www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ایران

فیزیک ۲

فصل ۱۲

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

قانون القاء فاراده

فاراده در سال ۱۸۳۱ کشف کرد که با تغییر میدان مغناطیسی با زمان میدان الکتریکی تولید می‌شود. این پدیده به عنوان القاء فاراده در الکترومغناطیس شناخته می‌شود. در شکلی یکی از آزمایش‌های فاراده نشان داده می‌شود.

فاراده نشان داد که گالوانومتر جریانی را ثبت نخواهد کرد و اگر آهنربا نسبت به حلقه ساکن باشد. ولی جریانی در حلقه القاء خواهد شد. موقعی که حرکت نسبی بین آهنربا و حلقه موجود باشد. بخصوص گالوانومتر در یک جهت منحرف می‌شود اگر آهنربا به حلقه نزدیک شود و در جهت مخالف اگر از یکدیگر دور شوند. فاراده نشان داد که جریان الکتریکی در حلقه با میدان مغناطیسی متغیر تولید می‌شود. بطور تجربی مشخص شده است که نیروی محرکهٔ القائی emf به آهنگ تغییر شار مغناطیسی در حلقه بستگی دارد.

شار مغناطیسی

میدان مغناطیسی یکنواختی که از سطح S میگذرد را مطابق شکل در نظر بگیرید.

اگر سطح را با $\vec{A} = A\hat{n}$ نشان دهیم به طوری که S مساحت سطح و $\hat{n}$ بردار یکهٔ عمود به سطح باشد، شار مغناطیسی گذرنده از سطح

$$\rho$$

$$B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\left(d + \rho\cos\theta\right)}$$

$$\Phi_{\vec{B}} = \vec{B}.\vec{A} = BAcosr \qquad \varepsilon\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$+\frac{d}{\cos^2\theta}\ln d \,\Big]$$

که در آن γ زاویهٔ بین $\vec{B}$ و $\hat{n}$ است. اگر میدان غیر یکنواخت باشد، و $\Phi_{\vec{B}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_s \vec{B}.\overrightarrow{ds}$$

قانون القاء فاراده را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

نیروی محرکه القائی ε در یک حلقه متناسب است با منفی آهنگی تغییرات شار مغناطیسی برای یک پیچه که شامل N دور است: emf القاء شده N برابر بزرگتر است یعنی

$$\varepsilon=-N\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

با ترکیب قانون القاء فاراده و تعریف شار

$$\varepsilon=-\frac{d}{dt}\left(BA\cos\theta\right)=-\frac{dB}{dt}A\cos\theta-B\left(\frac{dA}{dt}\right)\cos\theta$$
$$+BASin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

مشاهده می‌شود که emf می‌تواند از طروق زیر القاء شود.

(i) با تغییر مقدار $\vec{B}$ با زمان

(ii) با تغییر دادن مساحت سطح حلقه با زمان

(iii) تغییر دادن زاویۀ $\vec{B}$ و بردار سطح $\vec{S}$ با زمان

قانون لنز

جهت جریان القائی توسط قانون لنز تعیین می‌شود.

میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان القائی باید با تغییر شار مغناطیسی که این جریان را القاء کرده مخالفت نماید.

نیروی محرکه حرکتی:

میله هادی به طول l در میدان مغناطیسی یکنواخت که به طرف داخل صفحه ای حرکت می‌کند (مطابق شکل) به بار $q>0$ داخل میله نیروی $\vec{F}=q\vec{V}\times\vec{B}$ وارد لذا این بارها به طرف بالا حرکت می‌کنند و بارهای منفی روی لبۀ پائینی میله باقی می‌مانند.

جدائی بار باعث تولید میدان الکتریکی $\vec{E}$ در داخل میله می‌شود که این میدان به نوبه خود تولید نیروی الکتریکی به طرف پایین می‌نماید. $\vec{F}_e=q\vec{E}$

در تعادل وقتی که دو نیرو یکدیگر را خنثی می‌نمایند. داریم qVB=qE یا E=VB لذا بین دو سر هادی اختلاف پتانسیل $V_{ab}=V_a-V_b=\varepsilon=El=BlV$ ایجاد می‌شود چون ε از حرکت هادی به وجود می‌آید آن را نیروی محرکه (emf) حرکت نامند. به طور کلی با توجه به تعریف نیروی محرکه حول یک مدار بسته

$$\varepsilon=\oint\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

اگر در نیروی محرکه حرکتی میدان الکتریکی $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}=\vec{V}\times\vec{B}$ تعریف شود. emf حرکتی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\varepsilon=\oint(\vec{V}\times\vec{B}).\vec{dl}$$

در رابطهٔ فوق $\vec{dl}$ المان طول مدار است.

حال فرض کنید میله هادی در ناحیه‌ائی از فضا که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=-B\hat{k}$ (به طرف داخل صفحه) وجود دارد روی دو ریل هادی بدو اصطکاک می‌لغزد. فاصله دو ریل از یکدیگر l و توسط مقاومت R به یکدیگر متصل‌اند. نیروی خارجی $\vec{F}_{ext}$ برای حرکت دادن میله با سرعت $\vec{V}=V\hat{i}$ به رف راست به آن اعمال می شود. شار مغناطیسی گذرنده از مدار بسته که از ریل‌ها تشکیل شده است.

$$\Phi_{\vec{B}}=BA=Blx$$

طبق قانون فاراده نیروی محرکهٔ القائی

$$\varepsilon=-\frac{d\varphi_{\vec{B}}}{dt}=-\frac{d}{dt}(Blx)=-Bl\frac{dx}{dt}=BlV$$

به طوری که $V=\frac{dx}{dt}$ سرعت میله‌است. جریان القاء شده در مدار

$$I=\frac{|\varepsilon|}{R}=\frac{BlV}{k}$$

و جهت آن طبق قانون لنز پاد ساعتگرد است. مدار معادل مطابق شکل نیروی مغناطیسی وارد به میله وقتی به طرف راست حرکت می‌کند. برابر است با

$$\vec{F}=I\left(l\hat{j}\right)\times\left(-B\hat{k}\right)=-IlB\hat{i}$$

$$=-\left(\frac{B^2l^2V}{R}\right)\hat{i}$$

که در خلاف جهت $\vec{V}$ است. برای این که میله با سرعت ثابت حرکت کند، باید نیروی کل وارد به آن صفر باشد. یعنی عامل خارجی باید نیروی زیر را اعمال نماید.

$$\vec{F}_{ext}=-\vec{F}=+\left(\frac{B^2l^2V}{R}\right)\hat{i}$$

توان انتقالی توسط $\vec{F}_{ext}$ برابر است با توان مستهلک شده در مقاومت

$$P=\vec{F}_{ext}.\vec{V}=F_{ext}V=\left(\frac{B^2l^2V}{R}\right)V$$

$$=\left(\frac{B^2l^2V}{R}\right)=\frac{q^2}{R}=I^2R$$

چیزی که لازمهٔ قانون بقاء انرژی ایست.

میدان الکتریکی القائی

قانون فاراده اظهار می‌دارد که با تغییر میدان مغناطیسی با زمان جریان القائی ایجاد می‌شود. چیزی که باعث حرکت بارها می‌شود، میدان الکتریکی غیر پایستار وابسته به نیروی محرکه (emf) القاء شده است. لذا می‌توانیم قانون فاراده را به صورت زیر بنویسیم

$$\oint \vec{E}.\vec{dl}=-\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

رابطهٔ بالا می‌گوید که شار مغناطیسی متغیر باعث القاء میدان الکتریکی غیر پایستار می‌شود، تفاوت گذاشتن بین میدان الکتریکی غیر پایستار القائی و میدان الکتریکی پایستار تولید شده توسط بارهای الکتریکی، مهم است. به عنوان مثال میدان مغناطیسی یکنواختی که به طرف داخل صفحه است و به ناحیهٔ دایروی به شعاع R محدود است (مطابق شکل) را در نظر بگیرید. فرض کنید که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با زمان افزایش پیدا می‌کند یعنی $\frac{dB}{dt}>0$.

می‌خواهیم میدان مغناطیسی را در نقاط داخل و خارج این ناحیه دایروی پیدا کنیم. چون میدان مغناطیسی به نحیه دایروی محدود شده است با توجه به تقارن مسأله، مسیر انتگرل‌گیری را دایره‌ائی به شعاع ρ انتخاب می‌نمائیم. مقدار میدان القاء شده $\vec{E}$ روی تمام نقاط دایره یکسان است. طبق قانون لنز جهت $\vec{E}$ باید به جهتی باشد که میدان مغناطیسی حاصل از جریان القاء شده با تغییرات شار مخالفت نماید. $\frac{dB}{dt}>0$

ابتدا برای ناحیه $\rho<R$ آهنگ تغییر شار مغناطیسی

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(BA_s\right)=\pi\rho^2\frac{dB}{dt}$$

قانون فاراده

$$\oint \vec{E}.dl=E2\pi\rho=-\frac{d\varphi_{\vec{B}}}{dt}=-\pi\rho^2\frac{dB}{dt}$$

$$E=-\frac{\rho}{2}\frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E}=-\frac{\rho}{2}\frac{dB}{dt}\hat{\varphi}$$

مشابهاً برای $\rho > R$ ، میدان الکتریکی القاء شده را می‌توان از طریق زیر به دست آورد.

$$E\left(2\pi\rho\right) = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}\pi R^2$$

$$\vec{E} = -\frac{R^2}{2\rho}\frac{dB}{dt}\left(\hat{\varphi}\right)$$

نمودار E بر حسب ρ در شکل نمایش داده شده است.

ژنراتور

یکی از مهمترین کاربردهای قانون القاء فاراده ژنراتورها هستند. ژنراتورها مُبدل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی هستند. شکل نمایش ساده از یک ژنراتور را نشان می‌دهد. شامل یک پیچه دوار N حلقه‌ای در میدان مغناطیسی یکنواخت است. چون شار مغناطیسی با زمان تغییر می‌کند لذا نیروی محرکه در سیم پیچ القاء می‌شود. از شکل مشاهده می‌کنیم که شار مغناطیسی گذرنده از حلقه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Phi_{\vec{B}} = \vec{B}.\vec{A} = BA\cos\theta = BA\cos\omega t$$

تصویر از بالای حلقهٔ دوار   بارالکتریکی یک ژنراتور ساده

آهنگ تغییر شار مغناطیسی

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -BA\omega\sin\omega t$$

چون N دور پیچه موجود است، نیروی محرکهٔ القائی (emf) دو سر سیم پیچ برابر است با

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = NBA\omega\sin\omega t$$

اگر ژنراتور را به یک مدار که دارای مقاومت R است متصل کنیم، جریان تولید شده در مدار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$I = \frac{\left|\varepsilon\right|}{R} = \frac{NBA\omega}{R}\sin\omega t$$

جریان نوسانی و دامنهٔ آن: $I_{\circ} = \frac{NBA\omega}{R}$ است. توان انتقال یافته به مدار

$$P = I\left|\varepsilon\right| = \frac{\left(NBA\omega\right)^2}{R}\sin^2\omega t$$

گشتاور اعمال شده به حلقه

$$\vec{\tau} = \mu \times \vec{B} \Rightarrow \mu = \mu B \sin\theta = \mu B \sin\omega t$$

لذا توان مکانیکی لازم برای چرخاندن حلقه

$$P_m = \tau\omega = \mu B\omega \sin\omega t$$

چون ممان دو قطبی پیچه یا N دور حامل جریان برابر است با

$$\mu = NIA = \frac{N^2 A^2 B\omega}{R}\sin\omega t$$

رابطهٔ فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$P_m = \left(\frac{N^2 A^2 B\omega}{R}\sin\omega t\right)\left(B\omega \sin\omega t\right)$$

$$= \frac{\left(NAB\omega\right)^2}{R}\sin^2\omega t$$

همانطور که انتظار می‌رود توان مکانیکی ورودی برابر است با توان الکتریکی خروجی.

جریان‌های گردابی eddy cussents

مشاهده کردیم که وقتی یک حلقه هادی در میدان مغناطیسی حرکت کند در آن جریان القاء می‌شود. اگر یک نوار یا تیغهٔ هادی به جای حلقه مطابق شکل در میدان مغناطیسی به حرکت درآورده شود در آن جریان گردشی القاء می شود که ما آن را جریان گردابی (eddy) می‌نامیم.

جریان گردابی نیز تولید نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ می‌نماید که با حرکت مخالفت می‌نماید که باعث می‌شود حرکت دادن هادی در میدان مغناطیسی مشکل‌تر شود.

چون هادی دارای مقاومت غیر صفر R است، حرارت ژول باعث از دست دادن توان به مقدار $P = \varepsilon^2/R$ می‌شود. بنابراین با افزایش مقدار R، می‌توان توان تلف شده را کاهش داد. برای کاهش R می‌توان تیغهٔ هادی را از به هم چسباندن نوارهائی که از یکدیگر ایزوله‌اند و یا با برش دادن تیغه به طوری که باعث قطع مسیر جریان شویم. (مطابق شکل)

کاربرد مهمی که برای جریان‌های گردابی وجود دارد. به طور مثال کاهش نوسانات مکانیکی ناخواسته یا سیستم مرکز مغناطیسی در وسائل حمل و نقل با سرعت بالاست.

مثال۱: یک میلۀ مسی به طول Lو به طول L در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، مطابق شکل با فرکانس زاویه‌ای ω می‌چرخد نیروی محرکه الکتریکی تولید شده میان دو سر میله را پیداکنید.

حلّ:

نیروی محرکه حرکتی

$$\varepsilon = \int \left(\vec{V} \times \vec{B}\right).\vec{dl}$$

المان طول میله $d\rho$ که در فاصله ρ از مرکز دوران O قرار دارد دارای سرعت خطی $\vec{V}$ است. نیروی محرکه القاء شده در این المان طول $d\varepsilon$ را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \left(V\hat{\varphi} \times B\hat{k}\right).\hat{\rho} d\rho \\ &= VB\hat{\rho}.\hat{\rho} d\rho = VBd\rho = \left(\rho\omega\right) Bd\rho \\ &= \omega B\rho d\rho \end{aligned}$$

نیروی محرکه القاء شده در طول L میله

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{\circ}^{L} \omega B\rho d\rho = \tfrac{1}{2}\omega B\rho^2 \Big|_{\circ}^{L} \\ &= \tfrac{1}{2}\omega BL^2 \end{aligned}$$

این نتیجه را با روش دیگری نیز می‌توان به دست آورد. شاری که از قطاع POQ می‌گذرد، عبارتست از:

$$\Phi_{\vec{B}} = BA = B\left(\tfrac{1}{2}L^2\theta\right)$$

که در آن $\tfrac{1}{2}L^2\theta$ مساحت قطاع است، با مشتق گرفتن از رابطه بالا داریم

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \tfrac{1}{2}BL^2\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}B\omega L^2$$

این مقدار دقیقاً بزرگی εرا نشان می‌دهد که با نتیجۀ به دست آمدۀ قبلی مطابقت دارد.

مثال ۲

میله‌ای به طول L مطابق شکل در میدان مغناطیسی یکنواخت به طرف خارج صفحه نوسان می‌کند به طوری که زاویۀ میله در هر لحظه با محور قائم برابر $\theta(t) = \theta_{\circ}\cos\omega t$ است نیروی محرکه القاء شده بین دو سر میله چه مقدار است؟

حلّ:

نیروی محرکه حرکتی $\varepsilon = \int \left(\vec{V} \times \vec{B}\right).\vec{dl}$

$$\varepsilon = \int_{\circ}^{L} \left(\rho\theta^{\circ}\hat{\varphi} \times B\hat{k} \right).\hat{\rho}d\rho$$

$$\varepsilon = \int_{\circ}^{L} \rho B\theta^{\circ}\hat{\rho}.\hat{\rho}d\rho = -\int_{\circ}^{L} \rho B\omega\theta_{\circ} \sin\omega t d\rho$$

$$|\varepsilon| = -\tfrac{1}{2}\rho^{2}B\omega\theta_{\circ}\sin\omega t\Big|_{\circ}^{L} = \tfrac{1}{2}B\omega L^{2}\theta_{\circ}\sin\omega t$$

مثال ۴

میان مغناطیسی در ناحیه‌ای با تقارن استوانه‌ای به شعاع R با زمان تغییر می‌کند. به طوری که $\vec{B} = B_{\circ}e^{\alpha t}\hat{k}$ (ثابت = $B_{\circ}$ و $\alpha > \circ$)

الف- میدان الکتریکی حاصل را در یک نقطه داخل استوانه و همچنین در یک نقطه خارج استوانه به دست آورید.

ب- اگر میله رسانائی مطابق شکل به فاصله $h_{\circ}$ از محور قرار داشته باشد نیروی محرکه القایی را در آن محاسبه نمائید.

ج- اگر میله با سرعت ثابت $\vec{V}$ در جهت مثبت محور y شروع به حرکت کند. نیروی محرکهٔ القایی در میله را بر حسب زمان به دست آورید.

حلّ:

میدان الکتریکی

قانون فاراده
$$\oint \vec{E}.\vec{dl} = -d\frac{\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

نقاط داخل
$$E_{i}2\pi\rho = -\frac{d}{dt}\left(B_{\circ}e^{\alpha t}\pi\rho^{2}\right)$$

$$\vec{E}_{i} = -\alpha B_{\circ}e^{\alpha t}\,\rho/2\,\hat{\varphi}$$

نقاط خارج
$$E_{\circ}2\pi\rho = -\frac{d}{dt}\left(B_{\circ}e^{\alpha t}\pi R^{2}\right)$$

$$\vec{E}_{\circ} = -B_{\circ}\alpha e^{\alpha t}\frac{R^{2}}{2\rho}\hat{\varphi}$$

نیروی محرکهٔ میله ساکن

$$\varepsilon = \int \vec{E}.\vec{dl}$$

$$\varepsilon = \int_{-\sqrt{R^{2}-h_{\circ}^{2}}}^{+\sqrt{R^{2}-h_{\circ}^{2}}} -\alpha B_{\circ}e^{\alpha t}\,\rho/2\,\overbrace{\left(-\hat{i}R\varphi + \hat{j}\cos\varphi\right)}^{-\sin\varphi}.\hat{i}dx$$

$$\sin\varphi = h_{\circ}/\rho$$

$$\varepsilon = \int_{-\sqrt{R^{2}-h_{\circ}^{2}}}^{\sqrt{R^{2}-h_{\circ}^{2}}} \alpha B_{\circ}e^{\alpha t} \times \frac{h_{\circ}}{\rho}dx = \alpha B_{\circ}e^{\alpha t} \quad h = \sqrt{R^{2}-h_{\circ}^{2}}$$

نیروی محرکهٔ میلهٔ متحرک

قانون فاراد

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

$$= \int -\frac{d\vec{B}}{dt}.\overrightarrow{ds} + \int \left(\vec{V} \times \vec{B}\right).\overrightarrow{dl}$$

رابطه بالا می‌گوید که نیروی محرکهٔ القاءشده بین دو سر میله برابر است با نیروی محرکه القاء شده در میله به دلیل تغییر میدان مغناطیسی بعلاوه نیروی محرکه القاءشده در میله در اثر حرکت میله. نکته مهم در قانون فاراده آنست که این دو اثر را می‌توان بطور مجزا از یکدیگر محاسبه نمود. یعنی در یک لحظه فرض کنید که میله ساکن است، نیروی محرکه در اثر تغییر میدان با زمان محاسبه می‌شود و بعد فرض کنید میدان با زمان ثابت است و فقط میله با سرعت $\vec{V}$ حرکت می‌کند و در این حالت نیروی محرکه القاء شده در میله را در اثر حرکت محاسبه نمائید و بعد این دو نیرو محرکه را با جمع نمائید و بعد این دو نیرو محرکه را با جمع نمائید تا نیروی محرکه کل در اثر حرکت و تغییر میدان با زمان به دست آید.

$$h(t) = h_{\circ} + Vt$$

$$\rho = \left(h^2 + x^2\right)^{1/2}$$

نیروی محرکه مربوط به حرکت میله

$$\varepsilon_1 = \int \left(\vec{V} \times \vec{B}\right).\overrightarrow{dl} = \int_{-\sqrt{R^2+h^2}}^{\sqrt{R^2+h^2}} \left(V\hat{j} + B_{\circ} e^{\alpha t}\hat{k}\right).\hat{i}dk$$

در رابطه فوق $h^2 = \left(h_{\circ} + Vt\right)^2$

نیروی محرکه مربوط به تغییر میدان با زمان

$$\varepsilon_2 = \int_{-\sqrt{R^2-h_{\circ}^2}}^{-\sqrt{R^2-h^2}} \vec{E}_{\circ}.\overrightarrow{dl} + \int_{-\sqrt{R^2+h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} \vec{E}_i.\overrightarrow{dl} + \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h_{\circ}^2}} \vec{E}_{\circ}.\overrightarrow{dl}$$

$$\varepsilon_2 = \int_{-\sqrt{R^2-h_{\circ}^2}}^{-\sqrt{R^2-h^2}} B_{\circ}\alpha e^{\alpha t}\frac{R^2}{2\rho}\left(-\sin\varphi\right)dx$$

$$+\int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} -\alpha B_{\circ} e^{\alpha t}\frac{\rho}{2}\left(-\sin\varphi\right)dx + \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h_{\circ}^2}} -B_{\circ}\alpha e^{\alpha t}\frac{R^2}{2}\left(-R\varphi\right)dx$$

$$\varepsilon_2 = \frac{B_{\circ}\alpha e^{\alpha t}R^2}{L}\int_{-\sqrt{R^2-h_{\circ}^2}}^{-\sqrt{R^2-h^2}} \frac{h}{\rho}dx + \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} \frac{\alpha B_{\circ} e^{\alpha t}}{2}\frac{\rho h}{\rho}dx$$

$$+\int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h_{\circ}^2}} B_{\circ}\alpha e^{\alpha t}\frac{R^2}{2\rho}\frac{h}{\rho}dx$$

$$\varepsilon_2 = B_\circ \alpha e^{\alpha t} R^2 h \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h_\circ^2}} \frac{dx}{h^2+x^2} + B_\circ \alpha e^{\alpha t} h\sqrt{R^2-h^2}$$

$$\varepsilon_2 = B_\circ \alpha e^{\alpha t} R^2 h \frac{1}{n} \tan^{-1}\frac{x}{h}\Big|_{\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h_\circ^2}} + B_\circ \alpha e^{\alpha t} h\sqrt{R^2-h^2}$$

$$\varepsilon_2 = B_\circ \alpha e^{\alpha t} R^2 \left[\tan^{-1}\sqrt{R^2-h_\circ^2} - \tan^{-1}\sqrt{R^2-h^2}\right] + B_\circ \alpha e^{\alpha t} h\sqrt{R^2-h^2}$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2VB_\circ e^{\alpha t}\sqrt{R^2-h^2} + B_\circ e^{\alpha t} R^2 \left[\tan^{-1}\sqrt{R^2-h_\circ^2} - \right.$$

$$\left. \tan^{-1}\sqrt{R^2-h^2}\right] + B_\circ \alpha e^{\alpha t} h\sqrt{R^2-h^2}$$

مثال ۵

میدان مغناطیسی یکنواخت در تقارن استوانه‌ای به شعاع R مطابق شکل با زمان تغییر می‌کند ($\frac{dB}{dt} < \circ$ یعنی با زمان کم می‌شود)

الف- جهت و مقدار میدان الکتریکی القائی را در نقاط داخل $\rho < R$ و خارج $\rho > R$ تقارن به دست آورید.

ب- نیروی الکتریکی وارد به صفحه‌ای به ابعاد $2R \times 2R$ که بر تقارن استوانه‌ای مماس و دارای بار سطحی به چگالی یکنواخت σ است را محاسبه نمائید.

ج- نیروی الکتریکی وارد به صفحه‌ای به چگالی بار سطحی یکنواخت σ به ابعاد $2R \times 2R$ را که مطابق شکل به محور استوانه عمود است را به دست آورید.

حلّ:

میدان الکتریکی با استفاده از قانون فاراده $\oint \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$

نقاط داخل $\rho < R$

$$E_i = \cancel{\pi}\cancel{\rho} = -\frac{d}{dt}\left(\pi\rho^2 B\right) = -\cancel{\pi}\rho^{\cancel{2}}\frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E}_i = -\frac{1}{2}\rho\frac{dB}{dt}(\hat{\varphi})$$

میدان مطابق شکل در جهت $+\hat{\varphi}$ است زیرا $-\frac{dB}{dt} > \circ$ است.

نقاط خارج $\rho > R$

$$2\cancel{\pi}\rho E_\circ = -\frac{d}{dt}\left(\pi R^2 B\right)$$

$$= -\cancel{\pi} R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E}_\circ = -\frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho}\frac{dB}{dt}\hat{\varphi}$$

میدان در جهت $+\hat{\varphi}$ است.

نیروی الکتریکي بر صفحه مماس

قبل از حلّ دقیق مسأله می‌توان از طریق فیزیکی جهت نیروی وارد به صفحه را تعیین نمود. شکل دو المان بار قرینه dq و نیروهای وارد به آنها $d\vec{F}$ را نمایش می‌دهد. همان طور که ازشکل پیداست برآیند آنها در جهت منفی محور ωx ست. لذا نیرو کل نیز باید در جهت $-\hat{i}$ باشد.

برای محاسبه نیرو

$$\vec{F} = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} dq\vec{E}_\circ = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\sigma dxdz\left(-\frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho}\frac{dB}{dt}\hat{\varphi}\right)$$

$$\rho = \left(R^2 + x^2\right)^{1/2}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\sigma R^2\frac{dB}{dt}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} dxdz\frac{-\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\sigma R^2\frac{dB}{dt}\left(-\hat{i}\right)\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} dxdz\frac{\cos\varphi}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma R^2\frac{dB}{dt}\left(+\hat{j}\right)\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} dxdz\frac{\cos\varphi}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

انتگرال دوّم صفر است زیرا $\int_{-R}^{R}\frac{x}{R^2+x^2}$ برابر صفر است. لذا

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\sigma R^3\frac{dB}{dt}\left(-\hat{i}\right)\int_{-R}^{R}\frac{x}{\left(R^2+x^2\right)}\int_{-R}^{R} dz$$

$$= -\sigma R^4\frac{dB}{dt}\left(-\hat{i}\right)\left(2\int_{\circ}^{R}\frac{dx}{R^2+x^2}\right)$$

با توجه به تابع اولیه $\int\frac{dx}{R^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

$$\vec{F} = -2\sigma R^4\frac{dB}{dt}\left(-\hat{i}\right)\frac{1}{R}\tan^{-1}\frac{x}{a}\Big|_{\circ}^{R}$$

$$\vec{F} = +2\sigma R^3\frac{dB}{dt}\left(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}\circ\right)\hat{i}$$

$$\vec{F}=\frac{\pi\sigma R^{3}}{2}\frac{dB}{dt}\left(\hat{i}\right)$$

نیرو در جهت منفی محور xهاست زیرا $\frac{dB}{dt}$ منفی ایست.

نیروی وارد به صفحه عمودی

$$\vec{F}=\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{R}\vec{E}_{i}\sigma\rho d\rho d\varphi$$

نیرو به قسمت دایروی

$$=\int_{\circ}^{R}\int_{\circ}^{2\pi}-\tfrac{1}{2}\rho\frac{dB}{dt}\hat{\varphi}\sigma\rho d\rho d\varphi$$

$$\vec{F}=-\frac{1}{2}\sigma\frac{dB}{dt}\hat{\varphi}\int_{\circ}^{R}\rho^{2}d\rho\int_{\circ}^{2\pi}\hat{\varphi}d\varphi$$

این انتگرال صفر است زیرا انتگرال روی پریود کامل $\hat{\varphi}$ برابر صفر است.

نیروی وارد به قسمت‌های خارج از قسمت دایروی طبق استدلال تقارن برآیند نیروی وارد به کل این چهار قسمت نیز برابر صفر است (مطابق شکل) لذا نیروی کل وارد به صفحه عمودی برابر صفر است. $\vec{F}_{t}=\circ$

مثال ۶

میله‌ای به طول L در مجاورت سیم بسیار طویل حامل جریان I را مطابق شکل قرار دارد و طبق رابطهٔ $\theta=\theta_{\circ}\cos\omega t$ نوسان می‌کند. نیروی محرکهٔ القائی بین دو سر میله را محاسبه نمایید.

$$\int\frac{xdx}{ax+b}=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^{2}}\ln\left(ax+b\right)$$

حلّ:

نیروی محرکهٔ حرکتی $\varepsilon=\int\left(\vec{V}\times\vec{B}\right).\vec{dl}$

$$\varepsilon=\int_{\circ}^{L}VBd\rho$$

$$V=\rho\overset{\circ}{\theta}=-\rho\theta_{\circ}\omega\sin\omega t$$

مقدار میدان الکتریکی سیم بسیار طویل حامل جریان I در فاصله ρ از آن

$$B=\frac{\mu_{\circ}I}{2\pi l}$$

در این مسأله میدان مغناطیسی حاصل از سیم بسیار طویل حامل جریان I روی طول میله $d\rho$ برابر است با

$$B=\frac{\mu_\circ I}{2\pi\left(d+\rho\cos\theta\right)}$$

$$\varepsilon=+\int_\circ^L -\rho\theta_\circ\omega\sin\omega t\,\frac{\mu_\circ I}{2\pi\left(d+\rho\cos\theta\right)}d\rho$$

$$\varepsilon=-\frac{\mu_\circ I\theta_\circ\omega\sin\omega t}{2\pi}\int_\circ^L\frac{\rho d\rho}{d+\rho\cos\theta}$$

$$\varepsilon=-\frac{\mu_\circ I\theta_\circ\omega\sin\omega t}{2\pi}\left[\frac{\rho}{\cos\theta}-\frac{d}{\cos^2\theta}\ln\left(\rho\cos\theta+d\right)\right]_\circ^L$$

$$\varepsilon=-\frac{\mu_\circ I\theta_\circ\omega\sin\omega t}{2\pi}\left[\frac{L}{\cos\theta}-\frac{d}{\cos^2\theta}\ln\left(L\cos\theta+d\right)+\frac{d}{\cos^2\theta}\ln d\right]$$

$$=-\frac{\mu_\circ I\theta_\circ\omega\sin\omega t}{2\pi}\left(\frac{L}{\cos\theta}+\frac{d}{\cos^2\theta}\ln\frac{d}{L\cos\theta+d}\right)$$

مثال ۷

میدان مغناطیسی یکنواخت $B_\circ$ در استوانه‌ای به شعاع R قرار دارد. دو بار q که توسط میلهٔ عایقی به طول l به یکدیگر متصل‌اند و توسط نخی بدون جرم از سقف آویزانند را مطابق شکل در نظر بگیرید. در صورتی که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بطور ناگهانی قطع شود. گشتاور نیروی وارد بر بارها را محاسبه و با استفاده از رابطه $\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ اندازه حرکت زاویه‌ای نهائی دو بار را به دست آورید.

حلّ:

با استفاده از قانون فاراده

$$\oint\vec{E}.\vec{dl}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}.\vec{ds}\quad x\left(t\right)=x_\circ\cos\left(\omega_\circ t+\varphi\right)=\circ\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=\circ\omega_\circ=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

برای نقاط خارج تقارن استوانه‌ای یعنی $\rho>R$

$$E_\circ 2\pi\rho=-\frac{d}{dt}\left(B\pi R^2\right)=-\pi R^2\frac{dB}{dt}$$

$$E_\circ=-\frac{R^2}{2\rho}\frac{dB}{dt}\Rightarrow\vec{E}=-\frac{R^2}{2\rho}\left|\frac{dB}{dt}\right|\hat{\varphi}$$

جهت حرکت بارها روی شکل نمایش داده شده است.

گشتاور

$$\vec{\tau} = 2\vec{r} \times \vec{F}$$
$$= \cancel{2}\frac{l}{\cancel{2}}\hat{\rho} \times q \frac{R^2}{\cancel{2}\frac{l}{\cancel{2}}}\left|\frac{dB}{dt}\right|\left(-\hat{\varphi}\right)$$
$$= qR^2\left|\frac{dB}{dt}\right|\left(-\hat{k}\right)$$

اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$
$$-qR^2\left|\frac{dB}{dt}\right|\hat{k} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow qR^2\frac{dB}{dt}\hat{k}dt = d\vec{L}$$
$$\int_{\circ}^{L} d\vec{L} = \int_{B}^{\circ} qR^2\frac{dB}{dt}dt\hat{k} \Rightarrow \vec{L} = qR^2B\left(-\hat{k}\right)$$

یا

$$L = qR^2B$$

القائیدگی

دو پیچه مطابق شکل نزدیک یکدیگر قرار دارند.
پیچه ۱ دارای N_1 دور و حامل جریان I_1 و میدان مغناطیسی حاصل از آن $\vec{B}_1$، چون دو پیچه نزدیک یکدیگرند، بعضی از خطوط میدان پیچه ۱ از پیچه ۲ می‌گذرند. فرض کنید Φ_{21} شار گذرنده از یک دور پیچه ۲ در اثر وجود جریان I_1 باشد. اگر I_1 با زمان تغییر کند. نیروی محرکه در اثر شاد مغناطیسی، در پیچه ۲ به وجود می‌آید.

$$\varepsilon_{21} = -N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -N_2\frac{d}{dt}\int \vec{B}_1.d\vec{s}_2$$

یک حلقه از

از آنجا که $\vec{B}_1$ متناسب است با I_1، آهنگ تغییر شار مغناطیسی Φ_{21} در پیچه ۲ با آهنگ تغییرات جریان دو پیچه ۱ متناسب است

$$\varepsilon_{21} = -N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

ضریب تناسب M_{21} را القاء متقابل نامند. آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}$$

در یکاهای SI واحد القاء متقابل هانری (H) است.

یک ولت - ثانیه

$$1 = 1H = 1\frac{T.m^2}{A} = \text{———————}$$ هانری

آمـپـر

القاء متقابل M_{21} به خواص هندسی دو پیچه نظیر تعداد دورها و شعاع پیچه‌ها وابسته است.

به طریق مشابه، فرض کنید به جای پیچه جریان I_2 در پیچه ۲ وجود داشته باشد و با زمان تغییر کند مطابق شکل نیروی محرکه القاء شده (emf) در پیچه ۱ به صورت

$$\varepsilon_{12} = -N_1\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_1\frac{d}{dt}\int \vec{B}_2.d\vec{s}_1$$

یـک حـلـقـه از

لذا جریانی در پیچه ۱ القاء می شود. شار مغناطیسی در پیچه ۱ با جریان متغیر در پیچه ۲ متناسب است. لذا

$$\varepsilon_{12} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

ضریب تناسب M_{12} القاء متقابل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M_{12} = \frac{N_1\Phi_{12}}{I_2}$$

می‌توان ثابت کرد که

$$M_{12} = M_{21} = M$$

مثال ۱

القاء متقابل دو حلقه به شعاع‌های R_1 و R_2 که روی یک صفحه قرار دارند را بیأبید. فرض کنید $R_1 >> R_2$.

حلّ:

برای محاسبه القاء متقابل، میدان مغناطیسی حلقه به شعاع R_1 و جریان I_1 در مرکز حلقه

$$B_1 = \frac{\mu_\circ I_1}{2R_1}$$

چون $R_1 >> R_2$ می‌توان میدان مغناطیسی روی سطح حلقهٔ داخلی را کلاً با B_1 تقریب زد. پس شار گذرنده از حلقه R_2 برابر است با

$$\varphi_{21} = B_1A_2 = \frac{\mu_\circ I_1}{2R_1}\pi R_2^2$$

$$= \frac{\mu_\circ \pi I_1 R_2^2}{2R_1}$$

لذا القاء متقابل به صورت زیر درمی‌آید

$$M = M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = -\frac{\mu_\circ \pi R_2^2}{2R_1}$$

نتیجه فوق نشان می‌دهد که M فقط به فاکتورهای هندسی R_1 و R_2 بستگی دارد.

خودالقائی

یک پیچه شامل N دور که حامل جریان I پادساعتگرد است را در نظر بگیرید. مطابق شکل اگر جریان مانا باشد، شار مغناطیسی پیچه ثابت باقی می‌ماند. ولی اگر فرض شود که جریان I با زمان تغییر کند طبق قانون فاراده emf القاءشده برای مخالفت با تغییر جریان ایجاد می‌شود. جریان القائی ساعتگرد اگر $\frac{dI}{dt} > \circ$ و پاد ساعتگرد اگر $\frac{dI}{dt} < \circ$ باشد. این پدیده را خودالقائی و نیروی محرکهٔ الکتریکی تولید شده را نیروی محرکهٔ خودالقایی می‌گویند. و آن را $M = M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = -\varepsilon_L$ نمایش می‌دهند. تمام حلقه‌های حامل جریان چنین خاصیتی را از خود بروز می‌دهند. یکی ازالمان های مدار که از خود خودالقائی بزرگی نشان می‌دهد و با نماد ( ) نشان داده می‌شود القاگر است.

نیروی محرکه خودالقائی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon_L = -N\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -N\frac{d}{dt}\int \vec{B}.d\vec{s}$$

یک حلقهٔ
پیچه

خودالقائی L به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L = \frac{N\Phi_{\vec{B}}}{I}$$

از لحاظ فیزیکی خودالقائی بخشی از مقاومت القاگر در مقابل تغییر جریان است.هر چه L بزرگتر باشد آهنگ تغییر جریان کمتر است.

مثال ۲ خودالقائی سولنوئید

خود القائی یک سولنوئید با N دور و به طول l و شعاع R را که حامل جریان I است را محاسبه نمائید.

حلّ:

با صرف نظر کردن از اثر لبه و بکارگیری قانون آمپر، میدان مغناطیسی داخل سولنوئید توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ NI}{l}\hat{k} = \mu_\circ nI\hat{k}$$

$n = \frac{N}{l}$ تعداد دور بر واحد طول است. شار مغناطیسی گذرنده از هر حلقه سولنوئید

$$\Phi_{\vec{B}} = BA = \mu_\circ nI\left(\pi R^2\right) = \mu_\circ nI\pi R^2$$

لذا خودالقائی برابر است با

$$L = \frac{N\Phi_{\vec{B}}}{I} = \mu_\circ n^2\pi R^2 l$$

مشاهده می‌شود که L فقط به فاکتورهای هندسی n، R و l بستگی دارد و مستقل از جریان است.

مثال ۳

خودالقائی یک تروئید که شامل N دور و سطح مقطع مستطیل شکل به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و ارتفاع h را محاسبه نمائید.

حلّ:

طبق قانون آمپر، میدان مغناطیسی تروئید از قانون آمپر به دست می‌آید

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \oint Bdl = B\oint dl = B\left(2\pi\rho\right) = \mu_\circ wI$$

$$B = \frac{\mu_\circ NI}{2\pi\rho}$$

شار مغناطیسی گذرنده از یک حقهٔ تروئید را می‌توان از انتگرال‌گیری روی سطح مقطع مستطیلی تروئید به دست آورد.

$$\Phi_{\vec{B}} = \int \vec{B}.\vec{ds} = \int_a^b \int_\circ^h \frac{\mu_\circ NI}{2\pi\rho} d\rho dz$$

$$= \frac{\mu_\circ NI}{2\pi} h \ln\frac{b}{a}$$

شار کل برابر است با $N\Phi_{\vec{B}}$. بنابراین خودالقائی تروئید

$$L=\frac{N\Phi_{\vec{B}}}{I}=\frac{\mu_\circ N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

مجدداً مشاهده می‌شود که خودالقائی تروئید به فاکتورهای هندسی وابسته است. فرض کنید که شرایط به گونه‌ای باشد که $a>>b-a$، در این حدّ، ترم لگاریتمی در معادله فوق را می‌توان بسط داد به طوری که

$$\ln\frac{b}{a}=\ln\left(1+\frac{b-a}{a}\right)\approx\frac{b-n}{a}$$

و خودالقائی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L\approx\frac{\mu_\circ NI}{2\pi}\frac{b-a}{a}=\frac{\mu_\circ N^2 A}{2\pi a}=\frac{\mu_\circ N^2 A}{l}$$

به طوری که $A=h(b-a)$ مساحت سطح مقطع و $l=2\pi a$ مشاهده می‌شود که خودالقائی تروئید در این حدّ مشابه سولنوئید است.

مثال ۴

یک سولنوئید بسیار طویل به طول l و به سطح مقطع A که شامل N_1 دور است را در نظر بگیرید. یک پیچه ایزوله با N_2 دور حول آن پیچیده شده است (مطابق شکل)

(a) القاء متقابل M را محاسبه نمائید، فرض کنید که تمام شار سولنوئید از پیچه خارجی نیز بگذرد

(b) القاء متقابل M را به خودالقائی‌های L_1 و L_2 سولنوئید و پیچه ربط دهید.

حلّ:

القاء متقابل

شار مغناطیسی از هر دور پیچه خارجی

$$\Phi_{21}=B_1A=\frac{\mu_\circ N_1 I_1}{l}A$$

به طوری که $B_1=\frac{\mu_\circ N_1 I_1}{l}$ میدان مغناطیسی یکنواخت داخل سولنوئید است.

پس القاء متقابل M

$$M=B_1=\frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_\circ N_1 N_2 A}{l}$$

رابطهٔ القاء متقابل M با L_1 و L_2

خودالقائی سولنوئید N_1 دوری توسط رابطهٔ

$$L_1=\frac{N_1\Phi_{11}}{I_1}=\frac{\mu_\circ N_1^2 A}{l}$$

به طوری که Φ_{11} شار گذرنده از یک دور سولنوئید در اثر میدان مغناطیسی حاصل از جریان I_1 است. مشابهاً برای پیچه $L_2 = \frac{\mu_\circ N_2^2 A}{l}$. لذا القاء متقابل را بر حسب L_1 و L_2 می‌توان به صورت رابطۀ زیر نوشت $M = \sqrt{L_1 L_2}$ تعریف می شود. به طوری که k به ضریب جفت شدگی معروف است. در مثال فوق k برابر یک گرفته شده زیرا فرض شده که تمام شار مغناطیسی تولید شده توسط سولنوید از پیچه خارجی می‌گذرد و بالعکس.

مدار RL

مداری شامل یک باطری، یک مقاومت و یک القاگر را مطابق شکل در نظر بگیرد. با استفاده از قانون حلقۀ کیرشهف از نقطۀ a مدار را ساعتگرد طی می‌کنیم. در مقاومت افت پتانسیل IR- در القاگر $\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$ چون $\frac{dI}{dt} > \circ$ است لذا با افت پتانسیل به اندازۀ ε_L مواجه می‌شویم. در باطری دارای افزایش پتانسیل به اندازۀ ε هستیم. لذا قانون حلقۀ کیرشهف برای مدار RL به صورت

$$-IR - L\frac{dI}{dt} + \varepsilon = \circ$$

طبق قانون حلقۀ کیرشهف جمع افت پتانسیل حول یک حلقه برابر صفر است، برای تعیین افت پتانسیل یک القاگر نیروی محرکۀ خودالقائی ε_L بنحوی‌ایست که طبق قانون لنز باید با تغییر جریان مقابله نماید. آهنگ تغییر جریان مثبت باشد $\frac{dI}{dt} > \circ$ (مطابق شکل)

$$\varepsilon_L = v_b - v_a = -L\frac{dI}{dt} < \circ$$

Emf خودالقائی ε_L جریان القائی I_{ind} را برقرار می‌سازد که در خلاف جهت جریان I است که با افزایش جریان مخالفت نماید. لذا القاگر را می‌توان با یک منبع emf تعویض نمود به طوری که $|\varepsilon_L| = L\left|\frac{dI}{dt}\right|$ به صورتی که در شکل نمایش داده شده است. از طرف دیگر اگر $|\varepsilon_L| = L\left|\frac{dI}{dt}\right|$ به صورتی که در شکل نمایش داده شده است. از طرف دیگر اگر $\frac{dI}{dt} < \circ$ باشد جریان القائی I_{ind} که

توسط نیروی محرکهٔ خودالقائی ε_L ایجاد می‌شود در جهت I است که با کاهش جریان مقابله نماید.

$$\varepsilon_L = v_b - v_a = -L\left(\frac{dL}{dt}\right) > \circ$$

مشاهده می‌شود که چه آهنگ تغییر جریان فزاینده $\left(\frac{dL}{dt} > \circ\right)$ و یا کاهش یابنده $\left(\frac{dL}{dt} < \circ\right)$ در هر دو حالت تغییر پتانسیل موقعی که از a به b در جهت جریان I حرکت کنیم

$$v_b - v_a = -L\left(\frac{dI}{dt}\right)$$

لذا قانون حلقه کیرشهف برای القاگر به صورت زیر بیان می شود

اگر یک القاگر در جهت جریان پیموده شود تغییر پتانسیل برابر است با $-L\frac{dI}{dt}$ و اگر در خلاف جهت جریان پیموده شود تغییر پتانسیل $+L\frac{dI}{dt}$

جهت حرکت $\leftarrow$	جهت حرکت $\rightarrow$
$\Delta v = v_a - v_b = +L\frac{dI}{dt}$	$\Delta v = v_b - v_a = -L\frac{dI}{dt}$

جریان افزایش یابنده

مدار RL مطابق شکل در نظر بگیرید در زمان $t=\circ$ کلید بسته شده است. مشاهده می‌شود که جریان بلافاصله به مقدار ماکزیمم آن ε/R فزایش پیدا نمی‌کند. زیرا در القاگر نیروی محرکه خودالقائی به وجود می‌آید.

مدار معادل برای قانون حلقهٔ کیرشهف مدار RL با جریان فزاینده

قانون حلقه کیرشهف برای جریان فزاینده $\frac{dI}{dt} > \circ$، معادله دیفرانسیل مدار RL را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon - IR - |\varepsilon_L| = \varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = \circ$$

تفاوت اساسی بین القاگر و مقاومت وجود دارد.اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت به I وابسته است. در صورتی که اختلاف پتانسل دو سر القاگر به $\frac{dI}{dt}$ بستگی دارد. نیروی محرکهٔ خودالقائی با جریان مقابله نمی‌کند بلکه با تغییر جریان مخالفت می‌کند.

معادله مدار RL حاصل از قانون حلقه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{\varepsilon}{L}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه یک معمولی و تنها شرط اولیه مورد نیاز $I(t=0)=0$ است. برای حلّ معادله طرفین آن را در $e^{\int\frac{R}{L}dt}=e^{\frac{R}{L}t}$ ضرب می‌کنیم

$$e^{\frac{R}{L}t}\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}e^{R/_{L}t}=\frac{\varepsilon}{L}e^{R/_{L}t}$$

طرف چپ این رابطه یک دیفرانسیل کامل است

$$\frac{d}{dt}\left(Ie^{R/_{L}t}\right)=\frac{\varepsilon}{R}e^{R/_{L}t}$$

می‌توان از طرفین رابطه فوق انتگرال گرفت

$$Ie^{R/_{L}t}=\frac{\varepsilon}{R}e^{R/_{L}t}+k$$

که در آن k ثابت انتگرال‌گیریست و توسط شرایط اولیه تعیین می‌شود. طرفین رابطه فوق را به $e^{R/_{L}t}$ تقسیم می‌کنیم و سپس شرط $I(t=0)=0$ را اعمال می‌کنیم. $I=\frac{\varepsilon}{R}+ke^{-R/_{L}t}$

$$0=\frac{\varepsilon}{R}+k\Rightarrow k=-\varepsilon/R$$

$$I(t)=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

با معرفی $\tau=\frac{L}{R}$ ثابت زمانی القایی مدار RL، رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید. $I(t)=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-t/_{\tau}}\right)$

می‌توان نشان داد که کمیت $\tau=\frac{L}{R}$ دارای بعد زمان است

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{1\ \text{هانری}}{1\ \text{اهم}}=\frac{1\ \text{ولت - ثانیه}}{\text{آمپر - اهم}}=1\ \text{ثانیه}$$

رفتار کیفی جریان به صورت تابعی از زمان در شکل نشان داده شده است.
بعد از زمان طولانی، جریان به مقدار تعادلی $I_\circ = \varepsilon/R$ می‌رسد. τ ثابت زمانی القایی بخشی ایست که نشان می‌دهد که جریان با چه سرعتی به حالت تعادلی‌اش می‌رسد. هر چه L بزرگتر باشد زمان رسیدن به تعادل طولانی‌تر خواهد بود. رفتار جریان در یک مدار با و بدون القاگر در شکل نمایش داده شده است.

جریان کاهش یابنده

مدار RL را مطابق شکل در نظر می‌گیریم فرض کنید کلید s_1 برای مدت طولانی بسته بوده است، به طوری که جریان در حالت تعادلی ε/R است. اگر در $t=\circ$ کلید s_1 باز و کلید s_2 بسته شود جریان مدار چگونه تغییر خواهد کرد.

با استفاده از قانون حلقه کیرشهف در مدار طرف راست برای جریان کاهش یابنده $\frac{dI}{dt}<\circ$

$$\left|\varepsilon_L\right| - IR = \circ \Rightarrow -L\frac{dI}{dt} + IR = \circ$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \circ$$

برای حلّ معادله دیفرانسیل مرتبه یک معمولی طرفین معادله را در $e^{R/L\,t}$ ضرب می‌کنیم

$$e^{R/L\,t}\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}e^{R/L\,t}I = \circ$$

طرف چپ به صورت دیفرانسیل کامل درمی‌آید

$$\frac{d}{dt}\left(Ie^{R/L\,t}\right) = \circ$$

پس می‌توان از معادله فوق انتگرال گرفت

$$Ie^{R/L\,t} = k'$$

k' ثابت انتگرال گیریست که توسط شرایط اولیه $I(t=\circ) = \varepsilon/R$ تعیین می‌شود.

$$I(t) = k'e^{-R/L\,t}$$

$$I(t=\circ) = \frac{\varepsilon}{R} = k'$$

پس

$$I(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/\tau}$$

که در آن $\tau=\frac{L}{R}$، ثابت زمانی القائی ایست. نموداری از جریان به صورت تابعی از زمان در شکل نمایش داده شده است.

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

چون القاگر در مدار با هر گونه تغییر در جریان که از آن می گذرد مخالفت می نماید، لذا برای این که جریان در القاگر برقرار شود، عامل خارجی مانند باطری باید کار انجام دهد. از قضیه کار و انررژی نتیجه می‌گیریم که انرژی مغناطیسی باید در یک القاگر ذخیره شود. همانطور که انرژی الکتریکی در یک خازن ذخیره می‌شود. از این لحاظ خازن و القاگر دارای نقش‌های مشابه هستند. برای به دست آوردن رابطهٔ کمی مربوط به انباشت انرژی در میدان مغناطیسی شکل مدار RL نشان می‌دهد که متشکل از یک منبع نیروی محرکه الکتریک ε، متصل شده به مقامت و القاگر L را در نظر می‌گیرمی. رابطهٔ مدار

$$\varepsilon=IR+L\frac{dI}{dt}$$

معادله دیفرانسیلی که افزایش جریان این مدار را مشخص می‌کند. این معادله را در I ضرب کنیم داریم

$$\varepsilon I=I^2R+LI\frac{dI}{dt}$$

که تعبیر نیز یکی آن دربارهٔ کار و انرژی به صورت زیر است.

۱ εI، آهنگ تحویل انرژی به مدار توسط منبع نیروی محرکهٔ الکتریکی
۲ I^2R، آهنگ ظاهر شدن انرژی به صورت انرژی گرمائی (ژول) در مقاومت
۳ $LI\frac{dI}{dt}$، نشانگر آهنگ انباشت انرژی در میدان مغناطیسی

$$\frac{dw}{dt}=LI\frac{dI}{dt}\Rightarrow dw=LIdI$$

با انتگرال گیری از معادله فوق، داریم

$$\frac{dw}{dt}=LI\frac{dI}{dt}\Rightarrow dw=LIdI$$

که نشانگر انرژی مغناطیسی کل ذخیره شده در القاگر L حامل جریان I است.

این رابطه را می‌توان با معادله انرژی خازن c که حامل بار q است، یعنی، با رابطه

$$w = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$$

مقایسه کرد. در این حالت انرژی در میدان الکتریکی ذخیره می‌شود، در هر دو حالت، رابطهٔ انرژی ذخیره شده با مساوی قرار دادن آن با کار که باید برای برقرار کردن میدان انجام شود، به دست می‌اید.

نکته:

از نقطه نظر انرژی فرق مهمی بین القاگر و مقاومت وجود دارد. هر گاه جریانی از مقاومت بگذرد انرژی به فرم حرارت در آن مستهلک می‌شود. صرف‌نظر از این که جریان مانا یا متغیر باشد. (توان مستهلک شده در مقاومت $P = IV = I^2R$). از طرف دیگر اگر جریان در القاگر تغییر کند و $\frac{dI}{dt} > 0$ باشد انرژی تلف نمی‌شود بلکه در آن ذخیره می‌شود و مبدأ رها می‌شود (وقتی که جریان کاهش یابد $\frac{dI}{dt} < 0$). اگر جریان گذرنده از القاگر مانا باشد، تغییر انرژی وجود ندارد زیرا $P = LI\frac{dI}{dt} = 0$.

مثال ۵: انرژی ذخیره شده در یک سولنوئید بسیار طویل به طور l شعاع R که شامل N دور و حامل جریان I است را در نظر بگیرید. انرژی ذخیره شده در این سیستم را به دست آورید.

$$w = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2$$

این نتیجه را می‌توان بر حسب میدان مغناطیسی داخل سولنوئید بیان نمود. یعنی $B = \mu_{0nI}$

$$w = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 nI)^2(\pi R^2 l)$$

چون حجم سولنوئید برابر $\pi R^2 l$ و میدان مغناطیسی داخل سولنوئید یکنواخت است لذا می‌توان چگالی انرژی مغناطیسی یا انرژی بر واحد حجم میدان مغناطیسی را به صورت زیر نوشت

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

این رابطه برای تمام آرایش‌های میدان مغناطیسی صادق است، اگر چه آن را با در نظر گرفتن حالتی خاص، یعنی سولنوئید به دست آوردیم. این معادله می‌تواند با معادله

$$u_E = \tfrac{1}{2}\varepsilon_\circ E^2$$

که چگالی انرژی در خلأ در هر نقطهٔ از یک میدان الکتریکی را به دست می‌دهد، مقایسه شود. توجه کنید که u_B و u_E هر دو متناسب با مجذور مقدار میدان مربوط، یعنی B یا E هستند.

سولنوئید در میدان‌های مغناطیسی همان نقشی را دارد که خازن مسطح در میدان‌های الکتریکی دارد. در هر دو حالت، به وسیلهٔ ساده ای در اختیار داریم که می‌توانیم از آن برای ایجاد یک میدان یکنواخت در ناحیهٔ معینی از فضا استفاده کنیم و خیلی ساده بعضی خواص این میدان‌ها را به دست آوریم.

مثال ۶

یک کابل هم محور (کوآکسیال) بسیار طویل شامل دو استوانهٔ هم محور به شعاع‌های a و b است رسانای داخلی کابل حامل جریان مانای I است و رساناهای خارجی مسیر بازگشت را تأمین می‌کند (الف) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی مربوط به طول l از این کابل را حساب کنید (ب) خودالقائی طول l از این کابل هم محور چقدر است؟

حلّ:

انرژی ذخیره شده در فضای بین دو رسانا، قانون آمپر

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I$$

به صورت زیر درمی‌آید

$$(B)(2\pi\rho) = \mu_\circ I$$

$$B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}$$

همچنین قانون آمپر نشان می‌دهد که میدان مغناطیی در نقاط خارج کالل هم محور صفر اس.

$$B2\pi\rho = \circ \Rightarrow B = \circ$$

با فرض این که قسمت اعظم انرژی مغناطیسی ذخیره شده در فضای بین دو رسانا قرار دارد. چگالی انرژی برای نقاط میان رساناها

$$u_B = \frac{1}{2\mu_\circ}B^2 = \frac{1}{2\mu_\circ}\left(\frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\right)^2$$

$$= \frac{\mu_\circ I^2}{8\pi^2 \rho}$$

$$dw = u_B dv = \frac{\mu_\circ I^2}{8\pi^2 \rho^2} \rho d\rho d\varphi dz$$

که در آن dv المان حجم در مختصات استوانه‌ای است.

$$W = \frac{\mu_\circ I^2}{8\pi^2} \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^{l} \frac{1}{\rho} d\rho d\varphi dz$$

$$W = \frac{\mu_\circ I^2}{8\pi^2} 2\pi l \ln \rho \Big|_a^b = \frac{\mu_\circ I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

خودالقائی

از مقایسه رابطه فوق با رابطه $W = \frac{1}{2} LI^2$ می‌توان خودالقائی طول l کابل را به دست آورد.

$$L = \frac{\mu_\circ l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

می‌توانستیم این رابطه را مستقیماً با استفاده از تعریف خودالقائی نیز به دست آوریم.

نوسانات LC

مدار LC را در نظر بگیریم که در آن خازن به یک القاگر وصل است (مطابق شکل)

فرض کنید که خازن در ابتدا دارای بار $Q_\circ$ است. وقتی کلیه بسته شود خازن شروع به دشارژ شدن می‌کند و انرژی الکتریکی کاهش پیدا می‌کند، از طرف دیگر جریان دشارژ باعث ذخیره شدن انرژی مغناطیسی در القاگر می‌شود. در غیاب مقاومت انرژی کل یعنی انرژی الکتریکی در خازن و انرژی مغناطیسی در القاگر رد و بدل می‌شود. این پدیده را نوسان الکترومغناطیسی نامند.

انرژی کل در مدار LC در یک لحظه پس از بستن کلید

$$W = W_c + W_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{c} + \frac{1}{2} LI'^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_\circ^2}{c}$$

چون $Q + Q' = Q_\circ$، Q بار روی خازن و Q' باری که خازن را ترک گفته

$$I' = \frac{dQ'}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$$

چون w ثابت باقی می‌ماند

$$\frac{dw}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{c}+\tfrac{1}{2}LI'^2\right)$$
$$=\frac{Q}{c}=\frac{dQ}{dt}+LI'\frac{dI'}{dt}=\circ$$
$$\frac{Q}{c}\frac{dQ}{dt}+L\left(-\frac{dQ}{dt}\right)\left[\frac{d}{dt}\pi\left(-\frac{dQ}{dt}\right)\right]=\circ$$
$$\frac{Q}{c}\frac{d^2Q}{dt^2}=\circ$$

از قانون حلقهٔ کیرشهف بطور ساعتگرد نیز به رابطه فوق می رسیم.

$$\frac{Q}{c}-L\frac{dI'}{dt}=\circ$$

از آنجائی که $I'=-\frac{dQ}{dt}$ رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{Q}{c}+L\frac{d^2Q}{dt^2}=\circ$$

برای حلّ رابطه فوق طرفین معادله را به L تقسیم می‌کنیم

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{Lc}=\circ$$

حلّ کلی رابطه فوق $Q(t)=Q_\circ\cos(\omega_\circ t+\varphi)$

به طوری که $Q_\circ$ دامنه بار و φ فاز است. $\omega_\circ=\frac{1}{\sqrt{Lc}}$ فرکانس زاویه‌ای جریان در القاگر

$$I'(t)=\frac{dQ'}{dt}=-\frac{dQ}{dt}=\omega_\circ Q_\circ\sin(\omega_\circ t+\varphi)$$
$$=I_\circ\sin(\omega_\circ t+\varphi)$$

به طوری که $I_\circ=\omega_\circ Q_\circ$ فاز را می توان نشان داد که صفر است زیرا $Q(t=\circ)=Q_\circ$ و $I(t=\circ)=\circ$. پس بار و جریان در مدار Lc به صورت زیر درمی‌آیند.

$$Q(t)=Q_\circ\cos\omega_\circ t$$
$$I(t)=I_\circ\sin\omega_\circ t$$

وابستگی $Q(t)$ و $I(t)$ به زمان درشکل نمایش داده شده است.

انرژی الکتریکی و انرژی مغناطیسی به ترتیب توسط روابط زیر به دست می‌آند.

$$W_E=\frac{Q^2(t)}{2c}=\left(\frac{Q_\circ^2}{2c}\right)\cos^2\omega_\circ t$$

$$W_B=\tfrac{1}{2}LI^2=\left(\frac{LI_\circ^2}{2}\right)\sin^2\omega_\circ t$$

$$=\frac{L(-\omega_\circ Q_\circ)}{2}\sin^2\omega_\circ t=\frac{Q_\circ^2}{2c}\sin^2\omega_\circ t$$

$$W=W_E+W_B=\left(\frac{Q_\circ^2}{2c}\right)\cos^2\omega_\circ t=\left(\frac{Q_\circ}{2c}\right)^2\sin^2\omega_\circ t$$

$$=\frac{Q_\circ^2}{2c}$$

روابط فوق نشان می‌دهد که انرژی کل ثابت باقی می‌ماند. نوسانات الکتریکی و مغناطیسی درشکل نمایش داده شده است.

آنالوگ مکانیکی نوسانات Lc سیستم جرم فنر است.

اگر جرم با سرعت $\vec{v}$ حرکت کند و ثابت فنر k باشد و جرم به اندازهٔ x از حالت تعادلش جابجا شده باشد انرژی مکانیکی کل سیستم برابر است با

$$W=k+U=\tfrac{1}{2}mv^2+\tfrac{1}{2}kx^2$$

که در آن k انرژی جنبشی جرم و U انرژی پتانسیل فنر هستند. در غیاب اصطکاک W پایستار است. لذا

$$\frac{dW}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2+\tfrac{1}{2}kx^2\right)=mv\frac{dv}{dt}+kx\frac{dx}{dt}=\circ$$

با بکارگیری $v=\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$، معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$m=\frac{d^2x}{dt^2}+kx=\circ\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=\circ$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_\circ^2x=\circ$$

حل کلی این معادله برای جابجائی جرم

$$x(t)=x_\circ\cos(\omega_\circ t+\varphi)$$

که در آن $\omega_\circ=\sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس زاویه‌ائی و $x_\circ$ دامنهٔ نوسانات هستند. پس انرژی کل در هر لحظهٔ زمانی عبارتست از

$$W = \tfrac{1}{2} m x_\circ^2 \omega_\circ^2 \sin^2(\omega_\circ t + \varphi) + \tfrac{1}{2} k x_\circ^2 \cos^2(\omega_\circ t + \varphi) \quad R\frac{dI}{dt} + I\left(\frac{1}{c} + \frac{B^2 L^2}{m}\right) = \circ$$

$$= \tfrac{1}{2} k x_\circ^2 \omega_\circ^2 \left[\sin^2(\omega_\circ t + \varphi) + \cos^2(\omega_\circ t + \varphi)\right] - \tfrac{1}{2} k x_\circ^2$$

در شکل نوسانات انرژی در مدار LC و سیستم جرم و فنر (نوسانگر هارمونیک) نشان داده شده است.

انرژی سیستم جرم و فنر مدار LC

نوسانات انرژی در مدار LC و سیستم جرم و فنر

مدار LRC

یک مدار RLC در نظر بگیرید که شامل مقاومت القاگر و خازن است (مطابق شکل)

خازن در ابتدا با بار Q_s شارژ شده است. بعد از بسته شدن کلید s جریان در مدار ایجاد می‌شود. انرژی در القاگر ذخیره می‌شود ولی در مقاومت انرژی گرمائی تلف می‌شود به طوری که رابطهٔ بقاء انرژی

$$\frac{dw}{dt} = -I'^2 R$$

علامت منفی به معنی کاهش انرژی کل است. پس از جایگزینی مقادیر w_E و w_B در رابطه فوق داریم

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{c} + \tfrac{1}{2} L I'^2\right) = -I'^2 R$$

$$\frac{Q}{c}\frac{dQ}{dt} + L I' \frac{dI'}{dt} = -I'^2 R$$

در رابطه فوق $I' = \frac{dQ'}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$

$$\frac{Q}{c}\frac{dQ}{dt} + L\left(-\frac{dQ}{dt}\right)\left(-\frac{d^2Q}{dt^2}\right) = -\left(-\frac{dQ}{dt}\right)^2 R$$

$$-\frac{Q}{c} - L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\left(-\frac{dQ}{dt}\right) R$$

$$-\frac{Q}{c} - L\frac{d^2Q}{dt^2} - \frac{dQ}{dt} R = \circ$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{c} = \circ$$

برای R کوچک می‌توان تحقیق نمود که جواب معادله فوق به صورت

$$Q(t) = Q_\circ e^{-rt} \cos(\omega' t + \varphi)$$

به طوری که $\gamma = \frac{R}{2L}$ را فاکتور استهلاک و $\omega' = \sqrt{\omega_\circ^2 - \gamma^2}$ فرکانس زاویه‌ای نوسانات میرا هستند. ثوابت $Q_\circ$ و φ کمیات حقیقی هستند که باید با اعمال شرایط اولیه تعیین شوند. در حدّ وقتی که مقاومت صفر است $R = \circ$ ما حالت غیر میرا را با فرکانس طبیعی $\omega_\circ = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ را دوباره به دست می‌آوریم.

آنالوگ مکانیکی مدار RLC یک سیستم نوسانگر میراست. معادله حرکت برای این سیستم توسط رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = \circ$$

به طوری که ترم وابسته به سرعت، مربوط به نیروی میراگر غیر پایستار است.

$$F = -b\frac{dx}{dt}$$

B را ضریب استهلاک نامند. تطابق بین مدار RLC و سیستم مکانیکی در جدول خلاصه شده است.

	مدار RLC	نوسانگر هارمونیک میرا
متغیر s	Q	x
متغیر $\frac{ds}{dt}$	I	v
ضریب s	$\frac{1}{c}$	K
ضریب $\frac{ds}{dt}$	R	b
ضریب $\frac{d^2c}{dt^2}$	L	m
انرژی	$\frac{1}{2}LI^2$ $\frac{1}{2}Q^2/c$	$\frac{1}{2}mv^2$ $\frac{1}{2}kx^2$

تطابق بین مدار RLC و سیستم جرم و فنر

فشار مغناطیسی

میدان مغناطیسی یک صفحه بی‌نهایت همانطور که قبلاً نشان دادیم اگر صفحه حامل جریان $\vec{k} = k\hat{i}$ و روی صفحه xy قرار داشته باشد.

$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_\circ k}{2}\hat{j}_i & z > \circ \\ +\frac{\mu_\circ k}{2}\hat{j}_i & z < \circ \end{cases}$$

حال دو صفحه به فاصله d که حامل جریان‌های سطحی مخالف یکدیگرند را مطابق شکل در نظر بگیرید.

با بکارگیری اصل برهمنهی، می‌توانیم نشان دهیم که میدان مغناطیسی فقط در ناحیه بین دو صفحه حامل جریان غیر صفر است.

$$\vec{B} = \mu_\circ k\hat{j}_i \qquad -d/2 < z < d/2$$

چگالی انرژی مغناطیسی بین دو صفحه

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_\circ} = \frac{\mu_\circ^2 k^2}{2\mu_\circ} = 1/2\,\mu_\circ k^2$$

حال یک المان جریان روی صفحه بالائی در نظر بگیرید

$$I\,\vec{dl}_1 = (k\Delta y)\,\Delta x\hat{i}$$

(k دارای بعد جریان بر واحد طول است) نیروئی که به این المان جریان از طرف صفحه پائینی وارد می‌شود برابر است با

$$d\vec{F}_{12} = I\,\vec{dl}_1 \times \vec{B}_2 = k\Delta x\Delta y\hat{i} \times \frac{\mu_\circ k}{2}\hat{j}$$

$$= \frac{\mu_\circ k^2}{2}\Delta x\Delta y\hat{k}$$

نیرو در جهت $+\hat{k}$ است لذا دافعه است. این نتیجه قابل انتظار است چون جریان‌ها در خلاف جهت یکدیگرند. از آنجا که $d\vec{F}_{12}$ متناسب است با مساحت المان سطح جریان، می‌توانیم نیروی بر واحد سطح یعنی $\vec{f}_{12}$ را معرفی نمائیم.

$$\vec{f}_{12} = \vec{k}_1 \times \vec{B}_2 = \frac{\mu_\circ k^2}{2}\hat{k} = u_B\hat{k}$$

با استفاده از رابطهٔ $u_B = 1/2\,\mu_\circ k^2$ متوجه می‌شویم که مقدار نیرو بر واحد سطح f_{12} دقیقاً برابر است با چگالی انرژی مغناطیسی u_B. از لحاظ فیزیکی f_{12} را می‌توان به عنوان فشار مغناطیسی تعبیر نمود.

$$f_{12} = P = u_B = \frac{B^2}{2\mu_\circ}$$

نیروی دافعه وارد به صفحات در شکل نمایش داده شده است.

مثال ۷

سیمی بسیار طویل که حامل جریان $I(t) = I_\circ e^{\alpha t}$ ، $\alpha > \circ$ و قاب مثلثی را مطابق شکل در نظر بگیرید. قاب و سیم در یک صفحه قرار دارند.

الف- نیروی محرکه القایی را در قاب دست آورید.

ب- ضریب القاء متقابل بین قاب و سیم را محاسبه نمائید.

ج- اگر مقاومت قاب R باشد جریان القایی و جهت آن را بیابید.

د- جهت و مقدار نیروی مغناطیسی وارد به قاب را به دست آورید.

حلّ

نیروی محرکه

میدان مغناطیسی یک سیم بسیار طویل با استفاده از قانون آمپر

$$B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}$$

شار گذرنده از مثلث

$$\Phi = \int \vec{B}.\vec{ds} = \int_\circ^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{+\frac{x}{\sqrt{3}}} \frac{\mu_\circ I}{2\pi(d+x)} dxdy$$

$$\Phi = \int_\circ^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} \frac{\mu_\circ I}{2\pi(d+x)} dx \int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{+\frac{x}{\sqrt{3}}} dy = \frac{\mu_\circ I}{\pi\sqrt{3}} \int_\circ^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{d+x}$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{\pi\sqrt{3}} \left[x - dx \ln(x+d) \right]_\circ^{\frac{b\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{\pi\sqrt{3}} \left[\frac{b\sqrt{3}}{2} - d \ln\left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + d \right) + d \ln d \right]$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_\circ \alpha I(t)}{\pi\sqrt{3}} \left[\frac{b\sqrt{3}}{2} - d \ln\left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + d \right) + d \ln d \right]$$

ابقاء متقابل

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_\circ}{\pi\sqrt{3}} \left[\frac{b\sqrt{3}}{2} - d \ln\left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + d \right) + d \ln d \right]$$

جریان القائی

جریان القائی

$$I = \varepsilon/R$$

و جهت آن طبق قانون لنز روی شکل نمایش داده شده است.
نیروی وارد به ضلع موازی

$$\vec{F} = \int I\, \vec{dl} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \frac{Ib\mu_\circ I}{2\pi\left(d + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)}\left(-\hat{i}\right)$$

$$= \frac{\mu_\circ bI^2}{2\pi\left(d + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)}\left(-\hat{i}\right)$$

مثال ۸

تروئیدی با سطح مقطع دایروی شکل در نظر بگیرید. اگر این تروئید دارای N دور باشد.

الف- ضریب خودالقائی L این تروئید را به دست آورید.

ب- انرژی مغناطیسی کل ذخیره شده در این تروئید را محاسبه کنید.

$$\int_\circ^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\beta\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$-1 < \beta < 1$$

حلّ

ضریب خودالقائی

میدان تروئید

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I \Rightarrow B 2\pi\rho = \mu_\circ NI$$

$$B = \frac{\mu_\circ NI}{2\pi\rho} = \frac{\mu_\circ NI}{2\pi\left(R + \rho\cos\varphi\right)}$$

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_\circ^a \int_\circ^{2\pi} \frac{\mu_\circ NI \rho d\rho d\varphi}{2\pi\left(R + \rho\cos\varphi\right)}$$

$$= \frac{\mu_\circ NI}{2\pi R}\int_\circ^a \rho d\rho \int_\circ^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \frac{\rho}{R}\cos\varphi}$$

$$\int_\circ^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\beta\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad -1 < \beta < 1$$

$$\Phi_{\vec{B}} = \frac{\mu_\circ NI}{2\pi R}\int_\circ^a \rho d\rho \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \rho^2/R^2}}$$

$$= \mu_\circ NI \int_\circ^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

$$= \mu_\circ NI \left[-\left(R^2-\rho^2\right)^{1/2} \right]_\circ^a$$

$$= \mu_\circ N^2 I \left[-\left(R^2-a^2\right)^{1/2} \right]$$

$$\Phi_t = N\Phi_{\vec{\theta}} = \mu_\circ N^2 I \left[-\left(R^2-a^2\right)^{1/2} \right]$$

خود القائی

$$L = \frac{\Phi_t}{I} = \mu_\circ N^2 \left[R - \left(R^2-a^2\right)^{1/2} \right]$$

انرژی مغناطیسی

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

مثال ۹

پرتو الکترونی به شعاع R و چگالی یکنواخت $\rho_\circ$ را در نظر بگیرید. سرعت هر الکترون برابر v است.

الف- میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج پرتو بیآبید.
ب- میدان مغناطیسی در نقاط داخل و خارج پرتو را به دست آورید.
ج- انرژی الکتریکی بر واحد طول داخل پرتو را محاسبه نمائید.
د- انرژی مغناطیسی بر واحد طول داخل پرتو را محاسبه نمائید.

حلّ:

میدان الکتریکی قانون گوس $\oint \vec{E}.\vec{ds} = q/\varepsilon_\circ$

نقاط داخل

$$-2\pi\rho E_i l = -\frac{\rho_\circ \pi \rho^2 l}{\varepsilon_\circ}$$

$$\boxed{\vec{E}_i = -\frac{\rho_\circ \rho^2}{2\varepsilon_\circ}\hat{\rho}}$$

نقاط خارج

$$-2\pi\rho E_i l = -\frac{\pi R^2 \rho_\circ l}{\varepsilon_\circ}$$

$$\boxed{\vec{E}_\circ = -\frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ \rho}\hat{\rho}}$$

میدان مغناطیسی

قانون آمپر $\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_\circ I$

چگالی جریان $\vec{J} = \rho_\circ \vec{v}$

جریان $I = JA = \rho_\circ v \pi \rho^2$

نقاط داخل $\vec{B}_i 2\pi\rho = \mu_\circ \rho_\circ v \pi \rho^2$

$$\boxed{\vec{B}_i = \frac{\mu_\circ \rho_\circ v \rho}{2}\hat{\varphi}}$$

نقاط خارج $B_\circ 2\pi\rho = \mu_\circ \rho_\circ v \pi R^2$

$$\boxed{\vec{B}_\circ 2\pi\rho = \frac{\mu_\circ R^2 \rho_\circ v}{2\rho}\hat{\varphi}}$$

انرژی داخلی

انرژی الکتریکی

$$w_E = \frac{\varepsilon_\circ}{2}\int E^2 dv = \frac{\varepsilon_\circ}{2}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{1}\int_\circ^{R} E_i^2 dv$$

$$= \frac{\varepsilon_\circ}{2}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{1}\int_\circ^{R} \frac{\rho_\circ^2 \rho^2}{4\varepsilon_\circ^2}\rho d\rho d\varphi dt$$

$$w_E = \frac{2\pi}{8\varepsilon_\circ}\rho_\circ^2 \int_\circ^{R} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi}{32\varepsilon_\circ}\rho_\circ^2 \rho^4 \Big|_\circ^R$$

$$= \frac{\pi\rho_\circ^2}{16\varepsilon_\circ}R^4$$

انرژی مغناطیسی

$$w_B = \frac{1}{2\mu_\circ}\int B^2 dv = \frac{1}{2\mu_\circ}\int_\circ^{R}\int_\circ^{1}\int_\circ^{2\pi} \frac{\mu_\circ^2 \rho^2 \rho_\circ^2 v^2}{4}\rho d\rho d\varphi dz$$

$$= \frac{2\pi}{2\mu_\circ}\frac{\mu_\circ^2 \rho_\circ^2 v^2}{4}\frac{1}{4}R^4\Big|_\circ^R$$

$$= \frac{\pi\mu_\circ \rho_\circ^2 v^2 R^4}{16}$$

مثال ۱۰

دو جریان مداری بی‌نهایت مطابق شکل در نظر بگیرید.

الف- میدان مغناطیسی را در یک نقطهٔ دلخواه بین دو سیم λ به دست آورید.

ب- اگر میله‌ای به طول $q = d/2$ سرعت ثابت v در صفحه xt در جهت محور z مطابق شکل حرکت کند نیروی محرکهٔ القائی بین دو سر میله را محاسبه نمائید.

حلّ:

میدان مغناطیسی

با استفاده از میدان یک سیم بسیار طویل، میدان در یک نقطهٔ دلخواه بین دو سیم

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_\circ t}{2\pi x} + \frac{\mu_\circ I}{2\pi (d-x)} \right) \hat{j}$$

نیروی محرکهٔ القائی:

با استفاده از رابطهٔ نیروی محرکهٔ حرکتی

$$\varepsilon = \int \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) . \vec{dl}$$

$$\varepsilon = \int_{d/4}^{d/2+d/4} v\hat{k} \times \left(\frac{\mu_\circ I}{2\pi x} + \frac{\mu_\circ I}{2\pi (d-x)} \right) \hat{j}.\hat{i} dx$$

$$= -\frac{\mu_\circ I}{2\pi x} \int_{d/4}^{d/2+d/4} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{d-x} \right)$$

$$= -\frac{\mu_\circ I v}{2\pi} \int_{d/4}^{d/2+d/4} \left(\ln x - \ln (d-x) \right) \Big|_{d/4}^{d/2+d/4}$$

$$= -\frac{\mu_\circ I v}{2\pi} \ln \frac{x}{d-x} \Big|_{d/4}^{d/2+d/4}$$

$$= -\frac{\mu_\circ I v}{2\pi} \left[\ln \frac{d/2 + d/4}{d - d/2 - d/4} - \ln \frac{d/4}{d - d/4} \right]$$

$$= -\frac{\mu_\circ I v}{2\pi} \ln \left(\frac{3d/4}{d/4} - \ln \frac{d/4}{3d/4} \right)$$

$$= -\frac{\mu_\circ I v}{2\pi} \left(\ln 3 - \ln \frac{1}{3} \right) = -\frac{2\mu_\circ I v}{2\pi} \ln 3$$

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_\circ I v}{\pi} \ln 3$$

مثال ۱۱

از سیمی به مقاومت ویژه ρ و با سطح مقطع s، دو سیم لوله به شعاع r و به طول‌های l_1 و l_2 ساخته شده است، اگر تعداد کل دورها N_1 و N_2 باشد.

الف- ضریب خودالقائی L_1 و L_2 این دو سیم لوله را به دست آورید.

ب- مقاومت R_1 و R_2 این دو سیم لوله چقدر است؟

ج- ضریب خودالقائی این دو سیم لوله اگر به طور سری بسته شوند.را به دست آورید و آن را L_s بنامید:

د- ضریب خودالقائی این دو سیم لوله را اگر بطور مداری بسته شوند را به دست آورید و آن را L_p بنامید. از ضریب القاء متقابل M می‌توانید صرف نظر نمائید ولی کلیه استدلال‌های لازم برای بندهای c و d را بنویسید).

هـ: جریان‌های لحظه‌ای در مدار سری (s) و مدار موازی (p) را محاسبه نمائید. (از مقاومت سیم‌های رابطه صرف‌نظر شود).

و: توان لحظه‌ای مغناطیسی ذخیره شده در مدارهای (s) و (p) را بنویسید.

ز: توان لحظه‌ای تلف شده در مدارهای (s) و (p) را به دست آورید.

ح: پس از این که جریان به حالت ماکزیمم رسید منبع نیروی محرکه از h خارج می‌شود. با استفاده از قوانین کیرشهف معادله مدار را بنویسید (یکی از مدارها کافی است)

حل:

ضریب خودالقائی

$$L_1 = \frac{\mu_\circ n_1 I A N_1}{I} = \mu_\circ n_1^2 A l_1 \qquad N_1 = n_1 l_1$$

$$L_2 = \mu_\circ n_2^2 A l_2$$

مقامت

$$R_1 = \rho \frac{2\pi r N_1}{s}$$

$$R_2 = \rho \frac{2\pi r N_2}{s}$$

خودالقائی در حالت سری

$$L_s = L_1 + L_2$$

زیرا اگر L_1 و L_2 به صورت سری بسته شده باشند. می‌توان نوشت

$$v_{ab} = -L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} = -\left(L_1 + L_2\right)\frac{dI}{dt} = -L_s \frac{dI}{dt}$$

یعنی L_s معادل برابر است با جمع L_1 و L_2

$$L_s = L_1 + L_2 = \mu_\circ n_1^2 A l_1 + \mu_\circ n_2^2 A l_2$$
$$= \mu_\circ A\left(n_1^2 l_1 + n_2^2 l_2\right)$$
$$= \mu_\circ A\left(n_1 N_1 + n_2 N_2\right)$$

خودالقائی موازی

اگر دو القاگر به صورت موازی متصل باشند

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

زیرا

$$v_{ab} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$$
$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_2}{dt}$$
$$\frac{V_{ab}}{L_1} = -\frac{dI_1}{dt} \qquad \frac{V_{ab}}{L_2} = -\frac{dI_2}{dt}$$
$$V_{ab} = -L_p \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{V_{ab}}{L_p} = -\frac{dI}{dt}$$
$$-\frac{V_{ab}}{L_p} = -\frac{V_{ab}}{L_1} - \frac{V_{ab}}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

یعنی القاگر معادل

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$
$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{\mu_\circ n_1^2 A l_1} + \frac{1}{\mu_\circ n_2^2 A l_2} \Rightarrow L_p = \frac{\mu_\circ A\left(n_1^2 n_2^2 l_1 l_2\right)}{n_2^2 l_2 + n_1^2 l_2}$$

جریان لحظه‌ای مدار سری

$$I_s = \frac{\varepsilon}{R_s}\left(1 - e^{-\frac{tR_s}{L_s}}\right) \qquad R_s = R_1 + R_2$$

جریان لحظه‌ای مدار موازی

$$I_p = \frac{\varepsilon}{R_p}\left(1 - e^{-\frac{tR_p}{L_p}}\right) \qquad \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$$

توان لحظه‌ای

مدار سری
$$P_s = L_s I_s \frac{dI_s}{dt}$$
مدار موازی
$$P_p = L_p I_p \frac{dI_p}{dt}$$
معادله مدار
$$-I_\alpha R_\alpha - L_\alpha \frac{dI_\alpha}{dt} = \circ$$
$$L_\alpha \frac{dI_\alpha}{dt} + I_\alpha R_\alpha = \circ$$

مثال ۱۲

در ناحیه هاشور زده میدان مغناطیسی یکنواخت عمود به صفحه و به طرف خارج آن وجود دارد یک حلقه مربع مستطیل شکل با مقاومت R مطابق شکل از حالت سکون تحت تأثیر نیروی ثابت وزن شروع به حرکت می‌کند. سرعت حدّی میله را حساب کنید.

شار گذرنده از حلقه
$$\Phi_{\vec{B}} = \vec{B}.\vec{A} = BA = BLz\left(t\right)$$
$$\left|\varepsilon\right| = \frac{d\varphi_{\vec{B}}}{dt} = BL\frac{dz}{dt} = BLV$$
$$I = \frac{\left|\varepsilon\right|}{R} = \frac{BLV}{R}$$
$$\vec{F}_B = I\int \vec{dl}\times\vec{B} = ILB = \frac{\left(LB\right)^2 V}{R}$$
سرعت حدّی
$$\frac{\left(LB\right)^2 V}{R} = mg \Rightarrow V = \frac{mg}{\left(LB\right)^2}R$$

مثال ۱۳

خازنی به ظرفیت c' را شارژ می‌کنیم تا بار $q_\circ$ روی آن قرار گیرد. این خازن مطابق شکل در مداری که شامل یک خازن خالی به ظرفیت c و یک القاگر به خودالقایی L است قرار می‌گیرد.

الف- اگر از مقاومت مدار کلاً صرفنظر شود، معادله بقاء انرژی را برای این مدار بنویسید.

ب- با استفاده از رابطه قسمت (الف) معادله دیفرانسیل مربوط به بار روی خازن c' را به دست آورید. (فقط نوشتن معادله کافی یست)

ج- اگر مقاومت R در مدار قرار گیرد معادله دیفرانسیل مربوط به بار روی خازن c' را به دست آورید. (فقط با نوشتن معادله کافی‌ایست)

معادله بقاء انرژی

$$W = \tfrac{1}{2}\frac{q_\circ^2}{c'} = \tfrac{1}{2}\frac{q'^2(t)}{c'} + \tfrac{1}{2}\frac{q^2(t)}{c} + \tfrac{1}{2}LI^2$$

$$q + q' = q_\circ$$

معادله دیفرانسیل بار q'

$$\frac{dw}{dt} = \circ\ \frac{q'(t)}{c'}\frac{dq'}{dt} + \frac{q(t)}{c}\frac{dq(t)}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = \circ$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{dq'}{dt}$$

$$\frac{q'(t)}{c'}\frac{dq'}{dt} + \frac{q_\circ - q'}{c}\left(-\frac{dq'}{dt}\right) + L\left(\frac{dq}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt}\frac{dq}{dt}\right) = \circ$$

$$\frac{q'(t)}{c'}\frac{dq'}{dt} + \frac{q_\circ - q'}{c}\left(-\frac{dq'}{dt}\right) + L\left(-\frac{dq'}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(-\frac{dq'}{dt}\right)\right] = \circ$$

$$L\frac{d^2q'}{dt^2} + \frac{q'(t)}{c'} + \frac{q'(t)}{c} - \frac{q_\circ}{c} = \circ$$

$$\boxed{L\frac{d^2q'}{dt^2} + \left(\frac{1}{c'} + \frac{1}{c}\right)q'(t) = \frac{\varepsilon_\circ}{c}}$$

$$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c'} + \frac{1}{c}$$

$$\boxed{L\frac{d^2q'}{dt^2} + \frac{q'}{c_{eq}} = \frac{\varepsilon_\circ}{c}}$$

ج- در صورتی که مقاومت در مدار باشد

معادله بقاء انرژی
$$\frac{dw}{dt} = -I^2R$$

$$\frac{q'(t)}{c'}\frac{dq'(t)}{dt} + \frac{q_\circ - q'}{c}\left(-\frac{dq'}{dt}\right) + L\left(-\frac{dq'}{dt}\right)\frac{d}{dt}\left(-\frac{dq'}{dt}\right)$$

$$= -\left(-\frac{dq'}{dt}\right)^2 R$$

$$\boxed{L\frac{d^2q'}{dt^2}+\frac{1}{c_{eq}}q'(t)+R\frac{dq'}{dt}=\frac{q_\circ}{c}}$$

مثال ۱۴

مداری مطابق شکل در نظر بگیرید. بار q روی خازن c قرار دارد. طول میله L و جرم آن m و مقاومت آن R است و می‌تواند بطور آزادانه (بدون اصطکاک) روی مدار حرکت کند. کل مدار در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. پس از بسته شدن کلید s:

الف- نیروی مغناطیسی وارد بر میله بر حسب جریان لحظه مدار

ب- نیروی محرکه القائی در میله بر حسب سرعت لحظه‌ای میله

ج- معادله دیفرانسیل مدار را به دست آورید (حل معادله لازم نیست).

نیروی مغناطیسی

$$\vec{F}=I\int\vec{dl}\times\vec{B}$$
$$=I(t)LB$$

نیروی محرکه القائی مدار در اثر حرکت

$$\varepsilon=\int\left(\vec{v}\times\vec{B}\right).\vec{dl}=v(t)BL$$

معادله دیفرانسیل مدار

برای به کار گرفتن قانون حلقهٔ کیرشهف از نقطه x شروع می‌کنیم، اگر بار روی صفحه خازن q'' اشد باری که خازن را ترک گفته برابر q' است به طوری که

$$q'+q''=q \qquad I=\frac{dq'}{dt}=-\frac{dq''}{dt}$$

$$\frac{q''}{c}-IR-VBL=\circ$$

$$\frac{q-q'}{c}-R\frac{dq'}{dt}-VBL=\circ$$

برای حذف v از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$m\frac{dv}{dt}=IBL\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{IBL}{m}$$

با گرفتن مشتق زمانی از معادله بالا داریم

$$-\frac{1}{c}\frac{dq'}{dt}-R\frac{d^2q'}{dt^2}-BL\frac{dv}{dt}=\circ$$

$$-\frac{I}{c}-R\frac{dI}{dt}-BL\left(\frac{IBL}{m}\right)=\circ$$

$$\boxed{R\frac{dI}{dt}+I\left(\frac{1}{c}+\frac{B^2L^2}{m}\right)=\circ}$$