www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۴

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

۲-۱۱ انرژی الکتریکی

میدان الکتریکی یک توزیع بار گسسته یا پیوسته از طریق قانون کولمب قابل محاسبه است. برای ایجاد هر توزیع بار باید کار انجام شود. کاری که صرف تشکیل یک توزیع بار می شود در میدان الکتریکی حاصل از توزیع ذخیره می‌شود. انرژی پتانسیل یک توزیع بار در میدان حاصل از توزیع دیگر قابل محاسبه است. این انرژی برابر است با مقدار کاری که باید انجام شود تا دو توزیع در مجاورت یکدیگر قرار داده شوند.

توزیع بار b　　توزیع بار a　　انرژی پتانسیل دو توزیع a و b

انرژی تشکیل N بار نقطه‌ائی و یا یک توزیع پیوسته با چگالی حجمی $\rho(\vec{r})$

۲-۱۱-۱ انرژی تشکیل یک توزیع گسسته متشکل از N بار

توزیع بار متشکل از N بار نقطه‌ائی را در نظر بگیرید، به طوری که q_1 در موضع $\vec{r}'$، q_2 در موضع $\vec{r}_2{}'$ ... q_i در موضع $\vec{r}_i{}^1$، ... و q_n در موضع $\vec{r}_N{}'$ قرار داشته باشند (مطابق شکل) می‌خواهیم انرژی تشکیل این توزیع را محاسبه نمائیم.

برای محاسبه انرژی تشکیل، فرض کنید که فضا خالی از بار باشد.

مقدار کار لازم برای انتقال بار q_1 از بی‌نهایت به موضع $\vec{r}_1{}'$

$$W_1 = 0$$

مقدار کار لازم برای انتقال بار q_2 به $\vec{r}_2{}'$

$$W_2 = \left(\frac{kq_1}{r_{21}} q_2\right) = \frac{kq_1 q_2}{r_{21}}$$
$$= V_1 q_2$$

r_{21} فاصله بار q_2 از q_1 است.

برای انتقال بار q_3 از بی نهایت کار مورد نیاز

$$W_3 = \left(\frac{kq_1}{r_{31}} q_3 + \frac{kq_2}{r_{32}} q_3\right) = \frac{kq_1 q_3}{r_{31}} + \frac{kq_2 q_3}{r_{32}} = V_1 q_3 + V_2 q_3$$

و بالاخره کار انجام شده برای انتقال بار q_N به موضع $\vec{r}_N{}'$

$$W_N = \left(\frac{kq_1}{r_{N_1}} q_N\right) + \frac{kq_2}{r_{N_2}} q_N + \ldots + \frac{kq_{N-1}}{r_{N_2\ N-1}} q_N$$
$$= V_1 q_N + V_2 q_N + \ldots + V_{N-1} q_N$$

پس کار کل برای تشکیل این توزیع برابر است با

$$W = W_1 + W_2 + \ldots + W_N$$

$$= 0 + \frac{kq_1q_2}{r_{21}} + \frac{kq_1q_3}{r_{31}} + \frac{kq_2q_3}{r_{32}} + ...$$
$$+ \frac{kq_1q_N}{r_{n_1}} + \frac{kq_2q_N}{r_{n_2}} + ... + \frac{kq_{N-1}q_N}{r_{N\ \ N-1}}$$

رابطه فوق می‌تواند بدین گونه تفسیر شود که کار لازم برای تشکیل یک توزیع گسسته متشکل از N با نقطه‌ائی برابر است با

$$W = \sum_{\text{جفت‌های مستقل}} \frac{kq_iq_j}{r}$$

جفت‌های مستقل یعنی، هر جفت i و j یک بار و فقط یک بار محاسبه شود. این رابطه را می‌توان به طریق دیگری نیز نوشت.

$$W = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$$

جمع دو گانهٔ فوق می‌گوید برای $i=1$ $\quad j=2,3,4,...,N$

$i=2$ $\quad j=1,3,4,...,N$

این عمل تا i=N ادامه پیدا می کند. هر جفت بار دو بار محاسبه می‌شود برای تصحیح ضریب $\tfrac{1}{2}$ در نظر گرفته شده است.

۲-۱۲-۱ مثال ۱

انرژی تشکیل سه بار q_1، q_2 و q_3 را از طریق رابطهٔ $W = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{kq_1q_j}{r_{ij}}$

$$\Rightarrow W = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$$
$$i \neq j$$

$$W = \tfrac{1}{2}\left(k\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_1}{r_{21}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + k\frac{q_3q_1}{r_{31}} + k\frac{q_3q_2}{r_{32}}\right)$$

$$W = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

۲-۱۲-۲ مثال ۲

انرژی تشکیل توزیع بار مطابق شکل را بیآبید.

حلّ:

برای محاسبه انرژی تشکیل از رابطه $W=\sum\frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$ استفاده می‌کنیم در این مسأله شمردن جفت‌های مستقل نقش اساسی را بازی می‌کند.

جفت‌های مستقل

جفت مشابه این ۱۲ جفت مشابه این ۱۲ جفت مشابه این ۸ جفت مشابه این

$$W=8\left(k\frac{-2e^2}{\sqrt{\frac{3}{2}}a}\right)+12\left(\frac{ke^2}{a}+12\left(\frac{ke^2}{\sqrt{2}a}\right)\right)$$

$$+4\left(\frac{ke^2}{\sqrt{3}a}\right)=k\frac{4/32e^2}{a}$$

۳-۱۲-۲ مثال ۳

کریستال کلرور سدیم از یونهای مثبت (Na^+) و یونهای منفی (Cl^-) که متناوباً بطور مرتب روی شبکهٔ سه بعدی چیده شده‌اند، تشکیل شده است. انرژی تشکیل کلرور سدیم را محاسبه نمائید.

حلّ:

یک نمونه ماکروسکپی از این نوع کریستال حداقل چیزی حدود 10^{20} اتم دارد، لذا ما با جمع بسیار بزرگی روبرو هستیم. یکی از یونها را می‌توان به عنوان مرجع انتخاب نمود مهّم نیست که از کدام نوع، اندر کنش آن را با تمام یونهای دیگر محاسبه می‌کنیم و بعد حاصل را بسادیگ در تعداد کل یونها از هر دو نوع ضرب می‌کنیم. انرژی تشکیل شبکهٔ کریستال کلرور سدیم که از N اتم تشکیل شده است برابر است با

$$W=\frac{1}{2}N\sum_{j=2}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

اگر یون مثبت در مرکز باشد جمع روی تمام همسایه‌هایش چه دور و چه نزدیک، برابر است با

$$\sum_{j=2}^{N}\frac{q_1q_j}{r_{ij}}=-\frac{6ke^2}{a}+\frac{12ke^2}{\sqrt{2}a}-\frac{8ke^2}{\sqrt{3}a}+\dots$$

اولین جمله شش تا نزدیکترین یونهای کلر در فاصله a و دومین جمله ۱۲ تا یونهای سدیم روی لبه‌های مکعب درفاصله $a\sqrt{2}$ و غیره ... پس از جایگزین کردن در رابطهٔ انرژی تشکیل

$$W = \frac{1}{2}Nk\left[-\frac{6e^2}{a}+\frac{12e^2}{\sqrt{2}a}-\frac{8e^2}{\sqrt{3}a}+\ldots\right]$$

$\frac{1}{2}$ در انرژی تشکیل حفظ شده است برای اینکه هر جفت یک بار و فقط یک بار شمرده شود پس از محاسبه سری در رابطهٔ تشکیل

$$W = \frac{-0/8738Nke^2}{a^2}$$

N تعداد کل یونهاست، دو برابر تعداد مولکول‌های Nacl، علامت منفی نشان دهندهٔ آنست که برای تبدیل کریستال به یون های تشکیل دهنده باید کار انجام شود.

۲-۱۳ انرژی تشکیل توزیع پیوسته

توزیع پیوسته بار به چالی حجمی غیر یکنواخت ρ را در نظر بگیرید.

با در نظر گرفتن تغییرات زیر در رابطهٔ

$$W = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{i=1}^{N}k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$q_i \to dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')dV'$$

$$q_j \to dq(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV$$

$$r_{ij} \to |\vec{r}-\vec{r}'|$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{i=1}^{N} \to \int_{\text{توزیع بار}}\int_{\text{توزیع بار}}$$

$$W = \frac{1}{2}\iint_{\text{توزیع بار}}\frac{kdq(\vec{r}')dq(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\text{توزیع بار}}\int_{\text{توزیع بار}}\frac{k\rho(\vec{r})dV'\rho(\vec{r})dV}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

فنری که داخل جعبه است پتانسیل الکترواستاتیکی حاصل از توزیع در موضع $\vec{r}$ است یعنی

$$\varphi(\vec{r}) = k\int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{توزیع بار}} \varphi(\vec{r})\rho(\vec{r})dV$$

W انرژی تشکیل یک توزیع پیوسته بار به چگالی $\rho(\vec{r})$ است، $\varphi(\vec{r})$ پتانسیل الکترواستاتیکی توزیع در موقعیت $\vec{r}$ است. توجه نمائید انتگرال فقط روی توزیع بارگرفته می‌شود زیرا خارج از توزیع $\rho(\vec{r})=\circ$ لذا انتگرال صفر است. با کمی محاسبه رابطهٔ انرژی تشکیل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$W = \int_{\text{تمام فضا}} \frac{\varepsilon_\circ E^2}{2} dV$$

$$W = \int_{\text{تمام فضا}} u_E dV$$

$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^2$ چگالی انرژی الکترواستاتیکی ایست، یعنی انرژی بر واحد حجم (ژول بر متر مکعب) انتگرال روی تمام فضا گرفته می شود. این نتیجه بسیار مهمی ایست. می‌گوید کاری که صرف تشکیل یک توزیع می‌شود به صورت انرژی در میدان حاصل از توزیع ذخیره می‌شود.

۲-۱۴ انرژی پتانسیل دو توزیع بار

گاهی اوقات محاسبه انرژی تشکیل یک توزیع بار مورد توجه نیست، بلکه می‌خواهیم انرژی پتانسیل یک توزیع بار q در میدان حاصل از توزیع دیگر را محاسبه نمائیم.

توزیع بار به چگالی $\rho_a(\vec{r})$ را که پتانسیل حاصل از آن $\varphi_a(\vec{r})$ است را به عنوان توزیع خارجی انتخاب نمائید.

ابتدا با ساده‌ترین توزیع بار یعنی بار نقطه‌ائی آغاز می‌کنیم. انرژی پتانسیل بار نقطه‌ائی q اگر در موقعیت $\vec{r}$ در مجاورت توزیع خارجی φ_a قرار گیرد چه مقدار است؟ یا به عبارت دیگر چه مقدار کار لازم است تا اینکه بار q از بینهایت انتقال یافته و در موضع $\vec{r}$ قرار گیرد

$$W_a = q\varphi_a(\vec{r}) \quad dW_a = dq\varphi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV\varphi(\vec{r})$$

توزیع بندی توزیع در بار نقطه‌ائی q_1 و q_2 است. چه مقدار کار لازم است که این دو بار را بطور صلب (یعنی فاصله دو بار تغییر نکند) از بینهایت انتقال داده بطوریکه بار q_1 در $\vec{r}_1$ و بار q_2 در $\vec{r}_2$ قرار گیرند.

$$W_a = q_1\varphi_a(\vec{r}_1) + q_2\varphi_a(\vec{r}_2)$$

حال اگر یک توزیع از N بار نقطه‌ائی بطور صلب (یعنی فواصل بار ثابت باقی بماند) از بی‌نهایت انتقال یافته و در کنار توزیع φ_a قرار گیرد بطوریکه q_1 در $\vec{r}_1$، q_2 در $\vec{r}_2$، ... و q_n در $\vec{r}_N$ انرژی پتانسیل این توزیع برابر است با

$$W_a = q_1\varphi_a(\vec{r}_1) + q_2\varphi_a(\vec{r}_2) + \ldots + q_N\varphi_a(\vec{r}_N)$$
$$= \sum_i q_i\varphi_a(\vec{r}_i)$$

این مسأله به سادگی قابل تعمیم به توزیع پیوسته بار به چگالی $\rho(\vec{r})$ است که بطور صلب از بی‌نهایت انتقال یافته و در نزیکی توزیع φ_a قرار می‌گیرد. کار انجام شده در انتقال dq المان بار این توزیع

$$dW_a = dq\varphi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV\varphi(\vec{r})$$

لذا کار کل

$$W_a = \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV$$

توزیع انتقال

۱-۱۵-۲ مثال ۱

چه مقدار کار لازم است تا میله‌ائی به عنوان L با چگالی $W_a = \int \lambda(x)\varphi_a(x)dl$ را مطابق شکل از بینهایت انتقال داده بین دو بار q+ قرار دهیم؟(انرژی پتانسل میله و توزیع دو بار چقدر است؟)

$$W_a = \int \rho(\vec{r})\varphi_a(\vec{r})dv$$

روش اوّل: همانطور که مسأله خواسته میله انتقال یافته است.

$$W_a = \int \lambda(x)\varphi_a(x)dl$$

چگالی بار میله

پتانسیل توزیع دو بار روی میله

المان طول میله

پتانسیل دو بار روی میله

$$\varphi_a(x) = \frac{2kq}{(a^2+x^2)^{1/2}} = 4\pi kq = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$W_a = \int_{\circ}^{L} \alpha x \frac{2kq}{\left(a^2 + x^2\right)} dx$$

$$W_a = 2kq\alpha\left[\left(x^2 + L^2\right)^{1/2} - a\right]$$

روش دوّم: دو بار از بی‌نهایت بطور صلب انتقال یافته‌اند

$$W_a = 2q\varphi(a)$$

$\varphi(a)$ پتانسیل میله در نقطه y=a

$$\varphi_a(\vec{r}) = k\int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k\int \frac{\lambda dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= k\int_{\circ}^{L} \frac{\alpha x dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{1/2}}$$

$$= k\alpha\left[\left(a^2 + L^2\right)^{1/2} - a\right]$$

$$W_a = 2kq\alpha\left[\left(a^2 + L^2\right)^{1/2} - a\right]$$

هر دو روش همانطور که انتظار می‌رفت باید به یک نتیجه منجر شوند.

۲-۱۵-۲ مثال ۲

انرژی پتانسیل یک میله به چگالی $\lambda = \beta z$ که روی محور دیسکی به شعاع R و چگالی یکنواخت σ قرار گرفته است را مطابق شکل محاسبه نمائید.(چه مقدار کار لازم است تا اینکه با انتقال میله یا دیسک از بی‌نهایت دو توزیع در کنار هم مطابق شکل قرار گیرند).

روش اوّل: میله انتقال داده شود

$$W_a = \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\, dv = \int \lambda \varphi_q \; dl$$

چگالی بار میله

پتانسیل دیسک روی یک نقطه دلخواه میله

المان طول میله

ابتدا پتانسیل دیسک را روی یک نقطهٔ دلخواه روی محورش محاسبه می‌نمائیم.

$$\varphi_a(\vec{r}) = k\int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\varphi_a(\circ,\circ,z) = k\int_\circ^R\int_\circ^{2\pi}\frac{\sigma\rho d\rho d\varphi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$W_a = \int_{z_1}^{z_1+l} 2\pi k\sigma\beta z\left[\tfrac{1}{3}\left(R^2+z^2\right)^{1/2} - z\right]dz$$

$$= 2\pi k\sigma\beta\left[\tfrac{1}{3}\left(R^2+z^2\right)^{3/2} - \frac{1}{3}z^3\right]\Big|_{z_1}^{z_1+l}$$

$$W_a = \frac{2}{3}\pi k\sigma\beta\left\{\left[R^2+\left(z_1+L\right)^2\right]^{3/2} - \left(z_1+L\right)^3 - \left(R^2+z_1\right)^{3/2} + z_1^3\right\}$$

روش دوّم: دیسک انتقال داده شود

$$W_a = \int \sigma \quad \varphi_a \quad ds$$

چگالی دیسک

پتانسیل میله روی یک نقطهٔ دلخواه دیسک

المان سطح دیسک

ابتدا پتانسیل میله را در یک نقطهٔ دلخواه روی دیسک در ربع اوّل محاسبه می‌کنیم

موضع المان بار روی میله $\vec{r}' = z\hat{k}$

موضع میدان روی دیسک $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$

فاصله المان بار تا نقطهٔ میدان $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{\rho^2+z^2}$

$$\varphi_a(\rho,\varphi,\circ) = k\int_{z_1}^{z_1+1}\frac{\beta z dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$= k\beta\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}\Big|_{z_1}^{z_1+l}$$

$$= k\beta\left\{\left[\rho^2+\left(z_1+l\right)^2\right]^{1/2} - \left[\left(\rho^2+z_1^2\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

$$= k\beta\left\{\left[\rho^2+\left(z_1+l\right)^2\right]^{1/2} - \left(\rho^2+z_1^2\right)\right\}$$

$$W_a = \int_\circ^{2\pi}\int_\circ^R k\beta\sigma\left\{\left[\left(z_1+l\right)^2+\rho^2\right]^{1/2} - \left(z_1^2+\rho^2\right)\right\}\rho d\rho d\varphi$$

$$W_a = \frac{2}{3}k\pi\sigma\beta\left\{\left[\left(z_1+l\right)^2+R^2\right]^{3/2} - \left(z_1^2+R^2\right)^{3/2} - \left(z_1+l\right)^3 + z_1^3\right\}$$

دو نتیجه یکسان هستند. این بدان معنی ایست که پیکربندی (Configuration) نهائی دو توزیع مهم است نه نحوهٔایجاد توزیع.

۳-۱۵-۲ مثال ۳

دو قطبی P مطابق شکل در مرکز یک دیسک توخالی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 که دارای بار سطحی به چگالی $\sigma = \sigma_\circ Cos\varphi$ قرار دارد. اگر این دو قطبی به اندازهٔ $\theta = 90^\circ$ روی صفحه xz بچرخد و در راستای محور x قرار گیرد تغییر y در انرژی پتانسیل سیستم را محاسبه نمائید.

ابتدا انرژی پتانسیل سیستم وقتی دو قطبی در راستای محور z قرار دارد یعنی ممان دو قطبی آن $\vec{P} = P\hat{k}$ محاسبه می‌شود.

$$W_a^{(1)} = \int \varphi_a \sigma \quad \varphi_a \quad ds$$

چگالی دیسک

پتانسیل دو قطبی روی دیسک

المان سطح دیسک

پتانسیل یک دوقطبی بطورکلی

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^2}$$

پتانسیل دو قطبی $\vec{P} = P\hat{k}$ در یک نقطه دلخواه P روی صفحه xy

$$\varphi_a(x, y, \circ) = k\frac{P\hat{k}.\hat{\rho}}{\rho^2}$$

چون موضع نقطهٔ P

$$\varphi_a = \circ$$

در نتیجه

$$W_a^{(1)} = \circ$$

در حالت بعد دوقطبی می‌چرخد و در راستای محور x قرار می‌گیرد پتانسیل دو قطبی روی یک نقطهٔ دلخواه روی دیسک در ربع اوّل.

$$\varphi_a(x, y, z) = k\frac{P\hat{i}.\hat{\rho}}{\rho^2}$$

$$= kP\frac{\hat{i}.\left(\hat{i}Cos\varphi + \hat{j}Sin\varphi\right)}{\rho^2}$$

$$= kP\frac{Cos\varphi}{\rho^2}$$

$$W_a^{(2)} = \int_{\circ}^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} kP\frac{Cos\varphi}{\rho^2}\sigma_{\circ} Cos\varphi\rho d\rho d\varphi$$

$$= \int_{\circ}^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} k\sigma_{\circ} P\frac{Cos^2\varphi}{\rho} d\rho d\varphi$$

$$W_a^{(2)} = k\sigma_{\circ} P\int_{R_1}^{R_2}\frac{d\rho}{\rho}\int_{\circ}^{2\pi} Cos^2\varphi d\varphi$$

$$= k\sigma_{\circ} P\ln\frac{R_2}{R_1}\int_{\circ}^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}Cos2\varphi\right)d\varphi$$

$$= k\pi\sigma_{\circ} P\ln {}^{R_2}\!/_{R_1}$$

$$\Delta W = W_a^{(2)} - W_a^{(1)} = k\pi\sigma_{\circ} P\ln {}^{R_2}\!/_{R_1}$$

۴-۱۵-۲ مثال ۴

دو میله به طول L (با فاصله d از یکدیگر) با چگالی یکنواخت λ مطابق شکل در نظر بگیرید. چه مقدار کار لازم است تا میله سمت راست را به بی‌نهایت انتقال دهیم.

$$W_2 - W_a = -\int \rho\varphi_a dv = -\int \lambda \quad \varphi_{\circ} \quad dx = \circ$$

چگالی بار میله سمت چپ

پتانسیل میله سمت راست روی یک نقطهٔ دلخواه میله سمت چپ

المان طول میله سمت چپ

ابتدا φ_a را محاسبه می‌کنیم

$$\varphi_a(\vec r) = k\int\frac{dq}{\vec r - \vec r'}$$

$$\vec r = \hat i x$$

$$\vec r' = \hat i x'$$

$$|\vec r - \vec r'| = x - x'$$

$$\varphi_a(x) = x\int_{\circ}^{L}\frac{\lambda dx'}{x - x'}$$

$$= -k\lambda\ln(x - x')\Big|_{\circ}^{L}$$

$$= k\lambda\ln\left[\ln x - \ln(x - L)\right]$$

$$W = -W_a = -k\lambda^2\int_{d+L}^{d+2L}\left[\ln x - \ln(x - L)\right]dx$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - x$$

$$= -k\lambda^2\left[x\ln x - x - (x-L)\ln(x-L) + (x-L)\right]\Big|_{d+L}^{d+2L}$$

$$= -k\lambda^2\Big[(d+2L)\ln(d+2L) - (d \cancel{+} 2L)$$
$$-(d+L)\ln(d+L) + (d \cancel{+} L)$$
$$-(d+L)\ln(d+L) + (d \cancel{+} L) + d\ln d$$
$$+d\ln d\Big]$$

۵-۱۵-۲ مثال ۵

سیم نازک باردار حلقوی به شعاع R و چگالی خطی یکنواخت $\lambda_\circ$ مفروض است. میله‌ای نازک و سیستم به طول 2L و چگالی بار خطی $\lambda = \alpha|z|$ مطابق شکل روی محور آن قرار دارد. چه مقدار کار لازم است تا اینکه میله به اندازه L جابجا شود بطوری که انتهای آن روی مرکز حلقه قرار گیرد. (تغییر انرژی پتانسیل سیستم چه مقدار است؟)

تغییر انرژی پتانسیل سیستم $\Delta W = W_a^{(2)} - W_a^{(1)} =$

$$W_a = \int \rho \varphi_a dv$$

$$W_a^{(1)} = \int \lambda \quad \varphi_a \quad dl$$

چگالی میله

پتانسیل حلقه روی میله

المان طول میله

پتانسیل حلقه روی میله

$$\varphi_a(\circ,\circ,z) = k\int_\circ^{2\pi} \frac{\lambda_\circ R d\varphi}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$= k\frac{2\pi\lambda_\circ R}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$W_a^{(1)} = \int_{-L}^{L} \frac{\alpha(z)2\pi\lambda_\circ R dt}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

تابع زیر انتگرال $\frac{|z|}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$ زوج است لذا

Elearning IUST

$$W_a^{(1)} = 4\pi k\lambda_\circ R\alpha\int_\circ^L \frac{zdz}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$= 4\pi k\lambda_\circ R\alpha\left[\left(R^2+z^2\right)^{1/2}\Big|_\circ^L\right]$$

$$= 4\pi k\lambda_\circ R\alpha\left[\left(R^2+z^2\right)^{1/2} - R\right]$$

$$W_a^{(2)} = \int_{-2L}^{\circ} \frac{\alpha|z|2\pi Rk\lambda_\circ}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$= -2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\int_{-2L}^{\circ}\frac{zdz}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$= -2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\left[\left(R^2+z^2\right)^{1/2}\Big|_{-2L}^{\circ}\right]$$

$$= -2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\left[R-\left(R^2+L^2\right)^{1/2}\right]$$

$$W_a^{(2)} = \int_{-2L}^{\circ} \frac{\alpha|z|2\pi Rk\lambda_\circ}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}dz$$

$$= -2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\int_{-2L}^{\circ}\frac{zdz}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$= -2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\left[\left(R^2+z^2\right)^{1/2}\Big|_{-2L}^{\circ}\right]$$

$$= -2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\left[R-\left(R^2+L^2\right)^{1/2}\right]$$

$$= -2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\left[\left(R^2+4L^2\right)^{1/2} - R\right]$$

$$\Delta W = W_a^{(2)} - W_a^{(1)}$$

$$= 2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\left[\left(R^2+4L^2\right)^{1/2} - R - 2\left(R^2+L^2\right)^{1/2} + 2R\right]$$

$$\Delta w = 2\pi Rk\lambda_\circ\alpha\left[\left(R^2+4L^2\right)^{1/2} - 2\left(R^2+L^2\right)^{1/2} + R\right]$$

Elearning
IUST