www.mohandesyar.com

عنـــــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۸

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by：Majid Mohammadi, Sadra Fani

جریان و مدار

فرض کنید مجموعه‌ای از بارها بطور عمودی به طرف سطحی حرکت می‌کنند

جریان الکتریکی مقدار باریست بر واحد زمان از هر سطح مقطع می‌گذرد

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

واحد آن در یکاهای SI آمپر (A) است که برابر $\frac{\text{کولمب}}{\text{ثانیه}}$ است.

دامنهٔ تغییرات آن از مگا آمپر در رعد و برق تا نانوآمپر در شبکه عصبی ایست. اگر $\Delta t \to \circ$، جریان لحظه‌ای I را به صورت

$$I = \frac{dQ}{dt} \rho$$

چون شار دارای جهت است، طبق قرارداد جهت جریان جهت حرکت بارهای مثبت است. در سیم‌ها بارهای منفی در جهت مخالف جریان حرکت می‌کنند.

چگالی جریان

جریان I یک کمیت ماکروسکپی است، کمیت میکروسکپی مربوط چگالی جریان است. یک سیم به سطخ مقطع A مطابق شکل در نظر بگیرید.

تعداد بارهای متحرک در طول l سیم nAl

N تعداد بارهای متحرک بر واحد حجم

بار کل متحرک در طول l سیم nAlq

زمان جابجا شدن بار کل داخل استوانه به طول l $t = \frac{l}{v_d}$

v_d سرعت سوق بارهای متحرک

لذا جریان داخل سیم $I = \frac{nAlq}{t} = \frac{nAlq}{\frac{l}{v_d}} = nAqv_d$

چگالی جریان $J = \frac{I}{A} = nqv_d = \rho v_d$

ρ چگالی حجمی بارهای متحرک

بطورکلی

$$\vec{J} = \rho \vec{v}_d$$

مشاهده می‌شود که $\vec{J}$ و $\vec{v}_d$ برای بارهای مثبت هم جهت و برای بارهای منفی در خلاف یکدیگرند.
بطور کلی شار جریان و چگالی جریان $\vec{J}$ طبق رابطهٔ زیر بهم مرتبطاند.

$$I=\int \vec{J}.\vec{ds}$$

در یکاهای SI واحد چگالی جریان آمپر بر مترمربع (A/m^2) است.
بطور مثال می‌توان جریان گذرنده از سطح A' را که با سطح A زاویه γمی‌سازد را از رابطهٔ کلی به دست آورد.در مثال سیم با سطح مقطع A، جریان گذرنده از سطح A'که با سطح a زاویهٔ γ می‌سازد را می‌توان از رابطه کلی فوق به دست آورد.

$$I=\int \vec{J}.\vec{ds}=\int J\hat{n}.\hat{n}'ds'=JCos\gamma\int ds'=JCos\gamma A'$$

$$=JCosA$$

این نتیجه قابل پیش بینی ایست زیرا در صورت یکنواخت بودن چگالی جریان از سطح A و A' یکی ایست.

جریان سطحی

گاهی اوقات لازم است که جریان روی صفحات را در نظر بگیریم. یک روش ساختن جریان سطحی می‌تواند از کنار هم قرار دادن تعداد زیادی سیم حامل جریان I باشد. (مطابق شکل)

سیم‌های حامل جریان خارج از صفحه
جریان سیم I

سیم‌ها در صفحه yz قرار دارند هر کدام از این سیم‌ها حامل جریان I در جهت $+\hat{k}$ است. اگر تعداد سیم‌ها بر واحد طول n باشد. جریان بر واحد طول در جهت z برابر nl است. ما نماد k را برای نمایش چگالی جریان بر واحد طول بکار می‌بریم.

$$\vec{k}=nI\hat{k}$$

روش دیگری برای ساختن جریان سطحی آنست که یک صفحه غیر هادی که دارای بار سطحی به چگالی یکنواخت σ است را با سرعت $\vec{v}$ حرکت دهیم. چگالی جریان سطحی

$$\vec{k}=\sigma\vec{v}$$

صفحه باردار بطرف بیرون صفحه حرکت می‌کند

قانون اهم و رسانندگی

در بسیاری از مواد، چگالی جریان الکتریکی بطور خطی با میدان خارجی اعمال شده $\vec{E}$ متناسب است

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

σ را رسانندگی ویژه ماده نامند. رابطه فوق را قانون میکروسکپی اهم نامند. ماده‌ای که از این رابطه تبعیت کند را اهمی (Ohmie) نامند در غیر این صورت ماده غیر اهمی (non-ohmie) است.

برای به دست آوردن رابطۀ مفیدتر که کاربردتر باشد، یک قسمت از یک سیم مستقیم حامل جریان I به طول L و به سطح مقطع A را مطابق شکل در نظر می‌گیریم

جریان سطح مقطع ماده بار رسانندگی ویژه یا مقاومت ویژه
چگالی جریان میدان الکتریکی پتانسیل پتانسیل

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$I = AJ = A\sigma E$$

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = EL$$

$$\frac{V}{I} = \frac{EI}{A\sigma E} = \frac{L}{\sigma A} = \rho \frac{L}{A} = R$$

توجه نمائید که $\frac{1}{\sigma}$ را مقاومت ویژه ρ نامند. رابطه V=IR را قانون ماکروسکپی اهم نامند. بطورکلی مقاومت میان دو نقطۀ a و B از یک هادی را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_a^b \vec{E}.\overrightarrow{dl}}{\int \vec{T}.\overrightarrow{ds}}$$

فلزات از قانون ماکروسکپی اهم تبعیت می‌کنند. بیشتر فلزات دارای رسانندگی ویژه بالا و مقاومت ویژه پائین هستند.

عناصر غیر اهمی عناصر اهمی

برای عناصر اهمی نمودار جریان بر حسب ولتاژ، خط راست است که مبین آنست که مقاومت این هادی همواره ثابت است و به ولتاژی که برای اندازه‌گیری آن اعمال می‌کنیم بستگی ندارد. این نتیجه مهم، در مورد هادی‌های فلزی صادق است. فرض می‌کنیم که دمای هادی در حین اندازه‌گیری‌ها اساساً ثابت بماند.

برای عناصر غیر اهمی مانند ترانزیستورها، لامپ‌های خلأ منحنی I بر حسب V خط راست نیست و مقاومت به ولتاژ به کار رفته برای اندازه‌گیری آن بستگی دارد.

مقاومت ویژۀ عناصر عملاً با دما متغیر است. در فلزات برای دامنۀ وسیعی از T تغییرات ρ خطی ایست

$$\rho = \rho_{\circ}\left[1 + \alpha\left(T - T_{\circ}\right)\right]$$

که در آن α ضریب دمایی مقاومت ویژه است. در جدول مقادیر ρ، σ و α در دمای T برای عناصر مختلف نشان داده شده است.

جدول

Material	**Resistivity** ρ $(\Omega.m)$	**Conductivity** σ $(\Omega.m)^{-1}$	**Temperature Cofficient** $\alpha\left({}^{\circ}C\right)^{-1}$
Elements Silver	1.59×10^{-8}	6.29×10^{7}	0.0038
Copper	1.72×10^{-8}	5.58×10^{7}	0.0039
Aluminum	2.82×10^{-8}	3.55×10^{7}	0.0039
Tungsten	5.6×10^{-8}	1.8×10^{7}	0.0045
Iron **Platinum** Alloys Brass	10.0×10^{-8} 10.6×10^{-8} 7×10^{-8}	1.0×10^{7} 1.0×10^{7} 1.4×10^{7}	0.0050 0.0039 0.002
Manganin	44×10^{-8}	0.23×10^{7}	1.0×10^{-5}
Nichrome	100×10^{-8}	0.1×10^{7}	0.0004
Semicoductors Carbon (graphite)	3.5×10^{-8}	2.9×10^{4}	-0.0005
Germanium (pure)	0/46	2.2	-0/048
Silicon(pure)	640	1.6×10^{-3}	-0/075
Insulators Glass	$10^{10}\times10^{11}$	$10^{-11}-10^{-10}$	
Sulfur	10^{15}	10^{-15}	
Quartz(fused)	75×10^{10}	1.33×-10^{-10}	

انتقال انرژی در مدار الکتریکی

مدار الکتریکی شامل باطری B و یک مصرف کننده را در نظر بگیرید. مصرف کننده می‌تواند مقاومت، موتور یا باطری یا هر چیز دیگری باشد. سر a مصرف کننده به قطب مثبت باطری وصل است، در پتانسیل بالاتر از سر دیگر آن b قرار دارد. اگر بار dq از مصرف کننده بگذرد یعنی از a به b انرژی پتانسیل الکتریکی آن به اندازه dqV_{ab} کاهش پیدا می‌کند. قانون بقاء انرژی می‌گوید که این انرژی در مصرف کننده به شکل دیگری از انرژی تبدیل می شود، که بستگی به نوع مصرف کننده دارد. زمان dt انرژی منتقل شده

$$dw = dqV_{ab} = IdtV_{ab}$$

آهنگ انتقال انرژی P

$$P = \frac{dw}{dt} = IV_{ab}$$

اگر مصرف کننده موتور باشد، انرژی بیشتر به صورت کا مکانیکی که توسط موتور انجام می شود ظاهر می شود و اگر مصرف کننده مقاومت باشد انرژی به صورت حرارت ظاهر می شود. از لحاظ میکروسکپی برخورد بین الکترون‌ها و شبکه باعث افزایش حرکت ارتعاشی شبکه می شود و از لحاظ ماکروسکپی این به نوبه خود باعث افزایش دما می‌شود. این پدیده از لحاظ ترمودینامیکی برگشت‌ناپذیر است و به قانون ژول معروف است.

برای مقاومت

$$P = IV_{ab} = I^2R$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$\left(\frac{\text{یک ژول}}{\text{یک ولت *یک کولمب}} \right) \left(\frac{\text{یک کولمب}}{\text{یک ثانیه *یک آمپر}} \right)$$

یک ولت – آمپر= یک ولت – آمپر= یک ژول بر ثانیه

بطور خلاصه:

تاکنون با کمیت‌ها میکروسکپی $\vec{E}$، $\vec{J}$ و ρ و همچنین کمیات ماکروسکپی نظیر V، I و R سر و کار داشته اید.

میکروسکپی $\quad \rho = \frac{E}{J} \quad \vec{J} \quad \vec{E}$

ماکروسکپی $\quad I(t=\tau) = \frac{I_\circ}{e} \quad R = \frac{V}{I} \quad I = \int \vec{I}.\vec{ds}$

$$V = -\int \vec{E}.\vec{dl}$$

کمیت‌های ماکروسکپی V، I و R کمیاتی هستند که در آزمایشگاه قابل اندازه‌گیری‌اند. کمیت‌های میکروسکپی $\vec{E}$، $\vec{J}$ و ρ هنگامی با رفتار اساسی ماده سروکار داریم اهیمت دارند.

مثال ۱

نشان دهید که مقدار باری که در محل اتصال دو ماده جمع می‌شود برابر $\varepsilon_\circ I\left(\sigma_2^{-1} - \sigma_1^{-1}\right)$ است (مطابق شکل)

لایهٔ بار مثبت

در حالت پایان جریان، مؤلفهٔ عمودی چگالی جریان $\vec{J}$ در دو طرف محل اتصال باید یکسان باشد. یعنی

$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$$

$$E_2=\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)E_1$$

اگر بار روی فصل مشترک q_m باشد، از قانون گوس داریم

$$\oint \vec{E}.\vec{ds}=\left(E_2-E_1\right)A=\frac{q_m}{\varepsilon_\circ}$$

$$E_2-E_1=\frac{q_m}{\varepsilon_\circ}$$

با جایگزین کردن مقدار E_2 در معادله فوق داریم

$$q_m=\varepsilon_\circ AE_1\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-1\right)=\varepsilon_\circ A\sigma_1E_1\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)$$

$$I=JA=\sigma_1E_1A$$

$$q_m=\varepsilon_\circ I\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)$$

مثال ۲

ماده‌ای به مقاومت ویژهٔ ρ به شکل مخروط ناقص به ارتفاع h و به شعاع‌های a و b را مطابق شکل در نظر بگیرید. فرض کنید که جریان بطور یکنواخت روی سطح مقطع مخروط توزیع شده باشد. مقاومت این مخروط را محاسبه نمائید.

حلّ:

دیسک نازکی به شعاع r در فاصله a از طرف چپ مخروط در نظر بگیرید. همانطور که از شکل پیداست

$$\frac{b-r}{x}=\frac{b-a}{h}$$

$$r=\left(a-b\right)\frac{x}{h}+b$$

چون مقاومت R و مقاومت ویژه ρ طبق رابطهٔ زیر به هم مربوطاند

$$R=\rho\frac{l}{A}$$

لذا مقاومت دیسک به شعاع r و ضریب dx برابر است،

$$dR=\frac{\rho dx}{\pi\left[b+\left(a-b\right)\frac{x}{h}\right]^2}$$

$$R=\int_{\circ}^{h}\frac{\rho dx}{\pi\left[b+(a-b)\dfrac{x}{h}\right]^2}$$

با استفاده از $\int\frac{du}{(\alpha u+\beta)}=-\frac{1}{\alpha(\alpha u+\beta)}$

$$R=\frac{\rho}{\pi}\left[-\frac{1}{\dfrac{a-b}{h}\left[\dfrac{(a-b)x}{h}+b\right)}\right]_{\circ}^{h}$$

$$=-\frac{\rho}{\pi}\left[\frac{h}{(a-b)a}-\frac{h}{b(a-b)}\right]$$

$$R=-\frac{\rho h}{\pi}\left[\frac{b-a}{ab(a-b)}\right]=\frac{\rho h}{\pi ab}$$

مثال ۳

یک استوانه توخالی به طول L و شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل در نظر بگیرید. مقاومت ویژه این استوانه ρ است.

(a) فرض کنید که اختلاف پتانسیل به سر استوانه اعال شود، به طوری که جریان موازی با محور آن ایجاد شود. مقاومت استوانه چه مقدار است؟

(b) اگر اختلاف پتانسیل بین سطوح داخلی و خارجی آن برقرار شود به طوری که جریان به صورت شعاعی به طرف بیرون انتشار یابد، مقاومت اندازه‌گیری شده چه مقدار است؟

حلّ:

(a) وقتی اختلاف پتانسیل بین دو سر استوانه ایجاد شود جریان به موازات محور آن برقرار می شود. مساحت سطح مقطع آن $A=\pi\left(b^2-a^2\right)$، و مقاومت آن متوسط رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{\rho L}{\pi\left(b^2-a^2\right)}$$

(b) استوانهٔ نازک به شعاع داخلی r و شعاع خارجی r+dr و به طول L در نظر بگیرید. مشارکت آن در مقاومت سیستم

$$dR=\frac{\rho dL}{A}=\frac{\rho dr}{2\pi rL}$$

$A=2\pi rL$ مساحتی ایست که جریان به صورت عمودی از آن می‌گذرد

مقاومت کل سیستم

$$R=\int_a^b \frac{\rho dr}{2\pi rL}=\frac{\rho}{2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

مثال ۴

یک میلهٔ فلزی به شعاع r_1 در مرکز یک پوستهٔ استوانه‌ای هادی به شعاع r_2 و طول L قرار دارد. فضای بین میله و پوستهٔ استوانه‌ای از ماده‌ای به مقاومت ویژه ρ پُر شده است. باطری با ولتاژ $V_\circ$ مطابق شکل بین میله و استوانه وصل شده است. با صرف‌نظر کردن از مقاومت میله و پوستهٔ استوانه‌ای

الف- جریان کل را به دست آورید.

ب- چگالی جریان J و میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در یک نقطهٔ دلخواه P داخل پوستهٔ استوانه‌ای محاسبه کنید.

ج- مقاومت R بین میله و پوسته استوانه‌ای چه مقدار است؟

$$J=\frac{I}{2\pi rL}$$

$$E=\rho J=\frac{I\rho}{2\pi rL}$$

$$V=-\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}.\overrightarrow{dl}=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{I\rho}{2\pi rL}dr$$

$$=-\frac{I\rho}{2\pi L}\ln r\Big|_{r_1}^{r_2}=-\frac{I}{2\pi L}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

الف) جریان کل

$$I=\frac{2\pi L|V|}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

ب) چگالی جریان

$$J=\frac{1}{2\pi rL}\frac{2\pi L|V|}{\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{|V|}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

میدان الکتریکی

$$E=\frac{\rho|V|}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

ج- مقاومت

$$R=\frac{|V|}{I}=\frac{1}{2\pi L}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

مدار هادی جریان مستقیم

مدارهای الکتریک متشکل از منبع نیروی محرکه، مقاومت، موتور، لامپ و غیره هستند. اجزاء مختلف مدار را المان‌های مدار نامند. المان‌های مدار می‌توانند سری یا نواری باشند.

نیروی محرکه

همانطور که قبلاً گفته شد برای حفظ جریان ثابت در یک مدار بسته باید انرژی الکتریکی بنحوی تأمین شود. منبع انرژی را نیروی محرکه emf (با نماد ε) می‌نامند. باطری های معمولی، باطری‌های خورشیدی، ترموکوپل‌ها مثال‌هائی از منبع نیروی محرکه هستند. منبع نیروی محرکه را می‌توان به صورت یک پمپ تصور نمود که بار الکتریکی را از پتانسیل‌های پائین‌تر به پتانسیل‌های بالاتر حرکت می‌دهد. از لحاظ ریاضی تعریف emf به صورت

$$\varepsilon = \frac{dw}{dq}$$

در یکاهای SI واحد ε ولت (V) است. در حقیقت در منبع نیروی محرکه انرژی از انواع مختلف به انرژی الکتریکی تبدیل می شود بطور مثال در باطری‌های معمولی انرژی شیمیائی به انرژی الکتریکی تبدیل می شود. نیروی محرکه هر منبع نیروی محرکه برابر است با مقدار انرژی بر واحد بار، که از انواع مختلف انرژی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. نیروی محرکه را می‌توان توسط رابطهٔ زیر تعریف کرد

$$\varepsilon = \int \vec{E}.\vec{dl}$$

یعنی مقدار کاری که برای حرکت بار واحد در جهتی پتانسیل بالاتر لازم است. اگر منبع نیروی محرکه در مدار باشد انتگرال روی مدار بسته مخالف صفر است، به عبارت دیگر $\vec{E}$ تولید شده در منبع نیروی محرکه غیر پایستار است.

$$\varepsilon = \oint \vec{E}.\vec{dl} \neq 0$$

مدار ساده ای شامل باطری به عنوان منبع نیروی محرکه و مقاومت R در نظر بگیرید. فرض کنید باطری دارای مقاومت داخلی نباشد، اختلاف پتانسیل بین دو قطب مثبت و منفی باطری برابر نیروی محرکه emt باطری یعنی ε می‌باشد.

بدلیل ماهیت پایستاری نیروی الکترواستاتیکی برای چرخاندن بار q بطور کامل حول مدار کاری انجام نمی‌شود، یعنی

$$W = -q\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$$

اگر a نقطهٔ شروع باشد، وقتی که از قطب منفی به قطب مثبت می‌رویم پتانسیل به اندازه ε افزایش پیدا می‌کند. پس از عبور از مقاومت پتانسیل به اندازه IR کاهش پیدا می‌کند و انرژی پتانسیل به انرژی حرارتی تبدیل

می‌شود. با فرض این که سیم‌های رابط دارای مقاومت نیستند پس از یک دور کامل حول مدار اختلاف پتانسیل صفر است.

$$\varepsilon - Ir = 0 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}$$

در صورتی که باطری دارای مقاومت داخلی r باشد.
اختلاف پتانسیل دو قطب باطری

$$V = \varepsilon - Ir$$

اختلاف پتانسیل حول مدار کامل

$$\varepsilon - I - IR = 0 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

توان منبع نیروی محرکه (emt) برابر است با توان تلف شده در مقاومت داخلی و مقاومت مدار.

قوانین کیرشهف

برای تحلیل یک مدار دو قانون اساسی (کیرشهف) وجود دارند.

۱- قانون گره

در هر گره جمع جبری جریان‌ها صفر است، یا به عبارت دیگر طبق اصل بقاء بار جمع جریان‌های وارد شده به گره برابر است با جمع جریان‌های خارج شده از گره.

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad \text{یا} \qquad I_1 = I_2 + I_3$$

۲- قانون حلقه

جمع جبری تغییرات پتانسل در یک دور کامل در هر مدار برابر صفر است.

$$\sum_{\text{مدار بسته}} V = 0$$

چگونگی تعیین V وقتی که یک مقاومت و یا یک منبع نیروی محرکه (باطری) طی می شود در شکل خلاصه شده است.

ولتاژ بالاتر	ولتاژ پائین‌تر	جهت حرکت
ولتاژ بالاتر	ولتاژ پائین‌تر	جهت حرکت
ولتاژ بالاتر	ولتاژ پائین‌تر	جهت حرکت
ولتاژ بالاتر	ولتاژ پائین‌تر	جهت حرکت

بطور خلاصه

۱- هر گاه مقاومتی در جهت جریان طی شود، تغییر پتانسیل آن IR– و در جهت مخالف IR+ خواهد ب

۲- اگر یک منبع نیروی محرکه الکتریکی در جهت نیروی محرکه طی شود، تغییر پتانسیل آن $+\varepsilon$ و در جهت مخالف $-\varepsilon$ است.

توجه: جهت طی کردن اختیاریست. به عبارت دیگر چه مدار ساعت گرد و چه پاد ساعت‌گرد طی شود معادله یکسانی به دست می‌آید.

مقاومت‌های سری و موازی

مدار تک حلقه‌ای

دو مقاومت R_1 و R_2 مطابق شکل بطور سری متصل شده‌اند. هر دو به اختلاف پتانسیل V وصل‌اند.

با استفاده از قانون حلقه از نقطهٔ a شروع و در جهت ساعت‌گرد حلقه را طی می‌کنیم.

$$-IR_1 - IR_2 + \varepsilon = \circ \Rightarrow \varepsilon = I\left(R_1 + R_2\right)$$

دو مقاومت سری را می‌توان با مقاومت معادل R_{eq} تعویض نمود (مطابق شکل)

$$\varepsilon = IR_{eq} \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2$$

استدلال فوق می‌تواند به N مقاومت سری تعمیم داده شود، مقاومت معادل

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

نکته: اگر مقاومت R_1 بزرگتر از دیکر مقاومت‌ها در مدار سری باشد، مقاومت معادل R_{eq} تقریباً برابر R_2 است.

فرض کنید دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به منبع نیروی محرکه ε متصل باشند.

طبق اصل بقاء بار جریان I منبع تغذیه باید به دو جریان I_1 که از R_1 می‌گذرد و جریان I_2 که از R_2 می‌گذرد تعمیم شود. هر کدام از مقاومت‌ها بطور مجزا در قانون اهم صدق می‌کنند.

$$V_1 = I_1 R_1$$
$$V_2 = I_2 R_2$$

ولی پتانسیل مقاومت‌ها $V_1 = V_2 = q$ از بقاء جریان داریم

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} = \varepsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

دو مقاومت موازی R_1 و R_2 می‌توانند با مقاومت معادل R_{eq} تعویض شوند به طوری که

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

می‌توان به سادگی آن را به N مقاومت موازی تعمیم داد.

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i}$$

نکته: وقتی مقاومت R_1 خیلی کوچکتر از دیگر مقاومت‌ها R_i باشد، مقاومت معادل R_{eq} تقریباً برابر با کوچکتر مقاومت R_1 است. در حالت دو مقاومت

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\approx\frac{R_1R_2}{R_2}=R_1$$

این بدان معنی است که تقریباً تمام جریانی که وارد گره می‌شود از شاخه‌ای که دارای کمترین مقاومت است می‌گذرد.

مدارهای چند حلقه‌ای

شکل مداری را نشان می‌دهد که شامل سه حلقه است، برای سادگی از مقاومت باطری‌ها صرف نظر می‌کنیم، در این مدار دو گرهٔ b و d وجود دارند. جریان‌های I_1، I_2 و I_3 را تعیین کنید.

ابتدا با استفاده از قانون گره:

گره d : $I_1+I_3-I_2=0$

گره b : $I_1-I_3+I_2=0$

این دو رابطه از یکدگیر مستقل نیستند لذا از قانون گره‌ها فقط یک رابطه به دست می‌آید.

با استفاده از قانون حلقه‌ها: حلقه‌ها را پاد ساعتگرد طی می‌کنیم

حلقهٔ baed : $\varepsilon_1-I_1R_1+I_3R_3=0$

حلقهٔ cbdf : $-\varepsilon_2-I_3R_3-I_2R_2=0$

حلقهٔ caef : $-\varepsilon_2+\varepsilon_1-I_1R_1-I_2R_2=0$

مشاهده می‌شود که از جمع دو معادله اوّل معادله سوّمی به دست می‌آید. لذا از قانون حلقه‌ها فقط دو معادله مستقل به دست می‌آید. یعنی برای سه مجهول I_1، I_2 و I_3 کلاً سه معادله مستقل از قوانین کیرشهف به دست می‌آید. بطور کلی از قوانین کیرشهف به تعداد مجهولات معادله حاصل می شود نه بیشتر و نه کمتر. پس از حل معادلات

$$I_1=\frac{\varepsilon_1\left(R_1+R_2\right)-\varepsilon_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_1 R_3 - \varepsilon_2 \left(R_1 + R_2\right)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

$$I_3 = \frac{-\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

مقادیر عددی نیروهای محرکهٔ الکتریکی و مقاومتها هر چه باشند جریان I_3 همیشه منفی است. یعنی جهت آن باید به سمت بالا باشد. جریان‌های I_1 و I_2 بسته به مقادیر عددی داده شده در هر جهتی می‌توانند باشند. در حالت‌های خاص معادلات به نتایج معقولی منجر می‌شوند. مثلاً به ازای $R_3 = \infty$ داریم

$$I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}, \qquad I_3 = 0$$

مدار RC

شارژ خازن

مداری مطابق شکل در نظر بگیرید، این مدار متشکل از منبع نیروی محرکه (باطری) خازن و مقاومت. در زمان $t=0$ کلید s بسته می‌شود. خازن در ابتدا بدون بار است یعنی $q(t=0)=0$ برای $t<0$، ولتاژ خازن صفر است در $t=0$ کلید بسته می‌شود و جریان $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ برقرار می شود. با شارژ شدن خازن، ولتاژ خازن افزایش پیدا می‌کند و برابر $V_c(t) = \frac{q(t)}{c}$ است. جریان مدار کاهش پیدا می‌کند.

با استفاده از قانون کیرشهف برای حلقه‌ها و حرکت ساعت گرد از نقطهٔ a روی مدار داریم

$$\varepsilon - \frac{q(t)}{c} - IR = 0$$

نحوهٔ اختیار علامت پتانسیل خازن $V_c(t) = \frac{q(t)}{c}$ در شکل نمایش داده شده است.

ولتاژ پائین‌تر ولتاژ بالاتر جهت حرکت
ولتاژ پائین‌تر ولتاژ بالاتر جهت حرکت

جریان مدار $I=\frac{dq}{dt}$ لذا معادله مدار خازن شارژ شونده یک معادله دیفرانسیل مرتبه یک است.

$$\varepsilon-\frac{q(t)}{c}-R\frac{dq}{dt}=0\Rightarrow\frac{dq}{dt}+\frac{q(t)}{Rc}=\frac{\varepsilon}{R}$$

برای حلّ این معادله طرفین معادله را در $e^{\int\frac{1}{Rc}dt}$ ضرب می‌کنیم

$$e^{t/Rc}\frac{dq}{dt}+e^{t/Rc}\frac{q}{Rc}=\frac{e^{t/Rc}}{R}$$

طرف چپ معادله فوق یک دیفرانسیل کامل است، لذا می‌توان تابع اولیه آن را به سادگی محاسبه نمود

$$\frac{d}{dt}\left(qe^{t/Rc}\right)=\frac{\varepsilon}{R}=e^{t/Rc}$$

$$qe^{t/Rc}=\varepsilon ce^{t/Rc}+k$$

K در رابطه فوق ثابت انتگرال‌گیریست و از طریق اعمال شرط اولیه محاسبه می شود. در لحظه $t=0$ بار خازن صفر است.

$$q(t)=\varepsilon c+ke^{-t/Rc}$$

$$q(t=0)=\varepsilon c+k=0\Rightarrow k=-\varepsilon c$$

$$q(t)=\varepsilon c\left(1-e^{-t/Rc}\right)=Q\left(1-e^{-t/Rc}\right)$$

$Q=\varepsilon c$ ماکزیمم باری که روی صفحات خازن ذخیره می‌شود. شکل چگونگی وابستگی $q(t)$ را به زمان نشان می‌دهد.

از شکل مشاهده می‌شود که بعد از زمان طولانی بار خازن $q(t\to\infty)=\varepsilon c=Q$

در زمان طولانی ولتاژ خازن برابر ولتاژ اعمال شده می شود و عملاً شارژ خازن به پایان می‌رسد.

$$V_c(t)=\frac{q(t)}{c}=\varepsilon\left(1-e^{-t/Rc}\right)$$

$$=\frac{q(t=\infty)}{c}=\varepsilon$$

جریان لحظه‌ای مدار برابر است با

$$I(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/Rc}=I_0e^{-t/Rc}$$

I_0 جریان اولیۀ مدار در $t=0$ می‌باشد. جریان به صورت تابعی از زمان روی شکل نمایش داده شده است.

جریان مدار به صورت اکسپونانیلی با زمان کاهش پیدا می‌کند.

Z=Rc ثابت زمانی خازنی نامیده می‌شود در یکاهای SI واحد آن ثانیه است زیرا

$$[\Omega][F]=\left([V]/[A]\right)\left([C]/[V]\right)=[C]/[A]$$

$$=[C]/\left([C]/[S]\right)=[S]$$

در یک ثابت زمانی خازن τ جریان به اندازه $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه‌اش می‌شود $I(t=\tau)=\frac{I_\circ}{e}$ در یک ثابت زمانی خازنی τ بار خازن به اندازهٔ ۶۳% مقدار نهائی‌اش افزایش می یابد.

$$q(t=\tau)=Q\left(1-e^{-1}\right)=\varepsilon c\left(1-e^{-1}\right)=\%63Q\ 75\times10^{10}$$

در $t=\circ$ $V_c(t=\circ)=\circ$ ف بعد از گذشت $\tau=RC$ ثانیه اختلاف پتانسیل صفحات خازن به 63% مقدار نهائی‌اش می‌رسد.

$$V_c(t=\tau)=\varepsilon\left(1-e^{-1}\right)=0/63\varepsilon$$

نکته

در معادله شارژ خازن

$$\varepsilon=\frac{q}{c}+R\frac{dq}{dt}$$

اگر طرفین معادله را در $I=\frac{dq}{dt}$ ضرب کنیم

$$\varepsilon I=\frac{dq}{dt}\frac{q}{c}+RI^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}\right)+RI^2$$

از این رابطه مشاهده می‌شود که توان تحویلی توسط باطری εI برابر است با آهنگ افزایش انرژی خازن بعلاوهٔ آهنگ تبدیل انرژی به حرارت در مقاومت. در حقیقت رابطه فوق یک رابطه بقاء انرژیست.

دشارژ خازن

فرض کنید که خازن در ابتدا با بار $Q=\varepsilon C$ شارژ شده باشد. کلید باز است و اختلاف پتانسیل دو سر خازن $V_c=\frac{Q}{C}=\varepsilon$، اختلاف پتانسیل دو سر

مقاومت صفر است زیرا جریانی از آن نمی‌گذرد، یعنی $I=\circ$. حال فرض کنید در $t=\circ$ کلید بسته شود (مطابق شکل) خازن شروع به دشارژ می‌کند.

خازن دشارژ شونده مانند منبع نیروی محرکه برای تولید جریان در مدار عمل می‌کند. وقتی که خازن دشارژ می‌شود (الکترونها از صفحه منفی از طریق سیم به صفحه مثبت جریان می‌یابند) ولتاژ خازن کاهش پیدا می‌کند.

اگر q' باری باشد که خازن را ترک کرده و q بار باقیمانده باشد از رابطهٔ

$$q+q'=Q=\varepsilon C$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$-\frac{dq}{dt}=\frac{dq'}{dt}=I'$$

یعنی جریان شارژ و دشارژ در خلاف جهت یکدیگرند ولی برابرند. با بکارگیری قانون حلقهٔ کیرشهف و با طی کردن پاد ساعتگرد مدار از نقطهٔ a، معادله دشارژ خازن برای تغییر q' به دست می‌آید

$$-I'R+\frac{q}{C}=\circ\Rightarrow -R\frac{dq'}{dt}+\frac{Q-q'}{C}=\circ$$

$$\frac{dq'}{dt}+\frac{q'}{RC}=\frac{\varepsilon C}{RC}=\frac{\varepsilon}{R}$$

معادله فوق برای q' باری که خازن را ترک کرده است. دقیقاً مشابه معادله q بار روی خازن در حالت شارژ است. زیرا در زمان $t=\circ$ $q(t=\circ)=\circ$ و در زمان طولانی $q(t=\infty)=qC$ در حالت دشارژ در زمان $t=\circ$ $q'(t=\circ)=\circ$ و در زمان طولانی $q'(t=\circ)=\circ$

لذا با توجه به این تشابه حلّ معادله فرآیند و دشارژ به صورت زیر است

$$q'(\tau)=\varepsilon C\left(1-e^{-t/RC}\right)=Q\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

بار باقیمانده

$$q(t)=Q-q'=Q-Q+Qe^{-t/RC}$$

$$=Qe^{-t/RC}$$

جریان دشارژ در مدار $I'(t)=\dfrac{dq'}{dt}=\dfrac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$

جریان در مدار به صورت اکسپونانیلی کاهش پیدا می‌کند

ولتاژ خازن $V_c(t)=\dfrac{q(t)}{C}=\dfrac{Q}{C}e^{-t/RC}$ در شکل چگونگی تغییرات ولتاژ خازن بر حسب زمان نمایش داده شده است.

مثال ۵:

مکعبی دارای مقاومت R روی هر لبه‌اش می‌باشد مقاومت معادل بین نقاط a و b را به دست آورید.

حلّ: با استفاده از تقارن جریان در a به سه قسمت تقسیم می‌شود یعنی $I/3$ در هر شاخه در نقطهٔ C، $I/3$ بطور مساوی به دو قسمت تقسیم می‌شود یعنی $I/6$ که در دو مسیر ce و cd جریان می‌یابد. جریانی که در شاخه db وجود دارد برابر جمع دو جریان از fd و cd ایست. یعنی $I/6+I/6=I/3$

لذا اختلاف پتانسیل بین a و b را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V_{ab}=V_{ac}+V_{cd}+V_{db}=\frac{I}{3}R+\frac{I}{6}R+\frac{I}{3}R$$
$$=\frac{5}{6}IR$$

در نتیجه

$$R_{eq}=\frac{5}{6}R$$

مثال ۶:

در مداری مطابق شکل کلید s که به مدت طولانی باز بوده در زمان $t=\circ$ بسته می‌شود

(a)ثابت زمانی خازنی قبل از بستر شدن کلید

(b)ثابت زمانی خازنی پس از بسته شدن کلید

(c)جریان را به صورت تابعی از زمان بعد از بسته شدن کلید به دست آورید.

حلّ:

قبل از بسته شدن کلید، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت سری هستند، لذا مقاومت معادل $R_{eq}=R_1+R_2$ ، ثابت زمانی خازنی

$$\tau=R_{eq}C=\left(R_1+R_2\right)C$$

مقدار بار ذخیره شده در خازن

$$q\left(t\right)=\varepsilon C\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

(b) بعد از این که کلید بسته شد، خازن در حلقهٔ راست مدار شروع به دشارژ شدن می‌کند. ثابت زمانی خازنی $\tau'=R_2C$. بار طبق رابطه زیر کاهش پیدا می‌کند

$$q'\left(t\right)=\varepsilon Ce^{-t/\tau'}$$

(c) جریانی که از کلید می‌گذرد دارای دو منبع است: جریان مانای مدار چپ و جریان کاهش یافته I_2 از مدار RC. یعنی

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

$$I'(t) = \frac{dq'}{dt} = -\frac{\varepsilon C}{\tau'} e^{-t/\tau'} = -\frac{\varepsilon}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

مثال ۷: خازنی با ظرفیت C_1 و بار الکتریکی Q به خازن خالی به ظرفیت C_2 از طریق مقاومت R مطابق شکل وصل شده است. جریان مدار و بار هر یک از خازن‌ها را به دست آورید. از روی آن بار نهائی هر یک از خازن‌ها را حساب نمائید.

در $t<0$ کلید s باز است جریان مدار صفر، پتانسیل خازن C_1 برابر $\frac{Q}{C_1}$ و پتانسیل خازن C_2 صفر و پتانسیل مقاومت صفر است. در $t=0$ کلید s بسته می‌شود و جریان لحظه‌ائی در مدار ظاهر می‌شود.

با استفاده از قانون حلقه کیرشهف مدار از نقطهٔ a ساعتگرد طی می‌کنیم

$$-I'R - \frac{q'}{C_2} + \frac{q}{C_1} = 0$$

برای تغییر q' و $I' = \frac{dq'}{dt}$

$$-\frac{dq'}{dt}R - \frac{q'}{C_2} + \frac{Q-q'}{C_1} = 0$$

$$\frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{RC_1}$$

با تغییر متغیر $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$ و $\frac{Q}{C_1} = \varepsilon$

رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

این معادله دقیقاً مشابه معادله فرآیند دشارژ است.

لذا با توجه به تشابه موجود

$$q'(t) = \varepsilon C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

بار لحظه‌ائی روی C_1 $\quad q(t) = Q - q'(t)$

$$= Q - \varepsilon C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

بار لحظه‌ائی روی C_2

$$q'(t) = \frac{dq'}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

با استفاده از روابط بالا

بار نهائی روی C_1

$$q_1 = q(t = \infty) = Q - \varepsilon C = \frac{QC_1}{C_1 + C_2}$$

بار نهائی روی C_2

$$q_2 = q'(t = \infty) = \varepsilon C = \frac{QC_2}{C_1 + C_2}$$

جریان نهائی

$$I'(t = \infty) = 0$$

بار نهائی روی خازن‌ها را به طریق تقسیم نیز می‌توانستیم محاسبه نمائیم. اگر بار نهائی روی خازن C_1 را q_1 و بار نهائی روی خازن C_2 را q_2 بگیریم روابط زیر را می‌توانیم بنویسیم.

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = Q \\ \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_2}{C_2} \Rightarrow q_2 = \dfrac{q_1 C_2}{C_1} \end{cases}$$

$$q_1 + \frac{q_1 C_2}{C_1} = q_1\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) = q_1\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right) = Q \Rightarrow q_1 = \frac{QC_1}{C_1 + C_2}$$

$$q_2 = Q - q_1 = Q - \frac{QC_1}{C_1 + C_2} = Q\left(\frac{C_1 + C_2 - C_1}{C_1 + C_2}\right) = \frac{QC_2}{C_1 + C_2}$$