درجات آزادی دیگر خواهد بود.

حالت خاص II) k_A را در وسط پلان قرار دهیم یعنی سختی در دو امتداد متقارن باشد ($b=0$)

در این حالت ماتریس سختی قطری می‌شود. (یعنی از سه درجه آزادی، دو درجه را مستقل نموده‌ایم، سومی خود به خود مستقل می‌شود). قرار دادن k_A در وسط مانند متقارن نمودن سازه نسبت به محور x است؛

در این حالت در هر امتداد SDOF داریم و سه معادله مستقل از هم بدست می‌آید.

دو حالت فوق اثر تقارن سازه‌ها را نشان می‌دهد که بسیار مهم می‌باشد.

۸۴/۸/۲۵ چهارشنبه

X) معادلات حرکت MDOF:

۱) معادلات حرکت قاب‌های برشی بدون میرایی.

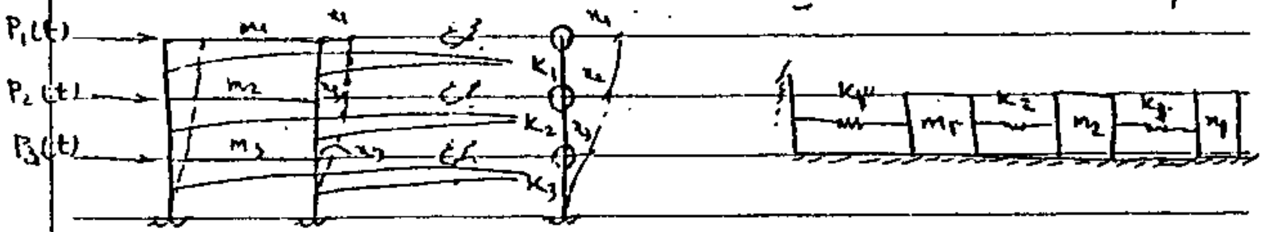
قاب‌های برشی قاب‌هایی هستند که دارای دو فرض اساسی زیر می‌باشند:

۱- سختی طبقه نسبت به سختی ستون‌ها زیاد باشد. (دیافراگم صلب): دال‌های بتنی، ترکیب بتن و فولاد و حتی تا حدی سقف‌های تیرچه بلوک.

۲- عمده وزن (جرم) سازه در محل طبقات متمرکز باشد.

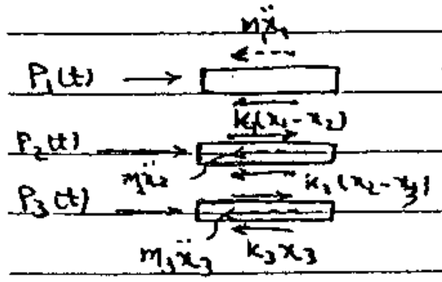
بر اساس فرضیات فوق می‌توان جرم قاب را به صورت جرم‌های متمرکز در محل طبقات مدل کرد.

برای قاب برشی اگر تنها درجات آزادی انتقالی جانبی را در نظر گرفته شود، مدل‌سازی مناسبی خواهد بود یعنی می‌توانیم در اینجا میله‌ها از تغییر طول محوری صرف‌نظر کنیم.



با در نظر گرفتن درجات آزادی دیگر، ماهیت مسئله تفاوتی نمی‌کند تنها حجم محاسبات تغییر می‌کند.

سپس نمودار آزاد پس از یک تغییر در سازه را رسم می‌نماییم:



اکنون برای دستیابی به معادلات دیفرانسیل حرکت، اقدام به نوشتن معادلات تعادل می‌نماییم.

$$\sum F_x=0 \longrightarrow m_1\ddot{x}_1+k_1(x_1-x_2)=P_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_3)-k_1(x_1-x_2)=P_2(t)$$

$$m_3\ddot{x}_3+k_3x_3-k_2(x_2-x_3)=P_3(t)$$

به علت وجود مجهولات مشترک در معادلات، مشخص است که معادلات همبسته می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0\\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2\\ 0 & -k_2 & k_2+k_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1(t)\\ P_2(t)\\ P_3(t)\end{Bmatrix}$$

$$\longrightarrow [m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{P(t)\}$$

ماتریس سختی با تعریف k_{ij}، مشابه بخش II.

* ماتریس سختی همواره متقارن است.

X-1-1) حرکت آزاد قاب برشی ـ بدون میرایی ($\{P(t)\}=\{0\}$):

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

جواب معادلات فوق، با کمک از ریاضیات، به صورت مقابل می‌باشد: $\{x\}=\{a\}\sin(\omega t+\theta)$

باید مشخص شوند، مقادیر ثابت که باید مشخص شود

nde

اگر برای نتیجه رسیدیم که $\{a\}$ ها و ω ها و θ ها مقادیری به معادله صدق می‌کنند یعنی آنها مقادیری جواب می‌باشند، ریاضی می‌گوید جمع آنها جواب می‌باشد. $\{a\}_i \sin(\omega_i t+\theta_i)$

$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$: بردار دامنه لرزش

با جایگذاری جواب کلی در معادله دیفرانسیل حرکت داریم:

$$-\omega^2 [m]\{a\} \sin(\omega t+\theta) + [k]\{a\}\sin(\omega t+\theta) = \{0\}$$

$$\xrightarrow{\text{با حذف سینوس}} \big[[k]-\omega^2[m]\big]\{a\} = \{0\} \longrightarrow \big|[k]-\omega^2[m]\big| = 0$$

برای غیر صفر بدست آمدن بردار $\{a\}$، اینگونه عمل می‌کنیم:

برای غیر صفر بودن ماتریس بردار $\{a\}$، بایستی دترمینان $\big[[k]-\omega^2[m]\big]$ صفر باشد. البته صفر بودن دترمینان، موجب وابسته شدن a_i ها (عناصر بردار $\{a\}$) می‌شود. بدین حالت با انتساب دلخواه یکی از a_i ها، بقیه عناصر را بدست می‌آوریم:

جواب‌های بدست آمده از روش فوق بهم وابسته می‌باشند. (بردارهای $\{a\}$ مختلف هم وابسته‌اند).

برای ω های مختلف، $\{a\}$ های مختلفی بدست می‌آید.

ω فرکانس‌های ارتعاش می‌باشند. $\omega^2=\lambda$

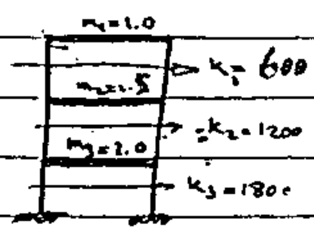
تعداد فرکانس‌ها (ω ها) به تعداد درجات آزادی میل می‌باشند.

تذکر: $\big[[k]-\omega^2[m]\big]\{a\} = \{0\}$

$$\longrightarrow \Big[\underbrace{[m]^{-1}[k]}_{[A]} - \lambda[I]\Big]\{a\} = \{0\} \longrightarrow [A]\{a\} = \lambda\{a\}$$

براساس رابطه‌ی آخر بدست آمده مشاهده می‌شود که λ ها مقادیر ویژه‌ی ماتریس $[A]$ ($[A]=[m]^{-1}[k]$) می‌باشند.

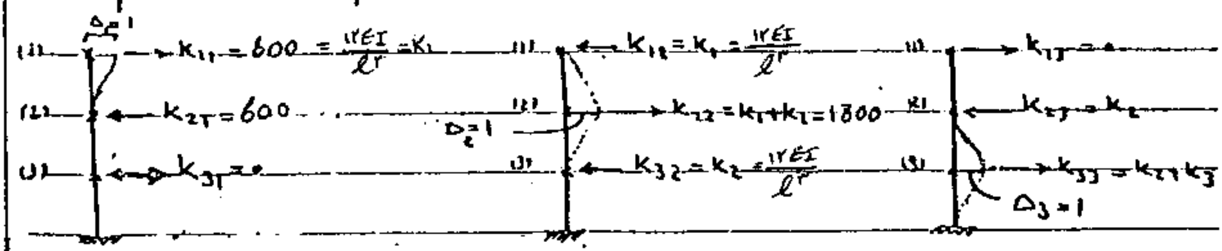
بهمین ترتیب، بردار $\{a\}$ نیز بردار ویژه‌ی ماتریس $[A]$ خواهد بود.



مثال: قاب برشی سه طبقه‌ی مقابل را در نظر بگیرید. مقادیر فرکانس‌ها را بیابید. (واحدها در سیستم SI می‌باشند)

$\{\omega\} = ?$

$\Delta = \left| [k] - \omega^2 [m] \right| = 0$



$$\longrightarrow [k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| [k] - \omega^2 [m] \right| = \begin{vmatrix} 600-\omega^2 & -600 & 0 \\ -600 & 1800-1.5\omega^2 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000-2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\omega^2}{600} = \lambda \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \lambda^3 - 5.5\lambda^2 + \underbrace{7.5}_{=\frac{22.5}{3}}\lambda - 2 = 0$$

Ascending

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.35 \xrightarrow{\text{متناظر است}} \omega_1 = 14.5 \\ \lambda_2 = 1.61 \longrightarrow \omega_2 = 31.1 \\ \lambda_3 = 3.5 \longrightarrow \omega_3 = 46.1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{Bmatrix} (rad/s)$$

به کوچکترین فرکانس، فرکانس اصلی گفته می‌شود که اغلب بیشترین نقش را دارد.

2) ماتریس شکل حالت ارتعاش یا ماتریس مودال ($\{\Phi\}$) . Modal Shape Matrix

$$\left[[k] - \omega^2 [m] \right] \{q\} = \{0\}$$

اگر به معادله فوق، $\omega = \omega_1$ قرار دهیم، یک بردار $\{q\}_1$ بدست می‌آید که عناصر آن به هم وابسته‌اند. بدین ترتیب $\omega = \omega_2$، بردار $\{q\}_2$ و ... را بدست می‌دهد.
لذا بنا به جای $\{q\}_i$ از $\{\Phi\}_i$ استفاده می‌کنیم.

$$\{\Phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{in} \end{Bmatrix}$$

یعنی به ازای i امین مود یا فرکانس

$$\{\phi\}_1=\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \vdots\\ \phi_{1n}\end{Bmatrix}, \quad \{\phi\}_2=\begin{Bmatrix}\phi_{21}\\ \phi_{22}\\ \vdots\\ \phi_{2n}\end{Bmatrix}, \quad \dots, \quad \{\phi\}_n=\begin{Bmatrix}\phi_{n1}\\ \phi_{n2}\\ \vdots\\ \phi_{nn}\end{Bmatrix}$$

$\{\phi\}_i$ را بردار شکل ارتعاش یا بردار مودال می نامیم. این بردار شکل ارتعاش را برای ما مشخص می کند چرا که با داشتن $\{\phi\}_i$ با ضرب بردار ϕ، مقادیر جابجایی درجات آزادی بدست می آیند. (در لحظه ی $t=t_i$) بنابراین شکل سازه در لحظه ی $t=t_i$ بدست می آید (به ازای $\omega=\omega_i$).

$\{\phi\}_i$ که نظیر ω_i می باشد را شکل ارتعاش مود i ام می نامیم.

$$[\phi]=\begin{bmatrix}\overset{\omega=\omega_1}{\{\phi\}_1} & \overset{\omega=\omega_2}{\{\phi\}_2} & \overset{\omega=\omega_3}{\{\phi\}_3} & \cdots & \overset{\omega=\omega_n}{\{\phi\}_n}\end{bmatrix}$$

ماتریس شکل حالت های ارتعاش (ماتریس مودال)

ماتریس مودال از کنار هم چیدن بردارهای $\{\phi\}_i$ که متناظر ω_i می باشند، حاصل می شود.

جواب نهایی به صورت زیر می باشد:

$$\{x\}=A_1\{\phi\}_1\sin(\omega_1t+\theta_1)+A_2\{\phi\}_2\sin(\omega_2t+\theta_2)+A_3\{\phi\}_3\sin(\omega_3t+\theta_3)+\cdots$$

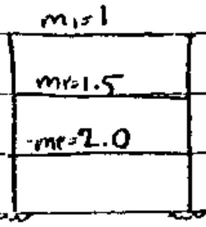
از آنجا که ϕ_{ij} ها منحصر به فرد نیستند و جابجایی سازه منحصر به فرد است، پس ضرایب A_i در معادلات فوق ظاهر می شوند و تا این عیب را جبران کنند.

طبیعی است که جواب تابع شرایط اولیه می باشد. بنابراین A_i و θ_i ها وابسته به شرایط اولیه می باشند. این شرایط اولیه، جابجایی و سرعت هر یک از درجات آزادی در $t=0$ می باشد. پس برای n درجه آزادی $2n$ شرط اولیه داریم که $2n$ مجهول (A_i و θ_i) با استفاده از معادلات وابسته به شرایط اولیه بدست می آیند:

$$t=0:\begin{cases}x_1(t)=\checkmark \longrightarrow \dot{x}_1(t)=\checkmark\\ x_2(t)=\checkmark \longrightarrow \dot{x}_2(t)=\checkmark\\ \vdots\end{cases}$$

$\vdots$

دوشنبه ۳۰/۸/۸۴



مثال: $\omega_1=14.5$ $\omega_2=31.1$ $\omega_3=46.1$

$\lambda_1=0.351$ $\lambda_2=1.61$ $\lambda_3=3.54$

شکل مودها را رسم کنید. $[\Phi]=?$ جواب = ?

در جلسه قبل دیدیم که جواب معادله دیفرانسیل حرکت ارتعاش آزاد $[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$ به صورت $\{x\}=\{a\}\sin(\omega t+\theta)$ است.

سپس به این نتیجه رسیدیم که:

$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]\{a\}=\{0\} \longrightarrow \left|[k]-\omega^2[m]\right|=0$$

در اینجا فرض کردیم که به تعداد درجات آزادی، فرکانس داریم و برای هر فرکانس یک بردار ویژه $\{\Phi\}_i$. $[\Phi]$ از کنار هم چیدن بردارهای $\{\Phi\}_i$ تشکیل می‌شود.

در جلسه قبل ماتریس سختی و ماتریس جرم را برای قاب فوق تشکیل داده‌ایم.

- $\lambda=0.351$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-0.351 & -1 & 0\\ -1 & 3-0.351(1.5) & -2\\ 0 & -2 & 5-0.351(2)\end{vmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}0.649a_1-a_2=0\\ -a_1+2.474a_2-2a_3=0\\ -2a_2+4.298a_3=0\end{cases}$$

از آنجا که سه معادله فوق مستقل نیستند، برای رسیدن به جواب، $a_1=1$ قرار داده و a_2 و a_3 را حساب می‌کنیم.

$a_1=1 \longrightarrow a_2=0.649$ و $a_3=0.300$

$$\rightarrow \{\Phi\}_1=\begin{Bmatrix}1\\0.649\\0.300\end{Bmatrix}$$

- $\lambda_2=1.61$ - $\lambda_3=3.5$

$\rightarrow \omega=\omega_2=31.1 \rightarrow \{\Phi\}_2=\begin{Bmatrix}1\\-0.601\\-0.676\end{Bmatrix}$ $\rightarrow \omega=\omega_3=46.1 \rightarrow \{\Phi\}_3=\begin{Bmatrix}1\\-2.57\\2.47\end{Bmatrix}$

$$[\Phi] = \begin{array}{ccc} \{\Phi\}_1 & \{\Phi\}_2 & \{\Phi\}_3 \end{array}$$

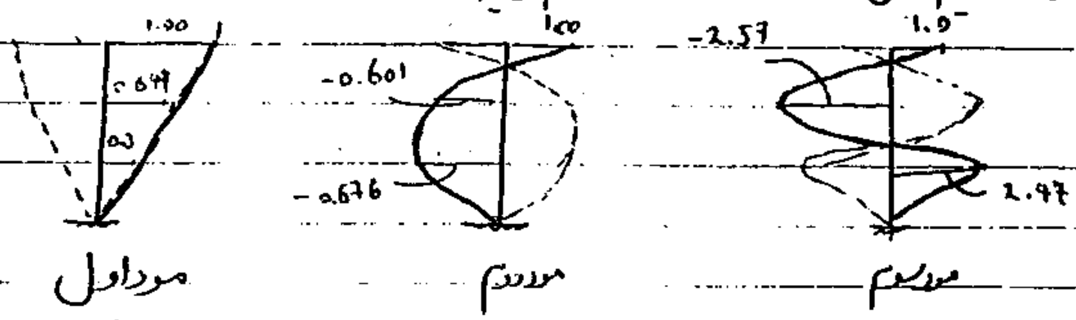
$$\rightarrow [\Phi] = \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.699 \\ 0.300 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{Bmatrix} \right]$$

$$\rightarrow \{x\} = A_1 \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.699 \\ 0.300 \end{Bmatrix} \sin(14.5t+\theta_1) + A_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{Bmatrix} \sin(31.1t+\theta_2)$$

$$+ A_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{Bmatrix} \sin(46.1t+\theta_3)$$

A_i و θ_i ها با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آیند + نتیجه می‌شود که تمام مدهای ارتعاشی در جواب مؤثرند.

حال می‌خواهیم شکل سازه در مودهای مختلف را رسم نماییم:



یعنی با در نظر گرفتن هر یک از مودها، شکل سازه به صورت فوق می‌شود. ولی در حقیقت جواب ترکیبی از سه مود فوق می‌باشد.

مودی که بیشترین تأثیر را روی جواب، به دیگر روی شکل ها دارد، فرکانس مربوط به آن فرکانس غالب است.

در سازه‌های متعارف عموماً مود اول غالب است.

در مورد سازه‌های نامتعارف ممکن است هر یک از مودها غالب باشند.

رسم براین است که مود اول را مود وابسته به کوچکترین ω می‌نامند. می‌توان نشان داد که انرژی ذخیره شده در مود حاکم، کمترین است.

توجه کنید در حل معادلات دیفرانسیل از ظاهر این معادلات استفاده نکردیم. اما از طرف دیگر ساده‌ترین شکل مود ما ثابت است. (یعنی در یک مود خطی هستیم).

۱۳ شرایط تعامد:

قطری کردن ماتریس های جرم و سختی:

اگر رفتار سازه خطی باشد، می توانیم معادلات نهایی را به معادلاتی با یک مجهول در هر معادله، تبدیل کنیم مخصوصاً این غیر قطری بودن ماتریس سختی است که منجر به همبسته بودن معادلات ما می شود. بنابراین با قطری کردن ماتریس های سختی و جرم، معادلات ما غیر همبسته می شوند.

اکنون به دنبال قطری کردن این ماتریس ها هستیم:

$$\begin{cases} \{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_m = 0 & , n \neq m \\ \{\phi\}_n^T [K] \{\phi\}_m = 0 & , n \neq m \end{cases} \Rightarrow \text{شرایط تعامد}$$

به دنبال این هستیم که روابط فوق را اثبات کنیم،

$$\left[[k] - \omega^2 [m] \right] \{\phi\} = \{0\}$$

$$\longrightarrow [k]\{\phi\} = \omega^2 [m] \{\phi\}$$

رابطه ی فوق را یکبار برای مود n ام و یکبار برای مود m ام می نویسیم:

$$\begin{cases} [k]\{\phi\}_n = \omega_n^2 [m] \{\phi\}_n & \text{(I)} \quad \text{مود } n \\ [k]\{\phi\}_m = \omega_m^2 [m] \{\phi\}_m & \text{(II)} \quad \text{مود } m \end{cases}$$

طرفین رابطه ی I را در $\{\phi\}_m^T$ ضرب می کنیم. داریم:

$$\{\phi\}_m^T [k] \{\phi\}_n = \omega_n^2 \{\phi\}_m^T [m] \{\phi\}_n$$

$$\xrightarrow{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T} \{\phi\}_n^T [k] \{\phi\}_m = \omega_n^2 \{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_m \quad (*)$$

همچنین طرفین رابطه ی II را در $\{\phi\}_n^T$ ضرب می کنیم:

$$\{\phi\}_n^T [k] \{\phi\}_m = \omega_m^2 [m] \{\phi\}_m \cdot \{\phi\}_n^T$$

$$\longrightarrow \{\phi\}_n^T [k] \{\phi\}_m = \omega_m^2 \{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_m \quad (**)$$

$$\rightarrow (\omega_n^2 - \omega_m^2)\{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_m = 0$$

یعنی اگر $m \neq n$ آنگاه $\omega_n \neq \omega_m$ پس باید: $\{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_m = 0$

و رابطهٔ مورد نظر اثبات شده است.

$$[M] = [\Phi]^T [m] [\Phi] \quad , \quad [\Phi]^T [k] [\Phi] = [K]$$

می‌خواهیم ماتریس $[M]$ و $[K]$ را حساب کنیم:

$$[M] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T \\ \{\phi\}_2^T \\ \vdots \\ \{\phi\}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & m & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \cdots & \{\phi\}_n \end{bmatrix}$$

یعنی ماتریس قطری است.

$$= \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \{\phi\}_2^T [m] \{\phi\}_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ & & & \{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_n \end{bmatrix} \rightarrow [M] = \left[\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i \right] = [M_i]$$

منظور این است که در این ماتریس $[M]$ به غیر از قطر اصلی، ماتریس قطری است و به آن ماتریس قطری جرم گویند.

بهمین ترتیب ماتریس $[K]$ نیز قطری می‌شود.

$$[K] = \left[\omega_i^2 \{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i \right]$$

$[K]$ را ماتریس قطری کشتی یا ماتریس کشتی قطری شده می‌نامیم.

$$[K] = \omega_i^2 [M]$$

$$[M] = [M_i] \quad , \quad M_i = \{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i$$

$$[K] = [K_i] \quad , \quad K_i = \omega_i^2 \{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i$$

۱۵) نرمال کردن ماتریس مودال:

M_i ماتریس با ترتیب فوق می‌باشد.

$$\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} \xrightarrow[\sqrt{M_i}]{\text{تقسیم بر}} \{\hat{\phi}\}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\phi_{1i}}{\sqrt{M_i}} \\ \frac{\phi_{2i}}{\sqrt{M_i}} \\ \vdots \\ \frac{\phi_{ni}}{\sqrt{M_i}} \end{Bmatrix}$$

بردار نرمال مودال

چون مقادیر وابسته و متکرری هستند، ما مستقیماً حساب کرده‌ایم که آنها را به این تقسیم هستیم.

$$[\bar{\Phi}] = \left[\{\bar{\Phi}\}_1 \ \{\bar{\Phi}\}_2 \ \cdots \ \{\bar{\Phi}\}_n\right]$$

حال اگر ماتریس $[M]$ را به صورت زیر تعریف نماییم:

$$[\bar{M}] = [\bar{\Phi}]^T [m] [\bar{\Phi}]$$

$$\longrightarrow [\bar{M}]_i = \left\lceil \{\bar{\Phi}\}_i^T [m] \{\bar{\Phi}\}_i \right\rfloor = \left\lceil \frac{\{\Phi\}_i^T}{\sqrt{M_i}} [m] \frac{\{\Phi\}_i}{\sqrt{M_i}} \right\rfloor$$

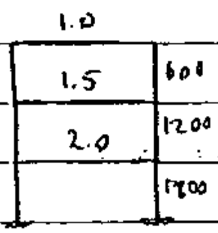
$$\longrightarrow [\bar{M}]_i = \lceil 1 \rfloor = [I]$$

همین ترتیب داریم:

$$[\bar{K}] = \lceil \omega_i^2 \rfloor$$

اینها ابزاری برای جدا کردن معادلات حرکت می‌باشند.

مثال:



$$m = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{Bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.4 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix}, \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.649 & -0.601 & -2.57 \\ 0.3 & -0.676 & 2.47 \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمال مودال:

$$[\bar{\Phi}] = \begin{bmatrix} 1.0/\sqrt{1.801} & 1.0/\sqrt{2.455} & 1.0/\sqrt{23.1} \\ 0.649/\sqrt{1.801} & -0.601/\sqrt{2.455} & -2.57/\sqrt{23.1} \\ \frac{0.300}{\sqrt{1.801}} & \frac{-0.672}{\sqrt{2.455}} & \frac{2.47}{\sqrt{23.1}} \end{bmatrix}$$

$$[M] = [\Phi]^T [m] [\Phi] = \begin{bmatrix} \underset{M_1}{1.801} & & \\ & \underset{M_2}{2.455} & \\ & & \underset{M_3}{23.10} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow [\bar{\Phi}] = \begin{bmatrix} 0.745 & 0.638 & 0.208 \\ 0.480 & -0.384 & -0.535 \\ 0.223 & -0.432 & 0.514 \end{bmatrix}$$

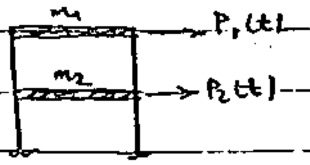
ثابت کنید:

$$[\bar{M}] = [\bar{\Phi}]^T [m] [\bar{\Phi}] = [I], \qquad [\bar{K}] = \omega^2 [\bar{\Phi}]^T [k] [\bar{\Phi}] = \lceil \omega_i^2 \rfloor$$

XI) حرکت اجباری MDOF قابهای برشی (بدون میرایی):

1) منفرد کردن معادلات دیفرانسیل حرکت: Uncoupled Dif. equ. of Motion:

معادله دیفرانسیل حرکت بصورت زیر است:



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = P_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 = P_2(t) \end{cases}$$

در هر یک از معادلات فوق ممکن است بیش از یک متغیر وجود داشته باشد. برای جدا کردن آنها و داشتن یک متغیر در هر معادله باید چنین عمل می‌کنیم که مختصات تعمیم یافته را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{x\} = [\Phi]\{\underbrace{Y}_{\text{مختصات تعمیم یافته}}\}$$

$$\Longrightarrow [m][\Phi]\{\ddot{Y}\} + [k][\Phi]\{Y\} = \{P(t)\}$$

طرفین را در $[\Phi]^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{[\Phi]^T[m][\Phi]}_{[M]}\{\ddot{Y}\} + \underbrace{[\Phi]^T[k][\Phi]}_{[K]}\{Y\} = \underbrace{[\Phi]^T\{P(t)\}}_{\{P(t)\}}$$

$$\Longrightarrow [M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{P(t)\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} M_1 \ddot{Y}_1 + K_1 Y_1 = P_1(t) \\ M_2 \ddot{Y}_2 + K_2 Y_2 = P_2(t) \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \end{cases}$$

یعنی با استفاده از خاصیت تعامد مودها، معادلات همبستگی MDOF را به چند معادله مستقل تبدیل نمودیم که در هر یک از آنها تنها یک متغیر وجود دارد.

بنابراین هر معادله مانند یک SDOF است. که می‌توان آن را از طریق انتگرال دوهامل حل کرد و Y را بدست آورد.

nde

و با استفاده از ۲، {Y} به {X} می رسیم.

روش فوق را روش آنالیز مودال می نامیم.

اگر چه کاری برای هر لحظه را بدست آوردیم، روش تاریخچه زمانی را اصل گرفته ام. در روش طیفی ما تغییرات را در هر لحظه ما نمی دانیم بلکه ماکزیمم تغییرمکان را فقط می دانیم (که البته برای طراحی نیز کافی است)

در حقیقت روش این جلسه ی ما روش تاریخچه زمانی مودال می باشد.

$$\ddot{Y}_1 + \omega_1^2 Y_1 = \frac{P_1(t)}{M_1}$$
$$\ddot{Y}_2 + \omega_2^2 Y_2 = \frac{P_2(t)}{M_2}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

مشاهده می شود که در معادله ی اول، مود اول (ω_1)

و در معادله ی دوم، مود دوم (ω_2) و ... دخالت دارند.

اگر به جای $[\Phi]$ از $[\bar{\Phi}]$ استفاده می کردیم، داشتیم:

$$\underbrace{[\bar{\Phi}]^T[m][\bar{\Phi}]}_{[\bar{M}]}\{\ddot{Y}\} + \underbrace{[\bar{\Phi}]^T[K][\bar{\Phi}]}_{[\bar{K}]}\{Y\} = \underbrace{[\bar{\Phi}]^T\{P(t)\}}_{\{\bar{P}(t)\}}$$

$\{\bar{P}(t)\}$ را نیروی خارجی در مختصات تعمیم یافته گوئیم.

مختصات تعمیم یافته با استفاده از تک تک مودها، باعث جداسازی معادلات همبسته می شود. جواب هر معادله، جواب مسئله بدون درنظر گرفتن مودهای دیگر است.

nde

دوشنبه ۸۴/۹/۲۱

مثال:

$$[m] = \begin{bmatrix} 1.0 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2.0 \end{bmatrix} \qquad k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times 600$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.745 & 0.638 & 0.208 \\ 0.480 & -0.384 & -0.535 \\ 0.223 & -0.432 & 0.514 \end{bmatrix} \qquad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 14.1 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{Bmatrix}$$

$$\{x(0)\} = \begin{Bmatrix} x_1(0) = 0.5 \\ x_2(0) = 0.4 \\ x_3(0) = 0.3 \end{Bmatrix} \qquad \{\dot{x}(0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 9 \\ \dot{x}_3(0) = 0 \end{Bmatrix}$$

در معادلات حرکت با جایگزینی $\{x\} = [\Phi]\{Y\}$ در رابطه $[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\}$ و ضرب طرفین رابطه به $[\Phi]^T$ به ماتریس‌های قطری $[M]$ و $[K]$ به صورت زیر می‌رسیم:

$$[K] = [\Phi]^T[k][\Phi] \qquad [M] = [\Phi]^T[m][\Phi]$$

$\{Y(t)\}$ مختصات تعمیم‌یافته است که به صورت معادلات مستقل از هم به دست می‌آیند.

$$M_i \ddot{Y}_i + K_i Y_i = 0 \longrightarrow \ddot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = 0$$

و جواب:

$$Y_i(t) = \frac{\dot{Y}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + Y_i(0) \cdot \cos \omega_i t$$

اما می‌دانیم که Y_i را نداریم، می‌خواهیم بر حسب شرایط اولیه x_i است. برای این منظور می‌توانیم طرفین رابطه $\{x\} = [\Phi]\{Y(t)\}$ را در $[\Phi]^T[m]$ ضرب کنیم:

$$\underbrace{[\Phi]^T[m]\{x\} = [\Phi]^T[m][\Phi]}\{Y(t)\}$$

اگر $[\Phi]$ نرمال شده باشد این قسمت واحد خواهد بود.

$$\{Y(t)\} = [\Phi]^T[m]\{x\}\,\underbrace{\cancel{[M]}^{-1}}_{=1}$$

می‌پردازیم به عملیات فوق برای این مثال خواهیم داشت:

$$\{Y(0)\} = \begin{Bmatrix} 0.494 \\ -0.171 \\ 0.091 \end{Bmatrix} \qquad \dot{Y}(0) = \begin{Bmatrix} 6.48 \\ -5.188 \\ -7.227 \end{Bmatrix}$$

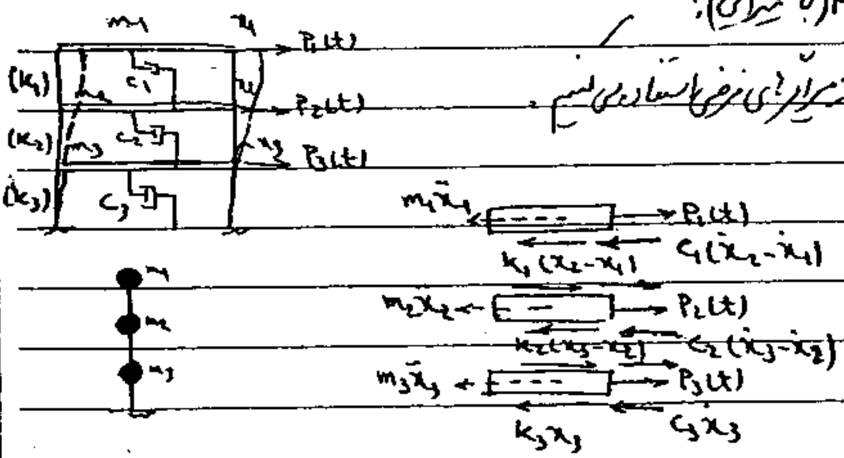
$$\Rightarrow \{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{6.98}{14.5}\sin 14.5t + 0.794\cos 14.5t \\ + -0.171\cos 31.1t \\ + 0.091\cos 46.1t \end{Bmatrix}$$

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{6.98}{14.5}\sin 14.5t \\ \frac{-5.186}{31.1}\sin 31.1t \\ \frac{-7.223}{46.1}\sin 46.1t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.794\cos 14.5t \\ -0.171\cos 31.1t \\ 0.091\cos 46.1t \end{Bmatrix} \times A$$

$$\{x\} = [\Phi]\{y\}$$

۷) حرکت قاب‌های برشی MDOF (با میرایی):

برای در نظر گرفتن میرایی ذاتی سازه. از میرایی فرضی استفاده می‌کنیم.



$$\sum F_x = 0 \longrightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_2-x_1) + c_1(\dot{x}_2-\dot{x}_1) = P_1(t)$$

$$-c_1(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2-x_1) + k_2(x_3-x_2) + c_2(\dot{x}_3-\dot{x}_2) - k_1(x_2-x_1) = P_2(t)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 + c_3\dot{x}_3 - k_2(x_3-x_2) - c_2(\dot{x}_3-\dot{x}_2) = P_3(t)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که ماتریس میرایی به شباهت بسیاری به ماتریس سختی دارد
وجود ماتریس میرایی تفاوت این حالت با حالت قبل است.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\}$$

با در نظر گرفتن $\{x\}=[\Phi]\{Y\}$ و ضرب کردن معادله فوق در $[\Phi]^T$ می‌توان نوشت:

$$\underbrace{[\Phi]^T[m][\Phi]}_{[M]}\{\ddot{Y}\} + \underbrace{[\Phi]^T[c][\Phi]}_{[C]}\{\dot{Y}\} + \underbrace{[\Phi]^T[k][\Phi]}_{[K]} = \underbrace{\{P(t)\}}_{[\Phi]^T\{P(t)\}}$$

می‌توان برای حل مسأله فرض کرد که میرایی به جرم و سختی نیز با رابطه‌ای خطی برقرار است. این فرض چندان دور از واقعیت نیست و از آزمایشات نیز حاصل می‌شود که شرط صحت رابطه با همین فرض است.)

$[c]=\alpha[M]+\beta[K]$ در نظر گرفتن میرایی به صورت ترکیب خطی از جرم و سختی را میرایی کلاسیک می‌گویند.

فرض میرایی کلاسیک را برای حل مسأله به صورت مودال انجام می‌دهیم. $=[\Phi]^T[c][\Phi]=\begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_n \end{bmatrix}$
$=[2\xi_i M_i \omega_i]$

با فرض فوق می‌توان نتیجه گرفت ماتریس $[C]$ نیز قطری است:

$$M_i\ddot{Y}_i + C_i\dot{Y}_i + K_iY_i = P_i(t)$$

با تعریف: $\xi = \frac{C}{2m\omega}$

$$\longrightarrow \ddot{Y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{1}{M_i}P_i \quad , \quad i=1,\dots,n$$

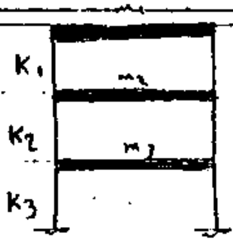
ξ_i: نسبت میرایی برای مود iام. هرکدام از معادلات فوق مشابه SDOF با انتگرال دوهامل قابل حل است.

بدین ترتیب معمول نسبت میرایی برای مودهای مختلف، مودهای متفاوت در نظر گرفته و نسبت میرایی برای سازه در نظر می‌گیرند. مناسب ξ_i:
تنها سهم آنها ریاضی هستند و معادل فیزیکی ندارند یعنی نمی‌توان گفت که مود iام با سهم بزرگتر زودتر میرا می‌شود.

حل معادلات فوق از طریق انتگرال دوهامل انجام می‌شود سپس از رابطه $\{x\}=[\Phi]\{Y\}$، $\{x\}$ بدست می‌آید.

nde

VI) تحلیل تاریخچه زمانی = نیروی خارجی زلزله = برش پایه با تحلیل لحظه‌ای $P(t)$:



$$[m]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\}$$

در هر لحظه جابجایی را بدست می‌آوریم.

$$\{P_e(t)\} = [m]\{i\}\ddot{x}_g = \begin{bmatrix} m_1\ddot{x}_g \\ m_2\ddot{x}_g \\ m_3\ddot{x}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{x}_g$$

$$\longrightarrow \{P_e(t)\} = [m]\{i\}\ddot{x}_g$$

مانند قبل $\{x\} = [\Phi]\{Y\}$ فرض کرده و طرفین بست وی را در $[\Phi]^T$ ضرب می‌کنیم $\{\bar{P}(t)\} = [\Phi]^T\{P(t)\}$

$$\{\bar{P}_e(t)\} = \underbrace{[\Phi]^T[m]\{i\}}_{\{\mathcal{L}\}}\ddot{x}_g$$

$\{\mathcal{L}\} = [\Phi]^T[m]\{L\}$ را بردار مشارکت می‌نامیم.

$$\longrightarrow \bar{P}_{ei} = \mathcal{L}_i\ddot{x}_g \quad , \quad \mathcal{L}_i = \{\Phi\}_i^T[m]\{L\} = \text{ضریب مشارکت} = \mathcal{L}_i$$

بدین ترتیب معادلات منفرد ما بصورت زیر می‌آید:

$$M_i\ddot{Y}_i + C_i\dot{Y}_i + K_iY_i = \mathcal{L}_i\ddot{x}_g$$

* ضریب مشارکت ضریبی است که با ضرب در شتاب زلزله، نیروی موثر آن را به ما می‌دهد.

$$\longrightarrow \ddot{Y}_i + 2\omega_i\xi_i\dot{Y}_i + \omega_i^2Y_i = \frac{\mathcal{L}_i}{M_i}\ddot{x}_g$$

در این مرحله کار ما تمام است و جواب با استفاده از انتگرال دوهامل بدست می‌آید.

VII) مقایسه برش پایه در تحلیل لحظه‌ای (تاریخچه زمانی) و روش طیفی آیین نامه ۲۸۰۰:

با استفاده از انتگرال دوهامل استفاده می‌کنیم، داریم:

$$Y_i = \int_{t}\frac{\mathcal{L}_i}{\omega_iM_i}\ddot{x}_g \cdot e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{\mathcal{L}_i}{\omega_iM_i}\int_0^t\ddot{x}_g \cdot e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau = \frac{\mathcal{L}_i}{\omega_iM_i}Q_i(t)$$

بدین ترتیب داریم:

$$Y_i = \frac{\mathcal{L}_i \cdot Q_i(t)}{\omega_iM_i} \quad (1)$$

؛ یعنی با این مشخصات تعیین پاسخ را پیدا می‌کنیم.

nde

• در SDOF قبلاً نشان دادیم که حرکت در اثر زلزله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\ddot{x}$ ← شتاب مطلق

$$m(\ddot{x}_g+\ddot{x})+kx=0 \longrightarrow m\ddot{x}+kx=0 \longrightarrow \ddot{x}=-\omega^2 x$$

به همین ترتیب داریم:

$$\ddot{Y}_i=-\omega_i^2 Y_i \quad ②$$

• از طرفی:

$$\{x\}=[\Phi]\{Y\} \longrightarrow \{x\}_i=\{\Phi\}_i Y_i \quad \text{یا} \quad \{\ddot{x}\}_i=\{\Phi\}_i \ddot{Y}_i \quad ③$$

اگر نقطه مود i ام را در نظر بگیریم

$V_{1i}=m_1\ddot{x}_{1i}$

$V_{ni}=m_n\ddot{x}_{ni}$

ماتریس نیروی برشی طبقات: $\{V\}_i=[m]\{\ddot{x}\}_i$

برای بدست آوردن برش پایه، باید تمامی المان‌های ماتریس $\{V\}_i$ را باهم جمع کنیم که جواب برش پایه مربوط به مود i ام می‌شود یعنی

$V_{i}=\sum_{n=1}^{n}\{V_n\}_i$: برش پایه مود i ام

$$③ \longrightarrow \{V\}_i=[m]\{\Phi\}_i\ddot{Y}_i$$

$$② \longrightarrow \{V\}_i=[m]\{\Phi\}_i\omega_i^2 Y_i$$

$$① \longrightarrow \{V\}_i=[m]\{\Phi\}_i\omega_i^2\cdot\frac{L_i\cdot Q_i(t)}{\omega_i\cdot M_i}$$

$$=[m]\{\Phi\}_i\cdot\frac{L_i}{M_i}\cdot\omega_i\cdot Q_i(t)$$

$(AB)^T=B^TA^T$

$L_i^T=L_i$

برش پایه برای نقطه مود i ام: $V_i=\underbrace{\{1\}^T[m]\{\Phi\}_i}_{L_i^T=L_i}\cdot\frac{L_i}{M_i}\cdot\omega_i\cdot Q_i(t)$

با ضرب $\{1\}^T$ تمامی المان‌ها را باهم جمع کرده‌ام.

$$\Longrightarrow V_i=\frac{L_i^2}{M_i}\omega_i Q_i(t)$$

همانطور که مشاهده می‌شود برش پایه تابعی از زمان است. و این طبیعی است.

$$M_i=[\Phi]_i^T[m][\Phi]_i \quad , \quad L_i=[\Phi]^T[m]\{1\}$$

$$\longrightarrow \frac{L_i^2}{M_i}=\frac{1}{g}\frac{\left(\sum_j W_j\Phi_{ji}\right)^2}{\sum_j W_j\Phi_{ji}^2}=\frac{1}{g}W_{ei} \quad \text{و} \quad W_{ei}: \text{وزن موثر}$$

$$\longrightarrow \frac{L_i^2}{M_i}=\frac{W_{ei}}{g}$$

$$\rightarrow V_i=\frac{W_{ei}}{g}\cdot\omega_i\cdot Q_i(t)$$

برش پایه کلی از جمع برش پایه‌های مودهای مختلف بدست می‌آید:

$$V=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n}W_{ei}\cdot\omega_i\cdot Q_i(t)$$

در آیین نامه مقدار از جنس $Q(t)$ و W را برابر با نیرو در وزن ضرب می‌کنیم. $Q(t)$ از جنس شتاب نیست در حقیقت همان C است. که از حداکثر شتاب همچنین زلزله به عنوان مقادیر آماری بدست آمده است و از طیف آیین نامه بدست می‌آید.

برای آنالیز تاریخچه زمانی (دینامیکی) ما مقدار پاسخ را در هر لحظه را بدست می‌آوریم ولی در روش طیفی از حداکثرها استفاده می‌کنیم.

علت استفاده از جذر مجموع مربعات در روش طیفی این است که ما از پاسخ‌ها (که به هم تغییر پذیر هستند) حداکثر مودها استفاده کرده و مقدار تقریب آنها را لازم به جمع مستقیم آنها مقداری دست بالا است و در ریاضی ثابت می‌شود که جذر مجموع مربعات برآورد خوبی از پاسخ هم است.

ولی در روش تاریخچه ما پاسخ را برای هر لحظه بدست می‌آوریم و این طبیعی است که از Σ استفاده کنیم. چون جواب به صورت مقدار دقیق می‌باشد.

مراحل تحلیل تاریخچه زمانی (آنالیز لحظه‌ای):

۱- ماتریس‌های m و k را تشکیل می‌دهیم.

۲- $[\Phi]$ و $\{\omega\}$ را حساب می‌کنیم.

۳- $[M]$ و $[K]$ ماتریس‌های قطری جرم و سختی را حساب می‌کنیم.

۴- $\{L\}$ را حساب می‌کنیم.

۵- با معرفی $\{x\}=[\Phi]\{y\}$ معادلات مستقل را جدا می‌کنیم.

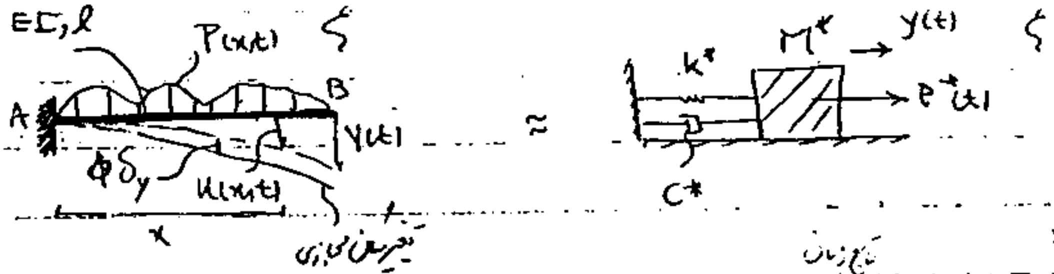
۶- معادلات فوق (مشابه معادله * در دو صفحه قبل) را با انتگرال دوهامل حل کرده و $\{y\}$ را بدست می‌آوریم.

۷- $\{x\}$ را از رابطه‌ی $\{x\}=[\Phi]\{y\}$ بدست می‌آوریم.

تمرین‌های ۱و۷-۲ ، ۸-۱ و ۸-۳ تحویل داده شود.

II) روش مختصات تعمیم یافته:

در این روش برخلاف جرم متمرکز، جرم‌ها شکل گسترده خود را دارند ولی شکل ارتعاش به دلخواه انتخاب میشود. در این روش سازه اصلی بصورت SDOF مدل می‌شود.



انرژی سینتیک (جنبشی) $\xrightarrow{\text{مدل سازه}}$ M^*

انرژی پتانسیل $\Longrightarrow K^*$ $\Big\} \Longrightarrow C^*$

کار مجازی نیروهای خارجی $\Longrightarrow P^*$

$$u(x,t) = \phi(x)\cdot \underbrace{Y(t)}_{\text{تابع زمان}} = \phi Y$$

Shape Function (تابع شکلی دلخواه)

انرژی سینتیک (جنبشی):

$$\text{سازه}: \quad T = \frac{1}{2}\int_l \overset{\text{جرم}}{(m\,dx)}\,(\phi \overset{\text{سرعت}}{\dot{Y}})^2 = \frac{1}{2}\dot{Y}^2 \int_l m\phi^2 dx$$

$$\text{SDOF}: \quad T = \frac{1}{2}\cdot M^* \cdot \dot{Y}^2$$

از مساوی قرار دادن دو مقدار T داریم:

$$M^* = \int_l m\cdot\phi^2\cdot dx$$

انرژی پتانسیل (محاسبه K^*):

$$\text{سازه}: \quad P = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dx}{EI}, \qquad M = EI\frac{d^2u}{dx^2} = EI\phi''Y$$

$$\longrightarrow P = \frac{1}{2}\int \frac{(EI\phi''Y)^2 dx}{EI} \longrightarrow P = \frac{1}{2}Y^2\int EI\cdot\phi''^2 dx$$

$$\text{SDOF}: \quad P = \frac{1}{2}K^* Y^2$$

از برابر قرار دادن دو مقدار انرژی پتانسیل، P^* بدست می آید:

$$\frac{1}{2} K^* Y^2 = \frac{1}{2} Y^2 \int_l EI \, \phi''^2 \, dx$$

$$\longrightarrow K^* = \int_l EI \cdot \phi''^2 \cdot dx$$

- کار مجازی (محاسبه‌ی P^*):

$$\text{سازه}: \delta W = \int_l (P\,dx)(\phi\,\delta y) = \delta y \int_l P \cdot \phi \cdot dx$$

$$SDOF: \delta W = P^* \cdot \delta y$$

$$\longrightarrow P^* = \int_l P \cdot \phi \cdot dx$$

- میرایی (محاسبه C^*):

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} \longrightarrow C^* = 2M^*\omega^*\zeta \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}$$

کاملاً بدیهی است که برای سیستم مشخصات سیستم معلوم باشد؛ آنگاه با استفاده از یک تابع شکل اختیاری که بیانگر شکل ارتعاش سازه باشد، می توانیم مقادیر M^*، P^*، K^* و C^* را بدست آوریم.

$$M^* \ddot{Y} + C^* \dot{Y} + K^* Y = P^*(t)$$

با حل کردن معادله‌ی دیفرانسیل حرکت SDOF، Y را بدست می آوریم و با استفاده از آن و معلوم بودن ϕ، تابع $U(x,t)$ مشخص می گردد.

با استفاده از روش مختصات تعمیم یافته، در حقیقت ما می توانیم یک سازه با جرم گسترده را به یک SDOF تبدیل کرده و آن را حل نماییم:

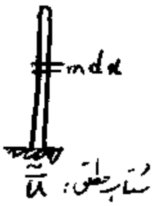
* تنها مشکل این روش حدس تابع شکل ارتعاش است.

جزئیات محاسبه برش پایه

$$P^* = \mathcal{L}\ddot{u}_g \longrightarrow M^*\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \mathcal{L}\ddot{u}_g$$

انتگرال دوهامل :
$$y = \frac{\mathcal{L}}{m^*\omega^*}\int_0^t \ddot{u}_g\, e^{-\xi\omega^*(t-\tau)} \sin\omega_D^*(t-\tau)\,d\tau = \frac{\mathcal{L}}{M^*\omega^*}Q(t)$$

$$\rightarrow u = \phi y = \frac{\phi\mathcal{L}Q(t)}{M^*\omega^*}$$



$$m\ddot{\bar{u}} + kx = 0 \longrightarrow$$ نیروی برشی هر جزء $= (m\,dx)\,\ddot{\bar{u}}$

$$\rightarrow dV = (m\,dx)\ddot{\bar{u}} = (m\,dx)\,\omega^2 u = (m\,dx)\,\omega^2\phi y = \frac{m\phi\mathcal{L}\omega^*Q(t)}{M^*}dx$$

برش پایه از جمع نیروهای اینرسی مطلق گسترده در طول تیر بدست می‌آید :

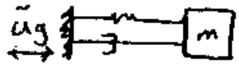
$$V(t) = \int_l dV = \int \frac{m\phi\mathcal{L}\omega^*Q(t)}{M^*}dx$$

$$= \underbrace{\int (m\phi\,dx)}_{\mathcal{L}} \cdot \frac{\omega^*\mathcal{L}Q(t)}{M^*} = \frac{\mathcal{L}^2}{M^*}\omega^*Q(t)$$

– محاسبه برش پایه:

با در نظر گرفتن اثر زلزله داریم:

مدل SDOF:



$$P^* = \int_l P\,\phi\,dx$$

$$= \int_l m\ddot{u}_g\,\phi\,dx = \ddot{u}_g \underbrace{\int_l m\,\phi\,dx}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\,\ddot{u}_g$$

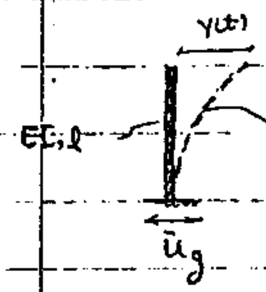
$$\rightarrow P^* = \mathcal{L}\,\ddot{u}_g$$

$\mathcal{L}$ را ضریب مشارکت می‌نامیم:

با استفاده از این P^* مانند جلسه قبل می‌توان برش پایه را برای سیستم نوشت:

$$V = \frac{\mathcal{L}^2}{M^*}\,\omega^{*}\,Q(t)$$

مثال:



$$u(x,t) = \phi(x)\,Y(t) \quad , \quad \phi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2l} \quad , \quad \zeta = 10\%$$

برای این مسئله معادله دیفرانسیل حرکت در مختصات تعمیم یافته را بدست آورید.

$$M^* = \int_l m\,\phi^2\,dx = \int_l m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = 0.226\,ml$$

$$k^* = \int_l EI\,\phi''^2\,dx = EI\int \frac{\pi^2}{4l^2}\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx = 3.04\,\frac{EI}{l^3}$$

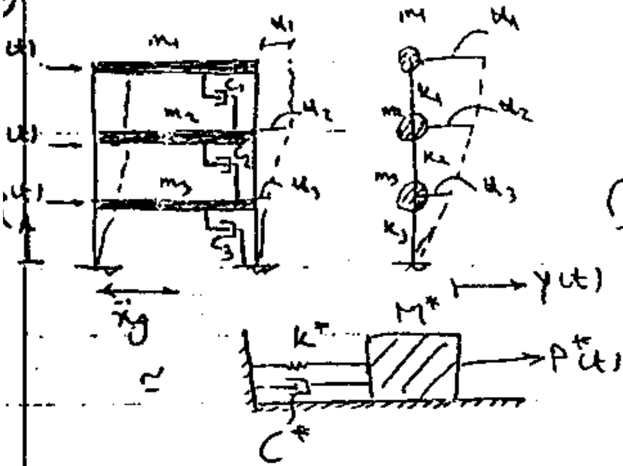
$$\omega^* = \sqrt{\frac{k^*}{M^*}} = 3.66\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$C^* = 2M^*\omega^*\zeta = 2\,(0.1)\,(0.226\,ml)\left(3.66\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\right) = 0.165\,ml\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$\mathcal{L} = \int_l m\,\phi\,dx = \int_l m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)dx = 0.364\,ml$$

$$\longrightarrow 0.226\,ml\,\ddot{Y} + 0.165\,ml\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\,\dot{Y} + 3.04\,\frac{EI}{l^3}\,Y = 0.364\,ml\,\ddot{u}_g$$

$$\longrightarrow \ddot{Y} + 0.730\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} + 13.45\,\frac{EI}{ml^4}\,Y = 1.61\,\ddot{u}_g$$



- این روش برای کنترل جواب های دقیق، روش مناسبی می باشد.

حال میخواهیم تا سازه ی مقابل را به یک مدل جرم متمرکز معادل سازی کنیم و سپس از روش مختصات تعمیم یافته استفاده کنیم.

چون جرم متمرکز داریم، به جای انتگرال، $\sum$ خواهیم داشت و نیز از تفاضل جابجایی های دو طبقه در انرژی پتانسیل استفاده می شود. در انرژی پتانسیل برش اهمیت دارد.

$$u = \phi(x)\cdot Y(t) = \phi \cdot Y$$

* ممکن است چند نوع انرژی اهمیت داشته باشد مثل برش و خمش که باید هر دو در نظر گرفته شود.

- انرژی سینتیک (بدست آوردن M^*):

$$\text{سازه}: T = \frac{1}{2}\sum m_i(\phi_i \dot{Y})^2$$
$$\text{SDOF}: T = \frac{1}{2} M^* \dot{Y}^2 \longrightarrow M^* = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \phi_i^2$$

- انرژی پتانسیل (بدست آوردن K^*):

$$\text{تفاضل دو جابجایی} = \Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i$$

$$\text{سازه}: P = \frac{1}{2}\sum k_i(\Delta\phi_i \cdot Y)^2$$
$$\text{SDOF}: P = \frac{1}{2} K^* \cdot Y^2 \longrightarrow K^* = \sum_{i=1}^{n} k_i(\Delta\phi_i)^2$$

- میرایی (محاسبه C^*):

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}, \qquad C^* = 2M^*\omega^*\zeta$$

- از معادل سازی نیروهای خارجی (بدست آوردن P^*)

$$\text{سازه}: \delta W = \frac{1}{2}\sum P_i \cdot \phi_i \cdot \delta Y$$
$$\text{SDOF}: \delta W = \frac{1}{2} P^* \cdot \delta Y \longrightarrow P^* = \sum_{i=1} P_i \cdot \phi_i$$

برای زلزله داریم:

$$P^* = \sum P_i \cdot \phi_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{u}_g \cdot \phi_i$$

بنابراین: $L = \sum m_i \phi_i$ داریم،

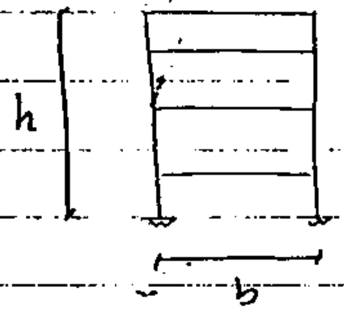
$$P^* = L \cdot \ddot{u}_g$$

$$\rightarrow V(t) = \frac{L^2}{M^*}\omega^* Q(t)$$

nde

دینامیک سازه‌ها — دوشنبه ۸۴/۸/۲۸

- توابع شکلی پیشنهادی برای قاب‌های کوتاه، متوسط و بلند:



• برای قاب‌های برشی کوتاه که $\frac{h}{b} < 1.5$ ، توصیه می‌شود تابع شکلی به صورت

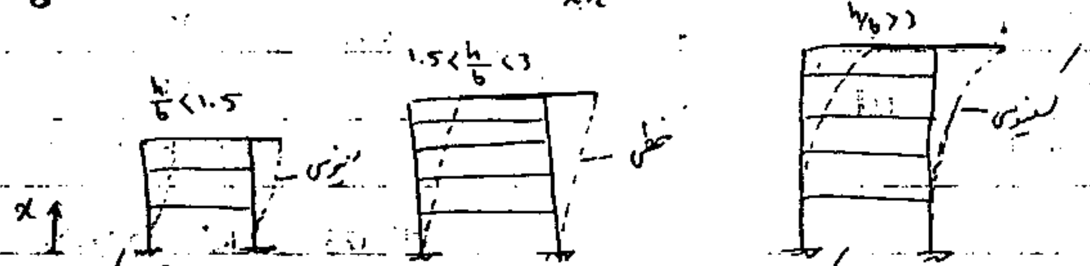
$$\frac{h}{b} < 1.5 \longrightarrow \phi(x) = \sin\frac{\pi x}{2h} \quad (\text{سینوسی})$$

در نظر گرفت.

به عبارتی به ساختمان‌های با $\frac{h}{b} < 1.5$ را ساختمان‌های کوتاه می‌نامیم:

• ساختمان متوسط: $1.5 < \frac{h}{b} < 3 \longrightarrow \phi(x) = \frac{x}{h}$ (خطی)

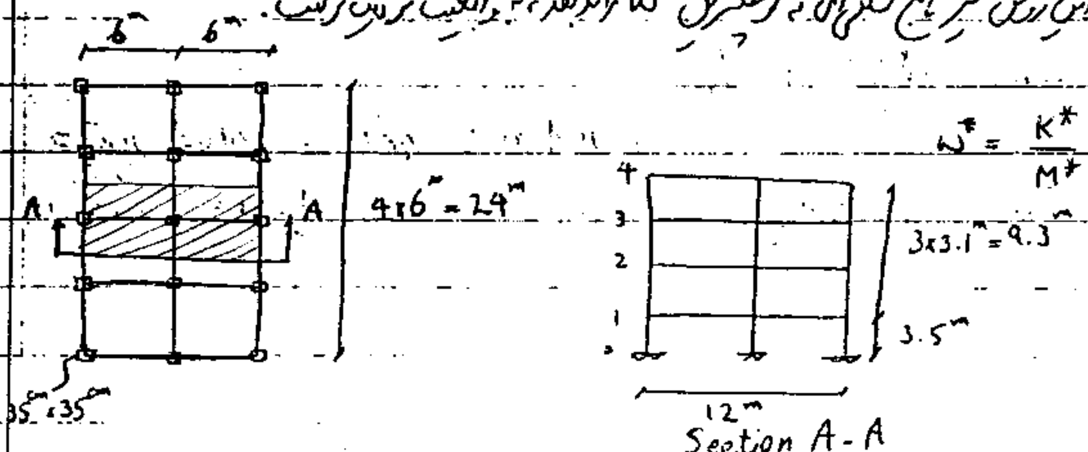
• ساختمان بلند: $\frac{h}{b} > 3 \longrightarrow \phi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2h}$ (سینوسی)



همانند روش ریلی، در این روش نیز تابع شکلی‌ای که کوچکترین ω^* را بدهد، به واقعیت نزدیک‌تر است.

مثال:

$$\omega^* = \frac{K^*}{M^*}$$



$K^* = \sum K(\Delta\phi_i)^2$

$M^* = \sum m_i \phi_i^2$

وزن طبقه فوقانی $= 1735\,kN$

وزن طبقه اول $= 1990\,kN$

(طبقه دوم و سوم) وزن طبقه $= 1980\,kN$

$E = 24.8 \times 10^6\ kN/m^2$

I) $\phi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right)$

II) $\phi(x) = \frac{x}{h}$

$m_1 = \frac{1990}{9.81} \times \frac{1}{4} = 50.71\ ton$ (سطح بار ۱/۴ کل) $\quad m_2 = m_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1980}{9.81} = 50.46\ ton$

$m_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1735}{9.81} = 44.22\ ton$

$k = \frac{12EI}{l^3} \Longrightarrow \quad k_{01} = 3 \times \frac{12EI}{(3.5)^3} = 25409\ kN/m$

$k_{12} = k_{23} = k_{34} = 3 \times \frac{12EI}{(3.1)^3} = 36569\ kN/m$

I) $\Phi(x) = \sin\frac{\pi x}{2h}$

تراز	K_i	m_i	Φ_i	$\Delta\Phi_i$	$m_i\Phi_i^2$	$k_i(\Delta\Phi_i)^2$
4		44.22	1.0		44.22	
	36569			0.091		184.34
3		50.46	0.929		43.35	
	36569			0.205		1536.81
2		50.46	0.724		26.45	
	36569			0.308		3469.08
1		50.71	0.416		8.78	
	25409			0.416		4397.18
Σ					$M^* = 123$	$K^* = 9587.41$

$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{9587.41}{123}} = 8.83\ rad/sec \longrightarrow T = \frac{2\pi}{8.83} = 0.71\ sec$

II) $\Phi(x) = x/h \longrightarrow \omega^* = 9.59\ rad/sec \longrightarrow T = \frac{2\pi}{9.59} = 0.65\ sec$

کوچکترین ω^* اولی بیانگر دقت بیشتر $\Phi(x)$ آن می باشد.

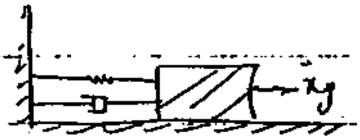
از آنجا که $\frac{h}{b} < 1.5$ می باشد، مشاهده می شود که توصیه تابع شکل سینوسی مناسب است.

XIV) آنالیز طیفی (Spectral Analysis):

۱) طیف جواب (Response Spectra):

در آنالیز طیفی (شبه دینامیکی)، حداکثرها را تحت اثر نیروی خارجی (مثلاً زلزله) در برابر پریودهای مختلف بدست می‌آوریم و در این روش می‌توان نتیجه گرفت اگر زلزله رخ دهد حداکثرها چقدر خواهد بود و در لحظه می‌توان سازه را بررسی کرد.

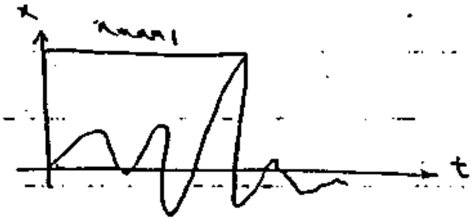
شیوه کار به این صورت است، سیستم یک درجه آزادی تحت نیروی خارجی زلزله را در نظر می‌گیریم و جواب را با استفاده از انتگرال دوهامل بدست می‌آوریم:



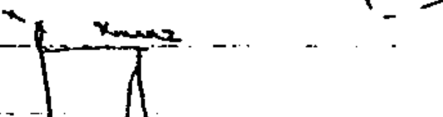
$$x=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cdot\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau \quad , \quad P(\tau)=m\ddot{x}_g$$

$$\longrightarrow x=\frac{1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{x}_g\cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cdot\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

$\begin{cases} \omega=\omega_1 \\ \text{معین زلزله} \\ \xi=\text{معین} \end{cases}$



پس از بدست آوردن جواب، ماکزیمم آن را برای مشخصات زلزله، ω و ξ، ثابت می‌کنیم. سپس با تغییر این پارامترها $\omega=\omega_2$ انجام می‌دهیم (زلزله و میرایی همان)، بهمین ترتیب یک x_{max} دیگر خواهیم داشت. این کار را برای ω_i های مختلف برای یک زلزله و میرایی ثابت انجام می‌دهیم.



بدین ترتیب می‌توانیم مقادیر مختلف x_{max} را برحسب ω_i ترسیم کنیم:

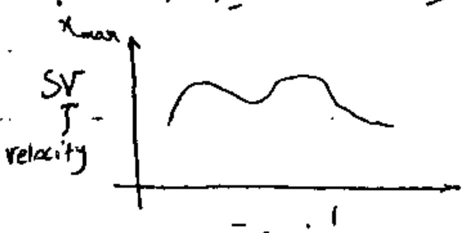
ω	x_{max}
ω_1	x_{max1}
ω_2	x_{max2}
⋮	⋮

طیف جابجایی

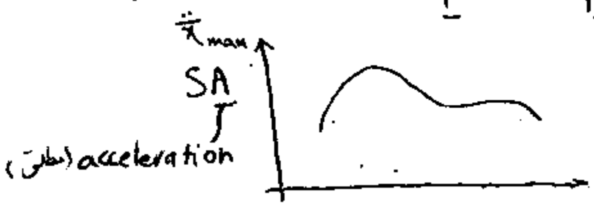
به چنین نموداری طیف جابجایی می‌گوییم.

nde

همین ترتیب می‌توانیم منحنی ماکزیمم سرعت برحسب فرکانس (طیف سرعت) و یا طیف شتاب را رسم نماییم.



طیف سرعت



طیف شتاب

با بدست آوردن سه طیف فوق باهم به طیف جواب گفته می‌شود که برای یک زلزله معین برای حالتی که سرعت آنها متفاوت و با تغییر ξ زلزله، شکل آنها تغییر می‌کند. برای حل شکل ξ، برای چند ξ مشخص از ۲٪ تا ۷٪ تکلیف رسم می‌شود.

مزیت این روش در این است که با داشتن فرکانس سیستم و با داشتن منحنی می‌توانیم به سادگی ماکزیمم سرعت و شتاب یا جابجایی را برداشت کنیم.

با توجه به اینکه بین سه طیف فوق ارتباطی وجود دارد، می‌توان هر سه طیف را در یک نمودار نشان داد. $\int_0^t \ddot{x}_g \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau$ از جنس سرعت است و ما آن را V' می‌نامیم پس می‌توان نوشت:

$Max\ V'$ را PSV می‌نامیم و شبه سرعت طیفی می‌نامیم:

$$Max\ x = \frac{Max\ V'}{\omega} \quad \text{یا} \quad SD = \frac{SV}{\omega}$$

ω_D تقریباً برابر است با ω

از طرفی برای SDOF، با داشتن (با صرفنظر از میرایی):

$$m(\ddot{x}+\ddot{x}_g) + kx = 0 \longrightarrow m(\underbrace{\ddot{\bar{x}}}_{\text{شتاب مطلق}}) + kx = 0 \longrightarrow \ddot{\bar{x}} = -\omega^2 x$$

PSA: شبه شتاب طیفی (ماکزیمم شتاب مطلق بدون میرایی)

$$\longrightarrow PSA = \omega^2 SD$$

در نمودارهای طیفی پی برده می‌شود: اختلاف SA و PSA بسیار ناچیز است. بنابراین ما PSA را با SA برابر می‌گیریم.

حال می‌توان نوشت:

$$SD = \frac{1}{\omega} SV \qquad SA = \omega^2 SD$$

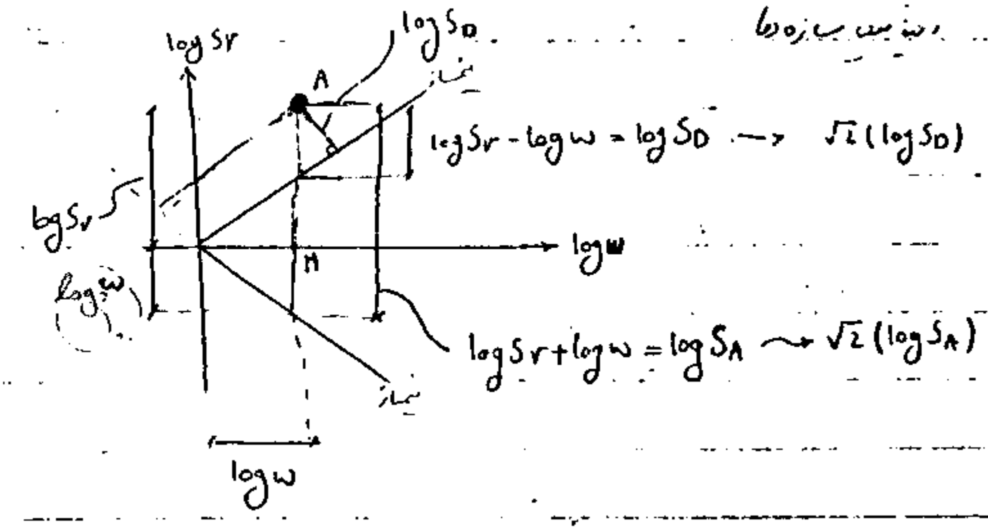
$$SA = \omega^2 SD = \omega^2\left(\frac{1}{\omega} SV\right) \longrightarrow \begin{cases} S_A = \omega S_V \\ S_D = \frac{1}{\omega} S_V \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \log S_A = \log S_V + \log \omega \\ \log S_D = \log S_V - \log \omega \end{cases}$$

حال می‌خواهیم سه نمودار را در یک سیستم مختصات رسم نمود:

۸۴/۹/۳۰ چهارشنبه

رسم طیف سه لرزه‌ها



طیف فوق را می‌توان برای میرایی‌های مختلف ترسیم نمود.

۲) طیف طرح Design Spectra :

طیف جابجایی (یا سرعت و شتاب) هر رکورد زلزله و میرایی خاص ممکن است به صورت مقابل باشد.

بدین صورت به ازای برخی نقاط با تغییر کمی در پریود، تغییرات زیادی در مقدار جابجایی حاصل می‌شود که در واقعیت نمی‌تواند چنین باشد. برای اجتناب از این مسائل، باید نقاط تیز منحنی را حذف کنیم. از طرفی طیف مربوط به یک زلزله خاص را نمی‌توان معیاری برای طراحی در نظر گرفت. برای حل این مشکل بهتر است زلزله‌های مختلفی را بگیریم و از مجموع آنها یک طیف تشکیل دهیم.

طیفی که در مورد فوق با رعایت نکات (حذف تیزی‌ها و تشکیل طیف از طیف چند زلزله)، طیف طرح نامیده می‌شود.

روش‌های مختلفی برای نرم کردن طیف وجود دارد. البته روش نرم کردن چندان اهمیتی ندارد چرا که مشکلات دیگری هستند که اثر نرم کردن در مقابل اثر آنها بسیار ناچیز است. (منظور برای استفاده از چند زلزله)

شکل کلی طیف زلزله در نقاط مختلف یکسان است

* ممکن است یک زلزله برای A g طیف طرح شود. با ضرب آن در ضریب، آن را بزرگ یا کوچک می‌کنند ← اعداد طیف در g باید ضرب شوند.

nde

۱۳- آنالیز طیفی MDOF :

همانطور که قبلاً گفتیم در MDOF با یک ω سر و کار نداریم بلکه با بردار ω یعنی $\{\omega\}$ سر و کار داریم:

$$\{x\} = [\Phi]\{Y\}$$

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{L_i}{M_i}\ddot{x}_g$$

$$x(t) = \frac{1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{x}_g \cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau)$$

طیفی که ما در مراحل قبل ساختیم مربوط به SDOF است.

در SDOF : $\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \ddot{x}_g$

اگر از طیف استفاده کرده و ... تا این $\max(Y)$ را استخراج کنیم، باید در $\frac{L_i}{M_i}$ ضرب کنیم. این ضرب تنها تفاوت طیف MDOF و SDOF است.

$Y_{1max}, Y_{2max}, Y_{3max}, \ldots \qquad Y_{i\,max} = \frac{L_i}{M_i} x_{max\,SD}$

در دست داشتن Y_{max} ها می‌توان به دست آمده را در رابطه‌ی $\{x\} = [\Phi]\{Y\}$ قرار دهیم. چرا که این حالت بسیار دست بالاست. برای این کار را از جذر مجموع مربعات استفاده می‌شود. می‌توان از CQC نیز استفاده کرد.

چون تمام Y_{max} ها در یک زمان اتفاق نمی‌افتند برای تعیین x_{max} از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_1 = \phi_{11}Y_1 + \phi_{12}Y_2 + \phi_{13}Y_3 + \cdots$$

$$\Rightarrow x_{1max} = \sqrt{(\phi_{11}Y_{1max})^2 + (\phi_{12}Y_{2max})^2 + \cdots}$$

مراحل آنالیز طیفی:

۱- $\{\omega\}$ ، $[\Phi]$ ، $[M]$ و $\{L\}$ را حساب می‌کنیم $\leftarrow \{L\} = [\Phi]^T[m]\{1\}$ (بردار واحد)

۲- از یک طیف مناسب S_D ، S_V و S_A را استخراج می‌کنیم.

۳- مقادیر فوق را در $\frac{L_i}{M_i}$ ضرب می‌کنیم.

۴- Y_{imax} ها را بدست می‌آوریم $\leftarrow Y_{imax} = \frac{L_i}{M_i} S_{Di}$

۵- از قانون SRSS ، حداکثر جواب x را بدست می‌آوریم. (جذر مجموع مربعات در فوق)

تذکر: اگر فرکانس‌ها هم نزدیک باشند، بهتر است از روش CQC استفاده شود.

برش پایه را از آنالیز طیفی بدست آوردیم:

$$\begin{cases} V_{imax} = \frac{L_i^2}{M_i}\cdot\omega_i\, Q(t)_{max} = \frac{L_i^2}{M_i} S_{Ai} \\ Q(t) = \int_0^t \ddot{x}_g \cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \end{cases}$$

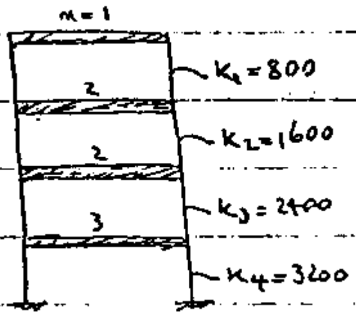
حداکثر Q_t ب.ر. با S_A برابر است.

$$V_{max}^{i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{L_i^2}{M_i} S_{Ai} \right)^2}$$

* S_{Ai} از یک طیف بدست می‌آید که براساس اطلاعات ساختگاه ایجاد شده است ولی در آیین‌نامه براساس طیف کلی آیین‌نامه است.

در آیین‌نامه شبه طیفی (مشابه ۲۸۰۰)، از طیف مربوط به یک منطقه کمتر استفاده می‌کنیم. و اثرات شکل‌پذیری را نیز حفظ برای مسائل را در R ضرب کرده رفتار را می‌بینیم و برای تعدیل نتایج، نیرو را در R تقسیم می‌کنیم.

مثال: مطلوبست حداکثر جابجایی بام؟



$\zeta = 5\%$

$$k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \times 800$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} , \quad \{w\} = \begin{Bmatrix} 13.299 \\ 29.660 \\ 41.079 \\ 55.822 \end{Bmatrix} \qquad \underset{[\Phi]^T[m][\Phi]}{[M]} = \begin{bmatrix} 2.872 & & & \\ & 2.173 & & \\ & & 4.366 & \\ & & & 3.642 \end{bmatrix}$$

n	$T=\frac{2\pi}{w}$	S_D	S_A
1	0.47	0.6	0.28g
2	0.21	0.14	0.30g
3	0.15	0.07	0.28g
4	0.11	0.03	0.24g

$$\{L\} = [\Phi]^T[m]\{1\} = \begin{Bmatrix} 4.2565 \\ -1.5918 \\ -1.3426 \\ 0.6527 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \frac{L_i}{M_i} \right\} = \begin{Bmatrix} 1.482 \\ -0.731 \\ -0.307 \\ -0.179 \end{Bmatrix}$$

$$\longrightarrow Y_{i\,max} = \begin{Bmatrix} 1.482 \times 0.6 \\ -0.731 \times 0.14 \\ -0.307 \times 0.07 \\ -0.179 \times 0.03 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8892 \\ -0.1024 \\ -0.0215 \\ -0.0054 \end{Bmatrix} \qquad [\Phi] = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.7791 & 0.4965 & 0.2351 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow x_{1max} = \Big[\overbrace{(0.8892 \times \underset{\phi_{11}}{1})^2}^{\text{اثر مود اول}} + \overbrace{(-0.1024 \times \underset{\phi_{12}}{0.7791})^2}^{\text{اثر مود دوم}} + \overbrace{(-0.0215 \times \underset{\phi_{13}}{0.4965})^2}^{\text{اثر مود سوم}} + (-0.0054 \times \underset{\phi_{14}}{0.2351})^2 \Big]^{1/2}$$

$$\longrightarrow x_{1max} = (\underbrace{0.791}_{\text{اثر مود اول}} + \underbrace{0.010}_{\text{اثر مود دوم}} + 0.005 + 0.0)^{1/2} = 0.895$$

ملاحظه می شود که در حالت با جرم با اثر میرایی در هم، بعد در معادل اثر در اول ... جرم می باشد

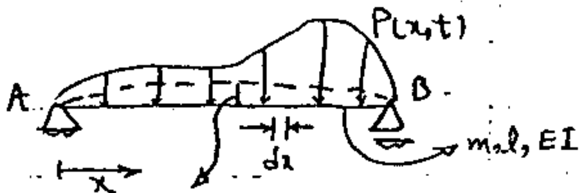
دوشنبه ۵/۱۰/۸۴

XIII) ارتعاش قطعات با جرم پیوسته:

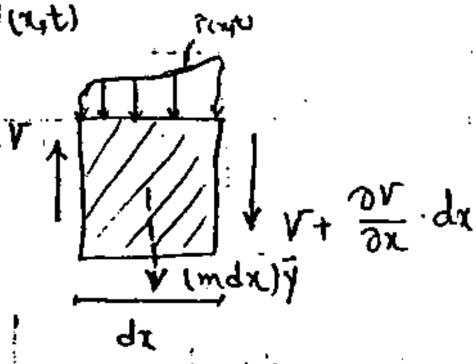
۱) ارتعاش تیر با جرم گسترده یکنواخت:

این روش همانطور که می توان از روش جرم متمرکز استفاده کرد تا آنکه می باشد که در بارهای تحقیقاتی و در پژوهش به کار می آید.

فرض کنید تیری با جرم گسترده ای تحت اثر یک بار گسترده قرار دارد:



تعادل دینامیکی جزئی به طول dx را بررسی می کنیم:
(m جرم واحد طول می باشد)



$$\sum F_y=0 \Rightarrow V-\left(V+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right)-m\ddot{y}\,dx-P(x,t)\cdot dx=0$$

$$\longrightarrow m\ddot{y}+\frac{\partial V}{\partial x}=-P(x,t)$$

از طرفی می دانیم: $M=EI\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ و $V=\dfrac{\partial M}{\partial x}$ پس می توان نوشت:

$$\rightarrow m\ddot{y}+EI\,y^{IV}=-P(x,t)$$

مشتق دوم نسبت به t
مشتق چهارم نسبت به x

۲) ارتعاش آزاد:

ابتدا ارتعاش آزاد را ($P(x,t)=0$) را بررسی می کنیم:

$$m\ddot{y}+EI\,y^{IV}=0$$

از ریاضی می دانیم: $y(x,t)=\underbrace{\varphi(x)}_{\text{تابع شکل}}\cdot\underbrace{f(t)}_{\text{تابع زمان}}$ که در آن $\varphi(x)$ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \varphi(x) = A\sin ax + B\cos ax + C\sinh ax + D\cosh ax \\ f(t) = A_0\sin\omega t + B_0\cos\omega t \end{cases}$$

بنابراین:

$$a = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}} \qquad \omega = (al)^2\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم: (A، B، C و D بر اساس شرایط مرزی تیر کلی و A_0 و B_0 بر اساس شرایط اولیه در جابجایی اولیه بدست می‌آیند)

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} Y=0 \\ M=0 \end{cases} \qquad x=l \Rightarrow \begin{cases} Y=0 \\ M=0 \end{cases}$$

$$x=0 \Longrightarrow \begin{cases} Y_{0,t}=0 \xrightarrow{\varphi_0=0} \\ M_{0,t}=0 \xrightarrow{\varphi''_0=0} \end{cases} \begin{cases} B+D=0 \\ -B+D=0 \end{cases} \longrightarrow B=D=0$$

$$x=l \Longrightarrow \begin{cases} Y_{l,t}=0 \xrightarrow{\varphi_l=0} \\ M_{l,t}=0 \xrightarrow{\varphi''_l=0} \end{cases} \begin{cases} A\sin al + C\sinh al = 0 \\ -A\sin al + C\sinh al = 0 \end{cases} \Longrightarrow A\sin al = 0$$

$$2C\sinh al = 0 \Longrightarrow C = 0$$

(A نمی‌تواند صفر شود چون همه چیز صفر می‌شود)

$$\sin al = 0 \longrightarrow a_n l = n\pi \longrightarrow \omega_n = (n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \longrightarrow \varphi(x) = A\sin ax$$

$$\Longrightarrow Y(x,t) = A\sin ax \cdot (A_0 \sin\omega_n t + B_0\cos\omega_n t)$$

ولی چون چندین ω داریم جواب چنین خواهد شد:

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A\sin a_n x\,(A_0\sin\omega_n t + B_0\cos\omega_n t)$$

بنابراین ضریب A را داخل پرانتز داریم:

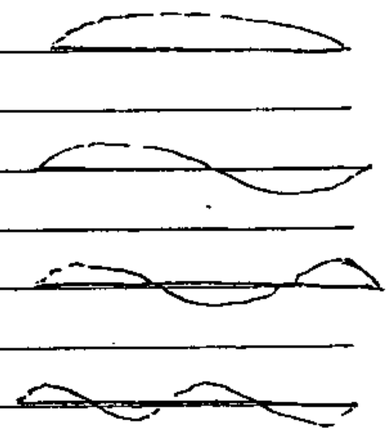
$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin ax\,(A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t)$$

که A_n و B_n از شرایط مرزی بدست می‌آیند.

مثال: می‌خواهیم شکل ارتعاش را تحت مدهای مختلف ترسیم کنیم:

نتایج را در جدول زیر آورده‌ایم:

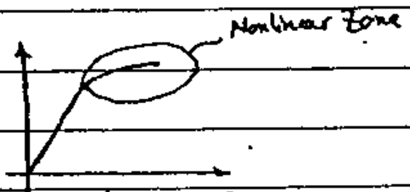
n	$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$	$\varphi(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)$	شکل مود ارتعاش
1	$\pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$	$\sin \frac{\pi}{L} x$	
2	$4\pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$	$\sin \frac{2\pi}{L} x$	
3	$9\pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$	$\sin \frac{3\pi}{L} x$	
4	$16\pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$	$\sin \frac{4\pi}{L} x$	



انواع تحلیل غیرخطی:

۱. غیرخطی بودن مصالح — Material Nonlinearity

۲. غیرخطی بودن هندسی — Geometric Nonlinearity



غیرخطی بودن مصالح منطقه‌ای از منحنی تنش کرنش است که رابطه‌ی آن‌ها خطی نباشد.

در اثر زلزله‌های شدید اعضای سازه وارد منطقه غیرخطی می‌شود. (غیرخطی شدن مصالح).

عیب این مسأله آن است که با ورود مصالح به منطقه غیرخطی، جابجایی‌ها افزایش می‌یابد اما حسن آن این است که خاصیت شکل‌پذیری به سازه داده می‌شود تا در منطقه پلاستیک بتواند انرژی بیشتری جذب کند.

ممکن است هیچ یک از اعضا وارد منطقه غیرخطی نشوند اما رابطه‌ی نیرو - جابجایی بدون پلاستیک شدن مصالح و با توجه به هندسه‌ی سازه، غیرخطی باشد.

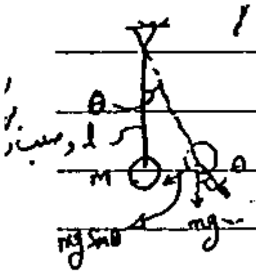
آنچه باید در محاسبات در نظر بگیریم، غیرخطی شدن مصالح است. در رابطه با غیرخطی هندسی، مسائل درجه دوم را در نظر می‌گیریم.

در مرحله خطی رابطه نیرو - تغییر مکان را به صورت $F = Kx$ در نظر گرفتیم. اما چنین رابطه‌ای در منطقه‌ی غیرخطی برقرار نیست و

در نتیجه نمی‌توانیم معادله دیفرانسیل حرکت را به صورت $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx$ بنویسیم چرا که K تغییر کرده است و باید به جای آن از F_S استفاده کنیم که از رابطه‌ی بالا است.

غیرخطی هندسی:

معادله دیفرانسیل حرکت را در حالت θ کوچک و θ بزرگ شکل می‌دهیم.



$$\sum M_O = 0 \longrightarrow ml^2\ddot{\theta} + (mg\sin\theta)\, l = 0$$

$$\longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$\theta \ll 1: \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \longrightarrow$ که معادله‌ای خطی است.

otherwise: $\quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \longrightarrow$ که رابطه غیرخطی است.

$$\sin\theta = \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

۱) معادله جزئی تعادل دینامیکی:

احتمالاً ضریب میرایی در منطقه غیرخطی ثابت نمی‌باشد ولی اثر کم روی غیرخطی بیشتر بر K می‌باشد:

$$F_I + F_D + F_S = P(t)$$

در منطقه غیرخطی نمی‌توانیم از انتگرال دوهامل استفاده کنیم چرا که اساس انتگرال دوهامل بر اصل جمع آثار می‌باشد که از خطی بودن ناشی می‌شود.

بنابراین در محدوده غیرخطی می‌توان نوشت:

$$F_I(t=i) + F_D(t=i) + F_S(t=i) = P(t=i)$$

$$F_I(i+1) + F_D(i+1) + F_S(i+1) = P(i+1)$$

یعنی معادله دیفرانسیل تعادل در هر لحظه می‌تواند متفاوت باشد. از تفاضل این مقادیر برای دو لحظه متوالی داریم:

$$(F_{I_{i+1}} - F_{I_i}) + (F_{D_{i+1}} - F_{D_i}) + (F_{S_{i+1}} - F_{S_i}) = P_{i+1}(t) - P_i(t)$$

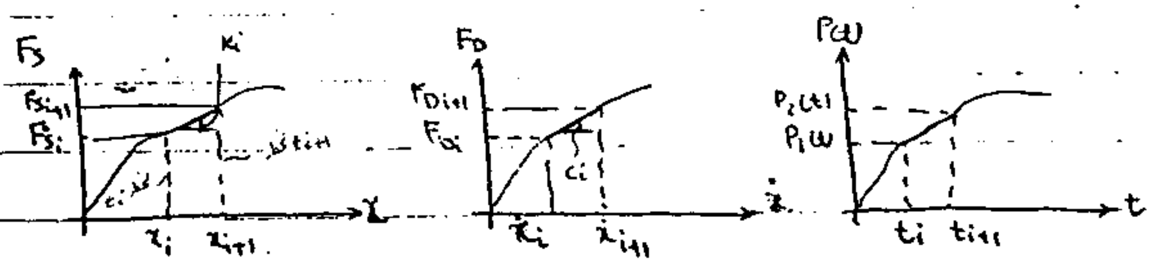
$$\longrightarrow \Delta F_I + \Delta F_D + \Delta F_S = \Delta P(t)$$

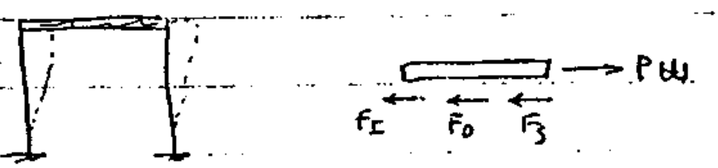
Δ: تغییرات در بازه Δt

* اگر ارتباط بین دو جابجایی متوالی در یک بازه زمانی معلوم را بدانیم، می‌توانیم از معادلات استفاده کنیم. اینکار را مرحله به مرحله انجام می‌دهیم که به این روش، گام به گام گویند.

۲- روش گام به گام برای تحلیل غیرخطی :

اساس روش گام به گام پیدا کردن رابطه بین x ها، $\dot{x}$ ها، $\ddot{x}$ ها در دو لحظه است ← با پیش‌فرض‌هایی صورت می‌گیرد





$$t_{i+1} - t_i = \Delta t$$

$$\longrightarrow F_I + F_D + F_S = P(t)$$

$$\begin{cases} t = t_i \rightarrow & F_{I_i} + F_{D_i} + F_{S_i} = P_i(t) \\ t = t_{i+1} \rightarrow & F_{I_{i+1}} + F_{D_{i+1}} + F_{S_{i+1}} = P_{i+1}(t) \end{cases}$$

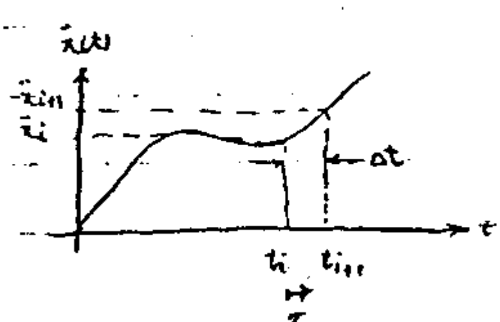
$$\longrightarrow \left(F_{I_{i+1}} - F_{I_i}\right) + \left(F_{D_{i+1}} - F_{D_i}\right) + \left(F_{S_{i+1}} - F_{S_i}\right) = \left(P_{i+1}(t) - P_i(t)\right)$$

$$\longrightarrow m\underbrace{(\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i)}_{\Delta\ddot{x}_i} + c_i\underbrace{(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i)}_{\Delta\dot{x}_i} + k_i\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x_i} = \Delta P_i(t)$$

معادله جزئی تعادل دینامیکی:

$$\longrightarrow m\Delta\ddot{x}_i + c_i\Delta\dot{x}_i + k_i\Delta x_i = \Delta P_i(t)$$

۳- تحلیل دینامیکی غیرخطی، با فرض شتاب ثابت :



مثلاً برای محدوده بین t_i ، t_{i+1} می‌توان فرض کرد:

τ را مبدأ زمان جدید از t_i تعریف می‌کنیم.

خطی کردن

$$\ddot{x}(\tau)=\frac{1}{2}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1}) \quad (1)$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق داریم:

ثابت A از شرایط اولیه (سرعت اولیه) بدست می آید

$$\dot{x}(\tau)=A+\frac{\tau}{2}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1}) \quad (2)$$

$$\tau=0 \text{ یا } t=t_i \longrightarrow \dot{x}=\dot{x}_i \xrightarrow{\text{رابطه فوق}} A=\dot{x}_i$$

$$\longrightarrow \dot{x}(\tau)=\dot{x}_i+\frac{\tau}{2}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1})$$

$$\tau=\Delta t \text{ یا } t=t_{i+1} \longrightarrow \dot{x}_{i+1}=\dot{x}_i+\frac{\Delta t}{2}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1}) \quad (3)$$

و با انتگرال گیری از معادله سرعت:

$$x(\tau)=\dot{x}_i\cdot\tau+\frac{\tau^2}{4}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1})+A \quad (4)$$

$$\begin{cases}\tau=0\\ \text{or}\\ t=t_i\end{cases},\ x=x_i \longrightarrow A=x_i$$

$$\longrightarrow x(\tau)=x_i+\dot{x}_i\cdot\tau+\frac{\tau^2}{4}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1}) \quad (5)$$

$$\tau=\Delta t \text{ or } t=t_{i+1} \longrightarrow x_{i+1}=x_i+\dot{x}_i\cdot\Delta t+\frac{(\Delta t)^2}{4}\underbrace{(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1})}_{\ddot{x}_{i+1}-\ddot{x}_i+2\ddot{x}_i=\Delta\ddot{x}_i+2\ddot{x}_i} \quad (6)$$

رابطه ی (6) رابطه مناسبی است اما باید شتاب در i+1 را به صورت ساده تری تبدیل کنیم. برای اینکار از معادله جزئی متعادل استفاده می کنیم

$$\longrightarrow \Delta\ddot{x}_i=\ddot{x}_{i+1}-\ddot{x}_i \quad (7)$$

$$\Delta\dot{x}_i=\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_i$$

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$$

$$(6)\longrightarrow \Delta\ddot{x}_i+2\ddot{x}_i=\frac{4}{\Delta t^2}(\Delta x_i-\dot{x}_i\Delta t)$$

$$\longrightarrow \text{تغییرات شتاب: } \Delta\ddot{x}_i=\frac{4}{\Delta t^2}(\Delta x_i-\dot{x}_i\cdot\Delta t)-2\ddot{x}_i \quad (8)$$

$$(6)\longrightarrow \Delta x_i-\dot{x}_i\cdot\Delta t=\frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1}) \quad (9)$$

طرفین رابطه فوق را در $\frac{2}{\Delta t}$ ضرب کرده داریم:

$$\frac{2}{\Delta t}(\Delta x_i-\dot{x}_i\cdot\Delta t)=\frac{\Delta t}{2}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1}) \quad (10)$$

$$(3)\longrightarrow \Delta\dot{x}_i=\frac{\Delta t}{2}(\ddot{x}_i+\ddot{x}_{i+1}) \quad (11)$$

(10) و (11) ⟵ تغییرات سرعت: $\Delta\dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t)$ (12)

روابط بدست آمده را در معادله حرکت تعادل نموی قرار می‌دهیم: (روابط (8) و (12))

$$m\left(\frac{4}{\Delta t^2}(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t) - 2\ddot{x}_i\right) + C_i\left(\frac{2}{\Delta t}(\Delta x_i - \dot{x}_i \cdot \Delta t)\right) + k\Delta x_i = \Delta P_i$$

$$\longrightarrow \Delta x_i \underbrace{\left(k_i + \frac{2C_i}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2}\right)}_{K_i^*} = \underbrace{\Delta P_i + \dot{x}_i\left(\frac{4m}{\Delta t} + 2C_i\right) + 2m\ddot{x}_i}_{\Delta P_i^*}$$

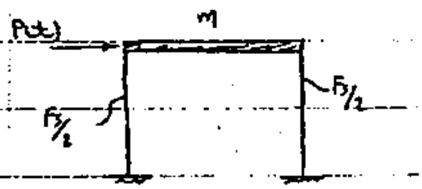
از زمان صفر شروع کنیم همه مجهولات را داریم پس:

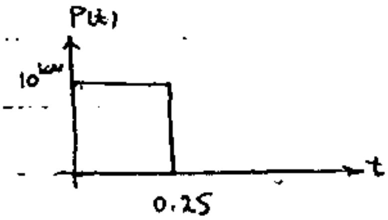
$$\longrightarrow \text{تغییرات جابجایی}: \Delta x_i = \frac{\Delta P_i^*}{K_i^*} \qquad (13)$$

با استفاده از Δx_i می‌توان $\Delta\dot{x}_i$ و $\Delta\ddot{x}_i$ و در نتیجه آنها x_{i+1} و ... را محاسبه کرد.

* مراحل کار در جدول به صورت کلی آمده است.

* در مدل‌سازی غیرخطی مرسوم است که رفتار را Elasto-perfect plastic فرض می‌کنند.





مثال:

$F_{sy} = 15\ kN$

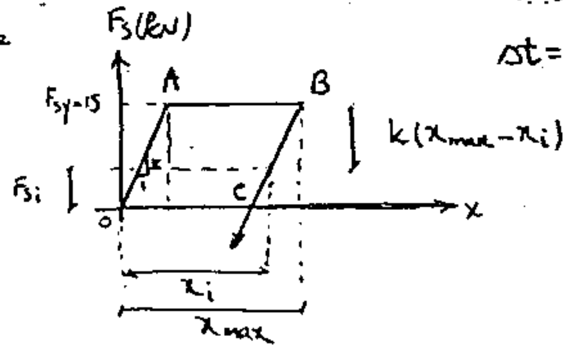
$k = 30\ kN/cm \longrightarrow x_y = \frac{15}{30} = 0.5\ cm$

$m = 0.2\ ton \qquad \zeta = 0 \longrightarrow c = 0$

$\Delta t = 0.05\ sec$

$t = 0$ تا $0.55\ sec$

$t = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$



$$k_i = \begin{cases} 30 & x < 0.5 & \text{قطعه } OA \\ 0 & 0.5 < x < x_{max} & \text{قطعه } AB \\ 30 & & \text{قطعه } BC \end{cases}$$

$$F_{si} = \begin{cases} 30x_i & OA \\ 15 & AB \\ 15 - 30(x_{max} - x_i) & BC \end{cases}$$

باید در هر مرحله x_i را کنترل کنیم تا ببینیم در چه منطقه‌ای از OA، AB یا BC قرار داریم.

x_{max} را با بررسی محاسبات بدست آوردیم و آن مقداری است که از آن x شروع به کاهش می‌کند.

$$\longrightarrow \ddot{x}_0 = \frac{1}{m}(P_0 - c_0\dot{x}_0 - k_0x_0) = \frac{1}{0.2}\times 10 = 50\ ^{cm}/_{sec^2}$$

$$K^*_i = k_i + \frac{2c_i}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2} \longrightarrow K^*_i = k_i + \frac{4(0.2)}{(0.05)^2} = k_i + 320$$

$$\Delta P^*_i = \Delta P_i + \left(\frac{4m}{\Delta t}\right)\dot{x}_i + 2m\ddot{x}_i = \Delta P_i + 16\dot{x}_i + 0.4\ddot{x}_i$$

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}\Delta x_i - 2\dot{x}_i \qquad \Delta\dot{x}_i = 40\Delta x_i - 2\dot{x}_i$$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m}(P_i - \cancel{c_i}\dot{x}_i - k_ix_i) = 5(P_i - F_{si})$$

$$\begin{cases}\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \\ \Delta\dot{x}_i = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i\end{cases}$$

تمرین‌های ۱۵-۱ و ۱۵-۳ تحویل داده شود.

تمرین غیرخطی روز امتحان تحویل داده شود.

* حسن روش غیرخطی کوچکتر شدن تقطیع فضا و عیب آن زیاد شدن جابجایی است.

i	t_i	P_i	ΔP_i	F_{si}	$\ddot{x}_i$	k_i^*	ΔP_i^*	Δx_i	$\Delta \dot{x}_i$	x_{i+1}	$\dot{x}_{i+1}$
0	0.00	10	0	0	50	350	20	0.05714	2.2857	0.05714	2.2857
1	0.05	10	0	1.7143	41.4286	350	53.1429	0.15184	1.5020	0.20898	3.7878
2	0.10	10	0	6.2694	18.6531	350	68.0653	0.19447	0.2034	0.40345	3.9911
3	0.15	10	0	12.1036	-10.5178	350	59.6511	0.17043	-1.1650	0.57388*	2.8261
4	0.20	10	0	15.0000	-25	320	35.2181	0.11006	-1.2500	0.68394	1.5761
5	0.25	10	0	15.0000	-25	320	15.2181	0.04756	-1.2500	x_{max} 0.73150	0.3261
6	0.30	0	-10	15.0000	-75	350	-34.7819	-0.09938	-4.6273	0.63212	-4.3012
7	0.35	0	0	12.0186	-60.0929	350	-92.8565	-0.26530	-2.0098	0.36682	-6.3110
8	0.40	0	0	4.0595	-20.2973	350	-109.0943	-0.31170	0.1540	0.05512	-6.1570
9	0.45	0	0	-5.2915	26.4574	350	-87.9284	-0.25122	2.2650	-0.19611	-3.8920
10	0.50	0	0	-12.8282	64.1410	350	-36.6156	-0.10462	3.5994	-0.50072	-0.2926

x_{max}

* تغییر مکان از x_y بیشتر شده است بنابراین : $F_s = F_{sy}$ ($k_i = 0$) علامت

• حالت جابجایی به حداکثر تغییر مکان خود می‌رسد ($k_1 = 30$) ... CD

نمودار راس روش گام به گام با شتاب ثابت

(1)
$x_0 \,,\, \dot{x}_0 \,,\, m \,,\, c_i \,,\, k_i \,,\, P_i \,,\, \Delta t \quad (i=0,1,\dots,n)$ داده‌ها

(2)
$$\ddot{x}_0 = \frac{1}{m}\left(P_0 - c_0\,\dot{x}_0 - k_0\,x_0\right)$$

(3)
$$k_i^{*} = k_i + \frac{2c_i}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2} \qquad (11)$$

(4)
$$\Delta P_i^{*} = \Delta P_i + \left(\frac{4m}{\Delta t} + 2c_i\right)\dot{x}_i + 2m\,\ddot{x}_i \qquad (12)$$

(5)
$$\Delta x_i = \frac{\Delta P_i^{*}}{k_i^{*}} \qquad (13)$$

(6)
$$^{*}\ \Delta \ddot{x}_i = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\Delta x_i - \dot{x}_i\,\Delta t\right) - 2\ddot{x}_i \qquad (14)$$
$$\Delta \dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}\,\Delta x_i - 2\,\dot{x}_i$$

(7)
$$x_{i+1} = \Delta x_i + x_i$$
$$\dot{x}_{i+1} = \Delta \dot{x}_i + \dot{x}_i$$
$$\ddot{x}_{i+1} = \Delta \ddot{x}_i + \ddot{x}_i$$

★ بجای این رابطه میتوان مقدار $\ddot{x}_{i+1}$ را مستقیماً از رابطه زیر بدست آورد:
$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m}\left(P_i - c_i\,\dot{x}_i - k_i\,x_i\right)$$

بنام خدا

- کنترل سازه‌ها :

بکارگیری ابزار یا اعضایی در سازه که باعث بهبود رفتار آن گردد.

- انواع کنترل سازه‌ها :

۱) کنترل غیرفعال (Passive Control) ← شکل یا زبند، اعضا یا ابزار بکاررفته در سازه به انرژی خارجی نیاز ندارند.

۲) کنترل فعال (Active Control) ← قطعه دیده شود که هنگام زلزله خارج از سازه به سازه نیرویی وارد کند تا زلزله کنترل شود. معمولاً انرژی بصورت برقی اعمال می‌شود.

۳) کنترل نیمه‌فعال (Semi Active Control) ← مانند فعال ولی انرژی کمتر.

۴) کنترل دوگانه (Hybrid Control)

www.mohandesyar.com

۱) کنترل غیرفعال (passive control) :

۱) قاب های خمشی   ۲) بادبندها   ۳) دیوارهای برشی   ۴) جداسازهای لرزه‌ای   ۵) میراگرها

۱-۴) جداسازهای لرزه‌ای (Base Isolation) ← وسیله‌ای که معمولاً زیر سازه قرار داده می‌شود که باعث تخفیف اثر زلزله بر سازه می‌گردد. آنچه امروزه بیشتر استفاده می‌شود لاستیک هایی با ورقه فلزی و هسته سربی است.

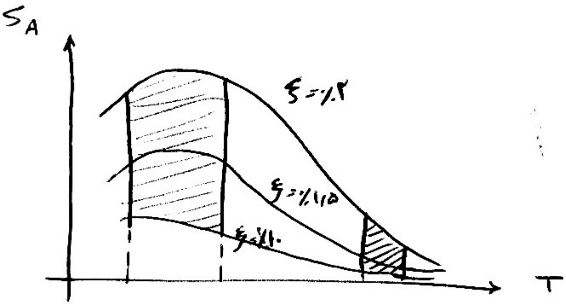
این جداسازها باید آنقدر سخت باشند که وزن سازه را تحمل کند. وظیفه هسته سربی تأمین میرایی است، لاستیک انعطاف در برابر زلزله را تأمین می‌کند و وزن سازه را فلز تحمل می‌کند. معمولاً به LR معروف است. پس بطور کلی:

- به اندازه کافی سخت برای تحمل وزن سازه باشد ← فلز

(Load Rubber Bearing)

- به اندازه کافی نرم در برابر جابجایی انعطاف پذیری داشته باشد ← الاستیک
- قابلیت جذب انرژی زیادی داشته باشد ← سرب

- اثر جداسازها در کاهش اثر ارتعاشات بر سازه‌ها:



کاهش شتاب متعلق بر اثر جداساز

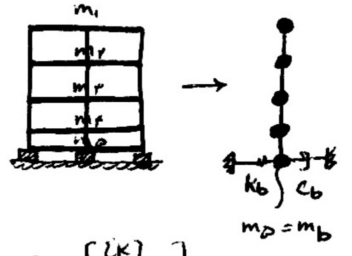
Period shift

← وقتی جداساز موثر است که T کم باشد

- محدودیت های جداسازها:

- واژگونی ← تکیه‌گاه سازه است، نیرو زیاد باشد باید واژگونی حتماً کنترل شود ← در ساختمان‌های بلند ۲۰-۳۰ طبقه به بالا اجرا نشود.
- جابجایی زیاد در محل جداسازها.
- عدم وجود فضا در اطراف ساختمان ← باید حدود ۰/۵ با سازه کناری فاصله داشته باشد.
- در خاک ضعیف و شیبدار.

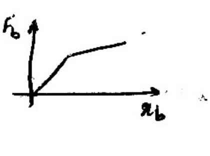
- مدل سازی جداسازها:



$$[m]_b\{\ddot{x}\} + [c]_b\{\dot{x}\} + [K]_b\{x\} = -[m]_b\{1\}\ddot{x}_g$$

رفتار جداساز غیرخطی است و باید غیرخطی تحلیل شود.

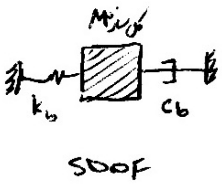
$$[m]_b = \begin{bmatrix} [m] & \\ & m_b \end{bmatrix}$$



$$[K]_b = \begin{bmatrix} [K] & \\ & K_b \end{bmatrix} \qquad [c]_b = \begin{bmatrix} [c] & \\ & c_b \end{bmatrix}$$

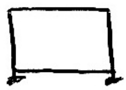
- روش تقریبی مدل سازی سازه با جداساز:

برای طراحی اولیه از این روش استفاده می کنند.



$$\begin{cases} T_b = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K_{eff}}} \\ \xi_b = \dfrac{C_b}{2M\sqrt{K_{eff}/M}} \end{cases} \longrightarrow \text{طیف} \longrightarrow S_a \longrightarrow \text{برش پایه}$$

مثال - فرض کنید $T_f = 0.4^s$ و $\xi = 2\%$ و با جداسازها $T_b = 2s$ و $\xi = 10$. $\frac{V}{W}$ را بدست آورید.



a) سازه بدون جداساز

$$V_f = m S_A$$

$$\begin{cases} T_f = 0.4 \; s \\ \xi = \%2 \end{cases} \longrightarrow \text{طیف} \longrightarrow S_A = 1.83g$$

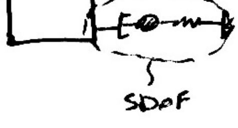
$$V_f = m(1.83g) = 1.83W \longrightarrow \frac{V_f}{W} = 1.83$$

b) سازه با جداساز

$$\begin{cases} T_b = 2 \; s \\ \xi = \%10 \end{cases} \longrightarrow \text{طیف} \longrightarrow S_A = 0.36g$$

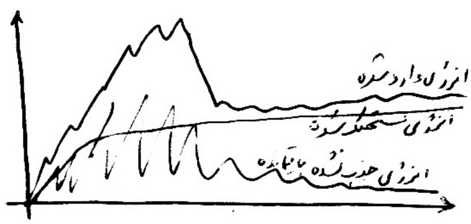
$$V_b = m(0.36g) = 0.36W \longrightarrow \frac{V_b}{W} = 0.36$$

* هم می توان جداساز را یک طبقه در نظر گرفت هم می توان آن را مدل کرد. در این مثال اینگونه عمل شده است:



* بهتر است جداسازها در محل های نزدیک گسل اجرا نشود.

۱-۵) میراگرها ← میراگرها از جداسازها بیشترین کاربرد را داشته اند. میرایی نیرویی است که باعث جذب انرژی میگردد و جواب سازه را مستهلک می کند.



← با افزایش میرایی میزان انرژی مستهلک شده افزایش و انرژی جمع شده کاهش می یابد.

در نتیجه می توان با میراگر مصنوعی، میزان انرژی مستهلک شده را افزایش داد.

- انواع میراگرها:

۱) میراگر ویسکوز ۲) میراگر اصطکاکی ۳) میراگر سیالند ۴) میراگر ویسکو الاستیک

۵) میراگر سیستم فعال

۱-۵-۱) میراگر ویسکوز ← متناسب با سرعت به سازه نیرو وارد می کند و نیروی میرایی تابعی از سرعت حرکت است که اصولاً خطی در نظر می گیرند:

$$F_D = f(\dot x) = c\dot x$$

برای ارزیابی میزان جذب انرژی میراگرها، مقدار جذب انرژی شده توسط آنها در یک سیکل رفت و برگشت اندازه گیری و حساب میشود:

$W_{vis} =$ انرژی جذب شده میراگر در یک سیکل $= \int_T F_D\, dx = \int_T F_D \dot x\, dt = \int_T c\dot x^2 dt$

اگر حرکت سازه را بصورت سینوسی در نظر بگیریم:

$$x = \rho \sin\omega t \longrightarrow W_{vis} = \int_T c(\rho\omega\cos\omega t)^2 dt$$

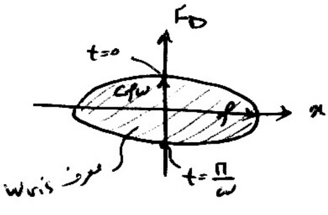
$$\longrightarrow W_{vis} = c\pi\omega\rho^2$$

منحنی F_D و x را می توان بصورت زیر رسم کرد:

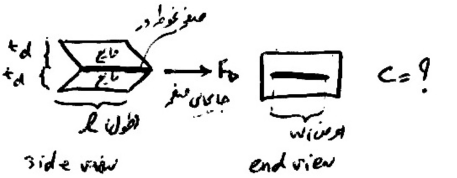
(۱) $\frac{x}{\rho} = \sin\omega t$ و $F_D = c\dot x = c\rho\omega\cos\omega t$

(۲) $\frac{F_D}{c\rho\omega} = \cos\omega t$

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \frac{F_D^2}{(c\rho\omega)^2} = 1$$



مثال - تعیین ثابت میراگر ویسکوز (صفحه غوطه ور در مایع).



تنش برشی مایع: τ

کرنش برشی مایع: γ

ضریب چسبندگی: G_v

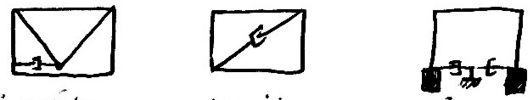
رابطه تنش کرنش برای مایع چسبنده : $\tau = G_v \dot{\gamma}$

رابطه کرنش مایع و جابجایی صفحه (قانون نیوتون) : $\gamma = \frac{x}{t_d}$

$$F_D = 2wl\tau = 2wl(G_v \dot{\gamma}) = 2wl\left(G_v \cdot \frac{\dot{x}}{t_d}\right) = \left(\frac{2wl}{t_d} G_v\right)$$

$$\rightarrow c = \frac{2wl}{t_d} G_v$$

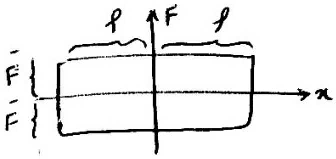
* انواع روش کاربرد میراگر :

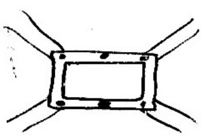


در اتصال با زانوبند　　بعنوان بادبند　　همراه جداساز لرزه　　درون دیوار برشی

۱-۵-۲) میراگر اصطکاکی :

اگر حداکثر نیروی اصطکاکی $\bar{F}$ باشد و در یک حرکت سینوسی $(x = P\sin\omega t)$ انرژی در یک سیکل حرکت برابر است با :

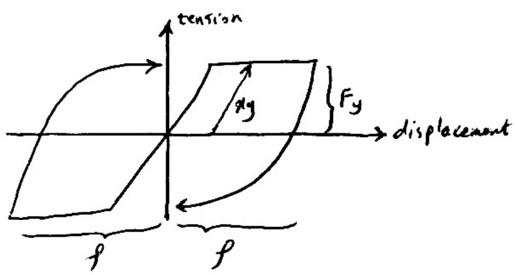




$$W_{col} = 4\bar{F}\rho$$

۱-۵-۳) میراگر تسلیم (هیسترزیس) :

درصورتیکه مصالح آنچه در ساخت میراگر بکار رفته وارد مرحله غیرخطی شود و حرکت آن سیکلی باشد، میراگر تسلیم پدید می آید.

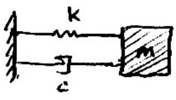


انرژی در یک سیکل حرکت سینوسی $(x = P\sin\omega t)$ بصورت زیر قابل بیان است :

$$\begin{cases} \mu = \frac{\rho}{x_y} & \text{: نسبت شکل پذیری} \\ W_h = 4 F_y \rho \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) \end{cases}$$

این نوع میراگر در سایر میراگرها بیشتر مورد توجه است. مثلاً قرار دادن میلگردها و تماموتهای اضافی در سازه های بتنی برای افزایش شکل پذیری.

۱-۵-۴) میراگر ویسکوالاستیک :

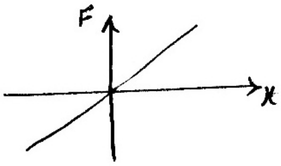


تلفیق میراگر ویسکوز و یک فنر است مثل یک قطعه فنر که در پوشش نیمه ستیکی قرار گرفته باشد.

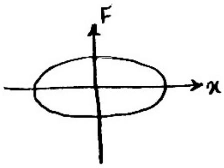
می توان میراگری طرح کرد که بیشتر مثل فنر باشد یا مثل میراگر معمولی که بستگی به جنس مواد سازنده بستگی دارد.

نیروی معادل میراگر ویسکوالاستیک عبارتست از :

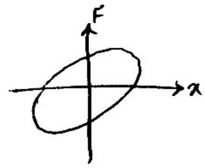
$$F = c\dot{x} + Kx$$



$F = Kx$



$F = c\dot{x}$



$F = c\dot{x} + Kx$

- معادل سازی انواع میراگر با میراگر ویسکوز :

این کار معمولاً در عمل رخ می‌دهد و شکل آیین نامه‌ای دارد + وقتی چند نوع میراگر داریم می‌خواهیم میراگرها را یکدست کرده و تکمیل کنیم.

• میراگر اصطکاکی :

$$W_{vis} = C\pi\omega\rho^2 \quad , \quad W_{col} = 4F\rho$$

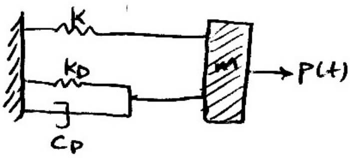
$$\rightarrow C_{eqcol} = \frac{4F}{\pi\omega\rho}$$

• میراگر سیماند :

$$W_h = 4F_y\rho\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) \quad , \quad W_{vis} = C\pi\omega\rho^2$$

$$\rightarrow C_{eqh} = \frac{4F_y}{\pi\omega\rho}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$$

مثال - طرح میراگر ویسکوالاستیک برای SDOF ؛ تعیین C_D و K_D :



$C_D = 0.15\,K_D \quad , \quad m = 10000\ \text{kg} \quad , \quad \omega = 2\pi\ \text{rad/s} \quad , \quad K = 310\ \text{kN/m}$

$$m\ddot{x} + C_D\dot{x} + (K+K_D)x = P(t)$$

$$\omega^2 = \frac{K+K_D}{m} \rightarrow K + K_D = m\omega^2 = 394\ \text{kN/m}$$

$$\begin{cases} K_D = 394 - 310 \rightarrow K_D = 84\ \text{kN/m} \\ C_D = 0.15 \times 84 = 12.6\ \text{kN}\cdot\text{s/m} \end{cases}$$

* محدودیت‌های موجود در اجرا و ساخت، بطور کلی مقادیر مجهول را تعیین می‌کند که اینجا این محدودیت $\omega = 2\pi$ rad/s بود.

مثال - فرض کنید $F_D = c\dot{x}^2$. ثابت میراگر معادل ویسکوز را برای یک حرکت سینوسی SDOF بنویسید.

میراگر فوق می‌تواند معرف اثر آب یا هوا بر روی سیستمی باشد که با سرعت کم ۳ m/s تا ۲۰ m/s حرکت می‌کند.

$$x = \rho\cos\omega t \longrightarrow \dot{x} = -\rho\omega\sin\omega t$$

انرژی یک سیکل کامل :

$$\bullet\ W = 2\int_{-x}^{x} F_D\,dx = 2\int_0^{\pi} F_D(\dot{x}\,dt) = 2\int_0^{\pi} c\dot{x}^3\,dt = \frac{8}{3}c\omega^2\rho^3$$

$$\bullet\ W = W_{vis} \xrightarrow{\text{محاسبه } C_{eq}} C_{eq}\pi\omega\rho^2 = \frac{8}{3}c\omega^2\rho^3 \longrightarrow C_{eq} = \frac{8}{3\pi}c\omega\rho$$

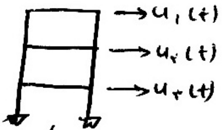
۲) کنترل فعال (active control) :

- مبانی :

در کنترل فعال سازه ها نیروی خارجی توسط یک دستگاه مولد نیرو ، محرک (actuator) به سازه آنچنان وارد می شود که رفتار سازه را متعادل کند.

تفاوت روش کنترل فعال و نیمه فعال در انرژی لازم برای عملکرد کنترل است + کنترل نیمه فعال بیشتر بر مبنای مصالح هوشمند صورت می گیرد . در کنترل نیمه فعال ، کنترل ها مثل میراگرهای خاص با انرژی کمتری کار می کنند.

در این روش ، سازه را برای نیروهای کمتر از زلزله وارده طرح می کنیم و رفتار سازه با کنترل های اعمالی در سازه ، متعادل شود.



$\{u(t)\}$ = بردار نیروهای کنترل

* امروزه معمولاً از ترکیب کنترل های فعال و نیمه فعال با غیرفعال استفاده می شود ← در آینده ، حرکت به سمت استفاده از کنترل فعال و نیمه فعال است.

- مزایای کنترل فعال و نیمه فعال نسبت به کنترل غیرفعال :

۱) جبران عدم تعیین های نظیر زلزله و مشخصات سازه .

۲) امکان ساخت ساختمان بسیار بلند مقاوم در برابر زلزله.

۳) صرفه جویی .

- سیستم های مدار باز ، مدار بسته و مدار باز - بسته :

• سیستم مدار باز (open loop) ← در این سیستم مقدار نیروی کنترل صرفاً براساس نیروی خارجی تعیین می شود :

P(t) → حس گر → سیستم کنترل → سازه → جواب

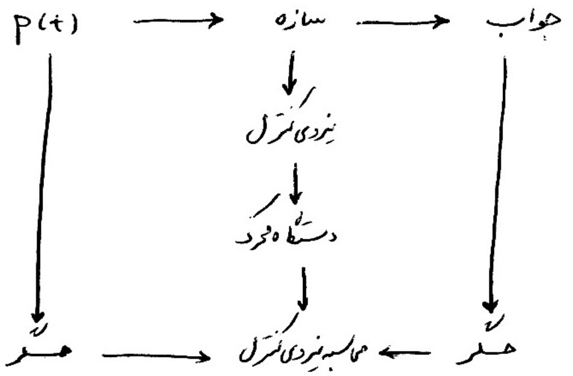
• سیستم مدار بسته (close loop) ← در این سیستم مقدار نیروی کنترل صرفاً براساس جواب سازه تعیین می شود ← عمده سازه به سازه هوشمند + در عمل بیشتر این نوع استفاده می شود.

P(t) → حس گر → سازه → جواب

سازه ↓ نیروی کنترل ↓ دستگاه محرک ↓ محاسبه نیروی کنترل

جواب ↓ حسگر → محاسبه نیروی کنترل

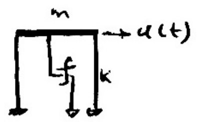
• سیستم مدار باز-بسته ← در این سیستم، نیروی کنترل براساس جواب نیروی خارجی تعیین می‌شود ← در این مبنا عمل می‌کند که رفتار سازه در طی یک چرخه پیش‌بینی و اصلاح می‌شود و در نیرو بر همین اساس در هر مرحله به سازه وارد می‌شود ← اگر پیش‌بینی در چند مرحله به درستی صورت نگیرد باعث ناپایداری سازه شده و رکب ناپایداری سازه به میان می‌آید.



* به علت تأخیر زمانی پس از اعمال نیروی خارجی مثل زلزله، باید رفتار سازه برای این تأخیر زمانی پیش‌بینی شود و در گام بعد اصلاح شود.

* به کنترل های بسته و باز-بسته، کنترل با بازخورد (feedback control) گفته می‌شود.

- کنترل با بازخورد سختی و میرایی برای SDOF:



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) + u(t)$$

نیروی کنترل: $\{u(t)\} = \underbrace{[F]_{1\times2}}_{\text{ماتریس بهره}} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}_{2\times1} \rightarrow u(t) = f_1 x + f_2 \dot{x}$

عملاً وقتی نیروی کنترل به صورت فوق در نظر گرفته شود مثل آن است که سختی و میرایی را تغییر داده‌ایم:

$$u(t) = -c_d \dot{x} - k_d x$$

آنقدر با ضرایب بازی می‌شود تا رفتار سازه در حد دلخواه قرار بگیرد.

مراحل یافتن نیروی کنترل فوق به صورت زیر است:

• جواب بدون کنترل حساب می‌شود.

• نیروی کنترل $u(t)$ با انتخاب مقادیر دلخواهی برای c_d و k_d تعیین می‌شوند.

• معادله حرکت را تشکیل می‌دهیم.

• جواب سازه را بدست می‌آوریم، اگر جواب در حد مجاز بود که نیروی کنترل انتخابی درست است و گرنه چرخه تکرار می‌شود.

• تغییر $u(t)$ به گونه‌ای خواهد بود که هم جواب سازه در رنج قابل تحمل باشد و هم بهینه باشد.

* با جایگذاری $u(t)$ در معادله حرکت داریم:

$$\ddot{x} + \underbrace{\left(2\xi\omega + \frac{c_d}{m}\right)}_{2\xi_{eq}\,\omega_{eq}}\dot{x} + \underbrace{\left(\omega^2 + \frac{k_d}{m}\right)}_{\omega_{eq}^2}x = -\ddot{x}_g$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\xi_{eq}\,\omega_{eq}\,\dot{x} + \omega_{eq}^2\,x = -\ddot{x}_g$$

می‌توان براحتی نشان داد:

• افزایش بازخورد جابجایی ($K_d \uparrow$) باعث افزایش فرکانس و کاهش میرایی می‌شود.

• افزایش بازخورد سرعت ($C_d \uparrow$) باعث افزایش میرایی میشود.

درصورتیکه بخواهیم جابجایی را کاهش دهیم بازخورد میرایی مناسب‌تر است.

مثال - اثر بازخورد سرعت در معادله SDOF:

رفتار دو مدل SDOF با مشخصات مقابل را با بازخورد سرعت تحت اثر دو زلزله ال سنترو و تفت بررسی کنید ($\ddot{x}_g = 0.15g$)

سازه ۱: $m = 10000\ kg$, $k = 400000\ N/m$, $c = 2500\ N.s/m$

سازه ۲: $m = 10000\ kg$, $k = 40000\ N/m$, $c = 830\ N.s/m$

منحنی جابجایی - ξ_a ، ξ_a - حداکثر نیروی کنترل را رسم کنید. فرض کنید $\xi_a = \xi_{eq} - \xi$.

• سازه ۱: $\omega = \sqrt{\frac{400}{10}} = 6.32\ rad/s \longrightarrow T = 0.99\ s$

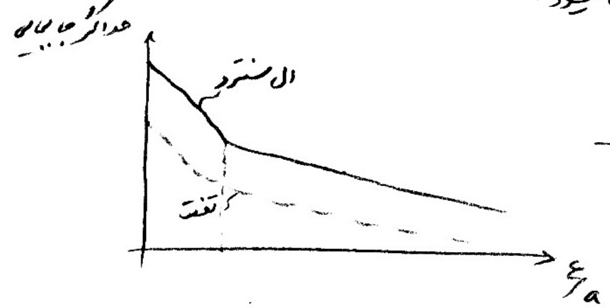
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{2500}{2 \times 10000 \times 6.32} = 0.02$$

• سازه ۲: $\omega = 2$, $T = 3.14\ s$, $\xi = 0.0208$

معادله دیفرانسیل حرکت با کنترل درحالیکه $K_d = 0$ باشد بصورت زیر نوشته میشود:

$$\ddot{x} + 2\omega(\xi + \underbrace{\xi_a}_{\text{تغییرات نسبت میرایی}})\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{x}_g$$

بعنوان نمونه منحنی ε/a . حداکثر جابجایی قاب را نشان داده میشود :



← همانطور که مشاهده میشود با افزایش میرایی جابجایی سازه کاهش می‌یابد.

* هرچه سازه نرم تر ← • با مقدار افزایش میرایی سازه کنترل می‌شود.

• نیروی کنترل کمتری نیاز است.

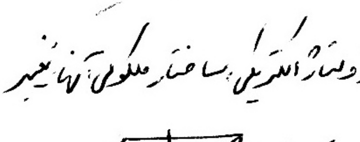
← • مشکل سازه نرم ، جابجایی زیاد است.

۳) کنترل نیمه فعال (semi active controller) :

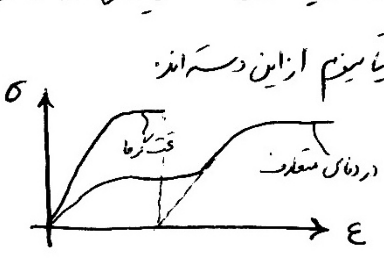
با این نوع کنترل گرها می‌توان با تغییر در مشخصات آنها هنگام وقوع زلزله نیروهای دلخواه را تولید کرد. میراگرهای نیمه فعال به انرژی کمی نیاز دارند. چند نمونه از میراگرهای نیمه فعال عبارتند از :

۳-۱) پیستون هیدرولیکی با روزنه متغیر ← با تنظیم خودکار روزنه ورود و خروج مایع ، نیروی وارد به سازه کنترل می‌شود.

۳-۲) میراگر پیزوالکتریک ← مصالح یا میراگرهای پیزوالکتریک ، مصالحی هستند که تحت اثر ولتاژ الکتریکی ساختار ملکولی آنها تغییر کرده و در امتداد های مختلف تغییر شکل میدهند. این مصالح از نوع خاص پلیمر شکل شده‌اند.



۳-۳) آلیاژهای شکل یاب (shape memory alloy) ← مصالحی هستند که اگر در شرایط محیطی عادی تغییر می‌کنند در اثر تغییرات دما میتوان آنها را به شکل اولیه باز گرداند. آلیاژهایی از قبیل نیکل و تیتانیوم از این دسته اند.



۳-۴) سیالات کنترل پذیر (MR و ER) ← سیالاتی که در اثر میدان های خارجی چسبندگی بین ذرات آن زیاد می‌شود.

سیالاتی هستند که تحت اثر میدان الکتریکی و یا مغناطیسی از حالت مایع به نیمه جامد تبدیل می‌شود.

در صورتیکه سیال تحت اثر میدان الکتریکی تغییر حالت دهد به آن ER (electro rheological) و در صورتیکه سیال تحت اثر میدان مغناطیسی تغییر حالت دهد به آن MR (magneto rheological) گویند.

با مصالح فوق میراگرهای نیمه فعال یا محرک های نیمه فعال ساخته می‌شود.

امروزه MR کاربرد بیشتری دارد.

- انواع روشهای تعیین نیرو های کنترل :

هدف یافتن نیروی کنترل ($u(t)$) است به نحوی که رفتار سازه در حد مجاز قرار گیرد. بهترین روشها عبارتند از:

۱) روش تخصیص قطب ها (pole assignment method)

۲) روش بهینه کنترل خطی (کلاسیک) (linear optimal control)

۳) روش کنترل لحظه‌ای بهینه (instantanious optimal control)

۴) روش کنترل ضربانی (pulse control method)

۵) روش کنترل فازی (fuzzy control method)

- معادلات دیفرانسیل حرکت سازه های کنترل شده در فضای حالت :

(ماتریسی) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) + u(t)$

با اضافه کردن $\dot{x}=\dot{x}$ به دو طرف ، درجه معادله را به یک کاهش می دهیم :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}}_{\dot{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -m^{-1}K & -m^{-1}C \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}}_{q\text{: بردار حالت}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{bmatrix}}_{B} \begin{Bmatrix} p(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \end{Bmatrix}$$

• فضای حالت ← فضایی که حداقل پارامترهای لازم برای مشخص کردن شرایط سازه در یک لحظه بطور مستقل از لحظات دیگر را داشته باشیم

$\rightarrow \quad \dot{q} = Aq + BP(t) + Bu(t) \quad , \quad x = Dq$

که در آن $D = [I \ \ 0]$.