www.mohandesyar.com

عنـــــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۲

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایزی

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

۲-۹ پتانسیل الکترواستاتیکی

در این بخش پتانسیل الکترواستاتیکی استخراج می‌شود، به عنوان روش دیگری برای محاسبهٔ میدان الکتریکی یک توزیع، مفهوم فیزیکی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. پتاسیل توزیع‌های مختلف گسسته و پیوسته استخراج می‌شوند.

۲-۹-۱ استخراج پتانسیل الکترواستاتیکی از قانون کولمب

رابطه کولمب برای محاسبه میدان الکتریکی یک توزیع پیوسته بار

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^{1}\right)}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}\right|^{3}}$$

را می‌توان به شکل دیگری درآورد. ثابت می‌کنیم تابع $\frac{\vec{r}-\vec{r}^{1}}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|^{3}}$ که در رابطهٔ فوق وارد می‌شودبرابر است با $-\vec{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|}$. برای اثبات گرادیان تابع $\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|}$ را می‌گیریم.

$$\frac{1}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}\right|} = \frac{1}{\left[\left(x\quad x^{1}\right)^{2}+\left(y\quad y^{1}\right)^{2}+\left(z\quad z^{1}\right)^{2}\right]^{1/2}}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|} = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|}+\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}\right|}+\hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|}$$

$$= \hat{i}\,\frac{-\frac{1}{2}\left[\left(x-x^{1}\right)^{2}+\left(y-y^{1}\right)^{2}+\left(z-z^{1}\right)^{2}\right]^{1/2} 2\left(x-x^{1}\right)}{\left[\left(x\quad x^{1}\right)^{2}+\left(y\quad y^{1}\right)^{2}+\left(z\quad z^{1}\right)^{2}\right]}$$

$$+\,\hat{j}\,\frac{-\frac{1}{2}\left[\left(x\quad x^{1}\right)^{2}+\left(y\quad y^{1}\right)^{2}+\left(z\quad z^{1}\right)^{2}\right]^{1/2} 2\left(y-y^{1}\right)}{\left[\left(x\quad x^{1}\right)^{2}+\left(y\quad y^{1}\right)^{2}+\left(z\quad z^{1}\right)^{2}\right]}$$

$$+\,\hat{x}\,\frac{-\frac{1}{2}\left(x\quad x^{1}\right)^{2}+\left(y\quad y^{1}\right)^{2}+\left(z\quad z^{1}\right)^{2\,1/2} 2\left(z-z^{1}\right)}{\left[\left(x\quad x^{1}\right)^{2}+\left(y\quad y^{1}\right)^{2}+\left(z\quad z^{1}\right)^{2}\right]}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|} = \frac{-\hat{i}\left(x-x^{1}\right)-\hat{j}\left(y-y^{1}\right)-\hat{k}\left(z-z^{1}\right)}{\left[\left(x\quad x^{1}\right)^{2}\quad\hat{j}\left(y\quad y^{1}\right)^{2}\quad\hat{k}\left(z\quad z^{1}\right)^{2}\right]^{3/2}}$$

صورت رابطهٔ فوق برابر است با $-\left(\vec{r}-\vec{r}^{1}\right)$ و مخرج آن برابر است $\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|^{3}$ لذا رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید.

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{1}|}=\frac{\vec{r}-\vec{r}^{1}}{|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}|^{3}}$$

این رابطه را در رابطهٔ کولمب جایگزین می‌نمائیم.

$$\vec{E}(\vec{r})=k\int dq\left[-\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{1}|}\right]$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-k\int dq\left[\quad\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}|}\right]$$

جای عملگر انتگرال باعملگر را می توان تعیین کرد زیرا عملگر روی نقاط میدان عمل می‌کند یعنی مختصات $\vec{r}^{1}$، لذا عمل تعویض کاملاً مجاز است.

$$\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\left[k\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}^{1}|}\right]$$

جملهٔ داخل کروشه را $\varphi(\vec{r})$ پتانسیل الکترواستاتیکی می‌نامیم، پس داریم

$$\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

که در آن

$$\varphi(\vec{r})=k\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}^{1}|}$$

انتگرال روی توزیع بار گرفته می‌شود.

نکات

۱- پتانسیل الکترواستاتیکی $\varphi(\vec{r})$ برخلاف میدان الکتریکی $\vec{E}(\vec{r})$ یک میدان اسکالر است، همانطور که گفته گرادیان یک میدان اسکالر یک میدان برداریست.

۲- محاسبه $\varphi(\vec{r})$ از محاسبه $\vec{E}(\vec{r})$ ساده‌تر است زیرا به دلیل اسکالر بودن $\varphi(\vec{r})$ فقط یک انتگرال باید محاسبه شود (برای میدان الکتریکی سه انتگرال). تابع زیر انتگرال تابع پتانسیل به مراتب ساده‌تر است $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{1}|}$ در مقایسه با $\frac{1}{|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}|^{3}}$(مخرج در میدان الکتریکی توان سه است).

۲-۹-۲ مفهوم پتانسیل الکترواستاتیکی

پتانسیل الکترواستاتیکی دارای مفهوم فیزیکی ایست. فرض کنید بار q در میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع بار خارجی قرار دارد، این میدان را از

این به بعد میدان خارجی می‌نامیم، کار انجام لازم، در مقابل نیروی الکتریکی برای انتقال q از نقطهٔ a به b در این میدان خارجی چه مقدار است؟

$$W = \int_b^a \vec{F}.dl$$

$\vec{F}$ نیروئی که در مقابل نیروی توزیع خارجی $\vec{F}_e$ به بار q وارد می‌شود و $\vec{dl}$ المان طول مسیر از a به b است

$$W = -\int_a^b \vec{F}_e.\vec{dl}$$

$\vec{F}_e$ نیروئی ایست که توسط توزیع بار خارجی به بار q وارد می‌شود

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}q(\vec{r})$$

$\vec{E}$ میدان خارجی و $\varphi(\vec{r})$ پتانسیل الکترواستاتیکی بار خارجی ایست.

$$W = -\int_a^b q\vec{E}.\vec{dl}$$

اگر طرفین معادله فوق را به q تقسیم کنیم داریم

$$\frac{N}{q} = -\int_a^b \vec{E}.\vec{dl}$$

$\frac{W}{q}$ کار انجام شده در مقابل نیوری الکتریکی خارجی برای انتقال بار واحد از a به b

$$W\ (\text{واحد}) = -\int_a^b \vec{E}.\vec{dl}$$

با استفاده از رابطه $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ رابطهٔ فوق به صورت زیر درمی‌آید.

$$W\ (\text{واحد}) = -\int_a^b -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}).\vec{dl}$$

$$= \int_a^b d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a) = \Delta\varphi$$

در قدم آخر از رابطه $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}).\vec{dl}$ استفاده شده است.

نکات

۱- اختلاف پتانسیل الکترواستاتیکی بین دو نقطهٔ a و b یعنی $\Delta\varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$ برابر است با کار انجام شده در مقابل نیروی الکتریکی برای انتقال بار واحد از نقطهٔ a به b

۲- کار انجام شده مستقل از مسیر است و کار روی مسیر بسته صفر است.

$$\Delta\varphi = -\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$$

۳- روابط معادل درکل زیر نمایش داده شده‌اند

بطور خلاصه تابع اسکالر $\varphi(\vec{r})$ وجود دارد $\left(\vec{E}=-\vec{\nabla}\,\varphi(\vec{r})\right)$ اگر و فقط اگر $\vec{E}$ بدون چرخش باشد $\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}=0\right)$ یا کار انجام شده روی مسیر بسته برابرصفر باشد $\left(\oint\vec{E}.\vec{dl}\right)=0$

۴- تاکنون دو رابطه برای محاسبه پتانسیل به دست آوردیم

a- $$\varphi(\vec{r})=k\int\frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|}$$

b- $$\Delta\varphi(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}.\vec{dl}$$

توجه داریم که پتانسیل همیشه دارای مرجع است. در رابطه (a) این مرجع در بی‌نهایت اختیار شده است که دارای مزیت‌هائی ایست. برای این که رابطۀ دوّم نیز دارای مرجع بی‌نهایت باشد آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\varphi(\vec{r})=-\int_{\infty}^{\vec{r}}\vec{E}.\vec{dl}$$

رابطه فوق می‌گوید پتانسیل در نقطۀ $\vec{r}$ یعنی $\varphi(\vec{r})$ برابر است با کار انجام شده در مقابل نیروی الکتریکی خارجی برای انتقال بار واحد از بی‌نهایت به نقطۀ $\vec{r}$.

۱-۹-۲ پتانسیل بار نقطه‌ائی

بار نقطه‌ائی q را در مبدأ مختصات در نظر بگیرید. خطوط میدان شعاعی هستند (مطابق شکل) چه مقدار کار لازم است تا اینکه بار واحد را از بی‌نهایت انتقال دهیم و در فاصله r از بار q قرار بگیرد. این کار به مسیر انتخابی بستگی ندارد هر مسیری می‌تواند انتخاب شود، بهترین مسیر آنست که کار انجام شده را بتوان راحت‌تر محاسبه نمود. میدان الکتریکی بار نقطه‌ائی که در مبدأ مختصات قرار دارد

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

از آنجا که میدان بار نقطه‌ائی شعاعی ایست لذا مناسب‌ترین مسیر یک مسیر شعاعی است چون زاویه بین $\vec{E}$ و $\vec{dl}$ همیشه π است. لذا

$$\varphi(\vec{r})=-\int_{+\infty}^{r}\vec{E}.\vec{dl}$$

$$z=-\int_{\infty}^{r}\frac{kq}{r^2}\hat{r}.\hat{r}dr$$

در رابطه فوق $\vec{dl}=\hat{r}dr$ المان طول مسیر شعاعی (مطابق شکل). همانطور که قبلاً اشاره شد، حدود انتگرال صحیح، جهت درست $\vec{dl}$ را تضمین خواهد کرد، یعنی $\vec{dl}$ در خلاف جهت $\hat{r}$ زیرا dr منفی است.

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r}\frac{kq}{r^2}dr = \frac{kq}{r}\Big|_{\infty}^{r} = \frac{kq}{r}$$

$\varphi(r) = \frac{kq}{r}$ برابر است با مقدار کار لازم برای انتقال بار واحد از بی‌نهایت به فاصله r از بار نقطه‌ائی q. لذا به سطوح هم پتانسیل بار q کره‌های هم مرکز به شعاع r هستند. کار لازم برای رسیدن به هر نقطه روی یک کره به شعاع r از بی‌نهایت برابر است با $\frac{kq}{r}$

۲-۹-۲ پتانسیل یک توزیع خطی بی‌نهایت

توزیع خطی بی‌نهایت طویل به چگالی بار خطی یکنواخت λ را مطابق شکل در نظر بگیرید. پتانسیل الکترواستاتیکی یک نقطه مانند P به فاصله ρ از آن را محاسبه نمائید. یا به عبارت دیگر چه مقدار کار لازم است تا اینکه بار واحد را از بی‌نهایت انتقال داده و در فاصله ρ از ان قرار دهیم.

برای محاسبه پتانسیل می‌توان از روابط $\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}}\vec{E}.\vec{dl}$ و $\varphi(\vec{r}) = k\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}^1|}$ استفاده نمود.

a- از طریق $\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}}\vec{E}.\vec{dl}$ ،

میدان الکتریکی یک توزیع خطی بی‌نهایت طویل با چگالی یکنواخت

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{\rho}\hat{\rho}$$

مناسب‌ترین مسیر انتخابی برای رسیدن از بی‌نهایت به نقطهٔ P، مسیر شعاعی ایست.

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\rho}\frac{2k\lambda}{\rho}\hat{\rho}.\hat{\rho}d\rho$$

$$= -2k\lambda\ln\rho\Big|_{\infty}^{\rho} = -2k\lambda\ln\rho + \infty$$

از بی‌نهایت که در رابطه فوق وارد شده است می‌توان صرف نظر کرد. زیرا اولاً در محاسبه میدان الکتریکی

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(-2k\lambda k = \ln\rho) = \hat{\rho}\frac{2k\lambda}{\rho}$$

مشتق یک عدد ثابت هر چند بزرگ برابر صفر است و ثانیاً از این به بعد فقط اختلاف پتانسیل بین دو نقطه معنی‌دار خواهد بود زیرا با حذف بی‌نهایت عملاً مرجع پتانسیل نامشخص گرفته شده است. پس

$$\varphi(\vec{r}) = -2k\lambda\ln\rho$$

b- از طریق $\varphi(\vec{r}) = -2k\lambda\ln\rho$

به جواب مشابه فوق خواهیم رسید. زیرا

$$\varphi(\vec{r}) = k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

چون تابع زیر انتگرال زوج است

$$= 2k\lambda \int_{\circ}^{\infty} \frac{d - z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

$$= 2k\lambda \ln\left(z + \sqrt{z^2 + \rho^2}\right)\Big|_{\circ}^{\infty}$$

$$= \infty - 2k\lambda \ln \rho$$

که دقیقاً مشابه جواب به دست آمده از طریق a است. لذا با همان توضیحات پتانسیل به صورت $\varphi(\vec{r}) = -2k\lambda \ln \rho$ نوشته می‌شود.

۳-۹-۲ پتانسیل یک صفحه بی‌نهایت

صفحهٔ بی‌نهایت با چگالی بار سطحی یکنواخت σ را مطابق شکل در نظر بگیرید پتانسیل الکترواستاتیکی آن را در نقطهٔ P به فاصله z از آن را به دست آورید.

a- با استفاده از رابطه $\varphi(\vec{r}) = \int \frac{dq}{\left|\vec{r} - \vec{r}^{1}\right|}$

$$\varphi(0,0,z) = k\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{2\pi} \frac{\sigma\rho\, d\rho\, d\varphi}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

$$\varphi(0,0,z) = k\sigma 2\pi \int_{\circ}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

$$= 2\pi k\sigma \left[\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}\right]_{\circ}^{\infty}$$

$$= \infty - 2\pi k\sigma z$$

$$= \infty - 2\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \sigma z = \infty - \frac{\sigma z}{z\varepsilon_{\circ}}$$

مطابق استدلالهائی که در مثال قبل شد می‌توان از صرف نظر کرد و پتانسیل را به صورت زیر درآورد

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}} z$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}$$

اگر بی‌نهایت حذف شود، فقط اختلاف پتانسیل دارای معنی خواهد بود. برای روشن شدن این مطلب به این مثال توجه نمائید. چه مقدار کار لازم است تا

اینکه بار واحد از نقطهٔ P_2 درفاصله z_1 از صفحه به نقطهٔ P_2 در فاصله z_2 از صفحه انتقال یابد. این کار برابر است با اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه یعنی

$$\Delta\varphi = \varphi(z_2) - \varphi(z_1) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} z_2 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} z_1 -$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}(z_1 - z_2)$$

b- با استفاده از رابطهٔ $\varphi(\vec{r}) = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{E}.\vec{dl}$ در رابطهٔ فوق $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{k}$ (قبلاً محاسبه شده است) در این روش نیاز به انتخاب یک مسیر مناسب داریم که محاسبات را ساده کند زیرا انتگرال به مسیر بستگی ندارد. بهترین مسیر در امتداد محور zهاست. مطابق شکل

$$\varphi(z) = -\int_\infty^z \hat{k}.\hat{k}dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ} z + \infty$$

که دقیقاً مشابه جواب از روش دیگر است.

۲-۹-۲ پتانسیل یک دو قطبی

بار q+ در z=a و بار q- در z=-a قرار دارند. پتانسیل این دو بار را در نقطهٔ $\vec{r} = (x, y, z)$ به دست آورید.

با استفاده از پتانسیل بار نقطه‌ائی و اصل بر همنهش

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-}$$
$$= \frac{kq}{\left(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{kq}{\left(r^2 + a^2 + 2arCos\theta\right)^{1/2}}$$

چون از قاعدهٔ کسینوس‌ها در مثلث $r_\pm = \left(r^2 + a^2 \mp 2arCos\theta\right)^{1/2}$

a- بسط خارجی

این بسط برای نقاطی که در خارج کره به شعاع a قرار دارند مناسب است. ما فقط حالت خاص $r >> a$ را در نظر می‌گیریم، یعنی از ترم ها مرتبه دو $E = \frac{a}{r}$ و بالاتر صرف نظر می شود. با بسط مخرج کسرها داریم

$$\left(r^2 + a^2 - 2arCos\theta\right)^{1/2} = r^{-1}\left(\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \quad 2\frac{a}{r}\right)Cos\theta^{-1/2}\right)$$

$$\approx r^{-1}\left(1+\frac{a}{r}Cos\theta\right)$$

$$\left(r^2+a^2+2arCos\theta\right)^{-1/2}=r^{-1}\left(1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{2aCos\theta}{r}\right)^{-1/2}$$

$$\approx r^{-1}\left(1-\frac{a}{r}Cos\theta\right)$$

$$\varphi(\vec{r})=\frac{kq}{r}\left(1-\frac{a}{r}\right)Cos\theta-\frac{kq}{r}\left(1+\frac{a}{r}\right)Cos\theta$$

$$=\frac{2kqaCos\theta}{r^2}=\frac{k\rho Cos\theta}{r^2}$$

با توجه به شکل

$$\varphi(\vec{r})=k\frac{\vec{P}.\hat{r}}{r^2}=k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3}$$

بردار ممان دو قطبی در رابطه فوق $\vec{P}=\hat{k}2aq$

نوشتن $\varphi(\vec{r})$ به صورت برداری دارای این مزیت است که، قید اینکه دو قطبی در جهت $\hat{k}$ است حذف می‌شود و رابطهٔ کلی پتانسیل یک دو قطبی به دست می‌آید.

یعنی پتانسیل یک دو قطبی بطور کلی برابر است با بردار ممان دو قطبی ضرب داخلی در برداری که $\hat{r}$ در راستای خط واصل بین مرکز دو قطبی و نقطهٔ P تقسیم بر r فاصله بین مرکز دو قطبی و نقطهٔ P

$$\varphi(\vec{r})=k\frac{\vec{P}.\hat{r}}{rz}$$

در فصول قبلی میدان الکتریکی یک دو قطبی الکتریکی با ممان دو قطبی را $\vec{P}=\hat{k}\rho$ را به دست آوریم. حال می توانیم با استفاده از رابطهٔ

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

میدان الکتریکی را برای فواصل r>>4 محاسبه نمود. ابتدا $\varphi(\vec{r})$ را دو دستگاه کارتزین می‌نویسیم.

$$\varphi(\vec{r})=\frac{kPz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-\hat{i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}-\hat{j}\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y}-\hat{k}\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}$$

$$E_x=\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{3/2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}2xk\rho z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$$= \frac{3k\rho xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{3/2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} 2yk\rho z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$$E_y = \frac{3k\rho yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$E_{z^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{k\rho\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} + \frac{3/2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} 2zk\rho z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{k\rho}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{3k\rho z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{-k\rho\left(x^2+y^2+z^2\right)+3k\rho z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$= \frac{-k\rho\left(x^2+y^2\right)+2k\rho z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

b- بسط داخلی

در اینجاست نقاط داخل کره‌ائی به شعاع r=a در نظر گرفته می‌شوند یعنی r<a

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{kq}{\left(a^2+r^2-2arCos\theta\right)^{1/2}} - \frac{kq}{\left(a^2+r^2+2arCos\theta\right)^{1/2}}$$

$$\left(a^2+r^2-2arCos\theta\right)^{-1/2} = a^{-1}\left(1+\frac{r^2}{a^2}-\frac{2r}{a}\right)Cos\theta^{-1/2}$$

$$= a^{-1}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{2r}{a}\right)Cos\theta\right.$$

$$+\frac{-1/2\left(1/2-1\right)}{2!}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{2r}{a}Cos\theta^2\right)+$$

$$\left.+\frac{-1/2\left(1/2-1\right)}{3!}\right]\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{2r}{a}Cos\theta^3\right)+\ldots$$

در رابطه فوق از بسط دو جمله‌ای استفاده شده است.

$$(1+x) = 1+\frac{nx}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots$$

با توجه به اتحاد $(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

با $\left(a^2+r^2-2arCos\theta\right)^{-1/2} \approx a^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{r^2}{a^2}+\frac{r}{a}Cos\theta+\frac{3}{2}\frac{r^2}{a^2}Cos^2\theta-\frac{3}{2}\frac{r^3}{a^3}Cos\theta+\frac{15}{6}\frac{r^3}{a^3}Cos^3\theta$

طریق مشابه

$$\left(a^2+r^2+2arCos\theta\right)^{-1/2}=a^{-1}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)+\frac{2r}{a}Cos\theta^{-1/2}$$

$$=a^{-1}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{2r}{a}+Cos\theta\right)+\right.$$

$$\frac{-1/2\left(\ 1/2\quad 1\right)}{2!}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{2r}{a}Cos\theta^2\right)+$$

$$\left.\frac{-1/2\left(1/2-1\right)\left(1/2\quad 1\right)}{3!}\right]\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{2r}{a}Cos\theta^3\right)+\ldots$$

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$\left(a^2+r^2+2arCos\theta\right)^{-1/2}\approx a^{-1}\left(1-1/2\frac{r^2}{a^2}-r/a\,Cos\theta+3/2\right)\frac{r^3}{a^3}Cos\theta+$$

$$\left.3/2\frac{r^2}{a^2}Cos^{2\theta}-\frac{15}{6}\frac{r^3}{a^3}Cos^{3\theta}\right)$$

در بسطهای فوق از ترمهای $\varepsilon^4=\frac{r^4}{a^4}$ و بالاتر صرف نظر شده است.

$$\varphi(\vec{r})=\frac{kq}{a}\left(1-1/2\frac{r^2}{a^2}+r/a\,Cos\theta+3/2\right)\frac{r^2}{a^2}Cos^2\theta-3/2\frac{r^3}{a^3}Cos^2\theta+\frac{15}{6}\frac{r^3}{a^3}Cos^3\theta$$

$$-\frac{kq}{a}\left(1-1/2\frac{r^2}{a^2}-r/a\,Cos\theta+3/2\frac{r^2}{a}Cos^2\theta+3/2\right)\frac{r^3}{a^3}Cos\theta-\frac{15}{6}\frac{r^3}{a^3}Cos^3\theta$$

$$\varphi(\vec{r})=\frac{2kqrCos\theta}{a^2}-\frac{3kqr^3}{a^4}Cos\theta+\frac{15}{6}\frac{2kqr^3Cos^3\theta}{a^4}$$

$$=\frac{2kqaz}{a^3}-3/2\frac{2akq\left(x^2+y^2+z^2\right)z}{a^5}+\frac{15}{6}2akq\frac{z^3}{a^5}$$

$$=\frac{k\rho z}{a^3}-3/2\frac{k\rho\left(x^2+y^2+z^2\right)}{a^5}z+\frac{15}{6}\frac{k\rho z^3}{a^5}$$

میدان الکتریکی مربوط به این تقریب پتانسیل از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\vec{E}(r)=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-\frac{k\rho}{a^3}\hat{k}+3/2\frac{k\rho\left(x^2+y^2+z^2\right)}{a^5}\hat{k}+\frac{3k\rho xt}{a^5}\hat{k}$$

$$+\frac{3k\rho yz}{a^5}\hat{j}+\frac{3k\rho z^2}{a^5}\hat{k}-\frac{15}{2}\frac{k\rho z^2}{a^5}\hat{k}$$

$$E_x=\frac{3k\rho xz}{a^5}$$

$$E_y=\frac{3k\rho yz}{a^5}$$

$$E_z=-\frac{k\rho}{a^3}+\tfrac{3}{2}\frac{k\rho\left(x^2+y^2+z^2\right)}{a^5}+\frac{3k\rho z^2}{a^5}-\frac{15}{2}\frac{k\rho z^2}{a^5}$$

میدان الکتریکی تا تقریب $\varepsilon^2=\frac{r^2}{a^2}$ استخراج شده است. اگر a>>r، از ترمها مرتبه دو ε در E_x و E_y و E_z صرف نظر شود.

$$E_x=\mathbf{0}$$

$$E_y=\mathbf{0}$$

$$E_z=-\frac{k\rho}{a^3}$$

در این حالت به نتیجه جالبی می‌رسیم یعنی میدان در حوالی مرکز برای دوقطبی دارای مقدار و جهت ثابت است. این نتیجه بطور مستقیم از پتانسیل نیز قابل استخراج است اگر و فقط ترم‌های تا مرتبه یک ε را بسط پتانسیل نگه داریم. یعنی

$$\varphi(\vec{r})=\frac{2kqrCos\theta}{a^2}=\frac{k\rho z}{a^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi(\vec{r})=-\hat{k}\frac{k\rho}{a^3}$$

که با نتیجه قبل یکسان است.

۱-۱۰-۲ مثال ۱

پتانسیل یک دو قطبی که مطابق شکل روی صفحه xy قرار دارد و با محور x ها زاویهٔ $\varphi_\circ$ را می‌سازد را در نقاط a- روی محور z   b- روی محور y   c- روی محور x   d- در یک نقطهٔ دلخواه مانند $P(x,y,z)$

حلّ:

a- روی محور z

$$\vec{P}=\hat{i}P_x+\hat{j}P_y=\hat{i}PCos\varphi_\circ+\hat{j}PSin\varphi_\circ$$

$$\varphi(0,0,z)=k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^2}=k\frac{\left(\hat{i}P_x+\hat{j}P_y\right).\hat{k}}{z^2}=0$$

b- روی محور y

$$\varphi(0,y,0)=k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^2}=k\frac{\left(\hat{i}P_x+\hat{j}P_y\right).\hat{j}}{y^2}=k\frac{P_y}{y^2}=\frac{kPSin\varphi_\circ}{y^2}$$

c- روی محور x

$$\varphi(x,0,0)=k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^2}=k\frac{\left(\hat{i}P_x+\hat{j}P_y\right).\hat{i}}{x^2}=k\frac{P_y}{x^2}=\frac{kPSin\varphi_\circ}{x^2}$$

d- در نقطهٔ دلخواه $P(x,y,z)$

$$\hat{r}=\hat{i}Sin\theta\,Cos\varphi+\hat{j}Sin\theta\,Sin\varphi+\hat{k}Cos\theta$$

$$\varphi(\vec{r})=k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^2}$$

$$=\frac{k\left(\hat{i}P_x+\hat{j}P_y\right).\left(\hat{i}Sin\theta\,Cos\varphi+\hat{j}Sin\theta\,Cos\varphi+\hat{k}Cos\theta\right)}{r^2}$$

$$=k\frac{P_xSin\theta\,Cos\varphi+P_ySin\theta\,Sin\varphi}{\mathrm{r}^2}$$

$$=\frac{kP_xCos\varphi_\circ Sin\theta\,Cos\varphi+PSin\varphi\,Sin\theta\,Cos\varphi}{\mathrm{r}^2}$$

می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر نوشت

$$\varphi(\vec{r})=\varphi(x,y,z)=k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3}$$

$$=k\frac{\left(\hat{i}P_x+\hat{j}P_y\right).\left(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z\right)}{r^3}$$

$$=k\frac{P_xx+P_yy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

۲-۱۰-۲ مثال ۲

با نقطه‌ائی، توزیع خطی بی‌نهایت با چگالی ثابت و صفحهٔ بی‌نهایت با چگالی سطحی بار یکنواخت را در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ P_1 و P_2 را با محاسبه انتگرل $-\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}.\vec{dl}$ روی مسیرهای مناسب، به دست آورید.

a- بار نقطه‌ائی

خطوط میدان بار نقطه‌ائی شعاعی و در راستای $\hat{r}$ هستند. نقطهٔ P_1 در فاصله r_1 و نقطهٔ P_2 در فاصلهٔ r^2 از بار q قرار دارند. مسیرهای ۱ و ۲ روی شکل نمایش داده شده‌اند مسیر ۱در راستای شعاعی از P_1 تا P_2' و سپس روی دایره‌ائی به شعاع r_2 از نقطهٔ P_2' به P_2 می‌رسیم. مسیر ۲ از نقطهٔ P_1 روی

دایره‌ائی به شعاع r_1 به نقطهٔ P_1' و سپس از P_1' در راستای شعاعی به P_2 می‌رسیم. به عنوان مثال مسیر را انتخاب می کنیم

$$-\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}.\overrightarrow{dl}=-\int_{P_1}^{P'_2}\vec{E}.\overrightarrow{dl}-\int_{P'_2}^{P_2}\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

انتگرال دوّم صفر است زیرا میدان الکتریکی بار نقطه‌ائی بر المان طول مسیر عمود است.

$$\Delta\varphi=-\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}.\overrightarrow{dl}=$$

$$\Delta\varphi=-\int_{P_1}^{P_2}\frac{2k\lambda}{\rho}\hat{\rho}.\hat{\rho}d\rho=\int_{P_1}^{P_2}\frac{2k\lambda}{\rho}d\rho-$$

$$=-2k\lambda\ln\rho\Big|_{P_1}^{P_2}$$

$$=\quad 2k\lambda\ln\frac{P_2}{P_1}$$

b- برای صفحه بی‌نهایت مسیرهای ۱ و ۲ روی شکل مسیرهای مناسبی برای محاسبه انتگرال هستند فاصله نقطهٔ P_1 از صفحه بی‌نهایت z_1 و فاصلهٔ نقطهٔ P_2 از صفحه بی‌نهایت z_2 است بطور مثال محاسبه انتگرال روی مسیر ۱ انجام می‌شود

$$\Delta\varphi=\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}.\overrightarrow{dl}=-\int_{P_1}^{P_1^1}\vec{E}.\overrightarrow{dl}-\int_{P_1^1}^{P_2}\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

انتگرال اوّل صفر است زیرا میدان الکتریکی و المان طول این قسمت مسیر ۱ برهم عمودند. لذا

$$\Delta\varphi=-\int_{P_1^1}^{P_2}\vec{E}.\overrightarrow{dl}=-\int_{z_1}^{z_2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{k}.\hat{k}dz$$

$$=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\left(z\Big|_{z_1}^{z_2}\right)=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\left(z_2-z_1\right)$$

۳-۱۰-۲ مثال ۳

استوانه‌ائی به طول L و شعاع R با چگالی ثابت حجمی و ρ را مطابق شکل در نظر بگیرید. پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P روی محور z محاسبه نمائید. ($z>\frac{1}{2}$)

$$\varphi(\vec{r})=k\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

المان بار

$$dq=\rho_\circ\,\rho' d\rho' d\varphi' dz'$$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=\left[x'^2+y'^2+(z-z')^2\right]^{1/2}$$

$$\varphi(0,0,z)=\rho_\circ k\int_{-L/2}^{L/2}\int_\circ^R\int_\circ^{2\pi}\frac{\rho_\circ\rho' d\rho' d\varphi' dz'}{\left[x'^2+y'^2+(z-z'^2\right]^{1/2}}$$

$$\varphi(0,0,z)=2\pi\rho_\circ k\int_{-L/2}^{L/2}\int_{\circ R}\frac{\rho' d\rho' dz'}{\left[\rho'^2+(z-z')^2\right]^{1/2}}$$

$$\varphi(0,0,z)=2\pi\rho_\circ k\int_{L/2}^{L/2}\left\{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{1/2}-\left[(z-z'')^2\right]^{1/2}dz'\right.$$

$$=2\pi\rho_\circ k\left[\int_{-L/2}^{L/2}(z'-z)dz+\int_{L/2}^{L/2}\left[R^2+(z-z')^2\right]\right]^{1/2}dz'$$

$$=\pi\rho_\circ k(z'-z)^2\Big|_{-L/2}^{L/2}+2\pi\rho_\circ k\int_{-L/2}^{L/2}+2\pi\rho_\circ k\int_{L/2}^{L/2}\left[R^2+(z-z')^2\right]^{1/2}dz'$$

$$z-z'=\zeta \qquad d\zeta=-dz'$$

$$\varphi(0,0,z)=\pi\rho_\circ k\left[(L/2-z)^2\right]+2\pi\rho k\int_{z-L/2}^{z+L/2}\left(R^2+\zeta^2\right)^{1/2}d\zeta$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2dx}=\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\varphi(0,0,z)=\pi\rho_\circ k\left[(L/2-z)^2(L/2+z)^2-\right]+$$

$$\varphi(0,0,z)=\pi\rho_\circ k\left[\left(\frac{L}{2}-z^2\right)-\frac{L}{z}+z\right]^2+$$

$$2\pi k\rho_\circ\left\{\frac{\zeta\sqrt{\zeta^2+R^2}}{2}+\frac{R^2}{2}\ln\left(\zeta+\zeta^2+R^2\right)_{z-L/2}^{z+L/2}\right.$$

$$\varphi(0,0,z)=\pi\rho_\circ k\left[\left(\frac{L}{2}\right)-z^2-\left(\frac{L}{2}+z^2\right)\right]+$$

$$2\pi k\rho_\circ\left\{\frac{z+\frac{L}{2}\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}^2+R^2\right)}}{2}+\frac{R^2}{2}\ln\left[\left(z+\frac{L}{2}\right)+\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}^2+R^2\right)}\right.\right.$$

$$\left.\frac{-\left(z-\frac{L}{z}\sqrt{\left(z-\frac{L}{z}\right)^2+R^2}\right)}{2}\right\}+\frac{R^2}{2}\ln\left[\left(z-\frac{L}{2}\right)+\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2+R^2}\right.$$

۲-۱۰-۴ مثال ۴

نیمکره ای به شعاع R مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر بار الکتریکی به چگالی σ بطور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده باشد

a- پتانسیل الکترواستاتیکی آن را در نقطهٔ P که به فاصله z از مرکز قرار دارد را محاسبه نمائید.

b- میدان الکتریکی را در نقطهٔ P به دست آورید.

$$\varphi(\vec r)=k\int\frac{dq}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$dq=\sigma R^2 Sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$|\vec r-\vec r'|=\left(z^2+R^2-2zRCos\theta\right)^{\frac{1}{2}}-$$

$$\varphi(0,0,z)=k\int\frac{\sigma R^2 Sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\left(z^2+R^2-2RzCos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=k\sigma R^2\int_\circ^{2\pi}\leftrightarrow\int_\circ^{\rho/2}\frac{Sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\left(z^2+R^2-2RzCos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=k\sigma R^2\,2\pi\frac{1}{Rz}\left(z^2+R^2-2\pi zCos\theta\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_\circ^{2\pi}$$

$$=k\sigma R^2\,2\pi\frac{1}{Rz}\left\{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}-\left[(z-R)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$W_a=\int\rho(\vec r)\varphi(\vec r)\,dV$$

$$=2\pi kR\frac{1}{z}\left[\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}+z-R\right]$$

b-

$$\vec E=-\vec\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat k$$

$$\vec E=\hat k\left\{\frac{1}{z^2}\right\}\left[\left(R^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]+z-R$$

$$+\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{2}\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}2z-1\right]\Bigg\}2\pi kR$$

$$\vec E=\hat k 2\pi kR\left[\frac{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}+z-R}{z^2}-\left(z^2+R^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right]$$

۵-۱۰-۲ مثال ۵

مخروطی به زاویهٔ رأس $\theta_\circ$ و ارتفاع h دارای بار سطحی یکنواخت به چگالی σ است بار فقط روی سطح جانبی آن قرار دارد پتانسیل الکترواستاتیکی را در نقطهٔ o رأس مخروط به دست آورید.

$$\varphi(\vec{r})=k\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$dq=\sigma ds=rSin\theta_\circ drd\varphi$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=r$$

$$\varphi(0,0,0)=\int_\circ^{h/Cos\theta_\circ}\int_\circ^{2\pi}\frac{\sigma rSin\theta_\circ drd\varphi}{r}$$

$$=2\pi k\sigma Sin\theta_\circ\frac{h}{Cos\theta_\circ}=2\pi hk\sigma\tan\theta_\circ$$

۲-۱۰-۶ مثال ۶

دو قطبی $\vec{P}$ را که مطابق شکل در جهت محور zها قرار دارد را در نظر بگیرید. شار گذرنده از یک صفحه فرضی به شعاع R را محاسبه نمائید. فاصله صفحه از مرکز را z بگیرید.

$$\phi_{\vec{E}}=\int\vec{E}.\overrightarrow{ds}=\int\vec{E}.\vec{k}\rho\,d\rho\,d\varphi=\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{R}E_z\rho d\rho d\varphi$$

$$\varphi(\vec{r})=k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^2}=\frac{kP\hat{k}.(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=k\frac{Pz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$$

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{kP(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3/2(x^2+y^2+z^2)^{+1/2}2k\rho z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$=-\frac{kP}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3kPz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$=-\frac{kP}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3kPz^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\phi_{\vec{E}}=\int_\circ^{2\pi}\int_{\pm\circ}^{R}\left[-\frac{kP}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3kPz^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\right]\rho d\rho d\varphi$$

$$=kP\left[\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{R}\frac{3z^2\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}-\int_\circ^{2\pi}\int_{\pm\circ}^{R}\frac{\rho f\rho d\varphi}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$=2\pi kP\left\{3z^2\left[-2/3(\rho^2+z^2)^{-3/2}\Big|_\circ^R-\left[-(\rho^2+z^2)^{-1/2}\right]_\circ^R\right]\right\}$$

$$=2\pi kP\left[\frac{2}{z}\right]-\frac{2z^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}+\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}-\frac{1}{z}$$

۷-۱۰-۲ مثال ۷

خطوط نیرو و سطوح هم پتانسیل چند توزیع بار