www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۱۱

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

قانون آمپر

بارهای متحرک میدان مغناطیسی تولید می‌کنند. این میدان را با قرار دادن یک قطب نما در کنار سیم می‌توان مشاهده کرد. همانطور که از شکل پیداست عقربه تمام قطب‌نماها در غیاب جریان به یک سو هستند، ولی موقعی که $I \neq \circ$ است عقربه‌ها در جهت مماس به مسیر دایروی قرار می‌گیرند.

اگر مسیر دایروی به شعاع r را به تعداد زیادی المان طول $\vec{dl} = dl\hat{\varphi}$ قسمت نمائیم.

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = B\oint dl = \left(\frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\right)2\pi\rho = \mu_\circ I \quad \begin{matrix} \pm x \\ \vec{J} = J\hat{i} \end{matrix}$$

نتیجه بالا با انتخاب یک منحنی بسته یا حلقهٔ آمپری که بر یک خط میدان خاص منطبق است به دست آمد.

حال یک حلقهٔ آمپری پیچیده‌تر در نظر می‌گیریم (مطابق شکل) این حلقهٔ آپر شامل دو خطا میدان است. انتگرال خطی میدان مغناطیسی حول کانتور abcda برابر است با:

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \int_{ab}^{\vec{B}.\vec{dl}} + \int_{bc} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{cd} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{da} \vec{B}.\vec{dl}$$

طول قوس bc برابر $\rho = \theta$ و طول قوس da برابر $\rho_1(2\pi - \theta)$ اولین و سومین انتگرال صفرند چون میدان مغناطیسی بر مسیر انتگرال‌گیری عمود است.

چون $B_1 = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho_1}$ و $B_2 = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho_2}$ رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$\oint_{abcda} \vec{B}.\vec{dl} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho_2}(\rho_2\theta) + \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho_1}\left[\rho_1(2\pi - \theta)\right]$$
$$= \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\theta + \frac{\mu_\circ I}{2\pi}(2\pi - \theta) = \mu_\circ I$$

مشاهده می‌شود که نتیجه مشابه حالت قبل می‌باشد.

قبلاً نشان دادیم که میدان یک سیم بسیار طویل حامل جریان I در فاصله ρ از آن

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

حال اگر یک منحنی دلخواه برای حلقهٔ آمپر انتخاب شود به طوری که در دستگاه مختصات استوانه‌ای المان طول آن

$$\vec{dl} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{k}$$

انتگرال خطی $\vec{B}$ روی هر منحنی بسته (حلقه آمپر)

$$\oint_{\text{منحنی بسته}} \vec{B}.\vec{dl} = \oint_{\text{منحنی بسته}} \left(\frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\right)\hat{\varphi}.\left(d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\oint_{\text{منحنی بسته}} d\varphi = \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\times 2\pi = \mu_\circ I$$

بطور مثال شکل یک منحنی بسته با المان طول $\vec{dl} = d\rho d\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi}$ را نشان می‌دهد.

حلقه آمپر

بهر حال، انتگرال خطی میدان مغناطیسی $\oint \vec{B}.\vec{dl}$ حول هر حلقهٔ بسته آمپری متناسب است با محور I، جریانی که توسط حلقه محصور شده است. یعنی

$$\oint_{\text{حلقه آمپر}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu I_{\text{محصور}}$$

این رابطه به قانون آمپر معروف است. قانون آمپر در مگنتواستاتیک مشابه قانون گوس در الکترواستاتیک است. برای این که این قوانین را بتوانیم بکار ببریم، سیستم باید دارای تقارن‌های خاصی باشد. برای بکار گرفتن قانون آمپر در حالت سیم بسیار طویل سیستم دارای تقارن استوانه‌ایست ولی اگر سیم محدود باشد از قانون بیو و ساوار به جای آن باید استفاده شود.

بطور خلاصه

قانون بیو و ساوار	هر نوع جریان	$\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\int \frac{\vec{dl}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}$
قانون آمپر	جریان با تقارن خاص	$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$

قانون آمپر را می‌توان برای جریان‌های با پیکربندی زیر بکار گرفت.
۱سیم مستقیم بسیار طویل که حامل جریان مانای I است.
۲- صفحه بی‌نهایت نازک و همچنین به ضخامت d که دارای جریان به چگالی $\vec{k}$ و $\vec{J}$ هستند.
۳- سولنوئید (سیم لوله) بی‌نهایت
۴- تروئید

این ۴ پیکربندی را به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱

میدان مغناطیسی داخل و خارج یک سیم بسیار طویل حامل جریان I و به شعاع R را به دست آورید.

جریان روی سطح مقطع سیم یکنواخت توزیع شده است یعنی چگالی جریان یکنواخت می‌باشد. برای میدان نقاط داخل ابتدا حلقهٔ آمپری مطابق شکل و به شعاع ρ در نظر می‌گیریم. با استفاده از قانون آمپر

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \oint Bdl = B\oint dl = B2\pi\rho = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

محصور I جریانی ایست که از حلقه آمپر به شعاع ρ می‌گذرد. یعنی

$$I_{\text{محصور}} = \overbrace{\frac{I}{\pi R^2}}^{J} \times \pi\rho^2$$

پس

$$B = 2\pi\rho = \mu_\circ \frac{\pi\rho^2}{\pi R^2} I$$

$$B = \frac{\mu_\circ I\rho}{2\pi R^2}$$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$B2\pi\rho = \mu_\circ I \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}$$

نکات:

۱- مشاهده می‌شود که میدان مغناطیسی در مرکز سیم صفر است و بطور خطی با ρ تا $\rho = R$ افزایش می‌یابد. خارج سیم میدان متناسب است با $\frac{1}{\rho}$ و کاهش می‌یابد. رفتار کیفی میدان با شعاع در شکل زیر نمایش داده شده است.

۲- میدان سیم استوانه‌ای به شعاع R در نقاط خارج دقیقاً مانند میدان سیم نازک حامل جریان I است.

$$B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}$$

به عبارت دیگر مثل آنست که جریان سیم استوانه‌ای روی محور آن متمرکز شده باشد.

مثال ۲

میدان مغناطیسی یک صفحهٔ بی‌نهایت که دارای جریان به چگالی سطحی $\vec{k} = k\hat{i}$ است را در نقطهٔ P در فاصله z از صفحه به دست آورید.

حلّ:

حلقه آمپری مستطیل شکل انتخاب می‌شود. به میدان در بالای صفحه و پائین آن به موازات صفحه است در بالا در جهت y- و در پائین در جهت y+ است. زیرا اگر دو نوار نازک حامل جریان متقارن مثبت به P روی صفحه در نظر بگیریم میدان حاصل از این دو نوار در P فقط دارای مؤلفهٔ افقی ایست. اگر جریان سطحی حاصل از کنار هم قرار دادن سیم‌های بسیار طویل جریان I باشد.

دو سیم متقارن نسبت به P مانند ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. مطابق شکل میدان برآیند این دو سیم به موازات صفحه و در جهت y- است. با استفاده از قانون آمپر برای حلقهٔ آمپری مستطیل شکل داریم

$$\oint_{abcda} \vec{B}.\vec{dl} = \int_{ab} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{bc} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{cd} \vec{B}.\vec{dl} + \int_{da} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$= Bl + \circ + Bl + \circ = \mu_\circ kl$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ k}{2}\left(-\hat{j}\right)$$

برای حالتی که جریان سطحی از سیم‌های بسیار طویل موازی که کنار هم چیده شده باشند و هر کدام حامل جریان I باشند ایجاد شده باشد k=nI لذا

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ nI}{2}\left(-\hat{j}\right)$$

همانطور که اشاره شد جریان سطحی را می‌توان از حرکت دادن بارهای استاتیک نیز ایجاد نمود یعنی اگر صفحه بی‌نهایت با چگالی سطحی بار یکنواخت σ که با سرعت $\vec{v}$ در جهت محور xها حرکت می‌کند تولید جریان $\vec{k} = \sigma v\hat{i}$ می‌نماید. در این حالت

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ \sigma v}{2}\left(-\hat{j}\right)$$

مثال ۳
میدان مغناطیسی یک تیغهٔ بی‌نهایت حامل جریان
یک تیغهٔ بی‌نهایت به ضخامت d که روی صفحه xy قرار گرفته را با چگالی جریان یکنواخت $\vec{J} = J\hat{i}$ در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی را در نقاط داخل تیغه و خارج آن بیابید.

حلّ:
می‌توانیم این جریان را به صورت سیم‌های بسیار طویل موازی حامل جریان در جهت $\pm x$ در نظر بگیریم یا این که یک تیغهٔ بی‌نهایت که دارای بار حجمی به چگالی یکنواخت ρ است و با سرعت $\vec{v} = v\hat{i}$ در جهت محور $\pm x$ حرکت می‌کند. با استفاده از تقارن مسأله میدان مغناطیسی در نقطهٔ P بالای صفحه به سمت y- . و میدان مغناطیسی در یک نقطه پائین صفحه در جهت y+ است. (این تیغه از قرار گرفتن بی‌نهایت صفحه نازک روی هم تشکیل شده است)
می‌توان قانون آمپر را برای یافتن میدان مغناطیسی تیغه به کار ببریم. حلقه‌های آمپری برای نقاط داخل و خارج مطابق شکل در نظر می‌گیریم.
قانون آمپر

$$\oint \vec{B}.dl = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

نقاط داخل

$$\oint_{c_2} \vec{B}.\vec{dl} = B\left(2l\right) = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$I_{\text{محصور}} = \int \vec{J}.\vec{ds} = J\,2\left|z\right|l$$

$$B\left(2l\right) = \mu_\circ J = \left|z\right| l \Rightarrow B = \mu_\circ J\left|z\right|$$

نقاط خارج

$$\oint_{c_1} \vec{B}.\vec{dl}\left(2l\right) = \mu_\circ I_{\text{محصور}} = \mu_\circ\left(Jdl\right)$$

$$B = \frac{\mu_\circ Id}{2} \quad vv_q = \frac{1}{\varepsilon_\circ \mu_\circ} = c^2$$

میدان مغناطیسی در $z = \circ$ صفر است.

نتایج مسأله می‌تواند به صورت زیر خلاصه شود.

$$\vec{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_\circ Jd}{2}\hat{j} & z > d/2 \\ -\mu_\circ Jd\hat{j} & -d/2 < z < d/2 \\ \dfrac{\mu_\circ Jd}{2}\hat{j} & z > -d/2 \end{cases}$$

در صورتی که جریان از طریق حرکت دادن بار به چگالی حجمی یکنواخت ρ ایجاد شده باشد

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = \rho v\hat{i} = J\hat{i}$$

و روابط بالا به صورت زیر در می‌آیند.

$$\vec{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_\circ \rho vd}{2}\hat{j} & z > d/2 \\ -\mu_\circ \rho vz\hat{j} & -d/2 < z < d/2 \\ \dfrac{\mu_\circ \rho vd}{2}\hat{j} & z > -d/2 \end{cases}$$

مثال ۳

سولنوئید

سولنوئید یا سیملوله سیم‌پیچ است که به صورت مارپیچ پیچیده شده و حامل جریان I است. در شکل میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم لوله حقیقی که طول آن محدود است و میدان یک سیم لوله ایده‌آل که طول مارپیچ در مقایسه با قطر آن بسیار زیاد است.

میدان یکنواخت   میدان صفر   بدون اثر لبه   اثر لبه   میدان ضعیف   میدان یکنواخت
سولنوئید حقیقی   سولنوئید ایده‌آل

در سولنوئید حقیقی میدان داخل سولنوئید تقریباً یکنواخت، اثر لبه وجود دارد و میدان خارجی نیز مخالف صفر گرچه ضعیف. ولی میدان در سولنوئید ایده‌آل فقط داخل سولنوئید وجود دارد و کاملاً یکنواخت از اثر لبه صرف نظر می‌شود و میدان خارجی سولنوئید نیز صفر است.

میدان مغناطیسی حاصل از یک سولنوئید ایده‌آل را می‌توان با استفاده از قانون آمپر به دست آورد. به عنوان حلقهٔ آمپری مسیر مستطیلی شکل به طول l و عرض w را در نظر می‌گیریم.

حلقهٔ آمپر

مسیر را پاد ساعتگرد می‌پیمائیم

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \int_1 \vec{B}.\vec{dl} + \int_2 \vec{B}.\vec{dl} + \int_3 \vec{B}.\vec{dl} + \int_4 \vec{B}.\vec{dl}$$

$$= 0 + 0 + Bl + 0$$

در رابطه بالا، انتگرال‌های ۲ و ۴ صفرند زیرا $\vec{B}$ به المان طول مسیر $\vec{dl}$ عمود است. روی مسیر ۱ $\vec{B} = 0$ است، زیرا میدان مغناطیسی فقط در داخل سولنوئید غیر صفر است. از طرف دیگر جریان محصور شده توسط حلقهٔ آمپر

$$I_{\text{محصور}} = nlI$$

که در آن n تعداد سیم‌پیچ‌ها بر واحد طول است پس

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = Bl = \mu_0 nlI$$

$$B = \mu_0 nI$$

که می‌تواند آن را بر حسب چگالی جریان سطحی یا جریان بر واحد طول نیز نوشت یعنی $k=nI$ لذا

$$B = \mu_0 k$$

مثال ۴

میدان سولنوئید حقیقی

میدان مغناطیسی یک سولنوئید محدود به طول l و به شعاع R که حامل جریان I است را در یک نقطه روی محور آن و در فاصله z از مبداء مختصات به دست آورید.

حلّ:

برای حل این مسأله می‌توانیم از میدان یک حلقه کمک بگیریم یعنی

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \hat{k}$$

اگر حلقه‌ها را به هم چسبیده در نظر بگیریم و تعداد سیم‌پیچ‌ها بر واحد طول n باشد جریانی که از نواری به عرض dz' می‌گذرد.

$$dI = I\left(ndz'\right)$$

چون نقطهٔ میدان P در z قرار دارد.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2}{2\left[\left(z - z'\right)^2 + R^2\right]^{3/2}} dI\hat{k}$$

$$= \frac{\mu_\circ R^2 nIdz'}{2\left[\left(z-z'\right)^2+R^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ nIR^2}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dz'}{-l/2\left[\left(z-z'\right)^2+R^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

$$= \frac{\mu_\circ nIR^2}{2}\frac{z'-z}{R^2\sqrt{\left(z-z'\right)^2+R^2}}\Bigg|_{-l/2}^{l/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ nI}{2}\left[\frac{l/2-z}{\sqrt{\left(z-l/2\right)^2+R^2}}+\frac{l/2-z}{\sqrt{\left(z+l/2\right)^2+R^2}}\right]\hat{k}$$

شکل $B_z/B_\circ$ را بر حسب z/R نمایش می‌دهد. به طوری که $B_\circ = \mu_\circ nI$ میدان مغناطیسی یک سولنوئید ایده‌آل است. در شکل اوّل l=10R و در شکل دوّم l=20R گرفته شده است.

توجه شود که مقدار میدان مغناطیسی در ناحیه $|z| < l/2$ تقریباً یکنواخت و برابر $B_\circ$ است.

مثال ۵
تروئید

یک تروئید با N سیم پیچ مطابق شکل در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی را در نقاط داخل و خارج تروئید به دست آورید.

حلّ:

تروئید یا چنبره به صورت یک سولنوئید خمیده است. بنابر تقارن خطوط $\vec{B}$ در داخل تروئید مطابق شکل دایره‌هائی هم مرکز تشکیل می‌دهند. قانون آمپر را در مورد مسیر دایره‌ای انتگرال گیری به شعاع ρ به کار می‌بندیم

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$B2\pi\rho = \mu_\circ NI$$

$$B = \frac{\mu_\circ NI}{2\pi\rho}$$

برخلاف سولنوئید ایده‌آل، B در سطح مقطع تروئید ثابت نیست. برای نقاط خارج میدان مغناطیسی صفر است زیرا اگر حلقهٔ آمپر به شعاع ρ خارج تروئید در نظر بگیریم

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$B2\pi\rho = \mu_\circ I_{\text{محصور}} = \circ$$

$$B = \circ$$

مثال ۶

فرض کنید یک استوانه‌ای بسیار طویل به شعاع R حامل جریان I است. اگر چگالی جریان غیر یکنواخت آن $J = \alpha\rho$ باشد (α ثابت) میدان مغناطیسی را در نقاط داخل و خارج بیآبید.

حلّ:

این مسأله را می‌توان از قانون آمپر حل نمود

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

برای نقاط داخل یک حلقه آمپر به شعاع ρ داخل استوانه انتخاب می‌نمائیم

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = B2\pi\rho = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$I_{\text{محصور}} = \int \vec{J}.\vec{ds} = \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^{\rho} \alpha\rho'\rho' d\rho' d\varphi'$$

$$= 2\pi\alpha \frac{1}{3} \rho'^3 \Big|_\circ^\rho = \frac{2\pi\alpha}{3} \rho^3$$

میدان داخل

$$B = \frac{\alpha\mu_\circ\rho^2}{3} \qquad \vec{B} = \frac{\alpha\mu_\circ\rho^2}{3}\hat{\varphi}$$

برای میدان نقاط خارج حلقهٔ آمپر ئی مطابق شکل در خارج سیم استوانه‌ائی انتخاب می‌نمائیم.

$$\oint B.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$B2\pi\rho = \mu_\circ \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^{R} \alpha\rho'\rho' d\rho' d\varphi'$$
$$= \mu_\circ \alpha 2\pi\pi \frac{1}{3} R^3$$

پس در یک نقطه خارج هادی

$$B = \frac{\alpha\mu_\circ R^3}{3\rho} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\alpha\mu_\circ R^3}{3\rho}\hat{\varphi}$$

در شکل منحنی b به صورت تابعی از ρ رسم شده است.

قانون آمپر و اصل برهمنهی

ترکیب قانون آمپر و اصل بر همنهی می‌تواند برای حلّ بعضی از مسائل مفید واقع شود، به طوری که بتوان از دشواری‌های قانون بیو و ساوار اجتناب نمود.

مثال ۷

در سیم استوانه‌ای بسیار طویل به شعاع R و حامل جریان به چگالی یکنواخت J سوراخی به موازات محور آن ایجاد شده است میدان مغناطیسی را در یک نقطه داخل سوراخ به دست آورید. فاصله مرکز سوراخ و استوانه را d بگیرید.

حلّ:

این مسأله معادل است با یک سیم استوانه توپر که حامل جریان J+ و به جای سوراخ جریان J- یعنی

پس میدان در یک نقطۀ دلخواه در سوراخ برابر است با جمع میدان یک استوانه توپر حامل جریان J+ بعلاوۀ میدان حاصل از جریان J- در موضع سوراخ. قبلاً با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی یک استوانه حامل جریان به چگالی J را در داخل آن به دست آوردیم که برابر است با

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ J\rho}{2}\hat{\varphi}$$

میدان استوانۀ توپر با چگالی J+ $\quad \vec{B}_+ = \frac{\mu_\circ J\rho}{2}\hat{\varphi}$

میدان استوانه در موضع سوراخ با چگالیJ- $\quad \vec{B}_- = -\frac{\mu_\circ J\rho'}{2}\hat{\varphi}'$

$$\vec{B} = \vec{B}_+ + \vec{B}_- = \frac{\mu_\circ J\rho}{2}\hat{\varphi} - \frac{\mu_\circ J\rho'}{2}\hat{\varphi}'$$

می‌توان با استفاده از روابط زیر که بین بردارهای یکه برقرارند.

$$\hat{\varphi}=\hat{k}\times\hat{\rho}$$
$$\hat{\varphi}'=\hat{k}\times\hat{\rho}'$$

که در آن $\hat{k}$ بردار یکه در جهت J+ است. پس

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ J\rho}{2}\hat{k}\times\hat{\rho}-\frac{\mu_\circ J\rho'}{2}\hat{k}\times\hat{\rho}'$$

با توجه به این که $\rho\hat{\rho}=\vec{\rho}$ و $\rho'\hat{\rho}'=\vec{\rho}'$ لذا میدان مغناطیسی در یک نقطه داخل سوراخ

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ J}{2}\hat{k}\times\hat{\rho}-\frac{\mu_\circ J}{2}\hat{k}\times\vec{\rho}'$$
$$=\frac{\mu_\circ J}{2}\hat{k}\times\left(\vec{\rho}-\vec{\rho}'\right)$$

با توجه به شکل مقابل $\vec{\rho}'+\vec{d}=\vec{\rho}\Rightarrow\vec{f}=\vec{\rho}-\vec{\rho}'$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ J}{2}\hat{k}\times\vec{d}$$

همانطور که از رابطه بالا پیداست مقدار $\vec{B}$ و جهت آن در حفره ثابت است.

مثال ۸

دو سیم استوانه‌ای مطابق شکل در نظر بگیرید، به طوری که فاصله مراکز آنها از یکدیگر d و شعاع هر استوانه برابر R است استوانۀ طرف راست حامل جریان یکنواخت به چگالی J و به طرف خارج صفحه و استوانه طرف چپ حامل جریان یکنواخت به چگالی J به طرف داخل صفحه و ناحیه فصل مشترک در استوانه خلاء است. میدان مغناطیسی را در یک نقطه داخل خلاء به دست آورید.

حلّ:

با استفاده از قانون آمپر و اصل بر همنهی می‌توان این مسأله را حلّ نمود.

به طوری که $\vec{B}_+$ میدان سیم با چگالی J+ و $\vec{B}_-$ میدان سیم با چگالی J- است.

$$\vec{B}_+=\frac{\mu_\circ J\rho'}{2}\hat{\varphi}'$$
$$\vec{B}_-=-\frac{\mu_\circ J\rho}{2}\hat{\varphi}$$

پس
$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ J\rho'}{2}\hat{\varphi}'-\frac{\mu_\circ J\rho\hat{\varphi}}{2}$$

با استفاده از روابط زیر بین بردارهای یکه داریم

$$\hat{\varphi}' = \hat{k} \times \hat{\rho}'$$
$$\hat{\varphi} = \hat{k} \times \hat{\rho}$$

به طوری که $\hat{\rho}'$ و $\hat{\rho}$ بردارهای یکه در جهت افزایش ρ' و ρ هستند. پس از جایگزینی روابط فوق در رابطه $\vec{B}$ داریم

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ J \rho'}{2} \hat{k} \times \hat{\rho}' - \frac{\mu_\circ J \rho}{2} \hat{k} \times \hat{\rho}$$
$$= \frac{\mu_\circ J}{2} \hat{k} \times \vec{\rho}' - \frac{\mu_\circ J}{2} \hat{k} \times \vec{\rho}$$
$$= \frac{\mu_\circ J}{2} \hat{k} \times \left(\vec{\rho}' - \vec{\rho} \right)$$

با توجه به شکل

$$\vec{d} + \vec{\rho}' = \vec{\rho} \Rightarrow \vec{d} = \vec{\rho} - \vec{\rho}'$$
$$\vec{B} = -\frac{\mu_\circ J}{2} \hat{k} \times \vec{d}$$

روابط فوق می گوید که میدان در حفره عدسی شکل ثابت و جهت آن نیز در خلاف جهت مثبت محور yهاست.

مثال ۹

بار حجمی الکتریکی به چگالی ثابت ρ در تیغه بی‌نهایت به ضخامت 2d مطابق شکل قرار گرفته است. اگر حفره‌ای استوانه‌ای بسیار طویل به شعاع $R = d/2$ در آن ایجاد شود.

الف- میدان الکتریکی را در نقطهٔ P به فاصله y=3Rروی محور y به دست آورید.

ب- اگر کل توزیع بار با سرعت $\vec{v}$در جهت محور zها حرکت کند میدان مغناطیسی را در نقطهٔ P به دست آورید.

ج- اگر بار q با سرعت $\vec{v}_q$ در نقطهٔ P به موازات محور zها حرکت کند. نیروی وارد بر آن را محاسبه نمائید.

د- برای این که نیروی وارد به ذره برابر صفر شود چه شرطی باید بین سرعت‌های v_q و v برقرار باشد.

حلّ:

میدان الکتریکی

میدان الکتریکی در نقطهٔ P برابر است با میدان تیغه توپر E_s بعلاوه میدان استوانه E_c وقتی که چگالی آن $-\rho$ است.

میدان یک تیغه توپر با چگالی ρ در نقاط خارج آن

سطح گوس

با استفاده از قانون گوس $\oiint \vec{E}.\vec{ds} = q/\varepsilon_\circ$

میدان تیغه در نقطهٔ P $\cancel{2A} E_s = \frac{\cancel{A}2\,d\rho}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \vec{E}_s = \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}(\hat{j}) = \frac{2\rho R}{\varepsilon_\circ}(\hat{j})$

میدان استوانه با چگالی $-\rho$ در نقطهٔ P

$$-E_c 2\pi(3R)l = -\frac{\pi R^2 \rho l}{\varepsilon_\circ}$$

$$\vec{E}_c = \frac{\rho R}{\varepsilon_\circ}(-\hat{j})$$

میدان کل در نقطهٔ P $\vec{E}_t = \frac{2\rho R}{\varepsilon_\circ}(\hat{j}) - \frac{\rho R}{6\varepsilon_\circ}\hat{j}$

$$= \frac{12\rho R - \rho R}{6\varepsilon_\circ}\hat{j} = \frac{11\rho R}{6\varepsilon_\circ}(\hat{j})$$

میدان مغناطیسی در نقطه P

با استفاده از قانون آمپر

$$\oiint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I_{\text{محصور}}$$

$$= \mu_\circ \int \vec{J}.\vec{ds}$$

میدان مغناطیسی در نقطهٔ P برابرا ست با حاصل جمع میدان مغناطیسی تیغه توپر متحرک در نقطهٔ P با چگالی جریان $\rho\vec{v}$ بعلاوهٔ میدان مغناطیسی اساوانه با چگالی $\rho\vec{v}$. یعنی

$$\vec{B}_t = \vec{B}_s + \vec{B}_c$$

با انتخاب حلقه آمپرمستطیلی برای تیغه

میدان تیغه $\oiint_{\text{مستطیل}} \vec{B}.\vec{dl} = 2B_s l = \mu_\circ \rho v 2dl \Rightarrow$

$$\vec{B}_s = \mu_\circ \rho v d(-\hat{i}) = 2\mu_\circ \rho v R(-\hat{i})$$

میدان استوانه با چگالی جریان $J = -\rho v$

$$2\pi \times 3R \times B_c = \mu_\circ \rho v \pi R^2$$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_\circ \rho v R}{6}(\hat{i})$$

$$\vec{B}_t=\vec{B}_s+\vec{B}_c=\frac{\mu_\circ \rho v R}{6}\left(\hat{i}\right)-2\mu_\circ \rho v R\left(\hat{i}\right)$$
$$=\frac{11\mu_\circ \rho v R}{6}\left(-\hat{i}\right)$$

نیروی الکترومغناطیسی

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{V}\times\vec{B}$$
$$\vec{F}=q\frac{11}{6}\frac{\rho R}{\varepsilon_\circ}\left(\hat{j}\right)+qv_q\hat{k}\times\frac{-11\mu_\circ \rho v R}{6}\left(\hat{i}\right)$$
$$=\frac{11\rho R q}{6\varepsilon_\circ}\left(\hat{j}\right)+\frac{-11\mu_\circ q\rho v v_q R}{6}\left(-\hat{j}\right)$$
$$=\frac{11}{6}qR\rho\left(\frac{1}{\varepsilon_\circ}-\mu_\circ v v_q\right)\hat{j}$$

سرعت ذره وقتی نیرو صفر می‌شود

$$\vec{F}=\circ\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon_\circ}=\mu_\circ v v_q$$
$$v v_q=\frac{1}{\varepsilon_\circ \mu_\circ}=c^2$$

مثال ۱۰

نیروی مغناطیسی بین دو سیم موازی بسیار طویل حامل جریان I را به دست آورید.

حلّ:

فرض کنید سیم ۱ روی محور zها و سیم ۲ به موازات آن و در فاصله ρ از آن قرار گرفته باشد مطابق شکل

نیروی مغناطیسی وارد به سیم ۲ از طرف ۱ از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\vec{F}=\int I\,\vec{dl}\times\vec{B}\ \ \vec{B}=-\frac{\mu_\circ R^3\sigma\omega}{2}\left[\frac{z-L}{\left[R^2+\left(z-L\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{z+L}{\left[R^2+\left(z+L\right)^2\right]^{1/2}}\right]_{-L}^{+L}\left(\hat{k}\right)$$

یا

$$\vec{F}_{21}=\int I_2\overrightarrow{dl_2}\times\vec{B}_1$$

که در آن نیروی وارد سیم ۲ از طرف ۱ برابر $\vec{F}_{21}$

$I_2 = I$ جریانی که از سیم ۲ می‌گذرد و dl_2 المان طول سیم ۲ که برابر $dz\hat{k}_1$ است و B_1 میدان حاصل از سیم ۱ در موضع سیم ۲ طبق قانون آمپر میدان حاصل از سیم ۱ در فاصله ρ از آن برابر است با

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

لذا

$$\vec{F}_{21} = \int_\circ^L Idz\hat{k} \times \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

$$= \frac{\mu_\circ I^2}{2\pi\rho}(-\hat{\rho})\int_\circ^L dz$$

$$= \frac{\mu_\circ I^2}{2\pi\rho}(-\hat{\rho})$$

مشاهده می‌شود که نیروی بین دو سیم موازی حامل جریان هم سو جاذبه است یعنی $\vec{F}_{21}$ به طرف سیم یک است (مطابق شکل)

می‌توان به طریق مشابه نشان داد که نیروی بین دو سیم حامل جریان موازی ولی غیرهمسو دافعه است.

مقدار نیروی بر واحد طول $\frac{F_{21}}{l} = \frac{\mu_\circ I^2}{2\pi\rho}$

مثال ۱۱

سیم استوانه‌ای بسیار طویل با چگالی جریان یکنواخت J را در نظر بگیرید. اگر سوراخی استوانه‌ای به موازات محور مطابق شکل در آن ایجاد شود به طوری که فاصله محور سوراخ از محور استوانه $R/2$ باشد.

الف- میدان مغناطیسی را در نقطهٔ P به مختصات $\left(R/4, 7R/4\right)$ به دست آورید.

ب- اگر سیم بسیار طویل حامل جریان I را به موازات استوانه در نقطهٔ P قرار دهیم نیروی وارد به واحد طول آن را محاسبه کنید.

حلّ:

میدان مغناطیسی

در نقطهٔ P میدان مغناطیسی نتیجه جمع دو میدان مغناطیسی حاصل از استوانه توپر با جریان

$$I' = J\pi R^2$$

و یک استوانه با جریان مخالف یعنی $I'' = J\pi\left(R/2\right)^2 = J\,\pi R^2/4$

$= I'/4$

$$\rho^2 = \frac{R^2}{16} + \frac{49R^2}{16} = \frac{50R^2}{16} \Rightarrow \rho = \frac{5R\sqrt{2}}{4}$$

$$\vec{B}' = \frac{\mu_\circ I'}{2\pi\rho}\left(-\hat{i}\,\frac{7R/4}{\rho} + \hat{i}\,\frac{R/4}{\rho}\right)$$

$$\vec{B}'' = \frac{\mu_\circ I''}{2\pi\rho}\left(\hat{i}\,\frac{7R/4}{\rho} + \hat{j}\,\frac{R/4}{\rho}\right)$$

$$\vec{B}_t = \vec{B}' + \vec{B}'' = \frac{\mu_\circ I'}{2\pi\rho}\left(-\hat{i}\,\frac{7R/4}{\rho} + \hat{j}\,\frac{R/4}{\rho}\right)$$

$$+\frac{\mu_\circ I'}{2\pi\rho}\left(\hat{i}\,\frac{7R/4}{\rho} + \hat{j}\,\frac{R/4}{\rho}\right)$$

$$= \frac{\mu_\circ I'}{2\pi\rho}\left(-\hat{i}\,\frac{7R/4}{\rho} \times 3/4 + \hat{j}\,\frac{R/4}{\rho}\,5/4\right)$$

$$= \frac{\mu_\circ I'}{2\pi\rho}\left(-\hat{i}\,\frac{21R}{16\rho} + \hat{j}\,\frac{5R}{16\rho}\right)$$

نیروی وارد به سیم بسیار طول

$$\vec{F} = I\int \vec{dl} \times \vec{B}$$

$$= I\int_\circ^1 \hat{k}dz \times \vec{B}_t$$

$$= I\hat{k} \times \frac{\mu_\circ I'}{2\pi\rho}\left(-\hat{i}\,\frac{21R}{16\rho} + \hat{i}\,\frac{5R}{16\rho}\right)$$

$$= -\frac{21\mu_\circ II'R}{32\pi\rho^2}\,\hat{j} - \hat{i}\,\frac{5\mu_\circ II'R}{32\pi\rho^2}$$

نکته:

برای محاسبه نیروی مغناطیسی وارد به سیم I می‌توانیم بطور مستقیم عمل نمائیم. و از نتایج مثال قبل استفاده نمائیم. مسأله می‌تواند به طریق زیر طرح گردد.

یعنی نیروی مغناطیسی وارد به سیم I از طرف دو سیم حامل جریان I' که در مبداء و روی محور z قرار دارد و سیم I'' که در فاصله $R/2$ از مبدأ و به موازات سیم I'

$$\vec{F}_I = \vec{F}_{II'} + \vec{F}_{II''}$$

$\vec{F}_{II'}$ نیروی جاذبه و $\vec{F}_{II''}$ دافعه است.

مقدار $\vec{F}_{II''}$ برابر است با

$$\vec{F}_{II'} = \frac{\mu_\circ II'}{2\pi\rho}$$

و مقدار $\vec{F}_{II''}$ برابر است با

$$\vec{F}_{II''} = \frac{\mu_\circ II''}{2\pi\rho}$$

در هر دو رابطه $\rho = \sqrt{\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \left(\frac{7R}{4}\right)^2}$ (مطابق شکل) یعنی $\rho = \frac{5R\sqrt{2}}{4}$ و $I'' = \frac{I'}{4}$

پس

$$F_{II''} = \frac{\mu_\circ II'}{8\pi\rho}$$

$$F_{II'} = F_{II'}\cos\gamma\left(-\hat{j}\right) + F_{II'}\cos\left(\pi/2 - \gamma\right)\left(-\hat{i}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{7R/4}{\rho}$$

$$\sin\gamma = \frac{R/4}{\rho}$$

$$\vec{F}_{II'} = F_{II'}\left[\left(\frac{7R/4}{\rho}\right)\left(-\hat{j}\right) + \left(\frac{R/4}{\rho}\right)\left(-\hat{i}\right)\right]$$

$$\vec{F}_{II''} = F_{II''}\cos\gamma\left(\hat{j}\right) + F_{II''}\cos\left(\pi/2 - \gamma\right)\left(-\hat{i}\right)$$

$$\vec{F}_{II''} = F_{II''}\left(\frac{7R/4}{\rho}\left(\hat{j}\right) + \frac{\rho/4}{\rho}\left(-\hat{i}\right)\right)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{II'} + \vec{F}_{II''}$$

$$= \frac{\mu_\circ II'}{2\pi\rho}\left[\frac{7R/4}{\rho}\left(-\hat{j}\right) + \frac{R/4}{\rho}\left(-\hat{i}\right)\right]$$

$$+\frac{\mu_\circ II'}{8\pi\rho}\left[\frac{7R/4}{\rho}\left(\hat{j}\right)+\frac{R/4}{\rho}\left(-\hat{i}\right)\right]$$

$$\vec{F}=\frac{\mu_\circ II'}{2\pi\rho}\left[\frac{7R/4}{\rho}\left(-\hat{j}\right)+\frac{1}{4}\frac{7R/4}{\rho}\left(\hat{i}\right)+\frac{R/4}{\rho}\left(-\hat{i}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\frac{R/4}{\rho}\left(-\hat{i}\right)\right]$$
$$=\frac{\mu_\circ II'}{2\pi\rho}\left[-\frac{3}{4}\frac{7R/4}{\rho}\hat{j}-\frac{5}{4}\frac{R/4}{\rho}\hat{i}\right]$$
$$=-\frac{21\mu_\circ II'R}{32\pi\rho^2}\hat{j}-\frac{5\mu_\circ II'R}{32\pi\rho^2}\hat{i}$$

که دقیقاً جواب قبلی ایست.

مثال ۱۲

دو سیم بسیار طویل حامل جریان I_1 و I_2را مطابق شکل در نظر بگیرید. سیم I_1 در جهت محور z و سیم I_2 روی صفحه xy قرار دارد و موازی با محور xهاست و فاصله آنها برابر d است.

الف- نیروی وارد به طول 2l سیم I_2 را محاسبه نمائید.

ب- گشتاور وارد به طول 2l سیم I_2 را به دست آورید.

نیروی وارد به طول 2l، سیم I_2

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

$$\vec{F}_{21}=\int_l^{-l}I_2 d\vec{l}_2\times\vec{B}_1$$
$$=\int_l^{-l}I_2\hat{i}dx\times\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi\rho}\hat{\varphi}=\int_l^{-l}I_2 dx\times\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi\rho}\hat{i}\times\hat{\varphi}$$

$$\hat{i}\times\hat{\varphi}=\hat{i}\times\left(-\hat{i}\sin\varphi+\hat{j}\cos\hat{\varphi}\right)=\hat{k}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}$$

$$\vec{F}_{21}=\int_l^{-l}I_2 dx\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi\rho}\hat{k}\cos\varphi=\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\hat{k}\int_l^{-l}\frac{xdx}{x^2+d^2}$$

تابع زیر انتگرال فرد است لذا $\vec{F}_{21}=\circ$

گشتاور $\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$

$$d\vec{F} = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi} \frac{xdx\hat{k}}{x^2 + d^2} = \alpha \frac{xdx}{x^2 + d^2} \hat{k}$$

به طوری که $\alpha = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}$

$$\vec{\tau} = \int_{-l}^{l} \rho\hat{\rho} \times \frac{\alpha xdx\hat{k}}{x^2 + d^2} = \alpha \int_{-l}^{l} \frac{xdx}{\left(x^2 + d^2\right)^{1/2}} (-\hat{\varphi})$$

$$\sin\varphi = d/l$$

$$= \alpha d \int_{-l}^{l} \frac{xdx\ \hat{i}}{x^2 + d^2} - \alpha \int_{-l}^{l} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + d^2\right)} \hat{j}$$

زیرا تابع زیر انتگرال فرد است

$$\vec{\tau} = -2\alpha \hat{j} \left[x - \tan^{-1} \frac{x}{d} \right]_\circ^l = -2\alpha \hat{j} \left(l - \tan^{-1} \frac{l}{d} \right)$$

مثال ۱۳

یک سیم بسیار بلند که حامل جریان I_1 است. در صفحه یک سیم مثلثی شکل که حامل جریان I_2 است مطابق قرار دارد. نیروی متقابل بین این دو سیم را محاسبه کنید.

نیروی وارد به ضلع ۱ مثلث از طریق رابطه $d\vec{F} = I\,\vec{dl} \times \vec{B}$

المان طول ضلع ۱ $\vec{dl} = \hat{j}dy$

میدان حاصل از جریان I_1 $\vec{B} = \frac{\mu_\circ I_1}{2\pi R}\left(-\hat{k}\right)$

$$d\vec{F}_1 = dyI_2\hat{j} \times \frac{\mu_\circ I_1}{2\pi R}\left(-\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi R} a\left(-\hat{i}\right)$$

نیروی وارد به ضلع ۲ مثلث

المان طول ضلع ۲ $\vec{dl} = dx\hat{i}$

$$d\vec{F}_2 = d \times I_2\hat{i} \times \frac{\mu_\circ I_1}{2\pi\left(R + x\right)}\left(-\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi} \int_\circ^a \frac{dx}{R + x}\left(+\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(R+x\right)\Big|_\circ^a\left(+\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{R+a}{R}\left(\hat{j}\right)$$

نیروی وارد به ضلع ۳ مثلث

المان طول ضلع ۳ $\quad \overrightarrow{dl} = \hat{i}dx + \hat{j}d$

$$d\vec{F}_3 = I_2\left(\hat{i}dx + \hat{j}dy\right)\times\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi\left(R+x\right)}\left(\hat{k}\right)$$

با استفاده از معادله خط $\quad dy = dx, \qquad y = x$

$$d\vec{F}_3 = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{\hat{j}dx + \hat{i}dx}{R+x}\right)$$

$$\vec{F}_3 = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\left[\hat{j}\ln\left(R+x\right)\Big|_a^\circ - \hat{i}\ln\left(R+x\right)\Big|_a^\circ\right]$$

$$= \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\left[-\hat{j}\ln\frac{R+a}{R} + \hat{i}\ln\frac{R+a}{R}\right]$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$= \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{4\pi}\left[\frac{a}{R} - \ln\left(1+\frac{a}{R}\right)\right]\left(-\hat{i}\right)$$

نیروی جاذبه است.

مثال ۱۴

الف- روی استوانه‌ای به طول 2l بار الکتریکی سطحی یکنواخت به چگالی σ قرار گرفته است. اگر این استوانه با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش بچرخد، میدان مغناطیسی در نقطهٔ P که در فاصله z از مرکز مختصات قرار دارد را محاسبه نمائید.

ب- با استفاده از نتیجه فرض (الف) میدان مغناطیسی یک سولنوئید بی‌نهایت را محاسبه نمائید.

حلّ:

میدان مغناطیسی از طریق میدان یک حلقهٔحامل جریان نواری به عرض dz' روی سطح استوانه که حامل جریان dI است را مطابق شکل در نظر بگیرید. فاصله مرکز این نوار حلقوی تا مبدأ z' است. جریان نوار را از طریق زیر محاسبه می‌نمائیم.

$$dq = \sigma R d\varphi dz'$$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \sigma R \omega dz'$$

میدان یک حلقه به شعاع R و حامل جریان I در فاصله z از مرکزش

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ R^2 I}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{k}$$

لذا می‌توانیم میدان مغناطیسی نوار حلقوی را در نقطهٔ P به صورت زیر بنویسیم:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_\circ R^2 \sigma \omega dz'}{2\left[R^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ R^3 \sigma \omega}{2} \hat{k} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\left[R^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ R^3 \sigma \omega}{2} \left[-\frac{z - z'}{R^2 \left[R^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \right]_{-L}^{+L} \left(\hat{k}\right)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_\circ R^3 \sigma \omega}{2} \left[\frac{z - L}{\left[R^2 + (z - L)^2\right]^{1/2}} - \frac{z + L}{\left[R^2 + (z + L)^2\right]^{1/2}} \right]_{-L}^{+L} \left(\hat{k}\right)$$

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} = IRB_\circ \left[\sin\theta \left(-\hat{k}\right) + \hat{\rho}\cos\theta\right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ R \sigma \omega}{2} \left\{ \frac{L - z}{\left[R^2 + (z - L)^2\right]^{1/2}} + \frac{z + L}{\left[R^2 + (z + L)^2\right]^{1/2}} \right\} \hat{k}$$

با توجه به شکل

$$\cos\alpha = \frac{L - z}{\left[R^2 + (z - L)^2\right]^{1/2}}$$

$$\cos\beta = \frac{z + L}{\left[R^2 + (z + L)^2\right]^{1/2}}$$

با استفاده از روابط فوق

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ R\sigma\omega}{2}\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)\hat{k}$$

حلّ مستقیم با استفاده از قانون بیو و ساوار

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{\vec{k}ds\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

موقعیت نقطهٔ میدان $\vec{r}=z\hat{k}$

موقعیت المان جریان $\vec{r}'=z'\hat{k}+\rho\hat{\rho}$

فاصله المان جریان از نقطهٔ میدان $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|=\left[\left(z-z'\right)^2+R^2\right]^{1/2}$

المان جریان

$$\begin{aligned}\vec{k}ds&=\sigma\vec{v}ds\\&=\sigma\left(\vec{\omega}\times R\hat{\rho}\right)Rd\varphi dz'\\&=\left(\sigma\omega R\right)\left(Rd\varphi dz'\right)\hat{\varphi}\\&=\sigma\omega R^2d\varphi dz'\hat{\varphi}\end{aligned}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{-L}^{L}\int_{\circ}^{2\pi}\frac{\sigma R^2\omega d\varphi dz'\hat{\varphi}\times\left(z\hat{k}-z'\hat{k}-R\hat{\rho}\right)}{\left[\left(z-z'\right)^2+R^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\sigma\omega R^2\int_{-L}^{L}\int_{\circ}^{2\pi}\frac{\hat{\rho}\left(z-z'\right)d\varphi dz'}{\left[\left(z-z'\right)^2+R^2\right]^{3/2}}$$

$$+\frac{\mu_\circ}{4\pi}\sigma\omega R^3\int_{\circ}^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{d\varphi dz'}{\left[\left(z-z'\right)^2+R^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\sigma R^3\omega 2\pi\left[-\frac{z-z'}{R^2\left[\left(z-z'\right)^2+R^2\right]^{1/2}}\right]_{-L}^{L}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ\sigma\omega R}{2}\left[\frac{L-z}{\left[\left(z-L\right)^2+R^2\right]^{1/2}}+\frac{z+L}{\left[\left(z+L\right)^2+R^2\right]^{1/2}}\right]\hat{k}$$

که دقیقاً جواب قبلی است.

میدان سولنوئید بی‌نهایت

برای سولنوئید بی نهایت $\alpha\rightarrow\circ$ و $\beta\rightarrow\circ$ لذا

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ R\sigma\omega}{2}\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)\hat{k}$$

$$= \frac{\mu_\circ R\sigma\omega}{2} \times 2\hat{k} = \mu_\circ R\sigma\omega\hat{k}$$

چون مقدار چگالی سطحی جریان $k = \sigma R\omega$ لذا

$$\vec{B} = \mu_\circ k \ \hat{k}$$

که مشابه جوابی‌ایست که برای سولنوئید ایده‌آل به دست آوردیم.

مثال ۱۵

دیسکی توخالی به شعاع‌های a و b با چگالی بار سطحی یکنواخت σ با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω مطابق شکل در یک میدان شعاعی $\vec{B} = B_\circ \hat{r}$ می‌چرخد. مطلوبست محاسبه نیروی مغناطیسی وارد به آن.

حلّ:

ابتدا نیروی وارد به یک حلقه حامل جریان را که در چنین میدانی قرار گرفته است را به دست می‌آوریم

$$\vec{F} = \sigma\omega B_\circ \left[\hat{i} \int_\circ^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_a^b \frac{z_\circ \rho^2}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}} d\rho \right.$$

$$\vec{F} = \int I \vec{dl} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = 2\pi\sigma\omega B_\circ \int_a^b \frac{\rho^3 d\rho}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}} \left(-\hat{k}\right)$$

$$= \int_\circ^{2\pi} IRd\varphi\hat{\varphi} \times B_\circ \hat{r}$$

$$= IRB_\circ \int_\circ^{2\pi} \hat{\varphi} \times \left(\sin\theta\hat{\rho} + \cos\hat{k}\right) d\varphi$$

$$= IRB_\circ \left(-\hat{k}\sin\theta\right) d\varphi$$

$$+ IRB_\circ \cos\theta \int_\circ^{2\pi} \hat{\rho} d\varphi$$

$$\vec{F} = 2\pi IRB_\circ \sin\theta \left(-\hat{k}\right)$$

برای محاسبه نیروی وارد به دیسک دوار. حلقه‌ائی به شعاع ρ و عرض $d\rho$ مطابق شکل در نظر بگیرید. جریان این حلقه dI به طریق زیر محاسبه می‌شود.

المان بار روی سطح دیسک $dq = \sigma\rho d\rho d\varphi$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \sigma\rho d\rho \frac{d\varphi}{dt} = \sigma\omega\rho d\rho$$

نیروی وارد به این حلقه

$$d\vec{F} = 2\pi\rho B_\circ \sin\theta dI\left(-\hat{k}\right)$$

با توجه به شکل

$$\sin\theta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z_\circ^2}}$$

$$d\vec{F} = 2\pi\rho B_\circ \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z_\circ^2}} \sigma\omega\rho d\rho\left(-\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = 2\pi\rho B_\circ \sigma\omega \int_a^b \frac{\rho^3 d\rho}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}}\left(-\hat{k}\right)$$

انتگرال را از طریق جزء به جزء محاسبه می‌نمائیم

$$\int_a^b \frac{\rho^3 d\rho}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}} = \rho^2\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}\Big|_a^b - 2\int_a^b \rho\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2} d\rho$$

$$= b^2\left(b^2 + z_\circ^2\right)^{1/2} - a^2\left(a^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{3/2}\Big|_a^b$$

$$= b^2\left(b^2 + z_\circ^2\right)^{1/2} - a^2\left(a^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(b^2 + z_\circ^2\right)^{3/2} + \tfrac{1}{3}\left(a^2 + z_\circ^2\right)^{3/2}$$

مستقیماً بدون استفاده از نیروی وارد به حلقه نیز می‌توان این مسأله را حلّ نمود. یعنی از رابطه

$$\vec{F} = \int \vec{k} ds \times \vec{B}$$

$$\vec{k} ds = \sigma\vec{v} ds = \sigma\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\rho d\rho d\varphi$$

$$= \cancel{\sigma}\left[\cancel{\omega}\cancel{\hat{k}} \times \left(\sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\cancel{\hat{k}}\right)\right]\cancel{\rho} d\cancel{\rho} d\varphi$$

$$= \sigma\left[\omega\hat{k} \times \left(\rho\hat{\rho} + z\hat{k}\right)\right]\rho d\rho d\varphi$$

$$\vec{k} ds = \sigma\omega\rho\hat{\varphi} \times B_\circ \hat{r} d\rho d\varphi$$

$$\vec{F} = \int_a^b \int_\circ^{2\pi} \sigma\omega\rho^2 \hat{\varphi} \times B_\circ \hat{r} d\rho d\varphi$$

$$= \sigma\omega B_\circ \int_a^b \int_\circ^{2\pi} \rho^2 \hat{\theta} d\rho d\varphi$$

با توجه به

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\varphi + \hat{j}\cos\theta\sin\varphi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{F} = \sigma\omega B_\circ \int_a^b \int_\circ^{2\pi} \rho^2\left(\hat{i}\cos\theta\cos\varphi + \hat{j}\cos\theta\sin\varphi - \hat{k}\sin\theta\right) d\rho d\varphi$$

با توجه به شکل

$$\sin\theta = \frac{\rho}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{z_\circ}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}}$$

$$\vec{F} = \sigma\omega B_\circ \left[\hat{i}\int_\circ^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_a^b \frac{z_\circ \rho^2}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}} d\rho \right.$$

$$+ \hat{j}\int_\circ^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_a^b \frac{z_\circ \rho^2}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}} d\rho$$

$$\left. -\hat{k}\int_\circ^{2\pi} d\varphi \int_\circ^{2\pi} \frac{\rho^3}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}} d\rho \right]$$

انتگرال اوّل و دوّم صفرند در نتیجه

$$\vec{F} = 2\pi\sigma\omega B_\circ \int_a^b \frac{\rho^3 d\rho}{\left(\rho^2 + z_\circ^2\right)^{1/2}} \left(-\hat{k}\right)$$

که جواب مشابه روش قبل است.