www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۱

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

۱- مقدمه ریاضی

هدف ما در درس فیزیک پایه II استخراج معادلات ماکسول به فرم انتگرالی‌ایست. برای درک این معادلات نیاز به ابزار ریاضی داریم که در این قسمت به آنها خواهیم پرداخت. فرم انتگرالی معادلات ماکسول روابطی بین شار و گردش میادین برداری هستند. لذا کار خود را با توصیفی از میادین اسکالر و برداری آغاز می‌نمائیم.

۱-۱ میادین اسکالر و میادین برداری

میدان کمیتی‌ایست که به موقعیت در فضا بیتگی دارد. ساده‌ترین میدان در فیزیک میدان اسکالر است. میدان اسکالر با یک عدد در هر نقطه از فضا مشخص می‌شود. البته در حالت کلی می‌تواد تابعی از زمان باشد. به عنوان مثال برای میادین اسکالر می‌توان دمای یک جسم $T(\vec{r},t)$، چگالی حجمی $\rho(\vec{r},t)$ و یا پتانسیل الکترواستاتیکی $\varphi(\vec{r},t)$ را در نظر گرفت. $\vec{r}$ بردار موقعیت است که به صورت $\vec{r}=(x,y,z)$ تعریف می شود و t زمان است.

میدان برداری، این نوع میدان به هر نقطه از فضا یک بردار نسبت می دهد. بطور مثال حرکت یک سیال با سرعت $\vec{v}(\vec{r},t)$، میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ائی $\vec{E}(\vec{r},t)$ و یا میدان مغناطیسی یک سیم حامل جریان $\vec{B}(\vec{r},t)$ را می توان در نظر گرفت.

برای تجسم میادین برداری می‌توان از بردارهائی در هر نقطه استفاده نمود. بطور مثال حرکت یک سیال را می‌توان به صورت یا می‌توان با خطوط مماس بر بردارهای فوق میدان برداری را معرفی نمود به طوری که چگالی خطوط بر واحد سطح متناسب است با شدت میدان برداری. میدان در طرف چپ قوی‌تر از میدان در طرف راست شکل است.

میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ائی

میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم حامل جریان I

۱-۲ خواص میادین برداری

اگر میدان برداری را به طور کلی با $\vec{F}(\vec{r},t)$ نمایش داده شود، در حالت استاتیک به صورت $\vec{F}(\vec{r})$ فقط تابعی از بردار موقعیت ست. دو کمیت را می‌توان به هر میدان برداری نسبت داد.

۱- شار (Flex)

۲- گردش (Circulation)

۱-۲-۱ شار (Flex)

برای درک مفهوم شار میدان برداری سرعت یک سیال را در نظر بگیرید. فرض کنید که این میدان یکنواخت و مستقل از زمان است.

می‌خواهیم مقدار خالص سیالی که از سطح فرضی s بر واحد زمان می‌گذرد را به دست آوریم. به عبارت دیگر شار سرعت از سطح s چه مقدار است؟

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

در دستگاه SI واحد $\varphi_{\vec{v}}$ برابر است با متر مکعب بر ثانیه.

فرضیات در این مسأله عبارتند از:

a- سطح s مسطح است.
b- میدان برداری $\vec{v}$ یکنواخت و مستقل از زمان است.
c- بردار $\vec{v}$ بر سطح s عمود است.

برای اینکه بتوان مسأله را به حالت کلی‌تر درآورد یعنی شار میدان برداری $\vec{F}$ از هر سطحی بدون هیچیک از فرضیات محدود کنندهٔ فوق باید ابتدا سطح را به صورت کمیت برداری درآوریم. همانطور که در فیزیک I مشاهده نمودیم مقدار حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که این دو بردار اضلاع مجاور آن هستند یعنی $ABSin\theta$ از طرفی حاصلضرب خارجی دو بردار یک بردار است که ما آن را $\vec{C}$ می‌نامیم و جهت آن از قاعدهٔ دست راست به دست می‌آید و عمود است به صفحه‌ای که از دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ساخته می‌شود.

وقتی انگشتان دست راست خود را در جهت بردار $\vec{A}$ قرار می‌دهید و از طرف زاویهٔ بین دو بردار یعنی θ به طرف $\vec{B}$ می‌آورید، شست دست راست جهت بردار $\vec{C}$ را می‌دهد. بردار یکه مود بر سطح را با $\hat{n}$ نشان می‌دهیم و طبق تعریف

$$\hat{n}=\frac{\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|}$$

لذا این مثال می‌تواند انگیزه‌ای برای این باشد که هر سطحی را به صورت بردار درآورد

$$\vec{s}=s\hat{n}$$

که در آن s برابر مساحت سطح مسطح و $\hat{n}$ بردار یکهٔ عمود به سطح. شار سرعت از سطح s را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varphi_{\vec{v}}=\vec{s}.\vec{v}=s\hat{n}.\vec{v}=sv$$

گر صفحه $\vec{s}$ را مطابق شکل به اندازهٔ زاویه γ بچرخانیم، صفحه $\vec{s}$ به صفحه $\vec{s}'$ تبدیل می‌شود. بردار یکه عمود به سطح $\vec{s}'$ یعنی $\hat{n}'$ با $\hat{n}$ زاویهٔ γ می‌سازد. شار گذرنده از صفحه $\vec{s}'$ برابر است با

$$\varphi'_{\vec{v}}=\vec{v}.\vec{s}'=\vec{v}.\hat{n}'s'=v\hat{n}.\hat{n}'s'=vCos\gamma s' \quad (۱-۱)$$

رابطهٔ (۱-۱) را می‌توان به دو طریق تفسیر نمود. (۱) شار سرعت $\vec{v}$ از سطح $\vec{s}'$ برابر است با مؤلفه عمودی سرعت $\vec{v}$ روی سطح s' ($vCos\gamma$) ضربدر مساحت سطح s' (۲) شار سرعت $\vec{v}$ از سطح s' برابر است با مقدار سرعت v ضربدر تصویر سطح s' روی سطح s یعنی($s'Cos\gamma$).

بهر حال هر دو متغیر به یک نتیجه منجر می‌شوند. یعنی

$$\varphi'_{\vec{v}}=vCos\gamma\frac{s}{Cos\gamma}=vs=\varphi_{\vec{v}}$$

یعنی شار سرعت $\vec{v}$ از سطح $\vec{s}$ و $\vec{s}'$ برابرند.

حال اگر صفحه $\vec{s}$ به صورت یک سطح منحنی درآید. شار گذرنده از این صفحه چگونه محاسبه خواهد شد؟

از آنجا که به سطح s نمی‌توان یک بردار یکهٔ منحصر به فرد نسبت داد لذا مجبور به تعریف المان سطح $\overrightarrow{ds}$ هستیم و آن سطحی‌ایست بسیار کوچک به طوری که در همسایگی یک نقطه روی سطح بتوان آن را مسطح فرض نمود و بتوان آن را با یک بردار یکهٔ $\hat{n}$ مشخص نمود

$$\overrightarrow{ds} = \hat{n}ds$$

طبق تعریف، شار سرعت از $\overrightarrow{ds}$ برابر است با $d\varphi_{\vec{v}}$ که برابر است با

$$d\varphi_{\vec{v}} = \vec{v}.\hat{n}ds$$

شار کل از سطح $\vec{s}$ برابر است با

$$\varphi_{\vec{v}} = \int_s \vec{v}.\hat{n}ds \qquad (۱-۲)$$

سطح

انتگرال روی سطح s گرفته می شود.

۲-۲-۱ شار از سطوح باز و بسته:

a- شار سطوح بسته، اگر سطح s یک سطح بسته باشد یعنی دارای حجم باشد جهت مثبت $\hat{n}$ همیشه به طرف خارج حجم خواهد بود.

مشاهده می‌شود که جهت $\hat{n}$ به موقعیت ds روی سطح بستگی دارد. شار گذرنده از چنین سطحی را با

$$\oint \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \oint_s \vec{F}.\hat{n}ds = \oint_s F_{\perp}ds$$

نمایش می‌دهند. دایرهٔ روی علامت انترال یعنی انتگرل روی یک سطح بسته گرفته می‌شود. $F_{\perp}$ مؤلفهٔ عمودی بردار $\vec{F}$ روی سطح بسته $\vec{F}$ می‌باشد.

b- شار سطوح باز

اگر s یک سطح باز باشد مانند یک دیسک جهت مثبت $\hat{n}$ بستگی به جهتی دارد که پیرامون این سطح پیموده می‌شود. با استفاده از قاعدهٔ دست راست اگر انگشتان دست راست در جهت چرخیدن حول پیرامون سطح باشد شست دست راست جهت مثبت $\hat{n}$ را بما می‌دهد.

شار گذرنده از چنین سطوحی برابر است با:

$$\int \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int F.\hat{n}ds$$

پس بطور کلی شار گذرنده از سطح $\vec{s}$ به هر شکلی که باشد در میدان برداری دلخواه $\vec{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varphi_{\vec F} = \int_s \vec F.\overrightarrow{ds} = \int_s \vec F.\hat n ds = \int_s F_\perp ds$$

سطح سطح سطح

$F_\perp$ مؤلفهٔ عمودی $\vec F$ بر سطح s در هر نقطه می‌باشد و ds المان سطح در آن نقطه است. در اینجا می‌توانیم شار میدان الکتریکی و شار میدان مغناطیسی را تعریف کنیم. مفهوم شار در اینجا به شکل انتزاعی از مفهوم شار سرعت استخراج شده است. به عبارت دیگر در حالت شار الکتریکی و شار مغناطیسی شار سرعت جرمی منتقل نمی‌شود ولی از لحاظ مفهومی دارای شرایط یکسانی با شار سرعت می‌باشد.

$$\varphi_{\vec E} = \int_s \vec E.\overrightarrow{ds} = \int_s \vec E.\overrightarrow{\hat n ds} = \int_s E_\perp ds \qquad (۱-۳)$$

سطح سطح سطح

$$\varphi_{B} = \int_s \vec B.\overrightarrow{ds} = \int_s \vec B.\overrightarrow{\hat n ds} = \int_s B_\perp ds \qquad (۱-۴)$$

سطح سطح سطح

شار الکتریکی و $\varphi_{\vec B}$ شار مغناطیسی گذرنده از سطح s می‌باشند.

۱-۲-۳ این مسأله برای درک مفهوم شار طراحی شده است.

الف- آب با سرعت $\vec v$ از لوله‌ائی به ابعاد a و b مطابق شکل در جریان است. آهنگ جمع شدن در سطل φ = حجم بر ثانیه چه مقدار است؟

ب- اگر سطح مقطع لوله را مطابق شکل قطع نمائیم مسلماً در φ تغییری حاصل نخواهد شد φ را بر حسب a و b' و زاویهٔ θ نمائید.

ج- فرمول φ را به فرم جمع جورتری بر حسب بردار سطح $\vec s$ و سرعت $\vec v$ نیز می‌توان نوشت

د- چه اتفاقی خواهد افتاد اگر سرعت (از لحاظ مقدار یا جهت) نقطه به نقطه تغییر کند و انتهای لوله نیز مطابق شکل به شکل دلخواهی برش داده شود. در این حالت کلی φ چگونه محاسبه خواهد شد.

۱-۲-۴ گردش (Circulation)

گردش میدان برداری $\vec F$ حول هر منحنی بستهٔ c برابرا ست با

$$\Gamma = \oint_c \vec F.\overrightarrow{dl} = \oint_c F_\parallel dl$$

علامت $\oint$ یعنی انتگرال روی منحنی بسته c، $\overrightarrow{dl}$ المان طول منحنی c و $F_\parallel$ مؤلفهٔ مماسی $\vec F$ روی منحنی c در هر نقطه می‌باشد.

۱-۳ فرم انتگرالی معادلات ماکسول

بطور کلی قوانین الکترومغناطیسی روابطی بین شار و گردش میادین الکتریکی و مغناطیسی هستند.

قانون شمارهٔ ۱:

$$\text{شار گذرنده } \vec{E} \text{ از هر سطح بسته} = \frac{\text{بار خالص}}{\varepsilon_\circ} \quad (۱\text{-}۵)$$

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

در رابطه فوق q بار خالص داخل سطح و $\varepsilon_\circ$ یک مقدار ثابت . $\varepsilon_\circ$ ضریب گذردهی خلأ نام دارد. بر حسب یکاهای SI، که در آن نیز و بر حسب نیوتن (N)، فاصله بر حسب (m) و بار بر حسب کولن (C) است.

$$\varepsilon_\circ = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$$

قانون شمارهٔ ۲:

برای هر سطح باز s با منحنی لبه C

$$\text{گردش } \vec{E} \text{ حول لبه C} = \frac{d}{dt} (\text{شار } \vec{B} \text{ گذرنده از s}) \quad (۱\text{-}۶)$$

$$\oint_c \vec{E}.\vec{dl} = \frac{d}{dt}\int_s \vec{B}.\vec{ds}$$

می‌توان قوانین الکترومغناطیس را با دو قانون مشابه برای میدان مغناطیسی $\vec{B}$ کامل کرد.

قانون شمارهٔ ۳:

$$\text{شار } \vec{B} \text{ گذرنده از هر سطح بسته} = \circ \quad (۱\text{-}۷)$$

$$\oint \vec{B}.\vec{ds} = \circ$$

قانون شمارهٔ ۴:

برای هر سطح s با منحنی لبه C داریم

(گردش $\vec{B}$ حول C) = (شار $\vec{E}$ از سطح s) $\varepsilon_\circ \frac{d}{dt}$ + (شار جریان الکتریکی از سطح s). $\mu_\circ$ (۱-۸)

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ \left(I + \varepsilon_\circ \frac{d}{dt} \varphi_{\vec{E}} \right)$$

در رابطهٔ فوق $\mu_\circ$ یک عدد ثابت است که به تراوایی فضای آزاد معروف است. در یکاهای SI

$$\mu_\circ = 4\pi \times 10^{-7}\ N/A^2$$

نکته ۱:

معادلات (۱-۵) الی (۱-۸) همراه با معادلهٔ نیروی وارد به یک ذره در میادین الکتریکی و مغناطیسی

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

به قوانین الکترودینامیک معروفند. $\vec{F}$ نیروی فورتس نامیده می‌شود.

نکته۲:

در حالت استاتیک وقتی میادین مستقل از زمان هستند چهار معادله فوق به دو مجموعه معادله مجزا از هم برای میدان الکتریکی و مغناطیسی تبدیل می‌شوند.

معادلات الکترواستاتیک

شار $\vec{E}$ گذرنده از هر سطح بسته= $\dfrac{\text{بار خالص داخل سطح}S}{\varepsilon_\circ}$ $\quad \oint \vec{E}.\vec{ds} = \dfrac{q}{\varepsilon_\circ}$

گردش $\vec{E}$ حول C = ∘ $\quad \oint_c \vec{E}.\vec{dl} = \circ$

معادلات مگنتواستاتیک

شار $\vec{B}$ از هر سطح بسته = ∘ $\quad \oint \vec{B}.\vec{ds} = \circ$

گردش $\vec{B}$ حول C= (شار جریان الکتریکی از سطح s) $\hat{\varphi}$ $\quad \oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I$

۱-۴ مشتقات میادین – گرادیان

قبل از پرداختن به مطلب فوق چند رابطه از جبر بردارها را صرفاً برای یادآوری متذکر می‌شویم.

$\vec{A}.\vec{B} =$ اسکالر $= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\vec{A} \times \vec{B} =$ بردار $= \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_z = A_x B_y - A_y B_x$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = \circ$$

$$\vec{A}.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \circ$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right).\vec{C}$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

قاعدهٔ bac-cab

بردار یکه در راستای $\vec{A}$ $\qquad \frac{\vec{A}}{A}=\hat{n}$

دو رابطه از ریاضیات

$$\Delta f\left(x,y,z\right)=\tfrac{\partial f}{\partial z}\Delta x+\tfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\tfrac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

برای به دست آوردن اطلاعات از داخل میادین نیاز به ابزاری هست که در این بخش، بتدریج انها با درا ختیار شما قرار خواهیم داد.

۱-۴-۱ گرادیان:

میدان اسکالر دما را در نظر بگیرید می‌خواهیم اختلاف دما بین دو نقطهٔ مجاور را به دست آوریم.

$$dT=T\left(x+dx,y+dy,z+dz\right)-T\left(x,y,z\right)$$
$$=T\left(x,y,z\right)+\frac{\partial T}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial y}dy+\frac{\partial T}{\partial z}dz+\ldots$$
$$-T\left(x,y,z\right)$$

با صرف نظر کردن از دیفرانسیل‌های مرتبه دو رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$dT=\frac{\partial T}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial y}dy+\frac{\partial T}{\partial z}dz$$
$$=\left(\hat{i}\frac{\partial T}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial T}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right).\left(\hat{i}dx+\hat{j}dy+\hat{k}dz\right)$$

اگر گرادیان T را به صورت زیر تعریف نمائیم

$$\vec{\nabla}T=\hat{i}\frac{\partial T}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial T}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial T}{\partial z}$$

رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید

$$dT=\vec{\nabla}T.d\vec{r}$$

یعنی اختلاف دما بین دو نقطهٔ مجاور که توسط بردار جابجائی $d\vec{r}$ به یکدیگر وصل می‌شوند برابر است با ضرب داخلی گرادیان T در $d\vec{r}$ از انجا که ضرب داخلی دو بردار یک اسکالر است. می‌توانیم نتیجه بگیریم که چون dT یک اسکالر است و $d\vec{r}$ یک بردار لذا گرادیان T $\left(\vec{\nabla}T\right)$ طبق قاعدهٔ Quotient یک بردار است.

رابطه فوق نه تنها برای میدان اسکالر دما T درست است بلکه برای هر میدان اسکالر دیگری مانند $\varphi(x,y,z)$ یا $\varphi(\vec{r})$ نیز صحیح است یعنی

$$d\varphi(\vec{r})=\vec{\nabla}\varphi.d\vec{r}$$

۱-۴-۲ نکاتی درباره گرادیان

۱- از رابطهٔ $d\varphi=\vec{\nabla}\varphi.d\vec{r}=\left|\vec{\nabla}\varphi\right|\left|d\vec{r}\right|Cos\theta$

می‌تواند نتیجه گرفت که تغییر در تابع اسکالرφماکزیمم خواهد بود اگر $d\vec{r}$ با $\vec{\nabla}\varphi$ موازی باشد ($Cos\theta=-1$). این بدان معنی است که $\vec{\nabla}\varphi$برداریست که در آن جهت آهنگ تغییر φ ماکزیمم است.

۲- اگر میدان $\varphi(\vec{r})=c$ باشد یعنی دو نقطه را روی یک سطح ثابت در نظر بگیریم

$$d\varphi=\left(\vec{\nabla}\varphi\right).d\vec{r}=\circ$$

لذا نتیجه می‌گیریم که گرادیان به سطح ثابت = φ عمود است.

۱-۵ عملگر (Operator) $\vec{\nabla}$ و عملیات با آن

با توجه به تعریف گرادیان اپراتوری مانند $\vec{\nabla}$به شکل زیر قابل استخراج است

$$\vec{\nabla}=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

برخلاف جبر معمولی برای این عملگر خاصیت جابجائی وجود ندارد یعنی $\varphi\vec{\nabla}\neq\vec{\nabla}\varphi$

زیرا $\varphi\vec{\nabla}$ هنوز یک عملگر است، در صورتی که $\vec{\nabla}\varphi$هنوز یک عملگر است، در صورتی که $\vec{\nabla}\varphi$همانطور که گفته شد گرادیان میدان اسکالر φ است.

۱-۵-۱ دیورژانس

از آنجا که $\vec{\nabla}$یک عملگر برداریست لذا می‌توان آن را از طریق داخلی (اسکالر) با یک بردار دیگر ترکیب نمود.

$\vec{\nabla}.\vec{F}$ یا $\vec{F}.\vec{\nabla}$

$\vec{F}.\vec{\nabla}$ دارای معنی خاصی نیست در صورتی که $\vec{\nabla}.\vec{F}$ یک میدان اسکالر است.

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{i}F_x+\hat{j}F_y+\hat{k}F_z\right)$$

$$=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

این کمیت اسکالر یعنی $\vec{\nabla}.\vec{F}$ در فیزیک بسیار مفید است و به آن دیورژانس گفته می‌شود. گاهی اوقات ان را به صورت $div\vec{F}$ نمایش می‌دهند. همانطور که برای $\vec{\nabla}T$ یک مفهوم به دست آوردیم، برای $\vec{\nabla}.\vec{F}$ نیز می‌توانیم کاری مشابه انجام دهیم. در حقیقت عملگر برداری $\vec{\nabla}$ با میدان برداری $\vec{F}$ از طریق ضرب داخلی ترکیب شده است و با یک میدان اسکالر داده است. مفهوم این میدان چه می‌تواند باشد. این میدان با کمیت شار که قبلاً برای هر میدان برداری تعریف شد در ارتباط است. دیورژانس یک میدان برداری در هر نقطه برابر است با شار گذرنده بر واحد حجم از هر سطح بسته Δs را در نظر می‌گیریم که حجم آن برابر است با Δv

$$div\vec{F} = \lim_{\Delta v \to \circ} \frac{\oint_{\Delta s} \vec{F}.\vec{ds}}{\Delta v}$$

در مکانیک سیالات اگر دیورژانس میدان سرعت $\vec{v}$ مخالف صفر باشد بدین مفهوم است که در نقطهٔ مفروض ما دارای چشمه یا چاه هستیم. در الکترواستاتیک اگر دیورژانس میدان الکتریکی در یک نقطه مخالف صفر باشد بدین معنی است که ما در نقطه دارای بار الکتریکی مثبت یا منفی هستیم. در حقیقت دیورژانس از وجود منبع تولید کنندهٔ میدان الکتریکی $\vec{E}$، یعنی بار در نقاط مختلف فضا ما را با خبر می‌سازد.

۲-۵-۱ کرل

اگر عملگر برداری $\vec{\nabla}$ با میدان برداری $\vec{F}$ از طریق ضرب خارجی (برداری) ترکیب شود یعنی

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

همانطور که می‌توان حدس زد کرل با مفهوم گردش در ارتباط است.

بدین مفهوم که اگر نقطهٔ P را روی سطح Δs که بردار یکهٔ عمود به آن برابر $\hat{n}$ است را در نظر بگیریم را به سطح Δs منحنی c باشد، جهت چرخش حول منحنی c روی شکل نمایش داده شده است. مؤلفهٔ کرل $\vec{F}$ در راستای بردار یکهٔ $\hat{n}$ به طریق زیر تعریف می‌شود

$$Curl\vec{F}.\hat{n} = \lim_{\Delta s \to \circ} \frac{\oint_c \vec{F}.\vec{dl}}{\Delta s}$$

در حقیقت تصویر کرل $\vec{F}$ روی $\hat{n}$ برابر است با گردش F حول منحنی بسته c تقسیم بر Δs وقتی Δs به سمت صفر میل می‌کند. بطور مثال اگر کرل میدان سرعت یک سیال در یک نقطه مخالف صفر باشد یعنی سیال در آن نقطه دارای چرخش است. در مگنتواستاتیک اگر کرل میدان مغناطیسی در یک نقطه مخالف صفر باشد در آن نقطه جریان موجود است.

۱-۶ فرم دیفرانسیلی معادلات ماکسول

با استفاده از مفاهیم دیورژانس و کرل می‌توان معادلات ماکسول به شکل انتگرالی را به شکل دیفرانسیلی درآورد.

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \circ$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_\circ \left(\vec{J} + \varepsilon_\circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

در معادلات فوق ρ چگالی حجمی بار الکتریکی. $\vec{J}$ چگالی جریان الکتریکی. با کمیت‌های ρ و $\vec{J}$ در بخش‌های بعدی به دقت آشنا خواهیم شد.

۱-۷ سیستم مختصات متعامد

قوانین الکترومغناطیس نسبت به سیستم مختصات ناوردا هستند. لذا برای حلّ مسائل رو روابط استخراج شده از این قوانین را باید در سیستم مختصه مناسب که برای هندسه مسأله مناسب است بیان نمود. بطور مثال برای تعیین میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا، حداقل نیاز به تعیین محل منبع تولید کنندهٔ میدان و موقعیت نقطهٔ مورد نظر در یک سیستم مختصه مناسب داریم. در فضای سه بعدی یک نقطه از تقاطع سه صفحه به دست می‌آید سه دسته از صفحات ثابت = u_1، ثابت = u_2 و ثابت= u_3 را در نظر بگیرید (در دستگاه مختصات آشنای کارتزین u_1، u_2 و u_3 به ترتیب معادل با x، y و z هستند) وقتی این سه صفحه متقابلاً بر هم عمود باشند ما دارای دستگاه مختصه متعامد (Orthogonal Coordinate System) هستیم. از دستگاه مختصه غیرمتعامد بدین پیچیدگی در این بخش صرف‌نظر می کنیم.

۱-۷-۱ مختصات کارتزین

$$\left(u_1, u_2, u_3\right) = \left(x, y, z\right)$$

نقطهٔ $P\left(x_1, y_1, z_1\right)$ در مختصات کارتزین از تقاطع سه سطح که توسط $x = x_1$، $y = y_1$ و $z = z_1$ مطابق شکل به دست می‌آید. بردار یکه $\hat{i}$ عمود به سطح صفحه $x = x_1$ و یا به عبارت دیگر در جهت افزایش مختصه x، به طریق مشابه بردار یکهٔ $\hat{i}$ عمود به صفحه $y = y_1$ و بردار یکه $\hat{k}$ عمود به صفحه $z = z_1$.

این سیستم راستگرد است با بردارهای یکه $\left(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\right)$ که در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$
$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$
$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

و واضحاً $\hat{i}.\hat{i} = 1$

$\hat{i}.\hat{j} = \circ$ ... و غیره

بردار موقعیت نقطهٔ $P\left(x, y, z\right)$

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

a- المان حجم مختصات کارتزین: اگر از نقطه (x, y, z) به نقطه $(x+dx, y+dy, z+dz)$ مطابق شکل حرکت کنیم، مکعب مستطیلی به ابعاد dx، dy و dz ایجاد می‌شود که حجم آن برابر است با

$$dv = dxdydz$$

b- المان طول برداریست که دو نقطهٔ (x, y, z) و $(x+dx, y+dy, z+dz)$ را به هم وصل می‌کند. مطابق شکل

$$\overrightarrow{dl} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$$

و مقدار آن

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

c- سه نوع المان سطح موجود است ds_x، المان سطحی‌ایست که برای آن x ثابت ds_y برای آن y ثابت و ds_z که برای آن z ثابت است.

$$ds_x = dydz, \quad \overrightarrow{ds_x} = \hat{i}dydz$$
$$ds_y = dxdz, \quad \overrightarrow{ds_y} = \hat{i}dxdz$$
$$ds_z = dxdy, \quad \overrightarrow{ds_z} = \hat{i}dxdy$$

۱-۷-۲ مختصات استوانه‌ائی

$$\left(u_1,u_2,u_3\right)=\left(\rho,\varphi,z\right)$$

در مختصات استوانه‌ائی نقطه $P\left(\rho_1,\varphi_1,z_1\right)$ از تقاطع یک استوانه با ثابت = $\rho=\rho_1$، یک نیم صفحه که شامل محور zها می‌شود و با صفحه xz زاویه ثابت $\varphi=\varphi_1$ را می‌سازد، و یک صفحه موازی با صفحه xy در ثابت= $z=z_1$
دامنهٔ تغییرات مختصه‌های دستگاه استوانه‌ائی همانطور که از شکل پیداست
L شعاع استوانه از ۰ تا ∞
φ نسبت به محور xها از ۰ تا 2π
Z ارتفاع استوانه از∞- تا ∞+ (مشابه دستگاه کارتزین)
بردارهای یکه $\left(\hat{\rho},\hat{\varphi},\hat{k}\right)$ در جهت افزایش ρ و φ و z هستند.

روابط راستگردی به صورت زیرند

$$\hat{\rho}\times\hat{\varphi}=\hat{k}$$
$$\hat{\varphi}\times\hat{k}=\hat{\rho}$$
$$\hat{k}\times\hat{\rho}=\hat{\varphi}$$

مختصات استوانه ای برای مسائلی که بار خطی بسیار طویل با جریان خطی بسیار طویل موجود باشند مهم‌اند و همچنین در مواردی که مرزهای استوانه‌ای یا دایروی وجود داشته باشند به کار می‌روند. مختصات قطبی دوبعدی حالت خاص در $z=0$ هستند.

بردار موقعیت در دستگاه استوانه‌ای برای نشان دادن یک نقطه در فضا بردار موقعیت $\vec{r}$ برابر است با جمع دو بردار $\rho\hat{\rho}$ و $z\hat{k}$ (مطابق شکل)

$$\vec{r}=\rho\hat{\rho}+z\hat{k}$$

وابستگی بردار موقعیت $\vec{r}$ به φ از طریق بردار یکهٔ $\hat{\rho}$ که تابعی از φ است وارد می‌شود. زیرا اگر $\hat{\rho}$ و $\hat{\varphi}$ را در دستگاه کارتزین بنویسیم داریم.

$$\hat{\rho}=\hat{i}Cos\varphi+\hat{j}Sin\varphi$$
$$\vec{v}$$

روابط به سادگی قابل تحقیق از شکل فوق هستند.
(a) المان حجم مختصات استوانه‌ای

از نقطه (ρ,φ,z) به افزایش ρ به اندازه $d\rho$، φ به اندازه $d\varphi$ و z به اندازه dz به نقطه $(\rho+d\rho,\varphi+d\varphi,z+dz)$ می‌رسیم. طبق شکل یک شبه مکعب مستطیل ایجاد می‌شود که دو ضلع آن طول و یک ضلع آن منحنی‌ایست، برای ضلع منحنی طول قوس برابر $\rho d\varphi$ایست لذا حجم این شبه مکعب مستطیل برابر است با

$$dv=\left(d\rho\right)\left(\rho d\varphi\right)\left(dz\right)=\rho d\rho d\varphi dz$$

(b) المان طول برداریست که نقطهٔ (ρ,φ,z)را به نقطهٔ $(\rho+d\rho,\varphi+d\varphi,z+dz)$ وصل می‌کند

$$\overrightarrow{dl}=\hat{\rho}d\rho+\hat{\varphi}\rho d\rho+\hat{k}dz$$

$$dl=\sqrt{(d\rho)^2+(\rho d\varphi)^2+(dz)^2}$$

(c) المان سطحی که برای آن ثابت = ρ (المان سطح جانبی استوانه)

اگر روی سطح جانبی استوانه به شعاع ρ از نقطهٔ (ρ,φ,z)به نقطهٔ مجاور آن با افزایش φ به اندازهٔ $d\varphi$ و z به اندازه dz حرکت کنیم، یک شکل شبه مستطیل تولید خواهد شد (مطابق شکل) که مساحت آن برابر است با

$$ds_\rho=(\rho d\varphi)(dz)$$
$$=\rho d\varphi dz$$

از آنجا که بردار یکهٔ عمود به این المان سطح عمود به سطح استوانه است لذا بردار یکه همان $\hat{\rho}$ دستگاه استوانه‌ایست

$$\overrightarrow{ds}_\rho=\hat{\rho}\rho d\varphi dz$$

(b) المان سطحی که برای آن ثابت = φاست.

برای نقطه (ρ,φ,z)روی این سطح افزایش دیفرانسیلی فقط برای ρ به اندازه $d\rho$ و z به اندازه dz امکان‌پذیر است. مساحت مستطیل ایجاد شده برابر است با

$$ds_\varphi=d\rho dz$$

$$\overrightarrow{ds}_\varphi=\hat{\varphi}d\rho dz$$

بردار یکه $\hat{\varphi}$ در جهت افزایش زاویه φ و عمود به ds_φایست.

(c) المان سطحی که برای آن ثابت= z (المان سطح قاعدهٔ استوانه) روی این سطح از نقطهٔ (ρ,φ,z)می‌توان به نقطهٔ $(\rho+d\rho,\varphi+d\varphi,z+dz)$رسید.

مساحت شکل شبه مستطیل برابر است با حاصلضرب دو ضلع مجاور آن یعنی

$$ds_z=(d\rho)(\rho d\varphi)=\rho d\rho d\varphi$$

این شبه مستطیل دارای یک طول و یک ضلع منحنی‌ایست که طول قوس آن برابر است با $\rho d\varphi$. بردار یکهٔ عمود به این سطح $\hat{k}$ است. پس

$$\overrightarrow{ds}_z=\hat{k}\rho d\rho d\varphi$$

در حالت خاص $z=0$ المن فوق مربوط به دیسکی‌ایست که روی صفحه xy قرار دارد.

۳-۷-۱ مختصات کروی

$$(u_1,u_2,u_3)=(r,\theta,\varphi)$$

یک نقطه در دستگاه مختصات کروی از تقاطع سه سطح به دست می‌آید. یک سطح کروی به شعاع $r=r_1$، یک مخروط به زاویهٔ رأس $\theta=\theta_1$ که محور ان بر محور z+ منطبق است و یک نیم صفحه که شامل محور zهاست و با صفحه xz زاویهٔ $\varphi=\varphi_1$ را می‌سازد. بردارهای یکه در جهت افزایش r، $\hat{r}$ در جهت افزایش θ، $\hat{\theta}$ و در جهت افزایش φ، $\hat{\varphi}$ نامیده می‌شوند. دامنهٔ تغییرات مختصه‌ها همانطور که از شکل پیداست.

شعاع کره r از ۰ تا $+\infty$

θزاویهٔ قطبی از۰ تا π نسبت به محور z

φ زاویهٔ سمتی از ۰ تا 2π نسبت به محور x

یک نقطه روی سطح کره توسط سه مختصه فوق تعیین می‌شود یعنی (r,θ,φ)

$\hat{\varphi}$ مشابه بردار یکهٔ دستگاه استوانه‌ایست. روابط راستگردی به صورت زیرند

$$\hat{r}\times\hat{\theta}=\varphi$$

$$\hat{\theta}\times\hat{\varphi}=\hat{r}$$

$$\hat{\varphi}\times\hat{r}=\hat{\theta}$$

مختصات کروی برای مسائلی که شامل منابع نقطه‌ائی و نواحی بارز کروی هستند، مهم‌اند. در مختصات کروی r طول و دو مختصه دیگر θ و φزاویه.

بردار موقعیت در این دستگاه به صورت $\vec{r}=r\hat{r}$ وابستگی به دو مختصه دیگر از طریق $\hat{r}$ که به هر دو مختصه θ و φبستگی دارد وارد می‌شود.

$$\vec{r}=\hat{i}rSin\theta Cos\varphi+\hat{j}rSin\theta Sin\varphi+\hat{k}rCos\theta$$

$$\vec{r}(\theta,\varphi)=\hat{i}Sin\theta Cos\varphi+\hat{j}rSin\theta S\text{in}\,\varphi+\hat{k}Cos\theta$$

$$\hat{\theta}=\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}=\hat{i}Cos\theta Cos\varphi+\hat{j}Cos\theta Sin\varphi-\hat{k}Sin\theta$$

$$\hat{r}=Sin\theta\left(\hat{i}Cos\varphi+\hat{j}Sin\varphi\right)+\hat{k}Cos\theta=\hat{\rho}Sin\theta+\hat{k}Cos\theta$$

این رابطه مؤیداین مطلب است که $\hat{r}$ در صفحه گذرنده از بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ قرار دارد، لذا از طریق شکل زیر، به طریق هندسی نیز می‌توان رابطهٔ فوق را تحقیق نمود.

مؤلفه‌های $\hat{r}$در دستگاه کارتزین

$$y=rSin\theta Sin\varphi \quad x=rSin\theta Cos\varphi$$

$$z=rCos\theta$$

(a) المان حجم مختصات کروی

برای یافتن المان حجم دستگاه مختصات کروی با افزایش دیفرانسیلی، به اندازه dr، θ به اندازه $d\theta$ و φ به اندازه $d\varphi$ از نقطهٔ (ρ,θ,φ) به نقطهٔ $(r+dr,\theta+d\theta,\varphi+d\varphi)$ حرکت می‌کنیم. حجم شبه مکعب مستطیل ایجاد شده مطابق فوق برابر است با

$$dv=(dr)(rd\theta)(rSin\theta d\varphi)$$
$$=r^2 Sin\theta drd\theta d\varphi$$

در استخراج رابطه فوق $rd\theta$ و $rSin\theta d\varphi$ به ترتیب طول قوسهای مربوط به زوایای $d\theta$ و $d\varphi$ هستند.

(b) المان طول برداریست که دو نقطه (r,θ,φ) و $(r+dr,\theta+d\theta,\varphi+d\varphi)$ به هم وصل می‌کند

$$\overrightarrow{dl}=\hat{r}dr+\hat{\theta}rd\theta+\hat{\rho}rSin\theta d\varphi$$
$$dl=\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2+(rSin\theta d\varphi)^2}$$

(c) المان سطح ثابت = r، المان سطح یک کره به شعاع r

اگر روی یک کره به شعاع r از نقطهٔ (r,θ,φ) به نقطهٔ مجاور $(r,\theta+d\theta,\varphi+d\varphi)$ حرکت نمائیم. شکل مستطیل شکل مطابق شکل ایجاد می‌شود که مساحت آن برابر است

$$ds_r=(rd\theta)(rSin\theta d\varphi)$$
$$=r^2 Sin\theta d\theta d\varphi$$
$$\overrightarrow{ds_r}=\hat{r}r^2 Sin\theta d\theta d\varphi$$

(d) المان سطحی که ثابت= θ، المان سطح یک مخروط به زاویهٔ رأس θ.

روی سطح جانبی این مخروط با افزایش دیفرانسیلی θr به اندازه dr و φ به اندازه $d\varphi$ می‌توان از نقطه (r,θ,φ) به نقطهٔ $(r+dr,\theta,\varphi+d\varphi)$ رسید. شکل ایجاد شده یک شبه مستطیل است که مساحت آن برابر است با

$$ds_\theta=(dr)(rSin\theta d\varphi)$$

بردار یکهٔ عمود به آن $\hat{\theta}$ است لذا

$$\overrightarrow{ds}_\theta=\hat{\theta}rSin\theta drd\varphi$$

المان سطحی که ثابت = φ روی این سطح از نقطهٔ (r,θ,φ) می‌توان به نقطهٔ $(r+dr,\theta+d\theta,\varphi)$ رسید. مساحت شبه مستطیل ایجاد شده برابر است با

$$ds_\varphi=(dr)(rd\theta)=rdrd\theta$$
$$\overrightarrow{ds_\varphi}=\hat{\varphi}rdrd\theta$$

۱-۸-۱ مثال ۱

دیسکی به شعاع R حول محور zها با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. سرعت خطی یک نقطه مانند P در فاصله ρ از مرکز را به دست آورید.

حلّ:

موقعیت نقطهٔ P $\quad \vec{r} = \rho\hat{\rho}$

بردار سرعت زاویه $\quad \vec{\omega} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{v} = \omega\hat{k}\times\rho\hat{\rho} = \omega\rho\hat{k}\times\hat{\rho} = \omega\rho\hat{\varphi}$$

۲-۸-۱ مثال ۲

با فرض اینکه $T = xy^2$

a- گرادیان T را محاسبه نمائید.

b- درستی رابطهٔ $T(b)-T(a)=\int_a^b \vec{\nabla}T.\vec{dl}$ را تحقیق نمائید. دو نقطهٔ a و b را به ترتیب مرکز $(\circ,\circ,\circ)$ و نقطهٔ $(2,1,\circ)$ بگیرید.

حلّ:

a- گرادیان T

$$\vec{\nabla}T = \hat{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$= \hat{i}y^2 + \hat{j}2xy$$

b- برای تحقیق در درستی رابطهٔ $T(b)-T(a)=\int_a^b \vec{\nabla}T.\vec{dl}$ دو مسیر انتخاب می‌شود.روی مسیر ۱، ابتداز از نقطهٔ a روی محور xها به طرف نقطهٔ x=2 حرکت می‌کنیم و سپس از آنجا در امتداد محور y مطابق شکل به نقطهٔ b می‌رسیم. این مسیر به دو قسمت I و II تقسیم می‌شود

روی قسمت I: $x:\circ\to 2$ ، $y=\circ$ المان طول $\vec{dl}=\hat{i}dx$

روی قسمت II: $y:\circ\to 1 x=2$ المان طول $\vec{dl}=\hat{i}dy$

$$\underset{\text{مسیر ۱}}{\int}\vec{\nabla}T.\vec{dl} = \int_I \vec{\nabla}T.\vec{dl} + \int_{II}\vec{\nabla}T.\vec{dl}$$

$$\int\vec{\nabla}T.\vec{dl} = \int_\circ^2\left(\hat{i}y^2+\hat{j}2xy\right)\Big|_{y=\circ}.\hat{i}dx + \int_\circ^1\left(\hat{i}y^2+\hat{j}4y\right).\hat{i}dy$$

$$= \int_\circ^1 4ydy = 2y^2\Big|_\circ^1 = 2$$

از طرفی $\quad T(b)-T(a) = 2-\circ = 2$

لذا درستی رابطهٔ $T(b)-T(a)=\int_a^b \vec{\nabla}T.\overrightarrow{dl}$ به اثبات می‌رسد.

مسیر ۲: روی این مسیر مستقیماً از a به سمت b حرکت می‌کنیم.

روی این مسیر: $x:\circ\to 2$ ؛ $y=\frac{1}{2}x$ ؛ $dy=\frac{1}{2}dx$ و المان طول $\overrightarrow{dl}=\hat{i}dx+\hat{j}dy$

$$\vec{\nabla}T.\vec{d}=\left(\hat{i}y^2+2xy\hat{j}\right).\left(\hat{i}dx+\hat{j}dy\right)$$
$$=y^2dx+2xydy$$
$$=\frac{1}{4}x^2dx+2x\times\frac{1}{2}x\times\frac{1}{2}dx$$
$$=\frac{1}{4}x^2dx+\frac{x^2}{2}dx=\frac{3}{4}x^2dx$$
$$\int\vec{\nabla}T.\overrightarrow{dl}=\int_\circ^2\frac{3}{4}x^2dx=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}x^3\Big|_\circ^2=\frac{1}{4}\times 8=2$$

این محاسبه نشان می‌دهد که $\int_a^b \vec{\nabla}T.\overrightarrow{dl}$ مستقل از مسیری‌ایست که برای رفتن از a به b انتخاب می‌شود. لذا می‌تون نتیجه گرفت که

$$\oint\left(\vec{\nabla}T\right).\overrightarrow{dl}=\circ$$

یعنی انتگرال روی هر مسیر بسته برابر صفر است زیرا a بر b منطبق است و $T(b)-T(a)=\circ$.

۳-۸-۱ مثال ۳

اگر $\vec{F}=\hat{i}y^2+\left(2xy+z^2\right)\hat{j}+2yz\hat{k}$ باشد. شار گذرنده از سطح یک مکعب با اضلاع واحد را که مطابق شکل در مرکز قرار دارد را محاسبه نمائید.

حلّ:

شار باید روی شش وجه مکعب بطور مجزا از هم محاسبه شوند.

(i) وجه $x=1$ با المان سطح $\overrightarrow{ds_x}=\hat{i}dydz$

$$\vec{F}.\overrightarrow{ds_x}=y^2dydz$$
$$\int\vec{F}.\overrightarrow{ds_x}=\int_\circ^1\int_\circ^1 y^2dydz=\frac{1}{3}$$

(ii) وجه $x=\circ$ با المان سطح $\overrightarrow{ds_x}=-\hat{i}dxdy$ (علامت منفی به دلیل بسته بودن مکعب است)

$$\vec{F}.\overrightarrow{ds_x}=-y^2dydz$$
$$\int\vec{F}.\overrightarrow{ds_x}=-\int_\circ^1\int_\circ^1 y^2dydz=-\frac{1}{3}$$

(iii) وجه y=1 با المان سطح $\overrightarrow{ds}_y = \hat{j}dxdz$

$$\vec{F}.\overrightarrow{ds}_y = \left[\hat{i} + \hat{j}\left(2x+z^2\right) + \hat{k}2z\right].\hat{j}dxdt$$

$$= \left(2x+z^2\right)dxdz$$

$$\vec{F}.\overrightarrow{ds}_y = \int_\circ^1\int_\circ^1\left(2x+z^2\right)dxdz = \frac{4}{3}$$

(iv) وجه $y=\circ$ $\overrightarrow{ds}_y = -\hat{j}dxdz$

$$\vec{F}.\overrightarrow{ds}_y = -z^2\hat{j}.\hat{j}dxdz = -z^2dxdy$$

$$\int\vec{F}.\overrightarrow{ds}_y = \int_\circ^1\int_\circ^1 z^2dxdy = -\frac{1}{3}$$

(v) وجه $z=1$ با المان سطح $\overrightarrow{ds}_z = \hat{k}dxdy$

$$\vec{F}.\overrightarrow{ds}_z = \left[y^2\hat{i} + \left(2xy+1\right)j + 2y\hat{k}\right].\hat{k}dxdy$$

$$= 2ydxdy$$

$$\int\vec{F}.\overrightarrow{ds}_z = \int_\circ^1\int_\circ^1 = ydxdy = 1$$

(vi) وجه $z=\circ$ با المان سطح $\overrightarrow{ds}_z = -\hat{k}dxdy$

$$\vec{F}.\overrightarrow{ds}_z = -\left(y\hat{i} + 2xy\hat{j}\right).\hat{k}dxdy = \circ$$

$$\int\vec{F}.\overrightarrow{ds}_z = \circ$$

$$\varphi_{\vec{F}} = \int\vec{F}.\overrightarrow{ds} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + \circ$$

سطح مکعب
واحد

$= 20$

مثال ۴-۸-۱ مثال ۴

فرض کنید میزان برداری به صورت $\vec{F} = \left(2xz+3y^2\right)j + \left(4yz^2\right)\hat{k}$ تعریف شده است. گردش آن را حول مربع واحد که در صفحه yz قرار دارد را محاسبه نمائید.

$$\Gamma = \oint\vec{F}.\overrightarrow{dl} =$$

برای محاسبه انتگرال فوق مسیر بسته را به چهار قسمت تقسیم می‌نمائیم

$$\Gamma = \oint\vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_{(i)}\vec{F}.\overrightarrow{dl} + \int_{(ii)}\vec{F}.\overrightarrow{dl} + \int_{(iii)}\vec{F}.\overrightarrow{dl} + \int_{(iv)}\vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

روی قسمت (i) $x=\circ$ ؛ $y:\circ\to 1$ ؛ $z=\circ$ ؛ $\vec{F}.\vec{dl}=3y^2\hat{j}.\hat{j}dy=3y^2dy$

$$\int_{(i)}\vec{F}.\vec{dl}=\int_{\circ}^{1}3y^2dy=1$$

روی قسمت (ii) $x=\circ$ ؛ $y=1$ ؛ $z:\circ\to 1$ ؛ $\vec{F}.\vec{dl}=\left(3\hat{j}+4z^2\hat{k}\right).\hat{k}dz=4z^2dt$

$$\int_{(ii)}\vec{F}.\vec{dl}=\int_{\circ}^{1}4z^2dz=\frac{4}{3}$$

روی قسمت (iii) $x=\circ$ ؛ $y:1\to\circ$ ؛ $z=1$ ؛ $\vec{F}.\vec{dl}=\left(3y^2\hat{j}+4y\hat{k}\right).\hat{j}dy=3y^2dy$

$$\int_{(iii)}\vec{F}.\vec{dl}=\int_{1}^{\circ}3y^2dy=-1$$

به حدود انتگرال توجه نمائید چون y از ۱ به ۰ تغییر می‌کند، بدین دلیل $\vec{dl}=\hat{j}dy$ (بدون علامت منفی) چون dy منفی‌ایست، $\vec{dl}$ دارای جهت صحیح است.

نکته:

اصولاً همیشه $\vec{dl}=\hat{i}dx+\hat{j}dy+\hat{k}dz$ هیچگاه علامت مفی به کار گرفته نشود. حدود انتگرال صحیح جهت درست را منظور خواهد کرد.

قسمت (iv) $x=\circ$ ؛ $y=\circ$ ؛ $z:1\to\circ$ $\qquad \vec{F}.\vec{dl}=\circ.\hat{k}dz=\circ$

$$\int_{(iv)}\vec{F}.\vec{dl}=\circ$$

$$\Gamma=\oint_{\text{مربع واحد}}\vec{F}.\vec{dl}=1+\frac{4}{3}-1+\circ=\frac{4}{3}$$

۲-۸-۵ مثال ۵

سیالی مطابق شکل با سرعت $\vec{v}(\vec{r})=\rho\omega\hat{\varphi}$ حرکت می‌کند. ρ فاصله از محور z و ω یک ثابت $\hat{\varphi}$ بردار یکه در جهت افزایش φ است. گردش $\vec{v}$ را حول دایره‌ائی به شعاع R محاسبه نمائید.

$$\Gamma=\oint_{\text{دایره}}\vec{v}.\vec{dl}=\int_{\circ}^{2\pi}R\omega\hat{\varphi}.Rd\varphi\hat{\varphi}=2\pi R^2\omega$$

گردش این سیال غیر صفر است، لذا میدان برداری $\vec{v}$ پایستار نیست.