www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۱۰

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

میدان مغناطیسی توزیع‌های جریان

در این فصل به شرح قانون بیوساوار برای محاسبۀ میدان معناطیی توزیع‌های مختلف جریان خطی، سطحی و حجمی خواهیم پرداخت. برای محاسبه میدان مغناطیسی برای جریان‌هائی که دارای تقارن کافی باشند، می‌توان از قانون آمپر استفاده نمود. مفید بودن قانون آمپر در مسائل عملی محدود است، همانطور که در الکترواستاتیک گفته شد فقط به شرطی می‌توانیم از قانون گوس برای محاسبۀ میدان‌های الکتریکی استفاده کنیم که تقارن توزیع بار بحدّی باشد که محاسبه انتگرال شار آسان باشد. با استفاده از قانون گوس می‌توان میدان الکتریکی حاصل از یک میلۀ طویل با بار یکنواخت میدان حاصل از یک صفحه بی‌نهایت با چگالی بار سطحی یکنواخت را به دست آورد. به طریق مشابه میدان مغناطیسی یک سیم بسیار طویل حامل جریان، میدان مغناطیسی یک صفحۀ بی‌نهایت حامل جریان سطحی را می‌توان از قانون آمپر به دست آورد.

در حقیق نقش قانون بیو و ساوار و قانون آمپر در مگنتو استاتیک مشابه نقش قانون کولمب و قانون گوس در الکترواستاتیک است. این تشابهات می‌تواند در استخراج روابط و پیش‌بینی‌ها در مگنتواستاتیک بسیار مؤثر واقع افتد.

قانون بیو و ساوار

برای محاسبۀ $\vec{E}$ در نقطۀ معینی از یک توزع بار دلخواه، این توزیع بار را به المان‌های بار dq تقسیم کردیم برای محاسبۀ سهم میدان $d\vec{E}$ روی تمامی بار به دست آوریم. اکنون روش مشابهی برای محاسبۀ $\vec{B}$ برای یک توزیع جریان دلخواه در یک نقطۀ معین بکار می‌بریم. سیستم توزیع جریان را به المان‌های جریان تقسیم می‌کنیم و با استفاده از قانون بیو و ساوار سهم میدان $d\vec{B}$ حاصل از هر المان جریان را در نقطۀ مورد نظر حساب می‌کنیم. میدان $\vec{B}$ در آن نقطه با انتگرال‌گیری از عناصر میدان روی تمامی سیستم توزیع جریان به دست می آید. شکل یک توزیع دلخواه بار و یک توزیع دلخواه جریان را نشان می‌دهد که شامل جریان I در یک سیم خمیده است. درست مانند الکترواستاتیک که المان بار dq را با مختصات پریم‌دار یعنی و موقعیت نقطۀ میدان را با مختصات بدون پریم $\vec{r}$ نمایش می‌دهیم. به طوری که میدان‌های المان بار dq و میدان المان جریان $I\vec{dl}$ به صورت زیرند

$$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{3}} \qquad d\vec{B}=\frac{\mu_{\circ}}{4\pi}\frac{I\vec{dl}\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{3}}$$

$\mu_{\circ}$ در رابطه $d\vec{B}$ را تراوائی خلأ نامند و مقدار آن برابر است با

$$\mu_{\circ} = 4\pi \times 10^{-4}\ \frac{T.m}{A}$$

تراوائی خلأ $\mu_{\circ}$ و گذردهی خلأ $\varepsilon_{\circ}$ هر دو هنگام استفاده از یکاهای SI در فرمول‌های الکترومغناطیس وارد می‌شوند. جهت $d\vec{E}$ در راستای بردار $\vec{r}-\vec{r}'$ به دست می‌آید. لذا $d\vec{B}$ عمود است به صفحه‌ائی که از بردار $I\vec{dl}$ و بردار نسبی $\vec{r}-\vec{r}'$ می‌گذرد و به طرف داخل صفحه است.

معمولاً برای تعیین جهت $\vec{B}$ از قاعده دست راست آمپر استفاده می‌شود به طوری که اگر شست دست راست در جهت جریان باشد انگشتان دست راست جهت میدان مغناطیسی را در اطراف سیم نشان خواهند داد.

برای محاسبه میدان الکتریکی توزیع بار سهم میدان الکتریکی المان‌های بار dq را در نقطهٔ p با هم جمع نمودیم.

$$\vec{B} = k\int_{\text{توزیع}} \frac{I\vec{dl} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

به طریق مشابه می‌توان برای یک سیم حامل جریان I، سهم میدان مغناطیسی مربوط به المان‌های جریان $I\vec{dl}$ روی سیم را در نقطهٔ P با هم جمع نمود، به عبارت دیگر با انتگرال‌گیری روی سیم حامل جریان داریم

$$\vec{B} = k\int_{\text{سیم حامل}} \frac{I\vec{dl} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

از مقایسه دو رابطه $\vec{E}$ و $\vec{B}$ متوجه می‌شویم که در هر دو حالت نیرو عکس مجذور فاصله است. تفاوت اساسی بین دو رابطه آنست که در رابطهٔ کولمب چون بارها ساکن‌اند فقط بردار $\vec{r}-\vec{r}'$ که سمت نقطهٔ میدان را نشان می‌دهد وارد شده است در صورتی که در رابطهٔ بیو و ساوار دو راستا وجود دارد یکی $I\vec{dl}$ که جهت جریان را نشان می‌دهد و دیگری $(\vec{r}-\vec{r}')$ که سمت میدان را تعیین می‌کند این دو بردار به صورت برداری در یکدیگر ضرب می‌شوند تا جهت میدان مغناطیسی را تعیین کنند.

در الکترواستاتیک میدان الکتریکی $\vec{E}$ را برای توزیع‌های خطی، سطحی و حجمی بار به دست آوردیم، لذا می‌توان به طریق مشابه میدان مغناطیسی برای جریان‌های خطی، سطحی و حجمی را نیز از طریق قانون بیو و ساوار به دست آورد.

برای جریان‌های مداری یا جریان‌های لوله‌ائی (رشته‌ائی) می‌توان ثابت کرد که $\vec{J}(\vec{r})dv = I\vec{dl}\ dq \to \lambda dl \to \sigma ds \to \rho dv$ یک قسمت از یک سیم را به طول dl در نظر بگیرید فرض کنید که چگالی جریان در آن $\vec{J}$ باشد.

اگر مساحت سطح مقطع سیم ds و بردار یکهٔ عمود به $\hat{n}$ باشد روابط زیر برقرارند

$$\vec{J}(\vec{r})dv = \hat{n}J(\vec{r})dsdl = \vec{J}(\vec{r}).\vec{ds}\hat{n}dl$$

جریان گذرنده از سطح ds $\quad I = \vec{J} - \vec{ds}$

پس $\quad \vec{J}(\vec{r})dv = I\vec{dl}$

با توجه به این گونه روابط می‌توان قانون بیوساوار را برای جریان‌های حجمی و سطحی نیز نوشت.

اگر بارهای استاتیک با سرعت $\vec{V}$ حرکت کنند تولید میدان مغناطیسی می‌کنند. میدان حاصل از حرکت بارهای استاتیک نیز از طریق قانون بیو و ساوار قابل محاسبه است. در حالت‌های مانا این گونه توزیع‌های متحرک علاوه بر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی حالت استاتیک خود را نیز حفظ می‌نمایند. برای نوشتن قانون بیو و ساوار برای توزیع جریان خطی، سطحی و حجمی به تعاریف زیر می‌پردازیم.

۱- جریان خطی

بار خطی به چگالی λ که با سرعت $\vec{V}$ در سیمی جریان دارد (مطابق شکل) جریان زیر را تولید می کند.

$$I = \lambda V$$

زیرا قطعه ای به طول $V\Delta t$ بار به میزان $\lambda V\Delta t$ را از نقطهٔ P در زمان Δt می‌گذراند. جریان در هر نقطه در واقع برداری به صورت زیر است

$$\lambda V\vec{I} = \frac{\lambda\vec{V}\Delta t}{\Delta t} = \lambda\vec{V}$$

۲- جریان سطحی

وقتی بارها از روی سطحی می‌گذرند، آن را بر حسب چگالی جریان سطحی $\vec{K}$ به صورت زیر توصیف می‌کنیم، نواری به موازات جریان و به عرض $dl_{\perp}$ که عمود به جریان است در نظر بگیرید. هر گاه جریان در این نوار را با $\vec{dI}$ نشان دهیم به چگالی جریان سطحی برابر است با

$$\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{dl_L}$$

حال با در نظر گرفتن σ به عنوان چگالی بار سطحی (متحرک) که سرعت آن $\vec{V}$ است داریم

$$d\vec{I} = \sigma dl_{\perp}\vec{V}$$

لذا
$$\vec{K} = \frac{\sigma dl_{\perp}\vec{V}}{dl_{\perp}} = \sigma\vec{V}$$

۳- جریان حجمی

وقتی جریان در ناحیه‌ای سه بعدی توزیع شده باشد آن را بر حسب چگالی جریان حجمی $\vec{J}$ ، بیان می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود: لولهٔ کوچکی به مقطع $da_{\perp}$ به موازات جریان در نظر بگیرید. (مطابق شکل) اگر جریان این لوله را با $d\vec{I}$ نشان دهیم، چگالی جریان حجمی برابر می‌شود با

$$\vec{J} = \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}}$$

هر گاه چگالی بار حجمی متحرک را با φ و سرعت آن $\vec{V}$ بگیریم داریم

$$d\vec{I} = \rho\vec{V}da_{\perp}$$

لذا
$$\vec{J} = \frac{\rho\vec{V}da_{\perp}}{da_{\perp}} = \rho\vec{V}$$

نکته: همان‌گونه که در الکترواستاتیک $dq \square \lambda dl \square \sigma ds \square \rho dv$ بود.

در مگنتواستاتیک برای جریان‌های نقطه‌ای، خطی و سطحی و حجمی می‌توان به طور خلاصه نوشت

$$\sum_{i=1}^{n}(\ )q_i\vec{V}_i \square \int(\ )\vec{I}dl \square \int(\ )\vec{K}ds \square \int(\ )\vec{J}dv$$

خط سط حج

مگنتواستاتیک الکترواستاتیک

میدان توزیع جریان خطی $\vec{B} = K\int \frac{I\,\vec{dl}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ میدان توزیع بار خطی $\vec{E} = K\int \frac{\lambda dl\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

میدان توزیع جریان سطحی $\vec{B}_1 = \frac{\mu_{\circ} I}{4\pi R}(\hat{k})$ $\vec{B} = K\int \frac{\vec{K}ds\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ میدان توزیع بار سطحی $\vec{E} = K\int \frac{\sigma ds\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

میدان توزیع جریان حجمی $\vec{B} = K\int \frac{\vec{J}dv \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ میدان توزیع بار حجمی

$$\vec{E} = K\int \frac{\rho dv \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

نکته:

در صورتی که بارهای استاتیک با سرعت $\vec{V}$ حرکت کنند روابط فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

توزیع خطی متحرک $I\vec{dl} = \lambda v\vec{dl} \Rightarrow \vec{B} = K\int \frac{\lambda v\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'^3|}$

توزیع سطحی متحرک $\vec{K}ds = \sigma\vec{v}ds \Rightarrow \vec{B} = K\int \frac{\sigma\vec{v}ds \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'^3|}$

توزیع حجمی متحرک $\vec{J}ds = \rho\vec{v}ds \Rightarrow \vec{B} = K\int \frac{\rho\vec{v}dv \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'^3|}$

مثال ۱

سیم بسیار طویل حامل جریان I را مطابق شکل در نظر بگیرید میدان مغناطیسی را در نقطه P در فاصله ρ از آن محاسبه نمائید.

حلّ:

از طریق قانون بیو و ساوار

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \frac{I\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'^3|}$$

موقعیت نقطه میدان $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$

موقعیت المان بار $\vec{r}' = z\hat{k}$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $|\vec{r} - \vec{r}'| = (\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

المان جریان $I\vec{dl} = Idz\hat{k}$

$$\vec{B}(\rho,\varphi,\circ) = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idz\hat{k} + (\rho\hat{\rho} - z\hat{k})}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz\rho\hat{\varphi}}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \circ$$

$$= 2\frac{\mu_\circ I\rho}{4\pi}\hat{\varphi}\int_\circ^\infty \frac{dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_\circ I\rho}{2\pi}\hat{\varphi}\int_\circ^\infty \frac{z}{\rho^2\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}}\Big|_\circ^\infty$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

مشاهده می‌شود که $\vec{B}$ به دایره‌ای به شعاع ρ مماس و مقدار آن روی این دایره ثابت است. در صورتی که جهت جریان سیم معکوس شود طبق قاعدهٔ دست راست آمپر جهت میدان نیز عوض می‌شود وی مقدار $\frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}$ ثابت باقی خواهد ماند.

لذا خطوط میدان مغناطیسی حول یک سیم حامل جریان دوایری متحدالمرکز هستند مطابق شکل.

مثال ۲

میدان مغناطیسی یک صفحه بی‌نهایت حامل جریان سطحی به چگالی $\vec{K}=k\hat{i}$ را در فاصله z از صفحه به دست آورید.

مسأله فوق می‌تواند معادل تعداد بسیار زیادی سیم بسیار طویل که بطور موازی کنار هم چیده شده‌اند باشد. هر کدام از سیم‌ها حامل جریان I است اگر تعداد سیم‌ها بر واحد طول n باشد. چگالی سطحی جریان

$$K = nI$$

با استفاده از تقارن می‌توان جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را تعیین نمود.

اگر دو نوار نازک قرینه مطابق شکل روی صفحه بی‌نهایت در نظر بگیریم و آنها را ۱ و ۲ بنامیم سهم آنها از میدان مغناطیسی در نقطهٔ z به ترتیب $\overrightarrow{dB_1}$ و $\overrightarrow{dB_2}$ است. جهت میدان‌های دیفرانسیلی توسط قاعده دست راست آمپر تعیین می‌شود. مشاهده می‌شود که برآیند $\overrightarrow{dB}$ در جهت منفی محور yها است. لذا انتظار داریم که میدان مغناطیسی در کل نیز در جهت y- قرار گیرد. برای سیستم سیم‌های موازی نیز با استدلال تقارن می‌توان جهت میدان مغناطیسی را مشخص نمود.

اگر سیم‌های ۱ و ۲ قرینه باشند در نقطهٔ P میدان $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ را ایجاد می‌کنند که برآیند آنها در جهت موازی سیستم سیم‌ها و خلاف جهت مثبت محور y هاست.

حال با محاسبه میدان از طریق قانون بیو و ساوار می‌پردازیم.

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{\vec{K}ds\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

موقعیت نقطهٔ میدان $\vec{r}=z\hat{k}$

موقعیت المان بار $\vec{r}'=\rho\hat{\rho}$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $|\vec{r}-\vec{r}'|=\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}$

المان سطحی جریان $\vec{K}ds=k\rho d\rho d\varphi\hat{i}$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^\infty\frac{k\rho d\rho d\varphi\hat{i}\times\left(z\hat{k}-\rho\hat{\rho}\right)}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$=\overbrace{\frac{\mu_\circ k}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^\infty\frac{\rho d\rho d\varphi z\left(-\hat{j}\right)}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}}^{I}$$

$$=\underbrace{\frac{\mu_\circ}{4\pi}k\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^\infty\frac{\rho^2 d\rho d\varphi\hat{i}\times\left(\hat{i}\cos\varphi+\hat{j}\sin\varphi\right)}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}}_{II}$$

$$II=-\frac{\mu_\circ}{4\pi}k\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^\infty\frac{\rho^2 d\rho d\varphi\sin\hat{k}}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$=-\frac{\mu_\circ}{4\pi}k\int_\circ^{2\pi}\sin\varphi d\varphi+\int_\circ^\infty\frac{\rho^2 d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

انتگرال II صفر است زیرا $\int_\circ^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=\circ$.

$$I=\frac{\mu_\circ kz}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^\infty\frac{\rho d\rho d\varphi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}\left(-\hat{j}\right)$$

$$=\frac{\mu_\circ kz}{4\pi}\left(-\hat{j}\right)\int_\circ^{2\pi}d\varphi\int_\circ^\infty\frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_\circ kz}{4\pi}2\pi\left(-\hat{j}\right)\left[-\left(\rho^2+z^2\right)^{-1/2}\Big|_\circ^a\right.$$

$$I=\frac{\mu_\circ kz}{2}\left(\hat{j}\right)\left(\circ-\frac{1}{z}\right)=-\frac{\mu_\circ k}{z}\left(\hat{j}\right)$$

لذا $\vec{B} = -\frac{\mu_\circ k}{2}\left(\hat{j}\right)$

نکته:

میدان مغناطیسی مستقل از z است. و جهت آن همانطور که گفته شد در جهت منفی محور yهاست. این نتیجه از تشابهات موجود بین الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک قابل پیش بینی است. برای صفحه بی‌نهایت با چگالی سطحی بار σ میدان الکتریکی $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}$. لذا میدان مغناطیسی $B = \frac{\mu_\circ k}{2}$ زیرا

K چگالی جریان سطحی $\sigma \rightarrow$ چگالی سطحی بار

$$\frac{1}{\varepsilon_\circ} \rightarrow \mu_\circ$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

و جهت B از تقارن‌های موجود در مسأله همانطور که استدلال شد در جهت منفی محور yهاست پس

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ k}{2}\left(-\hat{j}\right)$$

نکته:

اگر صفحه بی‌نهایت با چگالی بار سطحی σ که یکنواخت روی آن توزیع شده است با سرعت $\vec{V}$ در جهت محور xها حرکت کند در نقطهٔ P میدان‌های الکتریکی $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\hat{k}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = \frac{\mu_\circ \sigma v}{2}\left(-\hat{j}\right)$ ایجاد خواهد شد.

مثال ۳

یک حلقهٔ حامل جریان I به شعاع R در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی این حلقه را در نقطهٔ P روی محور تقارن آن در فاصله z از سطح حلقه به دست آورید.

با استفاده از قانون بیو و ساوار

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \frac{I\,\vec{dl} \times \left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

موقعیت نقطهٔ میدان $\vec{r} = z\hat{k}$

موقعیت المان بار $\vec{r}' = R\hat{\rho}$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $\left|\vec{r} - \vec{r}'\right| = \left(z^2 + \rho^2\right)^{1/2}$

المان جریان $I\vec{dl} = IRd\varphi\hat{\varphi}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\frac{IRd\varphi\hat{\varphi}\times\left(z\hat{k}-R\hat{\rho}\right)}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{IRz}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}d\varphi\hat{\rho} + \frac{\mu_\circ IR^2}{4\pi\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\hat{k}\int_\circ^{2\pi}d\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ IR^2}{2\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

نکته ۱

میدان مغناطیسی در جهت مثبت محور zهاست. با در نظر گرفتن تقارن مسأله جهت $\vec{B}$ را می‌توانستیم از قبل تعیین کنیم. اگر المان $I\vec{dl}$ و المان قرینه $I\vec{dl}$ را در نظر بگیرید.
میدان‌های آنها روی شکل نمایش داده شده است. $d\vec{B}$عمود است به صفحه‌ای که از $I\vec{dl}$ و $\vec{r}-\vec{r}'$ می‌گذرد. لذا برآیند این دو در جهت محور zهاست. تئجه کنید که میدان یک حلقه که دارای بار چگالی خطی λ است دارای میدان الکتریکی در جهت محور هاست.

المان قرینه المان قرینه

حلقه با بار به چگالی یکنواخت λ حلقه حامل جریان I

نکته ۲

اگر حلقه با بار به چگالی یکنواخت λ با سرعت زاویهائی ثابت ωحول محورش بچرخد. در نقطهٔ P در فاصله از z از سطح حلقه میدان الکتریکی

$$\vec{E}\left(\circ,\circ,z\right) = \frac{2\pi k\lambda Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\left(\hat{k}\right)$$

و میدان مغناطیسی

$$\vec{B}\left(\circ,\circ,z\right) = \frac{\mu_\circ\lambda R^3\omega}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\left(\hat{k}\right)$$

را تولید می‌نماید. توجه شود که هر دو میدان در راستای $\hat{k}$ هستند.

نکته ۳

منحنی $B_t/B_\circ$ به طوری که $B_\circ = \frac{\mu_\circ I}{2R}$ شدت میدان در $z=\circ$ است را به صورت تابعی از z/R در شکل نمایش داده‌ایم.

نکته ۴

اگر دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu} = \mu_z \hat{k}$ را در نقطهٔ P قرار دهیم به دلیل این که میدان مغناطیسی حلقه یکنواخت نیست، به دوقطبی در این میدان نیرو وارد می‌شود که از رابطه زیر به دست می‌آید.

حلّ:

$$\cos\alpha = \frac{L_2}{\sqrt{\rho^2 + L_2^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{L_1}{\sqrt{\rho^2 + L_1^2}}$$

قانون بیو و ساوار

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \frac{I\,\vec{dl}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

موقعیت میدان $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$

موقعیت المان بار $\vec{r}' = z\hat{k}$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $|\vec{r}-\vec{r}'| = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$

المان جریان $I\,\vec{dl} = Idz\hat{k}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{-L_1}^{L_2} \frac{Idz\hat{k}\times(\rho\hat{\rho} - z\hat{k})}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_{-L_1}^{L_2} \frac{\hat{\varphi}\rho dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_\circ I\rho}{4\pi}\hat{\varphi}\int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_\circ I\rho}{4\pi}\hat{\varphi}\frac{z}{\rho^2(\rho^2+z^2)^{1/2}}\Big|_{-L_1}^{L_2}$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\hat{\varphi}\left(\frac{L_2}{\left(\rho^2+L_2^2\right)^{1/2}}+\frac{L_1}{\left(\rho^2+L_1^2\right)^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)\hat{\varphi}$$

حالت‌های خاص

(i) اگر $\alpha=\beta$ باشد یعنی نقطه روی عمود منصف میله قرار داشته به طوری که طول میله L باشد

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\times 2\hat{\varphi}\times\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{L/2}{\sqrt{\rho^2+L^2/4}}=\frac{L}{\sqrt{4\rho^2+L^2}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{2\pi\rho}\frac{1}{\sqrt{4\rho^2+L^2}}\hat{\varphi}$$

(ii) برای سیم بسیار طویل یعنی در حدّ $L\to\infty$ یعنی وقتی که $(\alpha,\beta)=(\circ,\circ)$ میدان مغناطیسی در فاصله ρ

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\times 2\hat{\varphi}=\frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

مثال ۵

یک سیم حامل جریان به طول L مطابق شکل در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی آن را در یک نقطه دلخواه P(x,y,t) به دست آورید.

حلّ:

قانون بیو و ساوار

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{I\,\vec{dl}\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

موقعیت میدان $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

موقعیت المان بار $\vec{r}'=z'\hat{k}$

فاصله المان بار نسبت به نقطهٔ میدان $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|=\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2}$

المان جریان $I\,\vec{dl}=Idz'\hat{k}$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{Idz'\hat{k}\times\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}-z'\hat{k}\right)}{\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{xdz'\hat{j}}{\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}+\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'y\left(-\hat{i}\right)}{\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$=-\frac{\mu_\circ Ix}{4\pi}\hat{j}\frac{z-z'}{\left(x^2+y^2\right)\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2}}\Bigg|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$+\frac{\mu_\circ Iy}{4\pi}\hat{i}\frac{z-z'}{\left(x^2+y^2\right)\left[x^2+y^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2}}\Bigg|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$\vec{B}=-\frac{\mu_\circ Ix}{4\pi}\left(\hat{j}\right)\left[\frac{z-L/2}{\left[x^2+y^2+\left(z-L/z\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{z+L/2}{\left[x^2+y^2+\left(z+L/z\right)^2\right]^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{\mu_\circ Iy}{4\pi}\left(\hat{i}\right)\left[\frac{z-L/2}{\left[x^2+y^2+\left(z-L/z\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{z+L/2}{\left[x^2+y^2+\left(z-L/z\right)^2\right]^{1/2}}\right]$$

$$=\frac{\mu_\circ I}{4\pi\left(x^2+y^2\right)}\left\{-\hat{j}x\left[\frac{z-L/2}{\left[x^2+y^2+\left(z-L/z\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{z+L/2}{\left[x^2+y^2+\left(z+L/z\right)^2\right]^{1/2}}\right]\right\}$$

$$+\hat{i}y\left[\frac{z-L/2}{\left[x^2+y^2+\left(z-L/2\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{z+L/2}{\left[x^2+y^2+\left(z-L/2\right)^2\right]^{1/2}}\right]$$

حال حالت‌های حدّی زیر را در نظر می‌گیریم.

(i) اگر نقطهٔ میدان $(x,y,t)=(\circ,\circ,y)$

$$\vec{B}(\circ,y,\circ)=\hat{i}y\left[-\frac{L/2}{\left[y^2+\left(-L/2\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{L/2}{\left[y^2+\left(L/2\right)^2\right]^{1/2}}\right]\frac{\mu_\circ I}{4\pi y^2}$$

$$=\frac{\mu\circ I}{4\pi y}\left[-\frac{L/2}{\left[y^2+\left(-L/2\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{L/2}{\left[y^2+\left(L/2\right)^2\right]^{1/2}}\right]\hat{i}$$

$$\vec{B}(\circ,y,\circ)=-\frac{\mu\circ I}{4\pi y}\frac{L/2}{\sqrt{y^2+\left(-L/2\right)^2}}\hat{i}$$

$$=-\frac{\mu\circ I}{2\pi y}\cos\theta\hat{i}$$

(ii) طولی بی نهایت یعنی $L>>x,y,z$

که نتیجه آن سیم بی‌نهایت سیم حل جریان است.

$$\vec{B}=-\frac{\mu_\circ I}{2\pi y}\hat{i}$$

حلّ این مسأله در دستگاه مختصات استوانه‌ای نیز امکان‌پذیر است.

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{Idz'\hat{k}\times\left(\rho\hat{\rho}+z\hat{k}-z'\hat{k}\right)}{\left[\rho^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I\rho}{4\pi}\hat{\varphi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'}{\left[\rho^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_\circ I \rho}{4\pi}\hat{\varphi}\frac{z-z'}{\rho^2\left[\rho^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2}}\Bigg|_{-L/2}^{L/2}$$

$$= -\frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\hat{\varphi}\left\{\frac{z-L/2}{\left[\rho^2+\left(z-L/2\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{z+L/2}{\left[\rho^2+\left(z-L/2\right)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

$$L >> x, y, z$$

$$\left(\rho^2+z^2+L^2/4-zL\right)^{-1/2} = L^{-1}\left(\frac{\rho^2}{L^2}+\frac{z^2}{L^2}+\frac{1}{4}-z\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{2}{L}\left(1+\frac{8z}{L}\right)^{-1/2} = \frac{2}{L}\left(1-\frac{4z}{L}\right)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\hat{\varphi}\left\{\frac{2}{L}\left(z-\frac{L}{2}\right)\left(1+\frac{4z}{2}\right)-\frac{2}{L}\left(z+\frac{L}{2}\right)\left(1-\frac{4z}{L}\right)\right\}$$

$$\underbrace{\frac{2}{L}\left(z-\frac{L}{2}+\frac{4z^2}{2}-2z\right)-\frac{2}{L}\left(z-\frac{4z^2}{L}+\frac{L}{2}-2z\right)}_{2\frac{z}{L}-1+\frac{8z^2}{2^2}-\frac{z}{L}-\frac{2z}{L}+\frac{8z^2}{L^2}-1+\frac{z}{L}}$$

$$\approx -2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

مثال ۶

یک سیم حامل جریان I به طول L در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی را در فاصله ρ از یک سر آن به دست آورید (مطابق شکل)

حلّ:

از قانون بیو و ساوار

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{I\,\vec{dl}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

موقعیت میدان $\vec{r}=\rho\hat{\rho}$

موقعیت المان بار $\vec{r}'=z\hat{k}$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $|\vec{r}-\vec{r}'|=\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}$

المان جریان $I\vec{dl}=Idz\hat{k}$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_\circ^L\frac{Idz\hat{k}\times\left(\rho\hat{\rho}-z\hat{k}\right)}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I\rho}{4\pi}(\hat{\varphi})\int_\circ^L\frac{dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_\circ I\rho}{4\pi}\frac{z}{\rho^2\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}\Big|_\circ^L$$

$$=\frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\frac{L}{\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}}\hat{\varphi}$$

در حالت خاص $L\to\infty$

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}L\left(\rho^2+L^2\right)^{-1/2}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\frac{L}{L}\left(1+\frac{\rho^2}{L^2}\right)^{-1/2}\varphi$$

$$\cong\frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\hat{\varphi}$$

این رابطه یک ضریب $\frac{1}{2}$ با رابطهٔ مثال ۵ در حدّ $L\to\infty$ یعنی $\frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$ تفاوت دارد دلیل این اختلاف چیست؟

مثال ۷

میدان مغناطیسی در مرکز یک حلقهٔ مستطیل شکل به ابعاد $W\times L$ را به دست آورید.

حلّ:

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4$$

طبق قاعده دست راست آمپر میدان کل که از جمع میادین هر یک از اضلاع مستطیل به دست می‌آید به طرف خارج صفحه است.

با استفاده از نتایج مثال ۴ همین فصل میدان یک سیم به طول L روی عمود منصف آن

$$B=\frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\frac{1}{\left(4\rho^2+L^2\right)^{1/2}}$$

که در آن L طول سیم و ρ فاصله نقطه از سیم روی عمود منصف سیم

$$B_1=B_3=\frac{\mu_\circ I}{2\pi\, {w}/{2}}\frac{L}{\left(L^2+4\frac{w^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{\mu_\circ I}{\pi w}\frac{L}{\left(L^2+w^2\right)^{1/2}}$$

$$B_2=B_4=\frac{\mu_\circ I}{2\pi\, {L}/{2}}\frac{w}{\left(w^2+4\,{L^2}/{4}\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{\mu_\circ I}{\pi L}\frac{w}{\left(w^2+L^2\right)^{1/2}}$$

$$B=2B_1+2B_2=\frac{2\mu_\circ I}{\pi w}\frac{L}{\left(L^2+w^2\right)^{1/2}}$$

$$+\frac{2\mu_\circ I}{\pi L}\frac{w}{\left(L^2+w^2\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{2\mu_\circ I}{\pi}\frac{L^2+w^2}{Lw\left(L^2+w^2\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{2\mu_\circ I}{\pi}\frac{\left(L^2+w^2\right)^{1/2}}{Lw}$$

مثال ۸

یک حلقۀ مربعی به اضلاع a حامل جریان I است. با بکا بردن نتایج مثال ۴ همین فصل میدان مغناطیسی را در نقطه‌ائی روی محور حلقه و در فاصله z از مرکز آن به دست آورید.

میدان سیم ضلع ۱ مطابق شکل از رابطه مثال ۹

$$B=\frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\frac{L}{\left(4\rho^2+L^2\right)^{1/2}}$$

$$B_1 = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\left(z^2 + {a^2}/{4}\right)^{1/2}} \frac{a}{\left[a^2 + 4\left(z^2 + {a^2}/{4}\right)\right]^{1/2}}$$

برآیند میدان‌های سیم یک و سه در جهت محور z ها است، یا به عبارت دیگر مؤلفهٔ افقی میدان B_1 مؤلفهٔ افقی میدان B_3 را حذف و مؤلفه‌های عمودی آنها با یکدیگر جمع می‌شوند. به همین طریق مؤلفه‌های عمودی میادین دو و چهار با هم جمع و مؤلفه‌های افقی آنها یکدیگر را خنثی خواهند کرد. لذا میدان کل در نقطهٔ P برابر است با

$$B = 4B_1 \cos\gamma$$

که در آن γ زاویهٔ بین $\vec{B}_1$ و محور zهاست.

$$\cos\gamma = \frac{a}{2\left(z^2 + {a^2}/{4}\right)^{1/2}}$$

$$B = 4\frac{\mu_\circ I}{2\pi\left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{1/2}} \frac{a}{\left[a^2 + \left(z^2 + {a^2}/{4}\right)\right]^{1/2}} \times \frac{a}{2\left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$B = \frac{4 \times \mu_\circ I}{2\pi\left(4z^2 + a^2\right)^{1/2}} \frac{a}{\left(2a^2 + 4z^2\right)^{1/2}} \times \frac{2a}{2\left(4z^2 + a^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{4\mu_\circ I a^2}{\pi\left(4z^2 + a^2\right)\left(4z^2 + 2a^2\right)^{1/2}}$$

مثال ۹

میدان مغناطیسی سیم نازک مطابق شکل را که از آن جریان I می‌گذرد را در مبدأ مختصات محاسبه نمائید.

حلّ:

با استفاده از قاعده بیو و ساوار

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \frac{I\,\vec{dl} \times \left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

از شکل پیداست که میدان‌های مغناطیسی قسمت‌های ۱ و ۳ از نقطهٔ O با هم جمع می‌شوند و به طرف داخل صفحه هستند. میدان مغناطیسی قسمت ۲ یعنی نیم دایره در نقطهٔ O به طرف خارج صفحه است.

برای حلّ این مسأله می‌توانیم از نتایج مثال ۶ استفاده نمائید. در حدّ

$$L \to \infty$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\left(-\hat{k}\right)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}\left(-\hat{k}\right)$$

برای محاسبه میدان نیم حلقه از قانون بیو و ساوار استفاده می‌شود.

موقعیت میدان $\vec{r} = \circ$

موقعیت المان بار $\vec{r}' = R\hat{\rho}$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $\left|\vec{r} - \vec{r}'\right| = R$

المان جریان $I\,\vec{dl} = IRd\varphi\hat{\varphi}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{I\pi d\varphi\hat{\varphi}\times\left(\circ - R\hat{\rho}\right)}{R^3}$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\left(+\hat{k}\right)\frac{1}{R}\int_{\pi/2}^{-\pi/2} d\varphi$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{4\pi R}\left(-\hat{k}\right)\times\pi = \frac{\mu_\circ}{4R}\left(-\hat{k}\right)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{2\pi R}\left(-\hat{k}\right) + \frac{\mu_\circ I}{4R}\left(-\hat{k}\right)$$

برای میدان قسمت‌های ۱ و ۳ می‌توانستیم مستقیماً از قانون بیو و ساوار نیز استفاده نمائیم.

موقعیت میدان $\vec{r} = \circ$

موقعیت المان بار $\vec{r}' = \hat{i}x + R\hat{j}$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $\left|\vec{r} - \vec{r}'\right| = \left(R^2 + x^2\right)^{1/2}$

المان جریان $I\,\vec{dl} = Idx\hat{i}$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{-\infty}^{\circ}\frac{Idx\hat{i}\times\left[\circ - qx\hat{i} - R\hat{j}\right]}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\left(\hat{k}\right)\frac{x}{R^2\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}\Big|_{-\infty}^{\circ}$$

$$= -\frac{\mu_\circ IR}{4\pi R^2}\hat{k}\frac{x}{R^2\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}\Big|_{-\infty}^{\circ}$$

$$= -\frac{\mu_\circ IR}{4\pi R^2}\hat{k}\left[\circ - (-1)\right]$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{4\pi R}\left(\hat{k}\right)$$

که با نتیجه مثال ۶ در توافق است. به همین طریق می‌توان میدان قسمت ۳ سیم را به دست آورد.