www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۶

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

هادی‌ها و خازن‌ها

در عایق‌ها نظیر شیشه و کاغذ الکترونها به یک اتم خاص وابسته‌اند و نمی‌توانند بطور آزادانه حرکت کنند. در مقابل در داخل هادی‌ها، الکترونها آزادانه به اطراف حرکت می‌کنند، خواص اصلی هادی‌ها به شرح زیر می‌باشد.

(۱) میدان الکتریکی داخل هادی صفر است.

اگر یک کرهٔ هادی در داخل میدان خارجی $\vec{E}_\circ$ قرا گیرد، بارهای مثبت و منفی به طرف نواحی قطبی کره حرکت می‌کنند (به طرف چپ و راست شکل) باعث تولید میدان $\vec{E}'$ داخل هادی می‌شوند، E' در خلاف جهت $\vec{E}_\circ$ است، چون بارهای الکتریکی متحرک هستند، به حرکت خود ادامه می‌دهند تا $\vec{E}'$ بطور کامل $\vec{E}_\circ$ را داخل هادی حذف نماید.

در تعادل الکترواستاتیکی در داخل هادی $\vec{E}$ برابر جمع $\vec{E}_\circ$ و $\vec{E}'$ برابر صفر است.

بطور کلی میدان الکتریکی در الکترواستاتیک در داخل یک هادی ایزوله صفر است.

نتیجه: بار خالص باید روی سطح هادی قرار گیرد. اگر بار خالص داخل هادی باشد، طبق قانون گوس $\vec{E}$ داخل هادی صفر نیست لذا تمام بارهای خالص اضافی باید به طرف سطح هادی جریان پیدا کنند.

هادی سطح گوس

(۲) درست روی سطح بیرونی هادی $\vec{E}$ به سطح هادی عمود است.

اگر مؤلفهٔ مماسی $\vec{E}$ در ابتدا غیر صفر باشد، بارها حرکت می کنند تا اینکه مؤلفهٔ مماسی صفر شود و فقط مؤلفهٔ عمودی $\vec{E}$ باقی بماند.

$$\vec{E}=\vec{E}_n+\vec{E}_t$$

پس از حالت گذرای اولیه $\vec{E}_t$ صفر می‌شود.

نتیجه: مؤلفهٔ مماسی $\vec{E}$ در گذر از سطح هادی بطور پیوسته تغییر می‌کند.

نکته: نتیجه فوق منحصر به حالت استاتیک نمی‌شود بلکه همیشه درست است چه در حالت گذار و چه در حالت استاتیک. مشاهده کردیم که میدان الکتریکی در داخل یک هادی ایزوله صفر است و طبق قانون گوس بار اضافی که روی سطح هادی قرار می‌گیرد باید خودش را روی سطح هادی توزیع نماید.

انتگرال خطی $\oint \vec{E}.\vec{dl}$ را حول مسیر شکل فوق در نظر بگیرید. چون $\vec{E}$ پایستار است. انتگرال خطی حول مسیر بسته abcda برابر صفر است.

$$\oint_{abcda} \vec{E}.\vec{dl}=E_t(\Delta l)-E_n(\Delta x')-\circ(\Delta l')$$

$$+E_n\left(\Delta x\right)=0$$

E_t و E_n مؤلفه‌های مماسی و عمودی میدان الکتریکی روی سطح هادی هستند. پاره خط ab بنحوی اختیارشده است که موازی E_t باشد. در حدّ وقتی که $\Delta x,\Delta x'\to 0$، داریم $E_t\Delta l=0$ ولی چون طول المان خط Δl محدود است، نتیجه می‌گیریم که مؤلفه مماسی میدان الکتریکی روی هادی برابر صفر است.

$E_t=0$ (روی سطح هادی‌ها)

(۳) چگالی بار سطحی σ روی سطح هادی به شعاع انحناء هادی بستگی دارد.

خطوط میدان الکتریکی در حوالی سطح یک هادی و نحوهٔ توزیع بار الکتریکی روی شکل برای یک هادی به شکل دلخواه نمایش داده شده است.

- بار الکتریکی روی سطح کرهٔ هادی به شعاع R بطور یکنواخت توزیع می‌شود.

زیرا شعاع انحناء تمام نقاط کره برابر R است.

- بار الکتریک روی یک صفحهٔ هادی بی‌نهایت بطور یکنواخت توزیع می‌شود، زیرا شعاع انحناء تمام نقاط یک صفحهٔ هادی بی‌نهایت، بی‌نهایت است.

نکته: اگر بار الکتریک q را روی یک صفحه هادی بی‌نهایت قرار دهیم (هر چند نازک) بار الکتریکی بطور یکنواخت روی دو وجه آن توزیع می‌شود.

مثال ۱: میدان الکتریکی حاصل از یک صفحهٔ نازک بی‌نهایت هادی به چگالی σ را در فاصله z از آن محاسبه نمائید.

حلّ: روش اوّل

با استفاده از میدان یک صفحهٔ بی‌نهایت ریاضی با چگالی بار یکنواخت σ، صفحه هادی بی‌نهایت از دو صفحه بی‌نهایت ریاضی تشکیل شده است مطابق شکل که ما آنها را وجه ۱ و وجه ۲ می‌نامیم.

(الف) نقاط خارج

نقطهٔ P را در فاصله z از صفحه بی‌نهایت مطابق شکل در نظر بگیرید. میدان در نقطهٔ P برابر است با حاصل جمع میادین وجوه ۱ و ۲ یعنی

$$E=E_1+E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

(ب) نقاط داخل

نقطهٔ P یک نقطهٔ دلخواه داخل هادی فرض شود. میدان الکتریکی برابر جمع میادین حاصل از وجوه ۱ و ۲ در نقطهٔ P است.

$$E=E_1+E_2=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=0$$

این نتیجه در توافق با خاصیت شماره (۱) هادی‌هاست که میدان در داخل‌ها در الکترواستاتیک صفر است.

روش دوّم: قانون گوس

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

سطوح گوس برای این مسأله یک استوانه به سطح قاعدهٔ A اختیار می‌شود. به علت تقارن‌های موجود در این مسأله E به سطوح قاعدهٔ استوانه گوس عمود است. لذا از قانون گوس داریم

$$E_A + E_A = \frac{\sigma_A + \sigma_A}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow 2E_A = \frac{2\sigma_A}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

یا

$$\vec{E} = \hat{n}\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

که در آن $\hat{n}$ بردار یکه عمود به سطح هادی‌ایست.

مثال ۲- میدان الکتریکی با چگالی σ (غیر یکنواخت) را روی سطح بیرونی آن محاسبه نمائید.

حلّ:

همانطور که گفته شد چگالی بار سطحی غیر یکنواخت است و بستگی به شعاع انحناء هر نقطه روی سطح هادی دارد. میدان الکتریکی نیز روی سطح هادی فقط دارای مؤلفهٔ عمودی ایست لذا برای استفاده از قانون گوس باید سطح گوسی اختیار شود که با این شرایط سازگار باشد. سطح گوسی استوانه‌ای به مساحت قاعدهٔ A و ارتفاع h اختیار می‌شود. توجه شود که A و h هر دو باید بسیار کوچک باشند. با بکارگیری قانون گوس

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

داریم

$$E_n A = \circ . A = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_\circ}$$

پس

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

این نتیجه برای هر هادی به هر شکلی که باشد درست است. یعنی

$$\vec{E} = \hat{n}\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

که در آن $\hat{n}$ بردار یکهٔ عمود به سطح هادی‌ایست. توجه نمائید که $\vec{E}$ روی سطح هادی نقطه به نقطه تغییر می‌کند.

(۴) سطح یک هادی در تعادل الکترواستاتیکی یک سطح همپتانسیل است.
برای تحقیق در این ادعا، دو نقطهٔ A و B را روی سطح یک هادی در نظر بگیرید. چون مؤلفهٔ مماسی میدان E روی سطح هادی $E_t = 0$، اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B

$$\varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = 0$$

چون $\vec{E}$ به $\vec{dl}$ عمود است. لذا نقاط A و B در یک پتانسیل هستند

$$\varphi_A = \varphi_B$$

مثال ۳- دو کره به شعاع های r_1 و r_2 توسط یک سیم رابط نازک به یکدیگر متصل شده‌اند اگر بار q روی یکی از کرات قرار گیرد نحوهٔ توزیع بار را به دست آورید. فرض کنید که کرات از یکدیگر بسیار دور هستند.

حل:

جریان برقرار می‌شود تا تعادل ایجار شود بطوری که چون فرض شده که دو کره از یکدیگر بسیار دور هستند لذا توزیع بار روی کرات یکنواخت است. پس

$$\varphi = \frac{kq_1}{r_1} = \frac{kq_2}{r_2}$$

از طرفی مجموع بار دو کره باید برابر q باشد یعنی

$$q_1 + q_2 = q$$

از حلّ دو معادله

$$\begin{cases} \dfrac{q_1}{r_1} = \dfrac{q_2}{r_2} \\ q_1 + q_2 = q \end{cases}$$

می توان q_1 و q_2 بار هر کره را بر حسب داده‌های مسأله q، r_1 و r_2 به دست آورد.

$$q_1 = \frac{qr_1}{r_1 + r_2} \rightarrow \sigma_1 = \frac{q}{4\pi r_1 (r_1 + r_2)}$$

$$q_2 = \frac{qr_2}{r_1 + r_2} \rightarrow \sigma_2 = \frac{q}{4\pi r_2 (r_1 + r_2)}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

نسبت چگالی بارها معکوساً متناسب است با شعاعها. نتیجه می‌گیریم که نواحی با کمترین شعاع انحناء دارای بزرگترین σ هستند. از طرفی می‌دانیم که

$$E_1=\frac{kq_1}{r_1^2}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{r_2}{r_1}$$

$$E_2=\frac{kq_2}{r_2^2}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_\circ}$$

پس شدت میدان الکتریکی روی سطح هادی در تیزترین نقاط بیشترین است.

مثال ۴- اگر حداکثر میدان الکتریکی که قبل از آن هوا عایق و بعد از آن هوا هادی ایست برابر $3\times10^6\ \frac{v}{m}=\frac{N}{c}$ باشد.

a- ماکزیمم باری که کره‌ای به شعاع R می‌تواند نگه دارد چه مقدار است؟

b- ماکزیمم پتانسیل کره‌ای به شعاع R چه مقدار است؟

حلّ:

a- میدان الکتریکی خارج سطح کره $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$

$$E=E_{\max}=3\times10^6=\frac{\sigma_{\max}}{\varepsilon_\circ}$$

ماکزیمم بار q از $\sigma_{\max}$ به دست می‌آید.

$$q=4\pi R^2\sigma_{\max}=4\pi R^2\left(\varepsilon_\circ E_{\max}\right)$$
$$=4\pi R^2\left(8.85\times10^{-12}\right)\left(3\times10^6\right)$$
$$=0.33\times10^{-3}\times R^2\quad c$$

بطور مثال اگر R=2m باشد

$$q=1.33\times10^{-3}\quad c$$

b- با بکار گرفتن بار ماکزیمم q پتانسیل ماکزیمم کره محاسبه می‌شود

$$\varphi_{\max}=\frac{kq}{R}=\frac{\left(8.99\times10^9\right)\left(0.33\times10^{-3}R^2\right)}{R}$$
$$\varphi_{\max}=2.96\times10^6 R$$

برای کره‌ای به شعاع R=2m

$$\varphi_{\max}=2.96\times2\times10^6=5.93\times10^6 v$$

(۵) نیروی وارد بر یک هادی

مشاهده گردید که روی سطح هادی با چگالی بار سطحی σ، مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی صفر است، در نتیجه در گذر از سطح هادی مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی بطور پیوسته تغییر می‌کند در صورتی که مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی ناپیوستگی $\Delta E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ را به نمایش می‌گذارد. یک تکهٔ کوچک دیسک مانند بار روی سطح یک هادی مطابق شکل در نظر بگیرید. نیروی وارد بر این تکه چه مقدار است؟

برای جواب دادن به این سؤال، میدان الکتریکی کل روی سطح هادی

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{تکه}} + \vec{E}'$$

بطوری که $\vec{E}_{\text{تکه}}$ میدان مربوط به بار روی تکه و $\vec{E}'$ مربوط به تمام بارهای دیگر است. طبق قانون سوّم نیوتن تکه نمی‌تواند به خودش نیرو وارد کند. لذا نیروی وارد به تکه فقط از $\vec{E}'$ ناشی می شود. با توجه به این که تکه یک دیسک سطح فرض شده است میدان الکتریکی حاصل از آن

$$\vec{E}_{\text{تکه}} = \begin{cases} \hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} & z > \circ \\ -\hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} & z < \circ \end{cases}$$

طبق اصل بر هم نهی، میدان الکتریکی سطح بالای هادی

$$\vec{E}_{\text{بالا}} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} + \vec{E}'$$

و میدان الکتریکی روی سطح پائینی هادی

$$\vec{E}_{\text{پائین}} = -\hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} + \vec{E}'$$

توجه کنید که $\vec{E}'$ در گذر از سطح هادی پیوسته است زیرا درصورت برداشتن تکه میدان در سوراخ باقی مانده از خود عدم پیوستگی نشان نمی‌دهد (ناپیوستگی از بارهای روی تکه ناشی می‌شود). با حذف میدان تکه از دو معادله فوق داریم

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{\text{بالا}} + \vec{E}_{\text{پائین}}\right) = \vec{E}_{\text{متوسط}}$$

این نتیجه در مورد هر بار سطحی صادق است. در مورد خاص هادی $\vec{E}=\hat{k}\dfrac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ بالا
و $\vec{E}=\circ$ پایین لذا

$$\vec{E}_{\text{متوسط}}=\frac{1}{2}\left(\hat{k}\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}+\circ\right)=\hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}$$

پس نیروی وارد به تکه

$$\vec{F}=q\vec{E}_{\text{متوسط}}=\hat{k}\sigma A\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}=\hat{k}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_\circ}$$

که در آن A مساحت تکه است. نیرو در واحد سطح هادی عبارت خواهد بود از

$$\vec{f}=\frac{\vec{F}}{A}=\hat{k}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_\circ}$$

و فشار الکترواستاتیکی وارد به تکه

$$\vec{f}=\frac{\vec{F}}{A}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_\circ}=\frac{1}{2}\varepsilon_\circ\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\right)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^2 \quad w=\frac{\varepsilon_\circ}{2}\int E^2 dv$$

این فشار به طرف خارج سطح است بدون توجه به علامت σ.

(۶)- هیچ میدان خارجی نمیتواند به داخل هادی نفوذ کند.

اگر حفره‌ای در داخل هادی باشد اثر میدان خارجی در حفره توسط هادی پوشیده میشود. زیرا در سطح خارجی میدان توسط بارهای القائی خنثی میشود. اگر حفره‌ای که توسط یک رسانا احاطه شده است، بدون بار باشد میدان داخل آن صفر خواهد بود. در حقیقت هیچ بار بر روی دیواره حفره وجود ندارد. به این دلیل است که اگر در طول یک طوفان تندری در داخل اتومبیل فلزی باشید، ایمن می‌مانید، ممکن است پخته شوید ولی از برق گرفتگی مصون هستید. از همین قاعده برای حفاظت وسایل حساس در داخل قفس فاراده که به زمین متصل شده است، استفاده میشود. در عمل، لازم نیست که حصار یک هادی پیوسته و توپر باشد بلکه در اغلب موارد یک شبکهٔ سیمی نیز کار را انجام میدهد.

(۷) میدان بارهای داخل حفره‌ای در داخل هادی با خارج ارتباط برقرار می کنند.

میدان ناشی از بارهای داخل حفره برای تمام نقاط خارج توسط بارهای القائی سطح داخل از بین میرود. امّا بارهای جبران کننده بر روی سطح خارجی هادی عملاً حضور q را با دنیای خارج در میان می گذارد. ضمناً

مجموع بار القائی بر روی دیوارهٔ حفره با بار داخل مساوی و مختلفالعلامه است. زیرا که اگر حفره را با سطح گوسی احاطه کنیم برای تمامی نقاط داخل هادی $\oint \vec{E}.\vec{dl}$ و بنابراین مجموع بار احاطه شده می بایست صفر باشد، یعنی بار روی دیواره حفره برابر q- لذا بار روی سطح خارجی هادی برابر q+ است.

مثال ۵- یک کرهٔ هادی بدون بار که مرکز آن بر مبدأ منطبق است، دارای حفرهای به شکل دلخواه است که از آن بیرون آورده شده است (مطابق شکل) در جای در داخل حفره بار q+ را قرار داده ایم.
a- میدان خارج کره چیست؟
b- اختلاف پتانسیل یک نقطه در خارج کره با یک نقطه در داخل آن را به دست آورید.
میدان الکتریکی در نقطهٔ P صرفنظر از شکل حفره و نحوهٔ استقرار بار عبارتست از:

$$\vec{E}=\frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

هادی هر گونه اطلاعات راجع به طبیعت حفره را از ما پنهان میسازد و تنها مجموع بار موجود در آن برای ما معلوم است. بار q+ بار q- را بر روز دیواره حفره القاء میکند و این بار خود را طوری توزیع میکند که میدان آن میدان بار q را برای تمام نقاط خارج حفره خنثی می کند. از آنجا که هادی دارای هیچ بار خالصی نیست، بار q+ خود را به طور یکنواخت بر روی سطح کره پخش میکند (به این دلیل یکنواخت است که اثر نامتقارنی بار نقطهای q+ توسط بار القائی q- بر روی سطح داخلی خنثی میشود) پس برای نقاط خارج کره تنها چیزی که تداوم مییابد، میدان بار q+ است که بطور یکنواخت بر روی سطح خارجی توزیع شده است.
c- اختلاف پتانسیل یک نقطه داخل کرهٔ هادی و یک نقطهٔ خارج آن مثلاً نقطهٔ P عبارتست از

$$\Delta\varphi=\frac{kq}{r}-\frac{kq}{R}$$

که در آن R شعاع کره است.

مثال ۶- در کرهای هادی خنثی به شعاع R دو حفرهٔ کروی مطابق شکل ایجاد شدهاند. در مرکز هر حفره یک بار نقطهای قرار میدهیم، بارها را q_a و q_b بنامید.

(a) چگالی بارهای سطحی σ_a، σ_b و σ_R را به دست آورید.

(b) میدان خارج هادی چیست؟
(c) میدان در داخل هر حفره چیست؟
(d) نیروی وارد بر بارهای q_a و q_b چقدر است؟
(e) اگر بار سوّم q_c را از نزدیک هادی بیآوریم .
هر یک از این جوابها چگونه تغییر می کنند.

حلّ:

a- $\sigma_a = -\dfrac{2a}{4\pi r_a^2}$ $\quad$ $\sigma_b = -\dfrac{q_b}{4\pi r_b^2}$ $\quad$ $\sigma_R = -\dfrac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$

b- $\vec{E} = \hat{r}\dfrac{k\left(q_a + q_b\right)}{r^2}$

c- $\vec{E}_a = \hat{r}\dfrac{kq_a}{r^2}$ $\quad$ $\vec{E}_b = \hat{r}\dfrac{kq_b}{r^2}$

d- **نیروی وارد به بارهای** q_a و q_b هر دو صفرند.

e- اگر بار q_c را به نزدیکی هادی بیآوریم فقط σ^R ، $\vec{E}$ تغییر خواهند کرد.

خازن ها:

خازن وسیله‌ایست که در ان انرژی ذخیره می‌شود، خازن‌ها دارای شکل و اندازه‌های مختلف هستند. شکل اصلی تشکیل شده است از دو هادی که بار مساوی و مختلف‌العلامه را حمل می‌کنند. خازن ها دارای کاربردهای زیادی در الکترونیک هستند. بطور مثال ذخیرۀ انرژی، تأخیر در تغییرات پتانسیل وقتی با مقاومت ها کوپل می‌شوند، فیلتر کردن سیگنال‌های با فرکانس‌های ناخواسته، تشکیل مدارهای تشدید و ساختن مقسم‌های ولتاژ وابسته و غیر وابسته به فرکانس وقتی با مقاومت‌ها ترکیب شوند. ظرفیت خازن به صورت $c = \dfrac{q}{\Delta\varphi} = \dfrac{q}{v}$ تعریف می‌شود. از این به بعد اختلاف پتانسل را با v نمایش می‌دهیم چیزی که بیشتر متداول است. از لحاظ فیزیکی ظرفیت معّرف قابلیت ذخیره‌سازی بار الکتریکی در اختلاف پتانسیل v است. دریکاهای SI واحد ظرفیت farad (F) است.

$$1F = 1Coulomb/Volt = 1C/V$$

ظرفیت‌های متداول در فاصله پیکو فاراد (pico/farad) $1PF = 10^{-12}F$ تا میلی فاراد (milli farad) هستند.

$$1mF = 10^{-12}F = 1000MF; \quad 1MF = 10^{-6}F$$

ساده‌ترین خازن شامل دو صفحۀ هادی به سطح A است که با یکدیگر موازی‌اند و فاصله آنها از یکدیگر d است (مطابق شکل)

خازن حقیقی و ایده‌آل

فرض کنید که دو صفحه خازن مسطح خیلی دور از یکدیگر باردار شده باشند. نحوهٔ توزیع بار روی شکل نمایش داده شده است. پس از این که دو صفحه در مجاورت یکدیگر قرار گیرند، به دلیل وجود نیروی الکتریکی بارهای وجوه بیرونی به حدی وجوه داخلی حرکت می‌کنند. با این وجود هموز مقدار کمی بار روی وجوه بیرونی باقی می‌ماند.

اثر لبه خطوط میدان داخل یکنواخت خازن حقیقی میدان خارج خازن غیر صفر

خطوط میدان عملاً بین دو صفحه یکنواخت است ولی میدان بطور کامل بین دو صفحه محدود نشده است به علت وجود بار روی صفحات بیرونی میدان خارج از خازن گرچه ضعف وی وجود دارد. از آنجا که خازن حقیقی محدود است لذا خطوط میدان الکتریکی در لبه خازن خطوط مستقیم نیستند این به اثر لبه معروف است (edge effect) و میدان‌های غیر یکنواخت نزدیک لبه را fuinging fulds نامند. در آنچه که خواهیم گفت خازن ایده‌آل را در نظر می‌گیریم و آن حالتی ایست که خطوط میدان فقط بین دو صفحهٔ خازن موجود و یکنواخت است از اثر لبه نیز صرف نظر می‌شود. در عمل وقتی که ابعاد صفحات خازن نسبت به فاصله بین آن دو بسیار بزرگتر است با تقریب خوب می‌توان خازن را ایده‌آل فرض نمود. همانطور که مشاهده می‌شود میدان خارج از خازن صفر و اثر لبه نیز وجود ندارد.

ظرفیت خازن مسطح:

برای محاسبه ظرفیت، ابتدا باید میدان الکتریکی بین صفحات خازن را به دست آورد و سپس با استفاده از آن اختلاف پتانسیل دو صفحه را محاسبه و بعد با استفاده از تعریف، ظرفیت را محاسبه نمود. میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن از دو طریق قابل محاسبه است، میدان طبق اصل برهمنهی برابر جمع میدان دو صفحه مثبت و منفی ایست.

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

روش دیگر از قانون گوس است، بعلت تقارن ستونی (Planor) سطح گوس مکعب مستطیل شکلی به سطح A' مطابق شکل در نظر می‌گیریم که یک وجه آن داخل صفحه مثبت خازن است. میدان در همه جا با بکارگیری قانون گوس پیدا می‌شود

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$E_{A'} + \circ, A = \frac{q}{\varepsilon_\circ} = \frac{\sigma A'}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

برای یافتن اختلاف پتانسیل بین صفحات مسیر مستقیمی از صفحهٔ منفی به صفحه مثبت اختیار می‌شود

$$v = \Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = -\int_-^+ \vec{E}.\vec{dl} = -\int_-^+ -\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\hat{j}.\hat{j}dy$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} d$$

از تعریف ظرفیت داریم

$$c = \frac{q}{v} = \frac{\varepsilon_\circ q}{\sigma d} = \frac{\varepsilon_\circ A}{d}$$

نکته۱: در محاسبه اختلاف پتانسیل v=Ed و این به نوبه خود واحد دیگری برای E در یکاهای SI می‌دهد. یعنی ولت بر متر.

نکته ۲: توجه کنید که c فقط به فاکتورهای هندسی A و d بستگی دارد. ظرفیت c بطور خطی با سطح A افزایش می‌یابد، زیرا برای اختلاف پتانسیل مفروض صفحه بزرگتر بار بیشتر را می‌تواند نگه دارد. از طرف دیگر، c بطور معکوس با d فاصله بین صفحات متناسب است. برای q ثابت چه مقدار d کوچکتر باشد اختلاف پتانسیل v کوچکتر است.

خازن استوانه‌ای

خازن استوانه‌ای متشکل از دو استوانهٔ متحدالمحور به شعاع‌های داخلی a و خارجی b در نظر بگیرید. طول هر دو استوانه L است که بسیار بزرگتر از b-a فاصله دو استوانه است لذا از اثر لبه می‌وان صرف نظر کرد. با استوانهٔ داخلی q+ و استوانه خارجی q- ظرفیت این خازن چه مقدار است؟

حلّ:

برای محاسبه ظرفیت، میدان الکتریکی که فقط درفاصله $a<\rho<b$ غیر صفر است باید محاسبه شود. با توجه به تقارن استوانه‌ای سیستم سطح گوس یک استوانهٔ کوآکیان به طول l<L و شعاع ρ و در فاصله $a<\rho<b$ در نظر می‌گیریم.

$$\underbrace{\oint}_{\text{مسیر انتگرال گیری}} \vec{E}.\vec{ds} = EA = E\left(2\pi\rho l\right) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ\rho}$$

که در آن $\lambda = \frac{q}{L}$ بار بر واحد طول است. توجه دارید که میدان الکتریکی فقط در فاصله $a<\rho<b$ غیر صفر است. برای $\rho<\circ$ بار محصور شده q_{enc} صفر است چون هر بار خالصی در هادی باید روی سطح آن جای گیرد. مشابهاً برای $\rho>b$، $q_{enc}=\lambda l-\lambda l=\circ$ چون سطح گوس مقادیر مساوی و مختلف‌العلامه باراز دو هادی را دربر می‌گیرد.

اختلاف پتانسیل

$$v=\Delta\varphi=-\int_b^a \vec{E}.\vec{dl}=-\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_{\circ}\rho}\hat{\rho}.\hat{\rho}d\rho$$

$$=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\rho\Big|_b^a=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{a}{b}$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a}$$

که در آن مسیر انتگرال گیری در جهت شعاعی و از استوانه خارجی به داخلی گرفته شده است (مطابق شکل) پس ظرفیت

$$c=\frac{q}{v}=\frac{2\pi\varepsilon_{\circ}L}{\ln b/a}$$

یک بار دیگر مشاهده می‌شود که ظرفیت c فقط به فاکتورهای هندسی L، a و b بستگی دارد.

خازن کروی

به عنوان مثال سوّم، خازن کروی را در نظر می‌گیریم که شامل دو پوستهٔ کروی به شعاع‌های a و b مطابق شکل از پوستهٔ داخلی دارای بار q+ که بطور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است و پوستهٔ خارجی دارای بار مساوی و مختلف العلامه q- است. ظرفیت این پیکربندی چه مقدار است؟

مسیر انتگرال‌گیری سطح گوس

حلّ:

میدان الکتریکی فقط در ناحیه $a<r<b$ غیر صفر است. با استفاده از قانون گوس داریم

$$\oiint \vec{E}.\vec{ds}$$

$$E4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_{\circ}}\Rightarrow\vec{E}=\frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

$$v=\Delta\varphi=-\int_b^a \vec{E}.\vec{dl}=-\int_b^a \frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^2}\hat{r}.\hat{r}dr$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\left(-\frac{1}{r}\Big|_b^a\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

ظرفیت

$$c=\frac{q}{v}=4\pi\varepsilon_{\circ}\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

دوباره، ظرفیت فقط به ابعاد هندسی a و b بستگی دارد.

نکته:

ظرفیت یک کرهٔ هادی ایزوله به شعاع a (وقتی که دومین کره در بی‌نهایت باشد) را می‌توان به دست آورد. در حدّ وقتی که $b \to \infty$ معادله فوق به صورت

$$c = 4\pi\varepsilon_\circ a$$

این رابطه را می‌توان بطور مستقیم نیز به دست آورد. یک کرهٔ هادی به شعاع R که بار q روی آن بطور یکنواخت توزیع شده است دارای پتانسیل $v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R}$ است. بی‌نهایت را به عنوان نقطهٔ مرجع که دارای پتانسیل صفر است در نظر گرفته‌ایم $v(\infty) = \circ$ لذا

$$c = \frac{q}{v} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R}} = 4\pi\varepsilon_\circ R$$

همانطور که انتظار می‌رفت ظرفیت یک خازن ایزوله فقط به هندسه آن یعنی شعاع R بستگی دارد.

خازنها در مدار الکتریکی

یک خازن را می‌توان با وصل کردن صفحات آن به ترمینال‌های یک باطری که اختلاف پتانسیل آن v است، شارژ نمود. صفحه‌ائی که به ترمینال مثبت وصل است دارای بار مثبت و صفحه‌ائی که به ترمینال منفی وصل است دارای بار منفی. در حقیقت باطری را می‌توان به عنوان یک پمپ برای آوردن بار q از یک صفحه به صفحهٔ دیگر خازن دانست.

اتصال موازی

دو خازن c_1 و c_2 را که بطور موازی متصل شده‌اند را به باطری با اختلاف پتانسیل v وصل می‌کنیم. بار q_1 روی c_1 و بار q_2 روی c_2 قرار بگیرد. صفحه چپ هر دو خازن c_1 و c_2 به ترمینال مثبت باطری و دارای پتانسیل مانند پتانسیل ترمینال مثبت هستند، مشابها صفحات راست به ترمینال منفی صل هستند. لذا اختلاف پتانسیل هر دو خازن v است.پس

$$c_1 = \frac{q_1}{v} \quad , \quad c_2 = \frac{q_2}{v}$$

این دو خازن را می‌توان با یک خازن معادل c_{eq} تعویض نمود بطوری که بار کل آن q برابر جمع بار خازنهای c_1 و c_2 ولی اختلاف پتانسیل آن v برابر اختلاف پتانسیل خازنهای c_1 و c_2 است پس

$$q = q_1 + q_2 = c_1 v + c_2 v = (c_1 + c_2) v$$

ظرفیت خازن معادل $$c_{eq} = \frac{q}{v} = c_1 + c_2$$

پس ظرفیت خازنهائی که بطور موازی وصل شده‌اند با یکدیگر جمع می‌شوند.
تعمیم این مسأله به هر تعداد خازن موازی ساده است.

$$c_{eq} = c_1 + c_2 + \ldots + c_N = \sum_{i=1}^{N} c_i$$ (موازی)

توجه: بار خازن معادل q برابر جمع بار خازنهای $c_N \ldots c_2 c_1$ یعنی

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_N$$

اختلاف پتانسل خازن معادل v برابر است با اختلاف پتانسیل هر یک از خازنهای $c_N \ldots c_2, c_1$

اتصال سری:

فرض کنید خازن‌های c_1 و c_2 به صورت سری به یکدیگر متصل باشند، مطابق شکل صفحهٔ چپ خازن ۱ به ترمینال مثبت باطری وصل شده است و بار آن مثبت q+ می شود، صفحهٔ راست خازن ۲ به ترمینال منفی وصل شده است و دارای بار منفی q- است. در مورد صفحات داخل چه می‌توان گفت؟ آنها در ابتدا بدون بارند. چون صفحات خارجی دارای بارهای مساوی و مختلف‌العلامه‌اند، لذا صفحهٔ راست خازن ۱ بار q- و صفحه چپ خازن ۲ بار q+ را به دست می‌آورند.

اختلاف پتانسیل خازن‌های c_1 و c_2

$$v_1 = \frac{q}{c_1} \quad ; \quad v_2 = \frac{q}{c_2}$$

از شکل مشاهده می‌شود که اختلاف پتانسیل کل بسادگی برابر جمع اختلاف پتانسیل‌های هر خازن است یعنی

$$v = v_1 + v_2$$

این دو خازن را می‌توان با یک خازن معادل به ظرفیت

$$c_{eq} = \frac{q}{v}$$

تعویض نمود. با توجه به این که پتانسیل‌ها در خازن‌های سری جمع می‌شوند

$$\frac{q}{c_{eq}} = \frac{q}{c_1} + \frac{q}{c_2}$$

ظرفیت خازن معادل برای دو خازن سری

$$\frac{1}{c_{eq}}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}$$

تعمیم به هر تعداد خازن که به صورت سری متصل شده اند. به سادگی امکان‌پذیر است یعنی

$$c_{eq}=\frac{1}{c_{eq}}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\ldots+\frac{1}{c_N}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{c_i}$$

توجه: در خازنهای سری بار خازن معادل q برابر است با بار هر یک از خازنهای $c_N,\ldots,c_2,c_1$ و اختلاف پتانسیل خازن معادل v برابر است با جمع اختلاف پتانسیل‌های خازنهای $c_N,\ldots,c_1$ یعنی

$$v=v_1+v_2+\ldots+v_N$$

انرژی تشکیل خازن (انرژی ذخیره شده در یک خازن)

همانطور که گفته شد، خازن ها را می‌توان برای ذخیره کردن انرژی الکتریکی به کار گرفت تعداد انرژی ذخیره شده برابر است با مقدار کاری که صرف شارژکردن آن شده است.در حین فرآیند شارژ کردن، بلطری برای کندن بار از یک صفحه و جایگزین کردن آن روی صفحهٔ دیگر باید کار انجام دهد. کار انجام شده توسط باطری برای شارژ کردن خازن تا بار q را از سه روش محاسبه می‌کنیم.

روش I:

فرض کنید خازنی به ظرفیت c تا بار q شارژ شده باشد.

اگر مساحت صفحات خازن را A بگیریم، انرژی تشکیل خازن از طریق رابطه‌ائی که در فصل پتانسیل و انرژی الکترواستاتیکی به دست آمد قابل محاسبه است یعنی

$$w=\frac{1}{2}\int\rho\varphi dv$$

توزیع

پتانسیل صفحه مثبت φ_+ و چگالی بار سطحی آن $\sigma_+=\frac{q}{A}$

پتانسیل صفحه منفی φ_- و چگالی بار سطحی آن $\sigma_-=\frac{-q}{A}$

لذا

$$w=\frac{1}{2}\sigma_+\varphi_+A+\frac{1}{2}\sigma_-\varphi_-A$$

$$w=\frac{1}{2}q\varphi_+-\frac{1}{2}q\varphi_-=\frac{1}{2}q\left(\varphi_+-\varphi_-\right)$$

$$=\frac{1}{2}qv$$

با استفاده از تعریف ظرفیت $c=\frac{q}{v}$ رابطه فوق را به صورت دیگر نیز می‌توان نوشت

$$w=\frac{1}{2}qv=\frac{1}{2}cv^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$$

روش II:

درفصل پتانسیل و انرژی الکترواستاتیکی گفتیم، کاری که برای تشکیل یک توزیع صرف می‌شود در میدان حاصل از توزیع ذخیره می‌شود، یعنی

$$w=\frac{\varepsilon_\circ}{2}\int E^2dv$$

تمام
۱۰۰

میدان الکتریکی حاصل از خازن شارژشده به نقاط بین صفحات خازن محدود است و برابر $w=\frac{\varepsilon_\circ}{2}\int E^2dv$ $\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ است و در نقاط خارج صفحات میدان الکتریکی صفر است. لذا انتگرال گیری فقط به نقاط داخل حجم خازن محدود می شود

$$w=\frac{\varepsilon_\circ}{2}\int E^2dv=\frac{\varepsilon_\circ}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_\circ^2}Ad=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 Ad}{\varepsilon_\circ}$$

که در آن σ چگالی بار سطحی خازن، A مساحت صفحات خازن و d فاصله بین دو صفحه است با استفاده از ظرفیت خازن سطح $c=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}$ رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید.

$$w=\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$$

که دقیقاً همان مقداریست که در روش I به دست آمد.

توجه: معادل بودن دو رابطهٔ انرژی تشکیل یعنی $w=\frac{1}{2}\int\rho\varphi dv$ و $w=\frac{\varepsilon_\circ}{2}\int E^2dv$ حداقل در مورد

توزیع تمام
۱۰۰

خاص یک خازن به اثبات رسید. گرچه این دو رابطه بطور کلی با یکدیگر معادل‌اند.

روش III:

در این روش مستقیماً اقدام می‌شود. فرض کنید خازن در ابتدا بدون بار باشد. چون بار خالصی روی صفحات آن موجود نیست میدان الکتریکی بین صفحات وجود ندارد. اگر ظرف جادوئی ویلرهائی از صفحهٔ پائینی به بالائی وجود داشته باشد (مطابق شکل) از صفحهٔ پائینی شروع می‌کنیم، ظرف را با بار $+dq'$ پر و از طریق پله بالا می‌بریم و محتویات آن را روی صفحهٔ بالائی می‌ریزیم به طوری که صفحهٔ بالائی به اندازهٔ $+dq'$ باردار می‌شود چون صفحهٔ پائینی در ابتدا خنثی بود پس از برداشتن $+dq'$ بار از آن به اندازهٔ $-dq'$ باردار می‌شود پس از خالی کردن ظرف دوباره از پله‌ها پائین می‌آئیم و یک ظرف پر دیگر $+dq'$ را دوباره از طریق پله‌ها روی صفحهٔ بالائی می‌ریزیم. این کار به کرات انجام می‌شود. بدین طریق بار روی خازن را ایجاد می‌کنیم در اثر ایجاد بار روی صفحات خازن میدان الکتریکی تولید می‌شود. فرض کنید بار روی صفحهٔ بالائی در یک لحظهٔ زمانی $+q'$ باشد، اختلاف پتانسیل بین دو صفحه $v'=\frac{q'}{c}$. برای قرار دادن بار $+dq'$ روی صفحهٔ بالائی کار انجام شده در مقابل نیروی الکتریکی

$$dw=v'dq'=\frac{q'}{c}dq' \quad \vec{D}=\varepsilon_{\circ}k_e\vec{E}$$

اگر در پایان فرآیند شارژ کردن خازن بار روی صفحهٔ بالائی q باشد، کل کار انجام شده در این فرآیند

$$w=\int_{\circ}^{q}\varepsilon_c' dq'=\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$$

مشاهده می‌شود که نتیجه در تطابق است با آنچه که از دو روش دیگر به دست آمد.

مثال ۹- دو پوسته کروی هادی به شعاعهای a و b را مطابق شکل در نظر بگیرید. روی پوسته کروی داخل بار q_a و روی پوسته کرئی خارجی بار q_b را قرار می‌دهیم.

- a- نحوهٔ توزیع بار الکتریکی را روی پوسته‌های کروی تعیین کنید.
- b- پتانسیل الکتریکی سطح پوستهٔ کروی داخلی را محاسبه کنید.

حلّ:

- a- بار q_a روی سطح کرهٔ داخلی r=a بطور یکنواخت توزیع می‌شود. بار $-q_a$ روی سطح داخلی پوستهٔ کروی در r=b و بار q_a+q_b روی سطح خارجی پوستهٔ کروی به شعاع r=b
- b- پتانسیل کره داخلی

$$\varphi_a = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}.\vec{dl}$$
$$= -\int_{\infty}^{b} \frac{k\left(q_a + q_b\right)}{r^2}\hat{r}.\hat{r}dr - \int_{b}^{a} \frac{kq_a}{r^2}\hat{r}.\hat{r}dr$$
$$= \frac{k\left(q_a + q_b\right)}{r}\Big|_{\infty}^{b} + \frac{kq_a}{r}\Big|_{b}^{a} = \frac{k\left(q_a + q_b\right)}{b} + \frac{kq_a}{a} - \frac{kq_b}{b}$$
$$= \frac{kq_a}{b} + \frac{kq_b}{b} + \frac{kq_a}{a} - \frac{kq_b}{b}$$
$$= \frac{kq_a}{b} + \frac{kq_b}{b}$$

مثال ۱۰- خازن سطحی با جوشنهای مربعی به ضلع a مفروض است. این خازن شارژ شده و سپس از منبع تغذیه جدا می‌شود. اگر صفحهٔ بالائی خازن را به اندازه زاویهٔ کوچک θ بچرخانیم (مطابق شکل) تغییر نسبی انرژی پتانسیل الکتریکی را محاسبه نمائید.

ظرفیت خازن $\quad c_1 = \frac{\varepsilon_\circ a^2}{d}$

قبل از چرخاندن صفحه

انرژی پتانسیل خازن $\quad w_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c_1^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2 d}{\varepsilon_\circ a^2}$

بعد از چرخاندن صفحه

$$dc^2 = \frac{\varepsilon_\circ a dx}{d + x\tan\theta}$$
$$c^2 = \int_{\circ}^{a} \frac{\varepsilon_\circ a dx}{d + x\tan\theta} = \frac{\varepsilon_\circ a}{\tan\theta}\ln\left(d + x\tan\theta\right)\Big|_{\circ}^{a}$$
$$= \frac{\varepsilon_\circ a}{\tan\theta}\ln\frac{d + a\tan\theta}{d}$$
$$w_2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c_2^2} = \frac{q^2\tan\theta}{2\varepsilon_\circ a\ln\left(\frac{d + a\tan\theta}{d}\right)}$$
$$\frac{w_2 - w_1}{w_1} = \frac{a\tan\theta}{d\left[\ln\left(\frac{d + a\tan\theta}{d}\right)\right]}$$
$$\tan\theta \approx \theta$$
$$\frac{w_2 - w_1}{w_1} = d\ln\left(\frac{d + a\theta}{d}\right)$$

مثال ۱۱- سه صفحه موازی هادی مطابق شکل در نظر بگیرید بار q را روی صفحه وسط قرار می‌دهیم (دو صفحه خارجی توسط سیم رابط به هم متصلند). اگر صفحهٔ وسطی به اندازهٔ زاویه θ (θ کوچک) بچرخد مطلوبست محاسبهٔ مقدار بار روی هر وجه صفحه وسطی. ابعاد صفحات را $a\times a$ بگیرید.

$$dc_1=\frac{\varepsilon_\circ a dx}{d_1+x\tan\theta}=\frac{\varepsilon_\circ a}{d_1}(1-x\theta)\,dx$$

$$dc_2=\frac{\varepsilon_\circ a dx}{d_2-x\tan\theta}=\frac{\varepsilon_\circ a}{d_2}(1+x\theta)\,dx$$

$$c_1=\int_\circ^a\frac{\varepsilon_\circ a}{d_1}(1-x\theta)\,dx=\frac{\varepsilon_\circ a^2}{d_1}\left(1-\frac{1}{2}a\theta\right)$$

$$c_2=\int_\circ^a\frac{\varepsilon_\circ a}{d_2}(1+x\theta)\,dx=\frac{\varepsilon_\circ a^2}{d_2}\left(1+\frac{1}{2}a\theta\right)$$

نحوهٔ توزیع بار

$$q_1+q_2=q$$

$$\Rightarrow q_1+\frac{q_1c_2}{c_1}=q\Rightarrow q_1$$

$$\frac{q_1}{c_1}=\frac{q_2}{c_2}$$

مثال ۱۲- دو کرهٔ هادی به شعاعهای a و b و با فاصله d از یکدیگر در نظر بگیرید. به طوری که $d>>a,b$ ظرفیت این سیستم را محاسبه کنید.

حلّ:

پتانسیل کرهٔ با بار مثبت $$\varphi_+=\frac{kq}{b}+\frac{-kq}{d-b}$$

پتانسیل کرهٔ بار بار منفی $$\varphi_-=\frac{-kq}{b}+\frac{kq}{d-a}$$

اختلاف پتانسیل دو کره

$$v=\Delta\varphi=\varphi_+-\varphi_-=\frac{kq}{b}-\frac{kq}{d-b}+\frac{kq}{a}-\frac{kq}{d-a}$$

$$\approx kq\left(\frac{1}{b}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

$$c=\frac{q}{v}=\frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{b}-\frac{2}{d}+\frac{1}{a}}$$

مثال ۱۳- کره‌ائی به شعاع R دارای بار $+q$ است انرژی پتانسیل کره چه مقدار است. انرژی تشکیل بار q+ روی کره)

حلّ:
ظرفیت یک کرهٔ منفرد به شعاع R

$$c = 4\pi\varepsilon_\circ R$$

$$w = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ R} = \frac{1}{8}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_\circ R}$$

انرژی تشکیل از رابطه

$$w = \frac{\varepsilon_\circ}{2}\int E^2 dv$$

چون میدان الکتریکی داخل کرهٔ هادی صفر و خارج آن $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$

$$w = \frac{\varepsilon_\circ}{2}\int_\circ^\pi\int_\circ^{2\pi}\int_R^\infty \frac{k^2q^2}{r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$w = \frac{\varepsilon_\circ}{2}4\pi\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^\infty k^2q^2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_\circ R}$$

همانطور که انتظار می‌رفت نتیجه قبلی‌ایست.

نکته: با استفاده از نتیجه فوق می‌توان ظرفیت در مثال ۱۲را از طریق انرژی به دست اورد. روشی که گاهی به محاسبه ظرفیت به کار گرفته می‌شود

$$w = w_a + w_b + w_{ab}$$

w انرژی تشکیل سیستم دو کره، w_a انرژی پتانسیل کرهٔ a، w_b انرژی تشکیل کرهٔ b و w_{ab} انرژی اندرکنش دو کره. در حقیقت w_{ab} مقدار کاریست که باید انجام شود تا دو کره a و b در کنار هم در فاصله d قرار گیرند.

$$w_a = \frac{1}{2}\frac{q_a^2}{4\pi\varepsilon_\circ a} \qquad w_b = \frac{1}{2}\frac{q_b^2}{4\pi\varepsilon_\circ b} \qquad w_{ab} = \frac{-kq_aq_b}{d}$$

با جایگزینی مقادیر

$$q_b = +q \quad , \quad q_a = -q$$

$$w = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ a} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ b} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ d}$$

از مقایسه رابطه فوق با $w = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$

$$c = \frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{2d}}$$

مثال ۱۴- هادی به ضخامت x را مطابق شکل بین دو صفحهٔ یک خازن مسطح قرار می‌دهیم. فاصله دو صفحه خازن d مساحت صفحات آن را A بگیرید. ظرفیت خازن در دو حالت ایزوله و غیر ایزوله به دست آورید.

حلّ:

خازن ایزوله

فرض کنید خازن را به باطری به اختلاف پتانسیل v وصل و پس از شارژ شدن خازن و باطری از یکدیگر جدا می‌شوند. بار خازن در حالت شارژ q است. پس از ورود هادی بار خازن ثابت باقی می‌ماند ولی پتانسیل بین دو صفحه خازن کاهش پیدا می‌کند.

$$v=\Delta\varphi=-\int_a^b \vec{E}.\vec{dl}=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}(d-x)+\theta.x$$

زیرا میدان الکتریکی در نواحی خلأ $\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ و در هادی صفر است.

$$c_c=\frac{q}{v}=\frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_\circ A}(d-x)}=\frac{\varepsilon_\circ A}{d-x}$$

نکته ۱: در صورتی که $x<<d$ باشد، یعنی هادی خیلی نازک باشد عملاً ظرفیت خازن تغییر نخواهد کرد یعنی $c_c\approx\frac{\varepsilon_\circ A}{d-x}\approx\frac{\varepsilon_\circ A}{d}=c$

نکته ۲: برای محاسبه ظرفیت می‌توان از خازنهای سری نیز استفاده نمود. یعنی

$$\frac{1}{c_c}=\frac{1}{c_{eq}}=\frac{1}{\frac{\varepsilon_\circ A}{d_1}}+\frac{1}{\frac{\varepsilon_\circ A}{d_2}}=\frac{d_1+d_2}{\varepsilon_\circ A}=\frac{d-x}{\varepsilon_\circ A}$$

$$c_c=\frac{\varepsilon_\circ A}{d-x}$$

خازن غیر ایزوله

در این حالت در حالی که باطری متصل باقی می‌ماند هادی به ضخامت x بین دو صفحهٔ خازن قرار می‌گیرد. در این مثال پتانسیل ثابت است، لذا وقتی هادی وارد می‌شود q بار خازن تغییر خواهد کرد. q_c' بار جدید خازن از q بیشتر است. لذا میدان الکتریکی نواحی خلأ از $\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ به $\frac{\sigma'}{\varepsilon_\circ}$ تبدیل می‌شود.

$$v=v_c'=\frac{\sigma_c'}{\varepsilon_\circ}(d-x)+\circ.x$$

$$v=\frac{q}{c}=\frac{qd}{\varepsilon_\circ A}=\frac{q'c}{A\varepsilon_\circ}\left(d-x\right)$$

$$q'_c=\frac{qd}{d-x}$$

در حالتی که $x\to\circ$ (یعنی هادی نباشد) $q'_c\to q$ (q بار خازن وقتی که هادی وجود ندارد)