عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۵

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

۲-۱۶ قانون گوس

قانون گوس رابطهٔ بین سطح فرضی بسته که سطح گوس نامیده می‌شود و بار خالص داخل سطح را برقرار می‌سازد.

اگر q داخل سطح باشد $\oint \vec{E}.\vec{ds} = q/\varepsilon_\circ$

اگر q خارج سطح باشد. $\oint \vec{E}.\vec{ds} = \circ$

شار گذرنده از هر سطح بسته برابر است با بار خالص داخل سطح بخش بر $\varepsilon_\circ$ و شار گذرنده از هر سطح بسته صفر است اگربار خالص داخل سطح صفر باشد، یا بار خالص سطح باشد.

قانون گوس را می‌توان برای محاسبهٔ $\vec{E}$ بکار گرفت اگر توزیع بار دارای تقارن کافی باشد بطوری که با انتخاب مناسب سطح گوس بسادگی بتوان انتگرال شار را محاسبه نمود.

قانون گوس نتیجه مستقیم عکس مجذور فاصله بودن نیروی الکتریکی ایست، اگر نیروی با برد محدود $\frac{e^{-\lambda r}}{r^2}$ را در نظر بگیریم مسلماً برای چنین نیروئی قانون گوس به فرم انتگرال دیگر صادق نخواهد بود. میدان روی سطح گوس خیلی بزرگ بسیار کوچک است. شار بجای اینکه ثابت باقی بماند با بزرگتر شدن سطح گوس به سمت صفر میل خواهد کرد.

۲-۱۷ استخراج قانون گوس از قانون کولمب

برای استخراج قانون گوس، با چند مثال شروع می‌کنیم

۲-۱۷-۱ مثال ۱

فرض کنید میدان بار نقطه‌ائی q به جای قانون عکس مجذور فاصله $\vec{E} = \frac{rq}{r^2}\hat{r}$ از قانون دیگری تبعیت می‌کند یعنی

$$\vec{E} = kq\frac{e^{-\lambda r}}{r^2}\hat{r}$$

اگر بار q در مرکز کره‌ای فرضی به شعاع R قرار داشته باشد شار گذرنده از سطح کره را به دست آورید.

$$\phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E}.\vec{ds} = \int_\circ^\pi \int_\circ^{2\pi} kq\frac{e^{-\lambda R}}{R^2}\hat{r}.\hat{r}R^2 Sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= 4\pi kqe^{-\lambda R}$$

از این مثال مشاهده می‌شود برای نیروئی که عکس مجذور فاصله نیست، شار گذرنده از سطح کره با افزایش شعاع کره به جای اینکه ثات باقی بماند، به سمت صفر میل می‌کند. قانون گوس برای چنین نیروهائی درست نیست.

۲-۱۷-۲ مثال ۲

فرض کنید بار نقطه‌ائی q در مرکز کره به شعاع R قرار داشته باشد، شار گذرنده از سطح کره را به دست آورید.

$$\phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E} \, \overrightarrow{ds}$$

$$\phi_{\vec{E}} = \int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{2\pi} \frac{kq}{\cancel{R}^2} \notin \overbrace{\hat{r}.\hat{r}}^{1} \cancel{R}^2 Sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= kq\int_{\circ}^{\pi} \underbrace{Sin\theta d\theta}_{2} \int_{\circ}^{2\pi} \underbrace{d\varphi}_{2\pi}$$

$$= 4\pi kq = \frac{q}{\varepsilon_{\circ}}$$

در این حالت خاص صحت قانون گوس به اثبات رسید.

۲-۱۷-۳ مثال ۳

فرض کنید بار q در مرکز یک استوانه بطول 2L و شعاع R مطابق شکل قرار داشته باشد. شار گذرنده از این استوانه را محاسبه نمائید.

$$\phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \underbrace{\int \vec{E}.\overrightarrow{ds}}_{I} + \underbrace{\int \vec{E}.\overrightarrow{ds}}_{II} \; d\Omega$$

I- شار سطح جانبی استوانه

$$\phi_{\vec{E}} = \int_{\text{سطح جانبی}} \vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

$$= \int_{-L}^{L}\int_{\circ}^{2\pi} \frac{kq}{r^2} r^2 .\hat{\rho} R d\rho d\varphi$$

(زاویهٔ بین $\hat{r}$ و $\hat{\rho}$) $\hat{r}.\hat{\rho} = Cos$ زاویهٔ بین $\hat{r}$ و $\hat{\rho}$ برابر $\frac{\pi}{2} - \theta$ است. لذا

$$Cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{R}{r}$$

$$r = \left(R^2 + z^2\right)^{1/2}$$

$$\phi_{\vec{E}}(\text{سطح جانبي})=kqR^2\int_{-L}^{L}\int_{\circ}^{2\pi}\frac{d\varphi dz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$=2kqR^2\int_{\circ}^{2\pi}d\varphi\int_{\circ}^{L}\frac{dz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Phi_{\vec{E}}(\text{سطح جانبی})=2kqR^2\times2\pi\times\frac{z}{R^2\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}\Big|_{\circ}^{L}$$

$$=4\pi kq\left(\frac{L}{\left(R^2+L^2\right)^{1/2}}\right)=\frac{4\pi kqL}{\left(R^2+L^2\right)^{1/2}}$$

II- شار سطوح قاعده

$$\phi_{\vec{E}}=\int_{\text{سطح قاعده}}\vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

$$=\int_{\circ}^{R}\int_{\circ}^{2\pi}\frac{kq}{r^2}\hat{r}.\hat{k}\rho d\rho d\varphi$$

$$r=\left(L^2+\rho^2\right)^{1/2} \quad \text{و} \quad \hat{r},\hat{k}=Cos\,(\hat{k}\ \text{و}\ \hat{r}\ \text{زاویه بین})=Cos=\frac{L}{r}$$

$$\phi_{\vec{E}}\ (\text{سطح قاعده})=\int_{\circ}^{R}\int_{\circ}^{2\pi}\frac{kq}{r^2}\frac{L}{r}\rho d\rho d\varphi$$

$$=kqL\int_{\circ}^{R}\frac{\rho d\rho}{\left(L^2+\rho^2\right)^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi}d\varphi$$

$$=2\pi kqL\left[-\left(L^2+\rho^2\right)^{-1/2}\right]\Big|_{\circ}^{R}$$

$$\phi_{\vec{E}}\ (\text{سطح قاعده})=-2\pi kqL\left[\frac{1}{\left(L^2+R^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{L}\right]$$

$$\phi_{\vec{E}}\ (\text{سطح قاعده})=2\times\phi_{\vec{E}}\ (\text{سطح قاعده})$$

$$=-4\pi kqL\left[\frac{1}{\left(L^2+R^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{L}\right]$$

$$\phi_{\vec{E}}\ (\text{استوانه})=\phi_{\vec{E}}\ (\text{سطح جانبی})+\phi_{\vec{E}}\ (\text{سطوح قاعده})$$

$$\phi_{\vec{E}}\ (\text{استوانه})=\frac{4\pi kqL}{\left(R^2+L^2\right)^{1/2}}-4\pi kqL\left[\frac{1}{\left(L^2+R^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{L}\right]$$

$$=\frac{4\pi kqL}{L}=4\pi\frac{1}{4\pi q}q=\frac{q}{\varepsilon_{\circ}}$$

صحت قانون گوس در حالت خاص کره و استوانه وقتی بار q در مرکز آنها قرار داشته باشد به اثبات رسید. مثالهای بعدی شرایط لازم برای استخراج قانون گوس در حالت کلی که سطح فرضی گوس به شکل دلخواه باشد را آماده می‌سازند.

۲-۱۷-۴ مثال ۴

دو کرهٔ متحدالمرکز به شعاع های r_a و r_b را در نظر بگیرید شار گذرنده از المان‌های سطح این دو کره $\overrightarrow{ds_a}$ و $\overrightarrow{ds_b}$ را بدست آورید.

شار گذرنده از المان سطح $\overrightarrow{ds_a}$

$$d\phi_{\vec{E}}^{a} = \vec{E}_a.\overrightarrow{ds_a} = \frac{kq}{r_a^2}\hat{r}.\hat{n}_a r_a^2 Sin\theta d\theta d\varphi$$

از آنجا که $\hat{n}_a = \hat{r}$

$$d\phi_{\vec{E}}^{a} = \frac{kq}{r_a^2}\hat{r}.\hat{r} r_a^2 Sin\theta d\theta d\varphi = kqSin\theta d\theta d\varphi$$

با تعریف المان زاویهٔ فضائی $d\Omega = Sin\theta d\theta d\varphi$

$$d\phi_{\vec{E}}^{a} = kqd\Omega$$

شار گذرنده از المان سطح $\overrightarrow{ds_b}$

$$d\phi_{\vec{E}}^{b} = \vec{E}_b.\overrightarrow{ds_b} = \frac{kq}{r_b^2}\hat{r}.\hat{n}_b r_a^2 Sin\theta d\theta d\varphi$$

از آنجا که $\hat{n}_b = \hat{r}$

$$d\phi_{\vec{E}}^{b} = kqd\Omega$$

در نتیجه $d\phi_{\vec{E}}^{a} = d\phi_{\vec{E}}^{b}$ یعنی شار گذرنده از این دو المان سطح با هم برابرند

۲-۱۷-۵ مثال ۵

در مثال ۴ اگر المان سطح ds_b بچرخد و به $ds_{b'}$ چه مقدار است.

$$d\phi_{\vec{E}}^{b'} = \vec{E}'_b.\overrightarrow{ds_{b'}} = \frac{kq}{r_b^2}\hat{r}.\hat{n}_{b'} ds_{b'}$$

$$= \frac{kq}{r_b^2}\underbrace{\hat{n}_b.\hat{n}_{b'}}_{Cos\gamma} ds_{b'}$$

$$= \frac{kq}{r_b^2}\underbrace{Cos\gamma ds_{b'}}_{ds_b}$$

$$= \frac{kq}{r_b^2} ds_b = d\phi_b^E$$

یعنی شار گذرنده از المان‌های ds_b و $ds_{b'}$ با هم برابرند. به عبارت دیگر مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی بر سطح $ds_{b'}$ به اندازهٔ Cosr کوچک شده است ولی $ds_{b'}$ به اندازه $Cos\gamma$ بزرگتر شده است. در محاسبه شار این دو، اثر یکدیگر را از بین می‌برند، بطوریکه شار بدون تغییر باقی می‌ماند.

۲-۱۸ تعریف المان زاویهٔ فضائی

در مثال‌های ۴ و ۵ ارتباط شار گذرنده از المان سطح و المان زاویهٔ فضائی مشخص گردید. نشان دادیم که $\phi_{\vec{E}} = kqd\Omega$، $d\Omega$ زاویهٔ فضائی مربوط به المان سطح اط موقعیت بار q است.

در این قسمت به تعریف المان زاویهٔ فضائی میپردازیم. المان زاویهٔ فضائی یک المان سطح مانند $d\Omega = \frac{\hat{r}.\overrightarrow{ds}}{r^2} = \frac{\hat{r}.\hat{n}ds}{r^2}$ $\overrightarrow{ds}$ از نقطهٔ P به صورت

$$d\Omega = \frac{\hat{r}.\overrightarrow{ds}}{r^2} = \frac{\hat{r}.\hat{n}ds}{r^2}$$

R فاصله نقطهٔ P ار مرکز المان سطح $\overrightarrow{ds}$

$\hat{r}$ بردار یکه در راستای r

$\hat{n}$ $\hat{n}$ بردار یکهٔ عمود به المان سطح $\overrightarrow{ds}$

چون $\hat{r}.\hat{n} = Cos\gamma$

$$d\Omega = \frac{Cos\gamma ds}{r^2}$$

$Cos\gamma ds$ تصویر المان سطح ds روی سطح کره‌ای به شعاع r است یعنی

$$Cos\gamma ds = r^2 Sin\theta d\theta d\varphi$$

$$d\Omega = \frac{r^2 Sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = Sin\theta d\theta d\varphi$$

نکته:

$d\Omega$ مثبت است اگر زاویهٔ بین $\hat{r}$ و $\hat{n}$ حاده باشد.

۲-۱۹ استخراج قانون گوس

ابتدا فرض کنید بار q در خارج از سطح بسته s قرار داشته باشد شار گذرنده از سطح s برابر صفر است.

$$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \circ = \frac{L\rho_\circ R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

از بار q مطابق شکل در المان سطح جدا می شوند آنها را ds_a و ds_b می‌نامیم (طبق قرارداد بردارهای یکهٔ عمود بر سطوح بسته به طرف خارج حجم می‌باشند).
شار گذرنده از المان سطح $\overrightarrow{ds_a}$

$$d\phi_{\vec{E}}^{a}\; d\phi_{\vec{E}}^{a} = \vec{E}_a.\overrightarrow{ds_a} = \frac{kq}{r_a^2}\hat{r}.\hat{n}_a ds_a$$

طبق تعریف المان زاویهٔ فضائی $\overrightarrow{ds_a}$ از نقطهٔ q برابر است با

$$d\Omega = \frac{\hat{r}.\left(-\hat{n}_a\right)ds_a}{r_a^2}$$

$$d\phi_{\vec{E}}^{a} = -\frac{kq}{r_a^2}\hat{r}.\left(-\hat{n}_a\right)ds_a = -kqd\Omega$$

شار گذرنده از المان سطح $\overrightarrow{ds_b}$

$$d\phi_{\vec{E}}^{b} = \vec{E}_b.\overrightarrow{ds_b} = \frac{kq}{r_b^2}\hat{r}.\hat{n}_b ds_b$$

$$d\phi_{\vec{E}}^{b} = kqd\Omega$$

مجموع شار گذرنده از این دو المان سطح

$$d\phi_{\vec{E}}^{a} + d\phi_{\vec{E}}^{b} = \circ$$

بهمین طریق می‌توان سطح s را به جفت‌هائی تبدیل که شار گذرنده از آنها برابر صفر است لذا شار کل گذرنده از سطح s اگر بار q خارج سطح باشد برابر صفر است.
حال فرض کنید بار q داخل سطح s باشد، شار گذرنده از سطح s برابر است با q تقسیم بر $\varepsilon_\circ$

$$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

از بار q دو المان سطح روی سطح s مطابق شکل جدا می‌کنیم.
طبق مثال ۳، ۴ و ۵ این دو المان سطح را می‌توان روی سطح کره‌ای محاط در سطح s به مرکز q تصویر نمود. لذا شار گذرنده از سطح s، به محاسبهٔ شار از کره ائی به شعاع r وقتی که بار q در مرکز آن است، تبدیل می‌شود. طبق مثال ۲ شار گذرنده از این کره برابر $kq\Omega$ است. یعنی $\frac{q}{\varepsilon_\circ}$ پس قانون گوس اثبات می‌شود. این اثبات برای هر سطح s به هر شکلی که باشد صادق است.

نکته ۱

اگر بار q روی سطح گوس قرار گیرد. شار گذرنده از سطح s چه مقدار خواهد بود؟
شار گذرنده برابر است با $kq\Omega$ که در آن Ω زاویهٔ فضائی یک نیم صفحه است زاویهٔ فضائی یک نیم صفحه 2π است لذا

$$\phi_{\vec{E}} = kq2\pi = \frac{q}{2\varepsilon_\circ}$$

نکته ۲

قانون گوس طبق اصل بر همنهش برای هر توزیع بار چه گسسته و چه پیوسته صادق است. بطور کلی اگر توزیع پیوسته بار به چگالی غیریکنواخت $\rho(\vec{r})$ در داخل سطح بسته s قرار گیرد قانون گوس به صورت

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\varepsilon_\circ} = \int \rho(\vec{r})dv$$

بیان می‌شود.

۲-۲۰-۱ مثال ۶

اگر بارq روی گوشه یک مکعب مطابق شکل قرار گرفته باشد.
a- شار گذرنده از مکعب چه مقدار است؟
b- شار گذرنده از صفحه هاشور خورده چه مقدار است؟

حلّ:

a- شار از مکعب

$$\phi_{\vec{E}} = kq\Omega = kq\frac{4\pi}{8} = kq\frac{\pi}{2} = \frac{q}{8\varepsilon_\circ}$$

b- شار گذرنده از صفحه هاشور خورده
طبق تقارن موجود در مسأله

$$\phi_{\vec{E}}(\text{از صفحه هاشور خورده}) = \frac{1}{3}kq\frac{\pi}{2} = \frac{q}{8\varepsilon_\circ}$$

۲-۲۰-۲ مثال ۷

شار گذرنده از سطح کره‌ای فرضی به شعاع R چه مقدار است اگر بار q روی سطح کره قرار گرفته باشد.

$$\phi_{\vec{E}} = \oint_{\text{سطح کره}} \vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

میدان بار q روی المان سطح

$$\vec{E}_q = \frac{kq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{r}=R\hat{k}\quad \vec{r}'=R\hat{r}\quad \left|\vec{r}-\vec{r}'\right|=\left(R^2+R^2-2R^2Cos\theta\right)^{1/2}$$

$$\overrightarrow{ds}_R=\hat{r}R^2Sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\phi_{\vec{E}}=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{kq\left(R\hat{r}-R\hat{k}\right).\hat{r}R^2Sin\theta d\theta d\varphi}{\left(R^2+R^2-2R^2Cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$\phi_{\vec{E}}=\frac{kqR^3}{\left(2R^2\right)^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{\left(1-Cos\theta\right)Sin\theta d\theta d\varphi}{\left(1-Cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$\phi_{\vec{E}}=\frac{kq}{2^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{Sin\theta d\theta d\varphi}{\left(1-Cos\theta\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{kq}{2^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{2Sin\theta/2\,Cos\theta/2}{\left(2Sin^2\theta/2\right)^{1/2}}d\theta d\varphi$$

$$=\frac{kq}{2}\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}Cos\theta/2\, d\theta d\varphi$$

$$\phi_{\vec{E}}=\frac{2\pi kq}{2\left(2Sin\theta/2\Big|_{\circ}^{\pi}\right)}$$

$$=\frac{2\pi kq}{2}\times 2\left(Sin\theta/2-\circ\right)=2\pi\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_{\circ}}=\frac{q}{2\varepsilon_{\circ}}$$

این نتیجه در توافق با توضیحاتی ایست که داده شد یعنی

$$\vec{\phi}_E=kq\underset{\downarrow}{\Omega}=kq2\pi=\frac{q}{2\varepsilon_{\circ}}$$

زاویهٔ فضائی یک نیم صفحه

۳-۲۰-۲ مثال ۸

میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع خطی بی‌نهایت طویل با چگالی خطی یکنواخت λ را در فاصلهٔ ρ از آن محاسبه نمائید.

حلّ:

به عنوان سطح گوس استوانه‌ائی به طول L و به شعاع ρ انتخاب می‌نمائیم شار گذرنده از این استوانه را محاسبه می‌نمائیم.

$$\phi_{\vec{E}}=\underbrace{\oint\vec{E}.\overrightarrow{ds}}_{\text{استوانه گوس}}=\underbrace{\int\vec{E}.\overrightarrow{ds}}_{\text{سطح جانبی}}+\underbrace{\int\vec{E}.\overrightarrow{ds}}_{\text{سطوح قاعده}}$$

انتگرال دوّم صفر است زیرا میدان الکتریکی بر بردار یکهٔ عمود به سطوح قاعده عمود است

$$\phi_{\vec{E}} = \int E\, \overbrace{\hat{\rho}.\hat{\rho}}^{1} \rho D\rho DZ = e2\pi\rho l$$

سطح جانبی

طبق قانون گوس

$$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$E = 2\pi\rho L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_\circ}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ\rho} = \frac{2k\lambda}{\rho}$$

این نتیجه قبلاً از قانون کولمب به دست آمد.

۲-۲۰-۴ مثال ۹

میدان الکتریکی حاصل از یک صفحه بی‌نهایت با چگالی سطحی یکنواخت σ

حلّ:

سطح گوس با توجه به تقارن‌های این مسأله استوانه‌ای مطابق شکل است.

$$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$= \int \vec{E}.\overrightarrow{ds} + \int \vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

سطح جانبی استوانه　　سطوح قاعده

انتگرال اوّل صفر است زیرا بردار یکهٔ عمود به سطح جانبی استوانه بر میدان الکتریکی $\vec{E}$ عمود است

$$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = 2EA = \frac{GA}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}$$

۲-۲۰-۵ مثال ۱۰

میدان الکتریکی نقاط داخل و خارج یک کره به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ را محاسبه نمائید.

نقاط داخل: $r < R$

سطح گوسی کروی به شعاع r در نظر بگیرید.

$$\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_{\circ}}$$

$$E4\pi r^2 = \rho \frac{4}{s}\pi r^3 \frac{1}{\varepsilon_{\circ}}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_{\circ}}$$

چون E شعاعی ایست $$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_{\circ}}\hat{r}$$

نقاط خارج $r > R$

بار کل داخل سطح گوس $$= \oiint \vec{E}.\vec{ds} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_{\circ}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_{\circ}}$$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_{\circ} r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_{\circ} r^2}\hat{r}$$

نکات

۱- منحنی میدان E بر حسب r

۲- بار کل کره $$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

میدان نقاط خارج کره $$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_{\circ} r^2}\hat{r} = \frac{4\pi\rho R^3}{3\times 4\pi\varepsilon_{\circ} r^2}$$

$$= \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

یعنی برای نقاط خارج کره، میدان کره همانند میدان بار نقطه‌ایست، به عبارت دیگر مثل اینکه بار کل کره در مرکز آن متمرکز شده است.

۳- اگر چگالی بار به صورت هر تابعی از r باشد یعنی $\rho = f(r)$ هنوز این تقارن کروی حلّ مسأله از قانون گوس را امکان‌پذیر می‌سازد.

$$\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_{\circ}} = \frac{1}{\varepsilon_{\circ}}\int \rho(\vec{r})dv$$

برای نقاط داخل

$$\oiint_{\text{گوسی}} \vec{E}.\vec{ds} = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{r}\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{2\pi} f(r) r^2 Sin\theta dr d\theta d\varphi$$

کره

گوسی

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^{2}}=\int_{\circ}^{r}\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}f\left(r\right)r^{2}Sin\theta drd\theta d\varphi$$

برای نقاط خارج

$$\oint\vec{E}.\overrightarrow{ds}=E4\pi r^{2}=\frac{1}{\varepsilon_{\circ}}\underbrace{\int_{\circ}^{R}\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}r^{2}f\left(r\right)Sin\theta drd\theta d\varphi}_{\text{بار داخل کرهٔ گوس}}=\frac{q}{\varepsilon_{\circ}}$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^{2}}\int_{\circ}^{R}\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}r^{2}f\left(r\right)Sin\theta drd\theta d\varphi$$

۵-۲۰-۲ مثال ۱۱

میدان الکتریکی نقاط داخل و خارج یک استوانهٔ بسیار طویل به شعاع R با چگالی بار یکنواخت $\rho_{\circ}$ را محاسبه نمائید.

نقاط داخل: $\rho<R$ قانون گوس $\oint\vec{E}.\overrightarrow{ds}=\frac{q}{\varepsilon_{\circ}}$

$$\oint\vec{E}.\overrightarrow{ds}=E2\pi\rho h=\frac{q}{\varepsilon_{\circ}}=\frac{\pi R^{2}\rho_{\circ}h}{\varepsilon_{\circ}}$$

$$E=\frac{\rho\rho_{\circ}}{2\varepsilon_{\circ}}$$

$$\vec{E}=\frac{\rho\rho_{\circ}}{2\varepsilon_{\circ}}\hat{\rho}$$

نقاط خارج $\rho>R$

$$\oint\vec{E}.\overrightarrow{ds}=E2\pi\rho l=\frac{q}{\varepsilon_{\circ}}=\frac{\pi R^{2}l\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}}$$

$$E=\frac{\rho_{\circ}R^{2}}{2\varepsilon_{\circ}\rho}$$

$$\vec{E}=\frac{\rho_{\circ}R^{2}}{2\varepsilon_{\circ}\rho}\hat{\rho}$$

نکات

۱- منحنی E بر حسب ρ

۲- برای نقاط خارج استوانه

$$\vec{E}=\frac{\rho_{\circ}R^{2}}{2\varepsilon_{\circ}\rho}\hat{\rho}=\frac{\pi R^{2}\rho_{\circ}}{2\pi\varepsilon_{\circ}\rho}\hat{\rho}=\frac{2k\lambda}{\rho}\hat{\rho}$$

بطوری که $\lambda=\pi R^{2}\times1\times\rho_{\circ}$ بار بر واحد طول استوانه

لذا میدان خارج یک استوانه بسیار طویل با بار حجمی به چگالی یکنواخت $\rho_\circ$ مانند میدان یک سیم بسیار طویل با چگالی بار $\lambda = \pi R^2 \rho_\circ$ است.

۳- اگر $\rho h_\circ$ چگالی استوانه هر تابعی از ρ باشد $\rho h_\circ = g(\rho)$ هنوز مسأله دارای تقارن کافی‌ایست که بتوان آن را با قانون گوس حل نمود.

برای نقاط داخل $\rho < R$

$$\oiint \vec{E}.\vec{ds} = E 2\pi \rho L = \frac{q}{\varepsilon_\circ} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int^{\rho}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{L} g(r)\rho d\rho d\varphi dz$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_\circ \rho L}\int_\circ^{R}\int_\circ^{\pi}\int_\circ^{2\pi} \rho g(\rho) d\rho d\varphi dz$$

برای نقاط خارج

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_\circ \rho L}\int_\circ^{R}\int_\circ^{\pi}\int_\circ^{2\pi} \rho g(\rho) d\rho d\varphi dz$$

۶-۲۰-۲ مثال ۱۲

یک تیغهٔ بی‌نهایت به ضخامت 2d (مطابق شکل) در نظر بگیرید. اگر ρ چگالی بار حجمی این تیغه یکنواخت باشد میدان الکتریکی در نقاط داخل و خارج آن را به دست آورید.

حلّ:

نقاط خارج $|z| > d$:

با توجه به تقارن مسأله سطح گوس استوانه‌ای به ارتفاع 2z و سطح مقطع A مطابق شکل در نظر بگیریم، قانون گوس

$$\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$2EA = \frac{\rho A \times 2d}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\hat{k}$$

نقاط داخل $|z| < d$:

$$2EA = \frac{\rho A \times 2z}{\varepsilon_\circ}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho z}{\varepsilon_\circ}\hat{k}$$

مثال ۶-۲۰- ۲ مثال ۱۳

در کره‌ای به شعاع R بار الکتریکی به چگالی $\rho = \beta / r$ توزیع شده است.

الف- میدان الکتریکی، نقاط داخل و خارج کره را به دست آورید.

ب- پتانسیل یک نقطه داخل را به دست آورید.
ج- شار الکتریکی گذرنده از سطح دایره‌ای مطابق شکل که فاصله‌اش از مرکز کره برابر h است را به دست آورید.

حلّ:

الف- نقاط داخل $\circ \le r \le R$

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_\circ^\pi \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^r \frac{\beta}{r} r^2 Sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

کره گوس

$$E4\pi r^2 = \tfrac{\beta}{\varepsilon_\circ} 4\pi \frac{1}{2} R^2 \Rightarrow \vec{E}_\circ = \frac{\beta R^2}{2\varepsilon_\circ r}(\hat{r})$$

ب-

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_\infty^R \vec{E}_\circ.\overrightarrow{dl} - \int_R^r \vec{E}_i.\overrightarrow{dl}$$

$$= \int_\infty^R \frac{\beta R^2}{2\varepsilon_\circ r^2}\hat{r}.\hat{r}dr - \int_R^r \frac{\beta}{2\varepsilon_\circ}\hat{r}.\hat{r}dr$$

$$\varphi(r) = -\tfrac{\beta R^2}{2\varepsilon_\circ}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^R - \frac{\beta}{2\varepsilon_\circ} r\Big|_R^r$$

$$= \tfrac{\beta R^2}{2\varepsilon_\circ}\frac{1}{R} - \frac{\beta}{2\varepsilon_\circ}(r - R)$$

ج- شار الکتریکی

$$\phi_{\vec{E}} = \int \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \int_\circ^R \int_\circ^{2\pi} \frac{\beta}{2\varepsilon_\circ}\hat{r}.\hat{k}\rho d\rho d\varphi$$

$$= \frac{\beta}{2\varepsilon_\circ}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\sqrt{R^2-h^2}} \frac{h}{r}\rho d\rho d\varphi$$

در رابطه فوق $\hat{r}.\hat{k} = Cos\theta = \frac{h}{r}$

$$\phi_{\vec{E}} = \frac{\beta}{2\varepsilon_\circ} h \int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\sqrt{R^2-h^2}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\left(h^2+\rho^2\right)^{1/2}}$$

$$\phi_{\vec{E}} = \frac{\beta}{2\varepsilon_\circ} h \times 2\pi\left(h^2+\rho^2\right)\Big|_\circ^{\sqrt{R^2-h^2}}$$

$$\phi_{\vec{E}} = \frac{\pi h\beta}{\varepsilon_\circ}\left(h^2 + R^2 - h^2 - h^2\right) = \frac{\pi h\beta}{\varepsilon_\circ}\left(R^2 - h^2\right)$$

۲-۲۰-۷ مثال ۱۴

دو استوانه به طول L و شعاع R با چگالی بار $\rho_\circ$ و $-\rho_\circ$ مطابق شکل یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف- شار الکتریکی گذرنده از یکی از استوانه‌ها را به دست آورید.
ب- شار گذرنده از دو استوانه را محاسبه نمائید.
ج- شار گذرنده از شکل عدسی مانند (تقاطع دو استوانه) را به دست آورید. (فاصله دو محور $\sqrt{3}R$

حلّ:

الف- برای محاسبه شار از یکی از استوانه‌ها باید ابتدا بار داخل استوانه را محاسبه نمود.

$$Cos\varphi_\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi_\circ = \frac{\pi}{6}$$

Q باریست که در قسکت ABC برداشته شده است.

$$q = \int_\circ^L \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \int_{\frac{R\sqrt{3}}{2Cos\varphi}}^{R} \rho_\circ \rho d\rho d\varphi dz$$

$$= L\rho_\circ \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \left(\tfrac{1}{2}\rho^2\right)\Big|_{\frac{R\sqrt{3}}{2Cos\varphi}}^{R}$$

$$= \frac{L}{2}\rho_\circ R^2 \frac{\pi}{8} - \frac{L}{2}\rho_\circ \frac{8R^2}{4}\tan\varphi\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}$$

$$q = \frac{L}{2}\rho_\circ R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2q مقدار باریست که از هر یک از استوانه ها برداشته شده است. لذا بطور مثال شار گذرنده از استوانۀ مثبت.

$$\phi_{\vec{E}} = \frac{\text{بار داخل استوانه}}{\varepsilon_\bullet} = \frac{\left[\pi R^2 L\rho_\circ - 2\times\frac{L}{2}\rho_\circ R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}{\varepsilon}$$

$$= \frac{R^2 L\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\left(\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R^2 L\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

q را می‌توان از طریق دیگری نیز محاسبه نمود.

$q = L\rho_\circ$ (مساحت مثلث متوازی الاضلاع OAB – مساحت قطاع OAB)

$$= L\rho_\circ\left(\frac{1}{2}RR\frac{\pi}{3} - \frac{R}{2}\times\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{L\rho_\circ R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

باقی مسائل بطریق قبل.

ب- شار گذرنده از دو استوانه برابر صفر است.

ج- شار گذرنده از شکل عدسی مانند صفر است.

۳-۲۱ قانون گوس و اصل برهمنهش

قانون گوس در مسائلی که دارای تقارن هستند چون معادل قانون کولمب است برای یافتن میدان الکتریکی بکار گرفته می‌شود. در این بخش مسائلی مطرح می‌شوند با اینکه ظاهراً دارای تقارن نیستند ولی می‌توان با ترکیب قانون گوس و اصل بر همنهش به سادگی آنها را حلّ نمود. حلّ این نوع مسائل معمولاً به طریق مستقیم با استفاده از قانون کولمب می‌تواند بسیار پیچیده باشد.

۲-۲۲-۱ مثال ۱۵

در کره‌ائی به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ حفره‌ای کروی ایجاد می‌شود بطوری که فاصله مرکز کره با مرکز حفره d است. میدان الکتریکی را در یک نقطهٔ دلخواه داخل حفره به دست آورید.

حلّ:

میدان الکتریکی در یک نقطهٔ دلخواه داخل حفره برابر است با جمع میدان یک کره توپر با چگالی ρ و میدان الکتریکی حفره اگر بار آن ρ- باشد.

$$\vec{E}=\vec{E}_{\rho}+\vec{E}_{-\rho}\quad \varphi_B=-\frac{\rho_{\circ}R^2}{12\varepsilon_{\circ}}+\frac{\rho_{\circ}}{6\varepsilon_{\circ}}\left[\left(x_B^2+z_B^2\right)-{}^{R^2}\!/_4\right]$$

$$=\frac{\rho r}{3\varepsilon_{\circ}}\hat{r}+\frac{-\rho r'}{3\varepsilon_{\circ}}\hat{r}'$$

$$=\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_{\circ}}-\frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_{\circ}}\frac{\rho}{3\varepsilon_{\circ}}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

$$\vec{d}+\vec{r}'=\vec{r}$$

$$\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_{\circ}}\vec{d}$$

۲-۲۲-۲ مثال ۱۶

استوانه‌ای بسیار طویل به چگالی حجمی یکنواخت $\rho_{\circ}$ و به شعاع R در نظر بگیرید. حفره‌ای استوانه‌ای به موازات محور و به شعاع $\frac{R}{2}$ مطابق شکل در آن ایجاد شده است نیروی الکتریکی بر واحد طول وارد به یک توزیع خطی بسیار طویل بار به چگالی یکنواخت λ را در که در نقطهٔ $P\left({}^{R}\!/_4,{}^{R}\!/_4\right)$ و به موازات محور استوانه قرار دارد را محاسبه نمائید.

میدان داخلی یک استوانه به چگالی بار $\rho_{\circ}$ با

$$\vec{E}=\frac{\rho_\circ \rho\hat{\rho}}{2\varepsilon_\circ};\quad \rho=\sqrt{\frac{R^2}{16}+\frac{R^2}{16}}=\sqrt{\frac{R^2}{8}}=\frac{R}{z\sqrt{2}}$$

اگر $\vec{E}_1$ میدان حاصل از استوانۀ توپر به چگالی $\rho_\circ$ و $\vec{E}_2$ میدان حاصل از حفره‌ائی که بار آن $\rho_\circ$- فرض شده باشد میدان کل در نقطۀ P

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1=\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}\frac{R}{2\sqrt{2}}\left(\hat{i}Cos45+\hat{j}Sin45\right)$$

$$\vec{E}_2=\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}\frac{R}{2\sqrt{2}}\left(\hat{i}Cos45-\hat{j}Sin45\right)$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{\rho_\circ R}{4\varepsilon_\circ\sqrt{2}}=\hat{i}Cos45=\frac{\rho_\circ R}{2\varepsilon_\circ\sqrt{2}}Cos45\hat{i}$$

$$\vec{F}=\lambda\vec{E}=\frac{\lambda\rho_\circ R}{2\varepsilon_\circ\sqrt{2}}Cos45\hat{i}$$

۳-۲۲-۲ مثال ۱۷

بار الکتریکی با چگالی $\rho_\circ$ در استوانه‌ای بسیار طویل به شعاع R بطور یکنواخت توزیع شده است. اگر حفره‌ای کروی به شعاع $\frac{R}{2}$ مطابق شکل در آن ایجاد شود:

الف- پتانسیل نقطۀ $A(x_A,z_A)$ که در خارج استوانه قرار دارد را به دست آورید.

ب- نقطۀ $B(x_B,z_B)$ در داخل حفره کروی قرار دارد. اختلاف پتانسیل بین دو نقطۀ A و B را محاسبه نمائید.

میدان استوانۀ بسیار طویل به چگالی $\rho_\circ$ در نقاط داخل و خارج آن

$$E_\circ 2\pi\rho l=\frac{\rho_\circ\pi R^2 l}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow\vec{E}_\circ=\frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ\rho}(\hat{\rho})$$

$$E_i 2\pi\rho l=\frac{\rho_\circ\pi\rho^2 l}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow\vec{E}_i=\frac{\rho_\circ\rho^2}{2\varepsilon_\circ}(\hat{\rho})$$

میدان کره‌ائی به شعاع $\frac{R}{2}$ و چگالی بار $\rho_\circ$- در نقاط داخل و خارج آن

$$-E_\circ 4\pi r^2=-\frac{\rho_\circ \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow\vec{E}_i=\frac{\rho_\circ R^2}{24\varepsilon_\circ r^2}(-\hat{r})$$

$$-E_i 4\pi r^2=-\frac{\rho_\circ \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow\vec{E}_i=\frac{\rho_\circ r}{3\varepsilon_\circ}(-\hat{r})$$

الف: پتانسیل نقطهٔ A

$$\varphi_A = \hat{\varphi} + \varphi^A$$

کره استوانه

$$\varphi^A = -\int_{\infty}^{r_A} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_{\infty}^{r_A} \frac{\rho_\circ R^3}{24\varepsilon_\circ r}(-\hat{r}).\hat{r}dv$$

کره

$$= \frac{\rho_\circ R^3}{24\varepsilon_\circ}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{r_A} = -\frac{\rho_\circ R^3}{24\varepsilon_\circ}\frac{1}{r_A}$$

$$\varphi^A = -\int_{\infty}^{r_A} \frac{\rho_\circ R^3}{2\varepsilon_\circ \rho}\hat{\rho}.\hat{\rho}d\rho = -\frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ}\ln\rho\Big|_{\infty}^{x_A}$$

استوانه

$$= -\frac{\rho_\circ R^3}{2\varepsilon_\circ}\ln x_A + \infty$$

سپس پتانسیل در نقطهٔ A

$$\varphi_A = \varphi^A + \varphi^A = -\frac{\rho_\circ R^3}{24\varepsilon_\circ}\frac{1}{\left(x_A^2 + z_A^2\right)^{1/2}} - \frac{\rho_\circ R^3}{2\varepsilon_\circ}\ln x_A + \infty$$

کره استوانه

ب- پتانسیل نقطهٔ B

$$\varphi^B = -\int_{\infty}^{r_B} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_{\infty}^{R/2} \vec{E}_\circ.\overrightarrow{dl} - \int_{R/2}^{r_B} \vec{E}_i.\overrightarrow{dl}$$

کره

$$= -\int_{\infty}^{R/2} \frac{\rho_\circ R^3(-\hat{r})}{24\varepsilon_\circ r^2}.\hat{r}dr - \int_{R/2}^{r_B} \frac{\rho_\circ r}{3\varepsilon_\circ}(-\hat{r}).\hat{r}dr$$

$$\varphi^B = \frac{\rho_\circ R^3}{24\varepsilon_\circ}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{R/2} + \frac{\rho_\circ}{3\varepsilon_\circ}\frac{1}{2}r^2\Big|_{R/2}^{\sqrt{x_B^2+z_B^2}}$$

کره

$$= -\frac{\quad^3}{24\varepsilon_\circ}\frac{2}{R} + \frac{\rho_\circ}{6\varepsilon_\circ}\left[\left(x_B^2 + z_B^2\right) - R^2/4\right]$$

$$= \frac{\rho_\circ R^2}{12\varepsilon_\circ} + \frac{\rho_\circ}{6\varepsilon_\circ}\left[\left(x_B^2 + z_B^2\right) - R^2/4\right]$$

$$\varphi^B = -\int_{\infty}^{x_B} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}_\circ.\overrightarrow{dl} - \int_{R}^{x_B} \vec{E}_i.\overrightarrow{dl}$$

استوانه

$$= -\int_{\infty}^{R} \frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ \rho}\hat{\rho}.\hat{\rho} d\rho - \int_{R}^{x_B} \frac{\rho_\circ \rho}{2\varepsilon_\circ}\hat{\rho}.\hat{\rho} dl$$

$$= -\frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ}\ln\rho\Big|_{\infty}^{R} - \frac{\rho_\circ}{4\varepsilon_\circ}\rho^2\Big|_{R}^{x_B}$$

$$= -\frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ}\ln R + \infty - \frac{\rho_\circ}{4\varepsilon_\circ}x_B^2 + \frac{\rho_\circ}{4\varepsilon_\circ}R^2$$

پس پتانسیل در نقطهٔ B

$$\varphi_B = \underset{\text{کره}}{\varphi^B} + \underset{\text{استوانه}}{\varphi^B}$$

$$\varphi_B = -\frac{\rho_\circ R^2}{12\varepsilon_\circ} + \frac{\rho_\circ}{6\varepsilon_\circ}\left[\left(x_B^2 + z_B^2\right) - R^2/4\right]$$

$$-\frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_1}\ln R + \infty - \frac{P_\circ}{4\varepsilon_\circ}x_B^2 - \frac{\rho_\circ}{4\varepsilon_\circ}R^2 \quad \vec{F} = q\vec{E} \qquad = \hat{k}\sigma$$

اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ A و B

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\frac{\rho_\circ R^2}{12\varepsilon_\circ} + \frac{\rho_\circ}{6\varepsilon_\circ}\left[\left(x_B^2 + z_B^2\right) - \frac{R^2}{4}\right]$$

$$-\frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ}\ln R + \cancel{\infty}\frac{\rho_\circ}{4\varepsilon_\circ}x_B^2 + \frac{\rho_\circ}{4\varepsilon_\circ}R^2 +$$

$$+\frac{\rho_\circ R^3}{24\varepsilon_\circ}\frac{1}{\left(x_A^2 + z_A^2\right)^{1/2}} + \frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ}\ln x_A - \cancel{\infty}$$

۴-۲۲-۲ مثال ۱۸

دو تیغهٔ بار بینهایت به چگالی حجمی بار یکنواخت ρ و ρ- یکدیگر را مطابق شکل قطع نموده‌اند.

الف- میدان الکتریکی را برای نقاط $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ به دست آورید.

ب- اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ P_1 و P_2 را محاسبه نمائید.

حلّ:

میدان الکتریکی خارج تیغهٔ $+\rho$ $\qquad \vec{E}_\rho^\circ = \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\hat{j}$

" " داخل " " $\qquad \vec{E}_\rho^i = \frac{\rho y}{\varepsilon_\circ}\hat{j}$

میدان الکترکی خارج تیغهٔ $-\rho$ $\qquad \vec{E}_{-\rho}^\circ = \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\left(-\hat{i}\right)$

" " داخل " " $\vec{E}^{i}_{-\rho} = \frac{\rho x}{\varepsilon_\circ}\left(-\hat{i}\right)$

الف- میدان در P_1 و P_2

میدان در P_1 $\quad \vec{E}_1 = \vec{E}^{\circ}_{\rho} + \vec{E}^{\circ}_{-\rho} = \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\hat{j} - \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\hat{i}$

میدان در P_2 $\quad \vec{E}_2 = \vec{E}^{\circ}_{\rho} + \vec{E}^{\circ}_{-\rho} = \frac{\rho y}{\varepsilon_\circ}\hat{j} - \frac{\rho x}{\varepsilon_\circ}\hat{i}$

ب- اختلاف پتانسیل بین P_1 و P_2

$$\Delta\varphi = -\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2}\vec{E}.\vec{dl} = -\int_{(x_1,y_1)}^{(d,y_1)}\left(\frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\hat{j} - \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\hat{i}\right).\hat{i}dx$$

$$-\int_{(d,y_1)}^{(x_2,y_1)}\left(\frac{\rho y_1}{\varepsilon_\circ}\hat{j} - \frac{\rho x}{\varepsilon_\circ}\hat{i}\right).\hat{i}dx - -\int_{(x_2,y_1)}^{(x_2,d)}\left(\frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\hat{j} - \frac{\rho x}{\varepsilon_\circ}\hat{i}\right).\hat{i}dy$$

$$-\int_{(x_2,d)}^{(x_2,y_2)}\left(\frac{\rho y}{\varepsilon_\circ}\hat{j} - \frac{\rho x}{\varepsilon_\circ}\hat{i}\right).\hat{i}dy$$

$$= \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\left(d - x_1\right) - \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\frac{1}{2}x^2\Big|_d^{x_2} - \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\left(d - y_1\right) - \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\frac{1}{2}y^2\Big|_d^{y_2}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\left(d - x_1\right) - \frac{\rho}{2\varepsilon_\circ}\left(x_2^2 - d^2\right) - \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\left(d - y_1\right) - \frac{\rho}{2\varepsilon_\circ}\left(y_2^2 - d^2\right)$$