www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۷

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

دی الکتریک ها

در بسیاری از خازن ها بین صفحات مادهٔ عایقی مانند کاغذ یا پلاستیک قرار دارد. چنین موادی را دی‌الکتریک می‌نامند. این نوع مواد برای حفظ فاصلهٔ فیزیکی صفحات خازن بکار می‌روند. چون قابلیت شکست دی‌الکتریک بیشتر از هوا است، لذا نشت بار را بخصوص برای ولتاژهای بالا می‌توانند به حداقل برسانند. از لحاظ تجربی مشخص شده است که ظرفیت خازن با دی‌الکتریک افزایش پیدا می‌کند.

$$\text{ثابت دی‌الکتریک } k_e = \frac{c_d}{c} = \frac{\text{ظرفیت خازن با دی الکتریک}}{\text{ظرفیت خازن بدون دی الکتریک}}$$

فقط به جنس دی‌الکتریک بستگی دارد. تجربه نشان می‌دهد که برای تقریباً تمامی دی‌الکتریک‌ها $k_e > 1$ است. هر دی‌الکتریک دارای استقامت دی‌الکتریکی است و آن ماکزیمم مقدار میدان الکتریکی است که بعد از آن شکست اتفاق می‌افتد و بارها شروع به حرکت می‌کنند. در جدول زیر برای بعضی از دی‌الکتریک‌ها ثابت دی‌الکتریک و استقامت دی‌الکتریکی را نشان می‌دهیم.

مادّه	k_e	استقامت دی‌الکتریکی $(10^6\ v/m)$
	1.00059	3
	3.7	16
	4-6	9
	80	-

ظرفیت در حضور دی‌الکتریک از نقطه نظر ملکولی توضیه‌پذیر است. نشان می‌دهیم که k_e ایست از واکنش دی‌الکتریک در میدان الکتریکی خارجی. دو نوع الکتریک وجود دارد. نوع اوّل دی الکتریک‌ها پلار هستند، این نوع دی‌الکتریک‌ها دارای ممان دوقطبی الکتریک دائمی هستند مانند ملکول‌های آب. این ملکولها مرکز ثقل بارهای مثبت و منفی بطور دائمی از یکدیگر جدا هستند.

که در شکل نمایش داده شده است. جهت‌گیری ملکولهای قطبی در غیاب میدان خارجی است. که میدان الکتریکی $\vec{E}_\circ$ اعمال شود، گشتاور ایجاد شده باعث می‌شود که ملکولها بچرخند در راستای $\vec{E}_\circ$ قرار گیرند.

دوّم دی‌الکتریک‌ها را دی‌الکتریک‌ها را دی‌الکتریک‌های غیرپلار نامند. این نوع دی‌الکتریک‌ها دارای دوقطبی دائمی نیستند، با قرار دادن این نوع مواد در میدان الکتریکی خارجی ممان دو قطبی الکتریکی می‌شود. در شکل ملکولهی غیر قطبی در غیاب میدان خارجی و در حضور میدان خارجی $\vec{E}_\circ$ نمایش داده شده است.

مثال ۱۵- گشتاور وارد به یک دوقطبی در میدان الکتریکی یکنواخت را محاسبه نمائید.

حلّ:

نیرو $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = \circ$

نیروی وارد به یک دوقطبی در میدان یکنواخت برابر صفر است.

گشتاور وارد به دوقطبی، طبق تعریف، گشتاور

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

گشتاور حول مرکز دوقطبی

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \left(-\vec{r}_+\right) \times$$

$$\tau = 2\vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = 2q\vec{r}_+ \times \vec{E} = \vec{P} \times \vec{E}$$

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$$

گشتاور وارد به دوقطبی در میدان الکتریکی یکنواخت برابر است با حاصلضرب خارجی ممان دوقطبی آن $\vec{P}$ در میدان الکتریک $\vec{E}$.

مثال ۱۶- انرژی پتانسیل یک دوقطبی که با میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ زاویهٔ θ می‌سازد چقدر است؟ به عبارت دیگر چه مقدار کار در مقابل گشتاور نیروی الکتریک لازم است تا اینکه دو قطبی را از پایدارترین حالت به اندازهٔزاویهٔ θ بچرخانیم.

حلّ:

ناپایدارترین حالت   پایدارترین حالت

هر دو حالت نمایش داده شده در شکل حالت‌های تعادل هستند، ولی اولی ناپایدارترین و دوّمی پایدارترین حالت. معادل مکانیکی آنها گلوله پشت کاسه و گلوله داخل کاسه است.

کار انجام شده در مقابل گشتاور نیروی الکتریکی برای چرخاندن دوقطبی به اندازهٔ زاویهٔ θ

$$U = w = \int_\circ^\theta \tau d\theta = \int_\circ^\theta PESin\theta d\theta = -PECos\theta \Big|_\circ^\theta$$

$$= -PECos\theta + PE$$

با توجه به محاسبه فوق انرژی پتانسیل دوقطبی در میدان یکنواخت خارجی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$U = -\vec{P}.\vec{E}$$

در حقیقت از مقدار ثابت PE که مربوط به مرجع پتانسیل است صرف نظر شده است. برای درک بهتر تفاوت دو رابطه، می‌توان رسید که چه مقدار کار لازم است تا دوقطبی را از پایدارترین حالت به ناپایدارترین حالت بچرخانیم:

ابتدا از رابطهٔ $U = -\vec{P}.\vec{E}$

$$\Delta U = U_{180^\circ} - U_{\circ^\circ} = -\vec{P}.\vec{E}\Big|_{180^\circ} - \left(-\vec{P}.\vec{E}\right)\Big|_{\circ^\circ} = PE + PE = 2PE$$

سپس از رابطه $U = -PECos\theta + PE$

$$U_{180^\circ} = 2PE$$

مشاهده می‌شود که هر دو رابطه به یک نتیجه می‌رسند. لذا حذف مقدار ثابت کاملاً مجاز است. در صورتی که در رابطه $U = -\vec{P}.\vec{E}$ فقط از اختلاف پتانسیل استفاده شود.

پلاریزاسیون

نشان دادیم که مواد دی‌الکتریک شامل دوقطبی‌های الکتریکی دائمی یا القائی هستند. میدان متوسط الکتریکی تولید شده توسط تعداد زیادی دوقطبی‌های الکتریکی کوچک همسو شده، کمک زیادی به شناخت مواد دی‌الکتریک می نماید. یک قطعه دی‌الکتریک به شکل استوانه به سطح A و ارتفاع h مطابق شکل در نظر بگیرید. فرض کنید که N دوقطبی الکتریکی با ممان دوقطبی $\vec{P}$ در آن قرار دارد. این دوقطبی‌ها بطور یکنواخت در حجم استوانه توزیع و همگی با محور استوانه همسو هستند.

سؤال مهم چگونگی تعیین میدان متوسط الکتریکی تولید شده توسط دوقطبی‌های همسو شده در استوانه است. برای پاسخ به این سؤال برار پلاریزاسیون $\vec{P}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\text{حجم}}$$

بردار $\vec{P}$ ممان دوقطبی خالص بر واحد حجم است. در حالت استوانه

$$P = \frac{NP}{Ah}$$

جهت $\vec{P}$ موازی با دوقطبی‌های همسو شده یعنی محور استوانه است. برای ارتباط دادن بردار پلاریزاسیون $\vec{P}$ به میدان متوسط الکتریکی که توسط دوقطبی‌ها تولید می‌شود، باید توجه نمود که تمام بارهای $\pm$ مربوط به

دوقطبی های داخلی استوانه با بارهای معادل $\pm P_q$ روی سطح بالائی و پائینی استوانه می‌تواند تعویض شوند، زیرا بارهای مثبت و منفی دوقطبی‌های مجاور یکدیگر در داخل بطور متوسط یکدیگر را حذف می‌نمایند.

تنها جائی که حذف بارها انجام نمی‌شود، برای دوقطبی‌های الکتریکی سطح بالائی استوانه چون دوقطبی بالای آنها موجود نیست. پس داخل استوانه بطور متوسط به صورت بدون بار ظاهر می شود و روی سطح بالائی استوانه بار خالص مثبت ظاهر می شود. بطریق مشابه روی سطح پائینی استوانه بار خالص منفی می‌شود.

جهت پلاریزاسیون $\vec{P}$ از بارهای منفی بطرف مثبت است.
توزیع بار معادل
بطور متوسط بارهای مثبت و منفی داخل استوانه یکدیگر را خنثی می‌کنند.

ممان دوقطبی الکتریکی که توسط q_pتولید می شود و برابر است با مماو دوقطبی کل تمام دوقطبی‌های الکتریکی یعنی

$$q_p h = NP \Rightarrow q_p = \frac{NP}{h}$$

میدان الکتریکی E_p تولید شده توسط q_p، با توجه به اینکه توزیع بار معادل یادآور خازن مسطح است، یعنی

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_\circ}$$

$$\sigma_p = \frac{q_p}{A} = \frac{NP}{Ah} = P$$

دریکاهای SI واحد P برابر است با $\frac{c.m}{m^3}$ یا $\frac{c}{m^2}$ که مشابه چگالی بار سطحی ایست بطور کلی اگر بردار پلاریزاسیون با بردار یکهٔ عمود به سطح $\hat{n}$ زاویهٔ θبسازد.

$$\sigma_p = \vec{P}.\hat{n} = PCos\theta$$

سیستم بار معادل میدان متوسط الکتریکی زیر را ایجاد می کند.

$$E_p = \frac{P}{\varepsilon_\circ}$$

جهت میدان الکتریکی در خلاف جهت $\vec{P}$ است لذا به فرم برداری

$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_\circ}$$ (دوقطبی‌های همسو)

میدان متوسط الکتریکی تمام دوقطبی‌ها در خلاف خود دوقطبی‌هاست. فرض اساسی استخراج این نتیجه آن بود که تمام دوقطبی‌ها همسو باشند.

در صورتی که دوقطبی‌ها راندم باشند پلاریزاسیون $\vec{P}$ صفر است بنابراین میدان متوسط الکتریکی برای دوقطبی‌های راندم ایجاد نخواهد شد یعنی

$$\vec{E}_p = \circ \quad \text{(دوقطبی‌های راندم)}$$

دی‌الکتریک پلار را در میدان خارجی $\vec{E}_\circ$ قرار دهیم، دوقطبی‌های ان گشتاور $\tau = \vec{P} \times \vec{E}_\circ$ می‌کنند که باعث می‌شود دوقطبی‌های $\vec{P}$ با $\vec{E}_\circ$ همسو شوند، در نتیجه بدار پلاریزاسیون $\vec{P}$ است $\vec{E}_\circ$ ایجاد می‌شود و این باعث ایجاد میدان متوسط الکتریکی $\vec{E}_p$ مخالف با $\vec{E}_\circ$ می‌شود ان هم به نوبه خود باعث تضعیف $\vec{E}_\circ$ در داخل دی‌الکتریک می‌شود. میدان الکتریکی کل داخل دی‌الکتریک $\vec{E}_d$ برابر جمع دو میدان است یعنی

$$\vec{E}_d = \vec{E}_\circ + \vec{E}_p = \vec{E}_\circ - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_\circ}$$

موارد، بردار پلاریزاسیون $\vec{P}$ نه تنها هم جهت $\vec{E}_\circ$ است بلکه بطور خطی با $\vec{E}_\circ$ (در نتیجه با $\vec{E}_d$) متناسب است. این نتیجه منطقی ایست زیرا بدون میدان خارجی $\vec{E}_\circ$ ردیف شدن دوقطبی‌ها امکان‌پذیر نیست و بردار پلاریزاسیون $\vec{P}$ هم بوجود نمی‌آید. ما رابطهٔ خطی بین $\vec{P}$ و $\vec{E}_d$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{P} = \varepsilon_\circ \chi_e \vec{E}_d$$

χ_e تأثیرپذیری الکتریکی (Smceptibility) نامند. $\varepsilon_\circ$ گذردهی الکتریکی است موادی که از رابطه فوق تبعیت می‌کنند را دی‌الکتریک‌های خطی نامند.

$$\vec{E}_\circ = \left(1+\chi_e\right)\vec{E}_d = k_e \vec{E}_d$$

بطوری که

$$k_e = \left(1+\chi_e\right)$$

k_e همان ثابت دی‌الکتریک است. همانطور که گفته شد ثابت دی‌الکتریک k_e همیشه بزرگتر از یک است. چون $\chi_e > \circ$ است. یعنی

$$E_d = \frac{E_\circ}{k_e} < E_\circ$$

پس میدان در داخل دی‌الکتریک تضعیف می‌شود ولی از بین نمی‌رود.

اثر مشابهی برای دی‌الکتریک‌های غیر پلار مشاهده می‌شود زیرا وجود میدان خارجی $\vec{E}_\circ$ باعث القاء ممان دوقطبی الکتریکی در اتمها و یا ملکولهای دی‌الکتریک غیرپلار می‌شود. این دوقطبی‌های القاء شده با میدان الکتریکی $\vec{E}_\circ$ موازی هستند که این به نوبه خود منجر به ایجاد بردار

پلاریزاسیون $\vec{P}$ به موازات $\vec{E}_{\circ}$ می‌شود و در نتیجه میدان الکتریکی $\vec{E}_p$ برخلاف $\vec{E}_{\circ}$ تولید می‌شود که باعث کاهش میدان الکتریکی کل می‌شود.

دی‌الکتریک در خازن ایزوله

خازنی را به باطری با اختلاف پتانسیل V وصل و سپس باطری جدا می‌شود تا بار خازن q ثابت باقی بماند. حال اگر دی‌الکتریک به ثابت دی‌الکتریک k_e را وارد خازن کنیم تجربه نشان می‌دهد که اختلاف پتانسیل به اندازه فاکتور k_e کاهش می یابد. یعنی

$$v_d = \frac{v}{k_e}$$

لذا

$$c_d = \frac{q_d}{v_d} = \frac{q}{\frac{v}{k_e}} = k_e \frac{q}{v} = k_e c$$

مشاهده می‌شود که ظرفیت خازن با دی‌الکتریک به اندازه فاکتور k_e افزایش یافته است. میدان الکتریکی داخل دی‌الکتریک

$$E_d = \frac{v_d}{d} = \frac{v}{k_e d} = \frac{E}{k_e}$$

به اندازهٔ فاکتور k_e کاهش پیدا می‌کند. پس در خازن ایزوله

$$\frac{c_d}{c} = \frac{v}{v_d} = \frac{E}{E_d} = k_e$$

در خازن غیر ایزوله

دوّم وقتی‌ایست که باطری متصل باقی می‌ماند. از لحاظ تجربی مشاهده شده است که بارهای خازن به اندازهٔ فاکتور k_e افزایش می‌یابند.

$$q_d = k_e q$$

q بار روی صفحات خازن بدون دی‌الکتریک و q_d بار روی صفحات خازن با دی‌الکتریک

$$c_d = \frac{q_d}{v_d} = \frac{q_d}{v} = \frac{k_e q}{v} = k_e c$$

دقیقاً همان مقداریست که در حالت خازن ایزوله به دست آمد (q ثابت). این نتیجه قابل پیش‌بینی ایست فقط به هندسه خازن بستگی دارد. در خازن غیر ایزوله

$$\frac{q_d}{q} = k_e$$

یکی افزایش ظرفیت خازن با دی الکتریک

ایزوله با ظرفیت c را در نظر بگیرید اگر دی‌الکتریک به ثابت دی‌الکتریک k_e بین دو صفحه آن قرار گیرد، ظرفیت آن k_e برابر می‌شود. توجیح فیزیکی این افزایش ظرفیت با توجه به آنچه که تاکنون در مورد دی‌الکتریک‌ها گفته شد، ساده است. دی‌الکتریک بین صفحات خازن در میدان یکنواخت خازن که برابر $\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ است قرار گرفته است.در حقیقت مسأله ما بررسی اثر میدان خارجی بر یک دی‌الکتریک است. دی‌الکتریک چه پلار و یا غیرپلار باشد، اگر میدان الکتریکی بر آن ردیف شدن دوقطبی‌های آن یا القاء دوقطبی‌های همسو با میدان خازن است. بارهای مثبت و منفی داخل دی‌الکتریک بطور متوسط یکدیگر را خنثی می‌نمایند. تنها جائی که عمل حذف انجام نمی‌شود روی سطح دی‌الکتریک است. بار منفی پلاریزه روی سطح بالائی و بار مثبت پلاریزه روی سطح پائینی. این بارهای سطحی پلاریزه به نوبه خود تولید میدان $\vec{E}_p$ را می‌نمایند که برخلاف جهت میدان خازن $\vec{E}$ است لذا میدان در داخل دی‌الکتریک برابر است با

$$\vec{E}_d = \vec{E} + \vec{E}_p$$

$$\vec{E}_d < E$$

چون $\vec{E}_p$ و $\vec{E}$ برخلاف یکدیگرند E_d همیشه از $\vec{E}$ کوچکتر است.

دی‌الکتریک‌ها اثر میدان خارجی را تضعیف می‌کنند ولی آن را کاملاً از بین نمی‌برند برخلاف هادی‌ها که اثر میدان خارجی را کاملاً از بین می‌برند.

با تضعیف میزان در داخل دی‌الکتریک اختلاف پتانسیل

$$v_d = E_d d$$

از حالت خلاء کاهش پیدا می‌کند یعنی $v_d < v$

لذا ظرفیت خازن با دی‌الکتریک $c_d = \frac{q}{v_d} > c$ بزرگتر از ظرفیت خازن بدون است.

قانون گوس برای دی‌الکتریک‌ها

خازنی سطحی رامطابق شکل در نظر بگیرید. وقتی دی‌الکتریک وجود ندارد. میدان الکتریک $\vec{E}$ در ناحیه بین صفحات را می‌توان با استفاده از قانون گوس به دست آورد.

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = EA = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

مشاهده کردیم که وقتی دی‌الکتریک وارد شود بار القائی q_p با علامت مخالف به وجود می‌آید. به طوری که بار خالص داخل سطح گوس $q-q_r$ است.

سطح گوس سطح گوس

پس

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = E_d A = \frac{q-q_p}{\varepsilon_\circ}$$

$$E_d = \frac{q-q_p}{\varepsilon_\circ A}$$

ولی گفتیم که اثر دی‌الکتریک تضعیف میدان اولیه به اندازهٔ فاکتور k_e است پس

$$E_d = \frac{E}{k_e} = \frac{\sigma}{k_e \varepsilon_\circ} = \frac{q}{k_e \varepsilon_\circ A} = \frac{q-q_p}{\varepsilon_\circ A}$$

که از آن بار القائی را می‌توانیم به دست آوریم.

$$q_p = q\left(1-\frac{1}{k_e}\right)$$

توجه کنید که اگر $k_e = 1$، $q_p = \circ$ که مربوط به حالتی ایست که مادهٔ دی‌الکتریک وجود نداشته باشد جایگزینی $q_p = q\left(1-\frac{1}{k_e}\right)$ در رابطهٔ

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{q-q_p}{\varepsilon_\circ} = \frac{q}{k_e \varepsilon_\circ} = \frac{q}{\varepsilon}$$

بطوری که $\varepsilon = k_e \varepsilon_\circ$ را گذردهی دی‌الکتریک dielectric permittivity نامند به صورت دیگر

$$\oint \vec{D}.\overrightarrow{ds} = q$$

که در آن $\vec{D} = \varepsilon_\circ k_e \vec{E}$ را بردار جابجائی الکتریکی electric dicplacement vector می نامند. رابطه فوق را قانون گوس برای دی‌الکتریک‌ها نامند. توجه نمائید که

۱- q بار آزاد است.
۲- انتگرال شار k_e برابر شده است.

بردارهای سه گانه الکتریکی

ما تاکنون با سه بردار $\vec{E}$، $\vec{D}$ و $\vec{P}$ آشنا شده‌ایم.

۱- $\vec{D}$ فقط به بارهای آزاد مربوط می‌شود. میدان برداری $\vec{D}$ را می‌توان با خطوط میدان $\vec{D}$ نشان داد. درست مانند میدان $\vec{D}$ که توسط خطوط میدان نمایش داده می‌شوند واحد $\vec{D}$ کولمب بر متر مربع است.
۲- $\vec{P}$ فقط به بارهای پلاریزاه مربوط می‌شود. این میدان برداری را می‌توان توسط خطوط میدان نمایش داد.واحد ان کولمب بر متر مربع است.
۳- $\vec{E}$ به تمام بارها مربوط می شود چه آزاد و چه پلاریزه. خطوط میدان $\vec{E}$ می‌توانند مربوط به وجود هر دو نوع بار باشند. واحد $\vec{E}$ نیوتن بر کولمب یا ولت متر است.
بردار $\vec{E}$ تعیین کننده نیروی ورد به بارهاست، از این لحاظ کمیت اساسی مورد نظر است در صورتی که بردارهای $\vec{D}$ و $\vec{P}$ بردارهای کمکی هستند که در مسائل پیچیده می‌توانند مفید واقع شوند.
بردارهای $\vec{P}$ و $\vec{D}$ هر دو را می‌توان بر حسب $\vec{E}$ بیان نمود. قبلاً مشاهده شد که

$$\vec{D}=\varepsilon_\circ k_c\vec{E} \quad \oint \vec{D}.\overrightarrow{ds}=q$$

با استفاده از قانون گوس و قانون گوس برای دی‌الکتریک ها داریم

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{ds}=E_d A=\frac{q-q_p}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E_d \frac{q}{A\varepsilon_\circ}-\frac{q_P}{A\varepsilon_\circ}$$

$$\oint \vec{D}.\overrightarrow{ds}=q\Rightarrow DA=q\Rightarrow D=\frac{q}{A}$$

E_d شدت میدان E در داخل دی الکتریک است. یعنی

$$E_d=\frac{E}{k}=\frac{q}{A\varepsilon_\circ k_e}$$

$\frac{q_p}{A}$ چگالی بارهای سطحی پلاریزاه است می‌توان آن را به صورت $\frac{q_p d}{Ad}$ نیز نوشت یعنی ممان دو قطبی بر واحد حجم که همان بردار پلاریزاسیون P است. لذا رابطه $E_d=\frac{q}{A\varepsilon_\circ}-\frac{q_p}{A\varepsilon_\circ}$ به صورت زیر در می‌آید.

$$D=\varepsilon_\circ E+P$$

بصورت کلی $\vec{D}=\varepsilon_\circ\vec{E}+\vec{P}$

توجه: از اندیس d صرف نظر شده است.
لذا با ترکیب دو رابطه برای $\vec{D}$ می‌توان $\vec{P}$ را بر حسب $\vec{E}$ به دست آورد.

$$\vec{P}=\varepsilon_\circ\left(k_e-1\right)\vec{E}$$

این رابطه را می‌توان از طریق دیگری نیز به دست آورد. یعنی از

$$q_d = q\left(1-\frac{1}{k_e}\right)$$

اگر طرفین را به سطح خازن تقسیم نمائیم داریم

$$\frac{q_d}{A} = \frac{q}{A}\left(1-\frac{1}{k_e}\right)$$

$$P = D\left(1-\frac{1}{k_e}\right) = \varepsilon_\circ k_e E\left(1-\frac{1}{k_e}\right)$$

$$= \varepsilon_\circ E\left(k_e - 1\right)$$

در شکل اوّل $\vec{D}$، $\varepsilon_\circ \vec{E}$ و $\vec{P}$ در دی الکتریک و در خلاء برای خازن مسطح نمایش داده شده‌اند. در شکل دوّم نمونه‌هائی از خطوط $\vec{D}$ (بار آزاد)، $\varepsilon_\circ \vec{E}$(تمام بارها) و$\vec{P}$(بارهای پلاریزه) به تصویر کشیده شده‌اند.

روابطی که بین بردارهای سه گانه تاکنون به دست آمده روابط کلی‌اند و فقط به خازن مسطح منحصر نمی‌شوند. از معادلات ماکسول می‌توان نشان داد که صرف نظر از نوع مسأله، مؤلفه عمودی $\vec{D}$ نسبت به سطح دی الکتریک دارای مقدار مشابه در دو ظرف سطح می باشد. یا به عبارت دیگر از گذر از سطح دی الکتریک ها مؤلفه عمودی $\vec{D}$ بطور پیوسته تغییر می‌کند. می توان نشان داد که مؤلفهٔ مماسی $\vec{E}$ نسبت به سطح دی الکتریک در دو طرف سطح دارای یک مقدار می‌باشد، یا مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی در گذر از سطح دی الکتریک‌ها بطور پیوسته تغییر می‌کند. $\vec{P}$ در خارج دی الکتریک صفر است. این مجموعه شرائط برای $\vec{D}$، $\vec{E}$ و$\vec{P}$را شرائط مرزی نامند. در جدول این خواص خلاصه شده‌اند.

نام	نماد	وابستگی	شرائط مرزی
میدان الکتریکی	$\vec{E}$	تمام بارها	مؤلفهٔ مماسی پیوسته
جابجایی الکتریکی	$\vec{D}$	فقط بارهای آزاد	مؤلفهٔ عمودی پیوسته
پلاریزاسیون	$\vec{P}$	فقط بارهای پلاریزه	در خلاء صفر

بطور خلاصه

معادله معرف $\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{E}$
رابطهٔ کلی بین سه بردار	$\vec{D} = \varepsilon_\circ \vec{E} + \vec{P}$
$\vec{D}$ و $\vec{P}$ بر حسب $\vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon_\circ k_e \vec{E}$
	$\vec{P} = \varepsilon_\circ \vec{E}\left(k_e - 1\right)$

قانون گوس وقتی که محیط دی الکتریک وجود داشته باشد $\oint \vec{D}.\vec{ds} = q$
(q فقط بار آزاد)

ظرفیت با دی الکتریک ها

خازن کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل در نظر بگیرید. کرهٔ داخلی دارای بار +q و کرهٔ خارجی دارای بار −q می‌باشد. اگر خازن ایزوله باشد و دی الکتریک به ثابت دی الکتریک k_e مطابق شکل در فاصله بین شعاع‌های r_1 و r_2 بین دو صفحه خازن قرار گیرد. ظرفیت این خازن را محاسبه نمائید.

حلّ:

این مسأله را می‌توان به دو روش حلّ نمود.

a- روش مستقیم

ابتدا باید میدان الکتریک را در نواحی I و II با استفاده از قانون گوس برای دی الکتریک ها به دست آوریم.

$$\oint \vec{D}.\vec{ds} = q \quad v'_d = \Delta\varphi = -\int_b^a \vec{E}.\vec{dl}$$

ناحیهٔ I: $a < r < r_1$

سطح گوس کروی مطابق شکل در نظر می‌گیریم.

بطورکلی

$$\oint \vec{D}.\vec{ds} = D4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D} = k_e\varepsilon_\circ \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{r}$$

ناحیهٔ I خلاء است لذا
$k_e = 1$

ناحیهٔ II: $r_1 < r < r_2$

سطح گوس کروی مطابق شکل در نظر می‌گیریم.

$$\oint \vec{D}.\vec{ds} = D4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_\circ k_e \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ k_e r^2}\hat{r}$$

زیرا در ناحیه II دی الکتریک وجود دارد
و ثابت دی الکتریک برابر k_e است.

ناحیه III: $r_2 < r < b$

$$\oint \vec{D}.\vec{ds} = Dq\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D} = k_e\varepsilon_\circ\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{r}$$

ناحیهٔ III خلأ است لذا $k_e = 1$

اختلاف پتانسیل دو سطح خازن

$$v_d' = \Delta\varphi = -\int_b^a \vec{E}.\vec{dl}$$

مسیر انتگرال‌گیری شعاعی و از کرهٔ b به طرف کرهٔ a انجام می‌شود. این انتگرال به سه قسمت تقسیم می‌شود.

$$v_d' = -\int_b^{r_2} \vec{E}.\vec{dl} - \int_{r_2}^{r_1} \vec{E}.\vec{dl} - \int_{r_1}^{a} \vec{E}.\vec{dl}$$

$$= -\int_b^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{r}.\hat{r}dr - \int_{r_2}^{r_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ k_e r^2}\hat{r}.\hat{r}dr \;\; dw_B = \sum_k \varphi_k dq_k$$

$$-\int_{r_1}^{a} \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{r}.\hat{r}dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{1}{r}\Big|_b^{r_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ k_e}\frac{1}{r}\Big|_{r_2}^{r_1} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{a}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ k_e}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right)$$

توجه:

اگر دی الکتریک وجود نداشته باشد یعنی $k_e = 1$ یا $r_1 = r_2$ v_d' به v اختلاف پتانسیل دو کره در حالت خلأ تبدیل می‌شود.

$$v_d' \to v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

اگر دی الکتریک بطور کامل فضای خازن کروی را پُر کرده باشد یعنی $r_1 = a$ و $r_2 = b$

$$v_d' \to v_d = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ k_e}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{v}{k_e}$$

ظرفیت خازن

$$c_d' = \frac{q}{v_d'} = \frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{k_e}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}}$$

در حالت $k_e = 1$ یا $r_1 = r_2$

$$c'_d \to c = \frac{4\pi\eta_\circ}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

و اگر $r_1 = a$ و $r_2 = b$

$$c'_d \to c_d = \frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{k_e}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = k_e c$$

b- حلّ با استفاده از ظرفیت خازن کروی

در بخش خازن‌ها ظرفیت خازن کروی استخراج شد $c = \frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

این مسأله معادل سه خازن کروی ایست که به صورت سری به یکدیگر متصل شده باشند.

$$\frac{1}{c_{e_q}} = \frac{1}{c'_a} = \frac{1}{c_I} + \frac{1}{c_{II}} + \frac{1}{c_{III}}$$

$$c_I = \frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{a}-\frac{1}{r_1}}, c_{II} = \frac{k_e 4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}, c_{III} = \frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{b}}$$

$$\frac{1}{c'_d} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{r_1}}{4\pi\varepsilon_\circ} + \frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{k_e 4\pi\varepsilon_\circ} + \frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{b}}{4\pi\varepsilon_\circ}$$

$$\frac{1}{c'_d} = \frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{k_e}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{b}\right)}{4\pi\varepsilon_\circ}$$

$$\frac{1}{c'_d} = \frac{4\pi\varepsilon_\circ}{\frac{1}{a}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{k_e}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{b}\right)}$$

خازن استوانه‌ای غیر ایزوله به شعاع داخلی a شعاع خارجی b که به باطری به اختلاف پتانسیل v وصل است را در نظر بگیرید. دی الکتریک با ثابت دی الکتریک k_e را در فاصله $\rho = \rho_1$ و $\rho = \rho_2$ مطابق شکل بین دو صفحهٔ خازن

استوانه‌ای قرار می‌دهیم (باطری متصل باقی می‌ماند). ظرفیت خازن را محاسبه نمائید. (طول خازن را L بگیرید).

a- روش مستقیم

در این روش ابتدا میدان الکتریکی در سه ناحیهٔ خلأ، دی الکتریک و خلأ بین دوصفحهٔ خازن محاسبه می‌شود. باید توجه داشت که پس از ورود دی الکتریک بار خازن از q به q'_d تغییر می‌نماید ولی اختلاف پتانسیل خازن ثابت باقی می‌ماند.

ناحیه I: $a < \rho < \rho_1$

$$\oint \vec{D}.\vec{ds} = q'_d$$

$$D = 2\pi\rho L = q'_d \Rightarrow D = \frac{q'_d}{2\pi\rho L} \Rightarrow \vec{D} = \frac{q'_d}{2\pi\rho L}\hat{\rho}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_\circ k_e \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ \rho L}\hat{\rho}$$

ناحیه II: $\rho_1 < \rho < \rho_2$

$$D2\pi\rho L = q'_d \Rightarrow D = \frac{q}{2\pi\rho L} \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{2\pi\rho L}\hat{\rho}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_\circ k_e \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_\circ k_e L\rho}\hat{\rho}$$

در محیط II محیط دی الکتریک با ثابت دی الکتریک k_e

ناحیه III: $\rho_2 < \rho < b$

$$D2\pi\rho L = q'_d \Rightarrow D = \frac{q'_d}{2\pi\rho L} \Rightarrow \vec{D} = \frac{q'_d}{2\pi\rho L}\hat{\rho}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_\circ k_e \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ L\rho}\hat{\rho}$$

در ناحیه III خلأ لذا $k_e = 1$

اختلاف پتانسیل بین دو استوانه

$$v = \Delta\varphi = -\int_b^a \vec{E}.\vec{dl} = -\int_b^{\rho_2} \vec{E}.\vec{dl} - \int_{\rho_2}^{\rho_1} \vec{E}.\vec{dl} - \int_{\rho_1}^{a} \vec{E}.\vec{dl}$$

$$= -\int_b^{\rho_2} \frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ L\rho}\hat{\rho}.\hat{\rho}d\rho - \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ L\rho}\hat{\rho}.\hat{\rho}d\rho$$

$$-\int_{\rho_1}^{a} \frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ L\rho}\hat{\rho}.\hat{\rho}d\rho$$

مسیر انتگرال شعاعی ایست و از استوانه بیرونی به طرف استوانهٔ داخلی ایست.

$$v=-\frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ L}\ln\rho\Big|_b^{\rho_2}-\frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ k_e L}\ln\rho\Big|_{\rho_2}^{\rho_1}-\frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ L}\ln\rho\Big|_{\rho_1}^{a}$$

$$=\frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ L}\ln\frac{b}{\rho_2}+\frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ k_e L}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{q'_d}{2\pi\varepsilon_\circ L}\ln\frac{\rho_1}{a}$$

$$q'_d=\frac{2\pi\varepsilon_\circ Lv}{\ln\frac{b}{\rho_2}+\frac{1}{k_e}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}+\ln\frac{\rho_1}{a}}$$

در حالات خاص $\rho_1=\rho_2$ یا $k_e=1$

$$q'_d\to q=\frac{2\pi\varepsilon_\circ LV}{\ln\frac{b}{a}}$$ (بار در حالت خلأ)

و در حالت $\rho_1=a$ و $\rho_2=b$ یعنی وقتی که دی الکتریک کاملاً فضای بین دو صفحه استوانه‌ائی خازن استوانه‌ائی را پُر کرده باشد.

$$q'_d\to k_e q=\frac{k_e 2\pi\varepsilon_\circ Lv}{\ln\frac{b}{a}}=k_e cv$$

یعنی بار خازن k_e برابر می‌شود.

ظرفیت خازن

$$c'_d=\frac{q'_d}{v}=\frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ln\frac{b}{\rho_2}+\frac{1}{k_e}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}+\ln\frac{\rho_1}{a}}$$

b- با استفاده از ظرفیت خازن استوانه‌ای

$$\frac{1}{c'_d}=\frac{1}{c_{eq}}\frac{1}{c_{eq}}=\frac{1}{c'_d}=\frac{1}{c_I}+\frac{1}{c_{II}}+\frac{1}{c_{III}}$$

$$=\frac{\ln\frac{\rho_1}{a}}{2\pi\varepsilon_\circ L}+\frac{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}{k_e 2\pi\varepsilon_\circ L}+\frac{\ln\frac{b}{\rho_2}}{2\pi\varepsilon_\circ L}$$

$$c'_d=\frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ln\frac{\rho_1}{a}+\frac{1}{k_e}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}+\ln\frac{b}{\rho_2}}$$

$$q'_d = c'_d v = \frac{2\pi\varepsilon_\circ L v}{\ln\frac{\rho_1}{a} + \frac{1}{k_e}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \ln\frac{b}{\rho_2}}$$

نیرو و گشتاور از طریق انرژی الکتروستاتیکی

در این بخش ما روشی برای محاسبه نیروی وارد به یک جسم باردار در یک سیستم را مورد بررسی قرار می‌دهیم این سیستم می‌تواند متشکل از هادی‌ها، دی الکتریک‌ها و بارهای نقطه‌ائی می‌باشد. دو حالت متمایز را در نظر می‌گیریم.

(۱) سیستم ایزوله که بار اجسام واقع در آن ثابت هستند.

(۲) سیستم غیرایزوله که پتانسیل اجسام هادی در آن ثابت نگه داشته می‌شود.

سیستمی از اجسام با بار ثابت

سیستمی ایزوله متشکل از هادی‌های باردار شده و دی الکتریک‌ها را در نظر بگیرید. بار روی اجسام این سیستم ثابت است. اگر نیروهای الکتریکی یکی از اجسام را به اندازهٔ $\overrightarrow{d\zeta}$ جابجا کنند. کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم برابر است با

$$dw^{(M)} = \vec{F}.\overrightarrow{d\zeta} = F_\zeta d\zeta$$

که در آن $\vec{F}$ نیروی الکتریک کل وارد شونده به جسم با بار ثابت است. چون سیسم ایزوله است انجام این کار مکانیکی به ازای کاهش انرژی الکترواستاتیکی ذخیره شده خواهد بود، یعنی

$$dw^{(M)} = -dw\vec{F}.\overrightarrow{d\zeta} = F_\zeta d\zeta$$

$$F_\zeta = -\frac{dw}{d\zeta}\Big|_q \quad \text{(بار ثابت)}$$

اگر جسم مورد نظر مقید به چرخش حول یک محور باشد، بطور مثال محور z، کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم برای دوران $d\phi$

$$dw^{(M)} = \tau_z d\phi = -dw$$

$$\tau_z = -\frac{dw}{d\phi}\Big|_q \quad \text{(بار ثابت)}$$

سیستمی متشکل از اجسام هادی با پتانسیل ثابت

سیستمی متشکل از اجسام هادی و دی الکتریک های بدون بار در نظر بگیرید. پتانسیل اجسام هادی با اتصال به منابع خارجی مانند باطری ثابت نگه داشته می‌شود. اگر یکی از اجسام به اندازهٔ $\overrightarrow{d\zeta}$ جابجا شود انرژی

الکترواستاتیکی تغییر می کند. لذا باطری باید بار به اجسام هادی انتقال دهد تا اینکه آنها در پتانسیل ثابت باقی بماند. اگر dq_k باری بشد که به مادل k ام برای حفظ پتانسیل آنها φ_k اضافه شده باشد، کل انرژی که منابع وارد سیستم نموده‌اند.

$$dw_B = \sum_k \varphi_k dq_k$$

کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم در اثر جابجائی $\overrightarrow{d\zeta}$

$$dw^{(M)} = \vec{F}.\overrightarrow{d\zeta} = F_\zeta d\zeta$$

$\vec{F}\ c_4 = \dfrac{\varepsilon_\circ (L-x) w}{d}$ نیروی وارد به حجم مورد نظر تحت شرائط پتانسیل ثابت است. انتقال بار باعث تغییر انرژی الکترواستاتیکی سیستم می‌شود یعنی

$$dw = \frac{1}{2}\sum_k \varphi_k dq_k = \frac{1}{2} dw_B$$

قانون بقاء انرژی به صورت زیر است

$$dw^{(m)} + dw = dw_B$$

$$F_\zeta d\zeta = dw \Rightarrow F_\zeta = -\frac{dw}{d\zeta}\Big|_v \qquad \text{(پتانسیل ثابت)}$$

اگر جسم مقید به دوران حول محور z باشد مؤلفهٔ z گشتاور الکتریکی

$$\tau_z = \frac{dw}{d\phi}\Big|_v \qquad \text{(پتانسیل ثابت)}$$

مثال ۱- ینروی وارد به صفحه بالائی یک خازن مسطح را محاسبه نمائید.

a- خازن ایزوله

b- خازن ا=غیر ایزوله

خازن ایزوله

$$F_z = -\frac{dw}{d\phi}\Big|_{q=} \qquad \text{ثابت}$$

$$w = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$$

$$c = \frac{\varepsilon_\circ A}{z}$$

$$F_z = -\frac{1}{2}q^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{c}\right) = -\frac{1}{z}q^2\frac{1}{\varepsilon_\circ A}$$

آموزنده است که این مسأله را مستقیماً بدون استفاده از رابطه برای F_z نیز حل نمائیم. فرض کنید صفحه بالائی به اندازه dz جابجا شود چون خازن ایزوله است بار آن q ثابت باقی می‌ماند. نیروهای الکترواستاتیکی وارد به

صفحه بالائی. کاری معادل $F_z dz$ انجام می‌دهند، لذا انرژی الکترواستاتیکی باید کاهش پیدا کند.

$$dw^{(M)} = F_z dz = -dw = -\left[w(z+dz) - w(z)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}q^2\left[\frac{1}{c(z+dz)} - \frac{1}{c(z)}\right]$$

با قرار دادن $c = \frac{\varepsilon_\circ A}{z}$

$$F_z dz = -\frac{1}{2}q^2\left(\frac{z+dz}{\varepsilon_\circ A} - \frac{z}{\varepsilon_\circ A}\right) = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_\circ A}dz$$

$$F_z = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_\circ A}$$

که دقیقاً همان نتیجه قبل است.

خازن غیرایزوله $F_z = -\frac{dw}{d\phi}\Big|_{v=}$ ثابت

$$w = \frac{1}{2}cv^2$$

$$c = \frac{\varepsilon_\circ A}{z}$$

$$F_z = \frac{1}{2}v^2\frac{dc}{dz} = \frac{1}{2}v^2\left(\frac{-\varepsilon_\circ A}{z^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{v^2c^2}{\varepsilon_\circ A} = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_\circ A}$$

بطور مستقیم بدون استفاده از فرمول نیز می‌توان این مسأله را حلّ نمود.

۱- کار مکانیکی نیروی الکترواستاتیکی $dw^{(M)} = F_z dz$

۲- تغییر انرژی الکترواستاتیکی $dw = \frac{1}{2}v^2 dc$

۳- کار باطری برای حفظ پتانسیل صفحه بالائی

بار اولیه صفحهٔ بالائی $q_i = vc_i$

بار نهائی بعد از جابجائی $q_f = vc_f$

بار تأمین شده توسط باطری در این جابجائی $q_f - q_i = v(c_f - c_i) = vdc$

چون این بار در حالتی که پتانسیل صفحه بالائی v بوده است به آن اضافه گردیده لذا کار انجام شده روی سیستم توسط باطری

$$dw_B = (q_f - q_i)v = v^2 dc$$

قانون بقاء انرژی

$$dw^{(M)} + dw = dw_3$$

$$F_z dz + \frac{1}{2} v^2 dc = v^2 dc$$

$$F_z dz = \frac{1}{2} v^2 dc \Rightarrow F_z = \frac{1}{2} v^2 \frac{dc}{dz}$$

که دقیقاً چیزیست که قبلاً به دست آمد.

مثال ۲: خازن مسطحی با فاصله d و ابعاد $a \times l$ در نظر بگیرید. اگر دی‌الکتریکی به ثابت دی‌الکتریک k_e تا فصله x بین دو صفحه خازن قرار گیرد.

نیروی وارد به دی‌الکتریک را محاسبه کنید. اگر

a- خازن ایزوله باشد (q ثابت)

b- خازن غیرایزوله باشد (v ثابت)

خازن ایزوله

برای محاسبه نیروی وارد به دی‌الکتریک ابتدا باید ظرفیت خازن را به صورت تابعی از x پیدا کنیم.

$$c_x = \frac{k_e \varepsilon_\circ a x}{d} \qquad c_{l-x} = \frac{\varepsilon_\circ a (l - x)}{d}$$

ظرفیت کل

$$c = c_x + c_{l-x} = \frac{a}{d}\left[\left(k_e \varepsilon_\circ - \varepsilon_\circ \right) x + \varepsilon_\circ l \right]$$

$$w(x) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{d}{a}\frac{q^2}{\left(k_e \varepsilon_\circ - \varepsilon_\circ \right) x + \varepsilon_\circ l}$$

$$\vec{F} = -\frac{dw}{dx}\hat{i} = \frac{1}{2}\frac{q^2 d}{a \varepsilon_\circ}\frac{(k_e - 1)}{\left[x(k_e - 1) + l \right]^2}\hat{i}$$

نیرو جاذبه است یعنی دی‌الکتریک به طرف داخل کشیده می‌شود.

خازن غیرایزوله

$$w = \frac{1}{2} c v^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_\circ a}{d}\left[x(k_e - 1) + l \right] v^2$$

$$\vec{F} = +\frac{dw}{dx}\hat{i}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a}{d} v^2 \varepsilon_\circ (k_e - 1)\hat{i}$$

نیرو دوباره جاذبه است.

شکل خطوط نیروی بین بارهای آزاد روی صفحات و بارهای پلاریزاه القاء شده روی دی‌الکتریک را نشان می‌دهد.

مثال ۳: خازن مسطحی را در نظر بگیرید که به باطری به اختلاف پتانسیل $v_\circ$ وصل است. طول خازن را L و عرض آن w و فاصله صفحه آن را d بگیرید. اگر دی‌الکتریکی به ضخامت y و ثابت دی‌الکتریک k_e مطابق شکل بین دوصفحه آن قرار گیرد.

الف- تغییر نسبی باز خازن را محاسبه نمائید.

ب- جهت و مقدار نیروی وارد به دی‌الکتریک را تعیین نمائید.

ج- در نواحی 1، 2، 3، 4 بردارهای سه گانه $\vec{E}$، $\vec{D}$ و $\vec{P}$ را به دست آورید.

تغییر نسبی بار خازن

$$c_1 = \frac{\varepsilon_\circ xw}{d_1} \qquad c_2 = \frac{\varepsilon_\circ k_e xw}{d_2} \qquad c_3 = \frac{\varepsilon_\circ xw}{d_2}$$

$$c_4 = \frac{\varepsilon_\circ (L-x) w}{d}$$

خازنهای c_1 و c_2 و c_3 سری هستند. ظرفیت معادل آنها را c'_d می‌گیریم.

$$\frac{1}{c'_d} = \frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{d_1}{\varepsilon_\circ xw} + \frac{d_2}{\varepsilon_\circ k_e xw} + \frac{d}{\varepsilon_\circ (L-x) w}$$

خازن معادل c_1 c'_d با خازن c_4 موازیست لذا

$$c = c'_d + c_4$$

بار خازن قبل از ورود دی‌الکتریک $q = c_\circ v_\circ = \frac{\varepsilon_\circ Lw}{d} v_\circ$

بعد از ورود دی الکتریک بار خازن از q به q'_d تغییر می‌یابد ولی اختلاف پتانسیل $v_\circ$ باقی می‌ماند. لذا

$$c = \frac{q'_d}{v_\circ} \Rightarrow q'_d = cv_\circ$$

تغییر نسبی بار= $\frac{q'_d - q}{q}$

نیروی وارد به دی‌الکتریک $\vec{F} = +\frac{dw}{dx}\hat{i}$

$$w = \frac{1}{2}cv^2 = \frac{1}{2}cv_\circ^2$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2}v_\circ^2 \frac{dc}{dx}\hat{i}$$

نیرو جاذبه است.

بردارهای سه گانه $\vec{D}$، $\vec{E}$ و $\vec{P}$

بار خازن c'_d و بار خازن c_4 را محاسبه می‌نمائیم.

$$c'_d = \frac{q_x}{v_\circ} \Rightarrow q_x = c'_d v_\circ = c'_d \frac{q'_d}{c}$$

$$c_4 = \frac{q_{L-x}}{v_\circ} \Rightarrow q_{L-x} = c_4 v_\circ = c_3 \frac{q'_d}{c}$$

با توجه به اینکه q_x بار خازن c'_d و q_{L-x} بار خازن c_4 بر حسب داده‌های مسأله تعیین شده‌اند. بردارهای سه گانه الکتریکی را در نواحی 1، 2، 3و 4 تعیین می‌کنیم.

ناحیه 1: $D = \frac{q_x}{xw} \quad E = \frac{q_x}{\varepsilon_\circ xw} \quad P = \circ$

ناحیه 2: $D = \frac{q_x}{xw} \quad E = \frac{q_x}{\varepsilon_\circ k_e xw} \quad P = \varepsilon_\circ E\left(k_e - 1\right)$

$$= \varepsilon_\circ \frac{q_x}{\varepsilon_\circ k_e xw}\left(k_e - 1\right)$$

$$P = \frac{q_x}{xw}\left(1 - \frac{1}{k_e}\right)$$

ناحیه 3: $D = \frac{q_x}{xw} \quad E = \frac{q_x}{\varepsilon_\circ xw} \quad P = \circ$

ناحیه 4: $D = \frac{q_{L-x}}{\left(L-x\right)w} \quad E = \frac{q_{L-x}}{\varepsilon_\circ \left(L-x\right)w} \quad P = \circ$

مثال ۴: خازن استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b ب اختلاف پتانسیل v وصل است. طول خازن L می باشد. دی‌الکتریک‌های با ثابت دی‌الکتریک k_1 و k_2 مطابق شکل بطور کامل فضای بین دو جوشن را پر کرده است.

الف- ظرفیت این خازن را محاسبه نمائید.

ب- انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه کنید.

ج- بردارهای $\vec{D}$، $\vec{E}$ و $\vec{P}$را در ناحیه دی‌الکتریک k_1 بین دو صفحه خازن استوانه‌ای به دست آورید.

ظرفیت:

ظرفیت خازن استوانه‌ای بدون دی‌الکتریک و به طول L قبلاً به دست آمده است.

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ln {}^{b}\!/_{a}}$$

لذا ظرفیت خازن با دی‌الکتریک k_1 و طول ${}^{L}\!/_{2}$ $\qquad c_1 = \frac{2\pi\varepsilon_\circ k_1 L}{2\ln {}^{b}\!/_{a}}$

$$c=\frac{2\pi\varepsilon_\circ k_2 L}{2\ln b/a}$$ " " " k_2 " " " " "

پس ظرفیت کل برابر است با

$$c=c_1+c_2=\frac{2\pi\varepsilon_\circ k_1 L}{2\ln b/a}+\frac{2\pi\varepsilon_\circ k_2 L}{2\ln b/a}=\frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{2\ln b/a}(k_1+k_2)$$

انرژی ذخیره شده

$$w=\frac{1}{2}cv^2=\frac{1}{2}\frac{\pi\varepsilon_\circ L}{\ln b/a}(k_1+k_2)v^2$$

بردارهای سه گانه $\vec{D}$، $\vec{E}$ و $\vec{P}$

بار q_1 روی خازن c_1 قرار دارد و مقدار آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

k_2

$$c_1=\frac{q_1}{v}\Rightarrow q_1=c_1v=\frac{\pi\varepsilon_\circ Lk_1}{\ln\frac{b}{a}}v$$

$$\oiint \vec{D}.ds=\frac{q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow \vec{D}_1=\frac{q_1}{\pi\rho L}(\hat{\rho})$$

$$\vec{D}=\varepsilon_\circ k_e\vec{E}\Rightarrow \vec{E}_1=\frac{\vec{D}_1}{k_1\varepsilon_\circ}=\frac{q_1}{\pi\varepsilon_\circ k_1 L_p}(\hat{\rho})$$

$$\vec{P}=\varepsilon_\circ\vec{E}(k_e-1)\Rightarrow \vec{P}_1=\varepsilon_\circ(k_1-1)\frac{q_1}{\pi\varepsilon_\circ k_1 L_p}(\hat{\rho})$$

$$=\frac{q_1}{\pi\varphi}\left(1-\frac{1}{k_1}\right)(\hat{\rho})$$

مثال ۵:

خازن مسطحی با صفحات مربعی به ضلع a مفروض است. این خازن شارژشده و سپس از منبع تغذیه جدا می‌شود. اگر دی‌الکتریک به ثابت دی‌الکتریک k و ضخامت b بین دو جوشن قرار گیرد.

الف- ظرفیت و انرژی پتانسیل خازن را محاسبه نمائید.

ب- اگر صفحهٔ بالائی را به اندازه زاویه کوچک θ نسبت به صفحه دیگر مطابق شکل بچرخانیم، ظرفیتو انرژی پتانسیل خازن را محاسبه نمائید.

از رابطهٔ $\frac{1}{\alpha+\beta\theta}=(\alpha+\beta\theta)^{-1}\approx\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\beta\theta}{\alpha}\right)$ می‌توانید استفاده نمائید.

ظرفیت و انرژی پتانسیل

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_b}=\frac{1}{\frac{\varepsilon_\circ A}{d_1}}+\frac{1}{\frac{\varepsilon_\circ k_e A}{b}}+\frac{1}{\frac{\varepsilon_\circ A}{d_2}}$$

$$=\frac{d_1}{\varepsilon_\circ A}+\frac{b}{\varepsilon_\circ k_e A}+\frac{d_2}{\varepsilon_\circ A}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_\circ A}\left(d_1+\frac{b}{k_e}+d_2\right)$$

$$c=\frac{\varepsilon_\circ A}{d-b+\frac{b}{k}}$$

$$w=\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}=\frac{1}{2}\frac{q^2\left(d-b+\frac{b}{k}\right)}{\varepsilon_\circ A}$$

وقتی صفحهٔ بالائی به اندازهٔ زاویه θ می‌چرخد.

$$\frac{1}{dc}=\frac{1}{dc_1}+\frac{1}{dc_b}+\frac{1}{dc_2}$$

$$dc_1=\frac{\varepsilon_\circ adx}{d_1+x\tan\theta}\quad dc_b=\frac{\varepsilon_\circ k_e adx}{b}\quad dc_2=\frac{\varepsilon_\circ adx}{d_2}$$

$$\frac{1}{dc}=\frac{d_1+x\tan\theta}{\varepsilon_\circ adx}+\frac{b}{\varepsilon_\circ k_e adx}+\frac{d_2}{\varepsilon_\circ adx}$$

$$\frac{1}{dc}=\frac{1}{\varepsilon_\circ adx}\left(d-b+x\tan\theta+\frac{b}{k_e}\right)$$

$$dc=\frac{\varepsilon_\circ adx}{d-b\left(1-\frac{1}{k_e}\right)+x\tan\theta}\approx\frac{\varepsilon_\circ adx}{d-b\left(1-\frac{1}{k_e}\right)+x\theta}$$

$$=\frac{\varepsilon_\circ adx}{d\left[1-\frac{b}{a}\left(1-\frac{1}{k_e}\right)+\frac{x}{d}\theta\right]}\approx\frac{\varepsilon_\circ a}{d}\left[1-\frac{b}{a}-b\left(1-\frac{1}{k_e}\right)-\frac{x}{d}\theta\right]$$

$$c=\int_{\circ}^{a}\frac{\varepsilon_{\circ}a}{d}\left[1-\frac{b}{a}\left(1-\frac{1}{k_e}\right)-\frac{x\theta}{d}\right]dx$$

$$=\frac{\varepsilon_{\circ}a}{d}\left\{\left[1-\frac{b}{d}\left(1-\frac{1}{k_e}\right)\right]a-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta}{d}\right\}$$

$$w=\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}=\frac{1}{2}\frac{q^2d}{\varepsilon_{\circ}a^2}\frac{1}{\left\{1-\frac{b}{a}\left(1-\frac{1}{k_e}\right)-\frac{1}{2}\frac{a\theta}{d}\right\}}$$

مثال ۶: دو کرۀ هادی هم مرکز به شعاعهای a و b مطابق شکل مفروض‌اند. بار Q روی سطحی کرۀ داخلی و بار 2Q- روی سطح کره خارجی به شعاع b قرار گرفته است. اگر دی‌الکتریکی به ثابت دی‌الکتریک $k_e=\frac{1}{\alpha+\beta r}$ بطور کامل فضای بین دو کره را پر کند.

الف- بردارهای سه گانه $\vec{D}$، $\vec{E}$ و $\vec{P}$ را در نقاط داخل و خارج محاسبه نمائید.
ب- پتانسیل یک نقطه در داخل دی‌الکتریک $a<r<b$ را به دست آورید.
ج- بارهای پلاریزه روی سطوح دی‌الکتریک را به دست آورید.

بردارهای سه گانه $\vec{D}$، $\vec{E}$ و $\vec{P}$

نقاط داخل

$$\oint\vec{D}.\vec{ds}=q$$

$$D4\pi r^2=Q\Rightarrow\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_{\circ}k_e\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_{\circ}k_e}=\frac{Q(\alpha+\beta r)}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P}=\varepsilon_{\circ}\vec{E}(k_e-1)=\varepsilon_{\circ}\frac{Q(\alpha+\beta r)}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^2}\hat{r}\left(\frac{1}{\alpha+\beta r}-1\right)$$

$$\vec{P}=\frac{Q}{4\pi r^2}(1-\alpha-\beta r)\hat{r}$$

نقاط خارج

$$D4\pi r^2=-Q\Rightarrow\vec{D}=-\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_{\circ}\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P}=\circ$$

پتانسیل یک نقطه داخل دی‌الکتریک

$$\varphi(\vec r)=-\int_{\infty}^{\vec r}\vec E.\vec{dl}=-\int_{\infty}^{b}\vec E_{\circ}.\vec{dl}-\int_{b}^{r}\vec E_i.\vec{dl}$$

$$\varphi(\vec r)=-\int_{\infty}^{b}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^2}\hat r.\hat r dr-\int_{b}^{r}\frac{Q(\alpha+\beta r)}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^2}\hat r.\hat r dr$$

$$\varphi(\vec r)=+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{b}-\frac{Q\alpha}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{b}^{r}-\frac{Q\beta}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\ln r\Big|_{b}^{r}$$

$$\varphi(\vec r)=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{1}{b}+\frac{Q\alpha}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)-\frac{Q\beta}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{r}{b}$$

بار پلاریزه روی سطوح دی‌الکتریک

بار پلاریزه روی سطح a $= 4\pi a^2\times P\big|_{r=a}=\frac{Q}{4\pi a^2}\times 4\pi a^2(1-\alpha-\beta a)$

$$=Q(1-a-\beta a)$$

بار پلاریزه روی سطح b $= 4\pi b^2\times P\big|_{r=b^2}=\frac{Q}{4\pi b^2}\times 4\pi b^2(1-\alpha-\beta b)$

$$=Q(1-\alpha-\beta b)$$

مثال ۷: سر پوسته کروی هادی هم مرکز به شعاعهای a و b و c را مطابق شکل در نظر بگیرید. بین پوسته‌های داخلی و میانی دی‌الکتریک به ثابت دی‌الکتریک k_1 و بین پوستهٔ میانی و خارجی دی‌الکتریک به ثابت دی‌الکتریک k_2 قرار دارد. اگر پوستهٔ داخلی به پوستهٔ خارجی توسط سیم رابط وصل نشود و بار Q روی پوستهٔ میانی قرار گیرد.

الف- بار Q چگونه روی پوستهٔ میانی توزیع می شود.

ب- بردارهای سه گانه $\vec D$، $\vec E$ و $\vec P$را در یک نقطه داخل دی‌الکتریک k_1 و همچنین در یک نقطه داخل دی‌الکتریک k_2 به دست آورید.

ج- مقدار بار پلاریزه القاء شده در دو طرف پوستهٔ میانی روی سطوح دی‌الکتریک ها را محاسبه نمائید.

توزیع بار Q:

ظرفیت خازن کروی $c=\dfrac{4\pi\varepsilon_{\circ}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

$$c_1=\frac{4\pi\varepsilon_{\circ}k_1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}\qquad c_2=\frac{4\pi\varepsilon_{\circ}k_2}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}$$

دو خازن موازی $c=c_1+c_2$

$$c_1=\frac{q_1}{\Delta\varphi_1}\qquad c_2=\frac{q_2}{\Delta\varphi_2}$$

$$\begin{cases} q_1+q_2=Q \\ \dfrac{q_1}{c_1}=\dfrac{q_2}{c_2} \end{cases} \Rightarrow q_1=q_2\frac{c_1}{c_2}\Rightarrow \begin{array}{l} q_1=\dfrac{Qc_1}{c_1+c_2} \\ q_2=\dfrac{Qc_2}{c_1+c_2} \end{array}$$

بردارهای سه گانه در دی‌الکتریک های k_1 و k_2 با استفاده از قانون گوس برای دی‌الکتریک‌ها

$$\oint \vec{D}.\vec{ds}=q$$

$$-4\pi r^2 D_1=-q_1\Rightarrow \vec{D}_1=\frac{q_1}{4\pi r^2}(-\hat{r})$$

$$\vec{D}=k_e\varepsilon_\circ\vec{E}\Rightarrow \vec{E}_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_\circ k_1 r^2}(-\hat{r})$$

$$\vec{P}=\varepsilon_\circ\vec{E}(k_e-1)\Rightarrow \vec{P}_1=\frac{q_1}{4\pi k_1 r^2}(k_1-1)(-\hat{r})$$

مشابها در محیط k_2

$$\vec{D}_2=\frac{q_2}{4\pi r^2}(+\hat{r})$$

$$\vec{E}_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_\circ k_2 r^2}(+\hat{r})\ q_\rho=\frac{\varepsilon_\circ v(k_1+k_2)}{d_1k_2+d_2k_1}xa$$

$$\vec{P}=\frac{q_2}{4\pi k_2 r^2}(k_2-1)(+\hat{r})$$

بارهای پلاریزه القاءشده

$$\left|\vec{P}\right|_{r=b}=\frac{q_1}{4\pi k_1 b^2}(k_1-1)$$

$$q'_{1b}=\left|\vec{P}_1\right|_{r=b}4\pi b^2=\frac{q_1}{4\pi k_1 b^2}4\pi b^2(k_1-1)$$

$$q'_{2b}=\frac{q'_2}{4\pi k_2 b^2}4\pi b^2(k_2-1)=q_2\left(1-\frac{1}{k_2}\right)$$

مثال ۸:

خازن مسطحی به ابعاد سطح $a\times a$ و به فاصله d در نظر بگیرید. این خازن به اختلاف پتانسیل v وصل است. اگر دی‌الکتریک‌های k_1 و k_2 مطابق شکل بین دو سطح خازن قرار گیرند:

الف- تغییر بار الکتریکی روی خازن چه مقدار است.
ب- تغییر انرژی خازن را به دست آورید.
ج- بردارهای سه گانه $\vec{D}$، $\vec{E}$ و $\vec{P}$ را در محیطهای 1، 2 و 3 به دست آورید.
د- بار پلاریزه سطحی روی فصل مشترک بین دومحیط 1 و 2 را به دست آورید.

تغییر بار الکتریک

بار خازن قبل از دی‌الکتریک $c = \frac{q}{v} = \frac{\varepsilon_\circ a^2}{d} \Rightarrow q = \frac{\varepsilon_\circ a^2}{d} v$

انرژی خازن قبل از دی‌الکتریک $w = \frac{1}{2} c v^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_\circ a^2}{d} v$

بعد از ورود دی‌الکتریک خازنهای c_1 و c_2 سری لذا ظرفیت معادل آنها

$$\frac{1}{c'_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_\circ x a k_1}{d_1}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_\circ x a k_2}{d_2}}$$

$$= \frac{d_1}{\varepsilon_\circ x a k_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_\circ x a k_2} = \frac{1}{\varepsilon_\circ x a}\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_\circ x a}\left(\frac{d_1 k_2 + d_2 k_1}{k_1 k_2}\right)$$

$$c'_{eq} = \frac{\varepsilon_\circ x a k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

$$c_{eq} = c'_{eq} + c_3 = \frac{\varepsilon_\circ x a k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1} + \frac{\varepsilon_\circ (a - x) a}{d}$$

بار ذخیره شده روی صفحات خازن بعد از ورود دی‌الکتریک برابر است با

$$q'_d = c_{eq} v = \left(\frac{\varepsilon_\circ x a k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1} + \frac{\varepsilon_\circ (a - x) a}{d}\right) v$$

انرژی خازن بعد از وروی دی‌الکتریک

$$w'_d = \frac{1}{2} c_{eq} v^2 = \frac{1}{2} (\qquad\qquad)^2 v$$

تغییر بار $\Delta q = q'_d - q$

تغییر انرژی $\Delta w = w'_d - w$

بردارهای سه گانۀ الکتریکی

بار در قسمت دی‌الکتریک ها برابر است با:

$$q_d = c'_{eq} v = \frac{\varepsilon_\circ x a k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1} v$$

بار در قسمت خلأ برابر است با

$$q_3 = c_3 v = \frac{\varepsilon_0 (a-x) a}{d} v$$

چگالی در قسمت دی‌الکتریک‌ها برابر است با

$$\sigma_d = \frac{q_d}{xa} = \frac{\varepsilon_0 k_1 k_2 v}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

چگالی در قسمت خلأ برابر است با

$$\sigma_3 = \frac{q_3}{(a-x)a} = \frac{\varepsilon_0 v}{d}$$

بردار $\vec{D}$

$$D_1 = D_2 = \frac{\varepsilon_0 k_1 k_2 v}{d_1 k_2 + d_2 k_1} \qquad D_3 = \frac{\varepsilon_0 v}{d}$$

بردار $\vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 k_e \vec{E}$$

$$D_1 = \varepsilon_0 k_1 E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{k_2 v}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 k_2 E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{k_1 v}{d_1 k_2 + d_2 k_2}$$

$$D_3 = \varepsilon_0 E_3 \Rightarrow E_3 = \frac{v}{d}$$

بردار پلاریزاسیون

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} (k_e - 1)$$

$$P_1 = \varepsilon_0 E_1 (k_1 - 1) = \frac{\varepsilon_0 (k_1 - 1) k_2 v}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

$$P_2 = \varepsilon_0 E_2 (k_2 - 1) = \frac{\varepsilon_0 (k_2 - 1) k_1 v}{d_1 k_2 + d_2 k_1}$$

بار پلاریزه روی فصل مشترک در دی‌الکتریک

$$q_\rho = P_1 xa - P_2 xa$$

$$= \left[\frac{\varepsilon_0 (k_1 - 1) k_2 v}{d_1 k_2 + d_2 k_1} - \frac{\varepsilon_0 (k_2 - 1) k_1 v}{d_1 k_2 + d_2 k_1} \right] xa$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0 k_1 k_2 v - \varepsilon_0 k_2 v - \varepsilon_0 k_2 k_1 v + \varepsilon_0 k_1 v}{d_1 k_2 + d_2 k_1} \right) v$$

$$q_\rho = \frac{\varepsilon_0 v (k_1 + k_2)}{d_1 k_2 + d_2 k_1} xa$$