www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۹

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

میدان مغناطیسی

همان گونه که فضای اطراف یک میلهٔ باردار را به عنوان محل میدان الکتریکی $\vec{E}$ تعریف کردیم، فضای اطراف یک آهنربا یا یک سیم حامل جریان را نیز به عنوان محل میدان مغناطیسی $\vec{B}$ تعریف می‌کنیم. وجود میدان مغناطیسی و جهت آن را می‌توان توسط یک قطب نما به نمایش گذاشت.

آهنربا دارای دو قطب است قطب شمال (N) و جنوب (S) میدان مغناطیسی در حوالی قطب‌ها دارای بیشترین مقدار است. خطوط میدان از قطب شمال به قطب جنوب امتداد می‌یابند. وقتی دو آهنربا را نزدیک یکدیگر قرار دهیم، قطب‌های همنام یکدیگر را دفع و قطب‌های غیر همنام یکدیگر را جذب می‌کنند.

برخلاف بارهای الکتریکی که می‌توانند ایزوله شوند، دو قطب مغناطیسی همیشه با یکدیگر هستند. وقتی که یک آهنربا شکسته می شود، آهنربائی جدید به دست می‌آیند، هر کدام با قطب شمال و جنوب.

میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را چگونه باید تعریف کرد؟ در حالت میدان الکتریکی $\vec{E}$ ما آن را نیرو بر واحد بار تعریف نمودیم

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \vec{J} = \rho \vec{V}_d = en\vec{V}_d$$

پس به علت عدم وجود تک قطبی مغناطیسی $\vec{B}$ را باید به طریق دیگر تعریف نمود.

تعریف میدان مغناطیسی

برای معرفی میدان مغناطیسی در یک نقطه، ذره‌ای با بار q که با سرعت $\vec{V}$ حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. از لحاظ تجربی مشاهدات زیر به وقوع می‌پیوندد.

۱- مقدار نیروی $\vec{F}$ که به ذره وارد می‌شود به هر روی V و q بستگی دارد.

۲- مقدار و جهت $\vec{F}$ بر $\vec{V}$ و $\vec{B}$ بستگی دارد.

۳- در صورتی که $\vec{V}$ موازی $\vec{B}$ باشد، $\vec{F}$ صفر است. ولی وقتی که $\vec{V}$ با $\vec{B}$ زاویه می‌سازد و جهت $\vec{F}$ به صفحه متشکل از $\vec{V}$ و $\vec{B}$ عمود است و مقدار F با $Sin\theta$ متناسب است.

۴- وقتی که علامت بار از مثبت تغییر می‌کند (یا بالعکس) جهت نیروی مغناطیسی نیز معکوس می‌شود.

مشاهدات فوق را می‌توان در رابطهٔ زیر خلاصه کرد

$$\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$$

این رابطه را می‌توان به عنوان تعریف میدان مغناطیسی در یک نقطه از قضا در نظر گرفت. مقدار $\vec{F}$ توسط رابطهٔ

$$F=|q|\vec{V}\times\vec{B}$$

در یکاهای SI واحد میدان مغناطیسی تسلا (T) است.

$$1 \text{ تسلا } = 1T = 1\frac{\text{نیوتن}}{\text{(کولمب)} \quad \text{(ثانیه / متر)}} = 1\frac{N}{C.\frac{m}{\sec}} = 1\frac{N}{A.m}$$

واحد متداول دیگری که برای B به کار می‌رود گوس (G) است

$$1T=10^4G$$

$\vec{F}$ همیشه به $\vec{V}$ و $\vec{B}$ عمود است، لذا نمی‌تواند سرعت ذره را تغییر دهد (یعنی انرژی جنبشی آن بدون تغییر باقی می‌ماند). به عبارت دیگر نیروی مغناطیسی نمی‌تواند سرعت ذره باردار را کم و زیاد نماید. یعنی $\vec{F}$ روی ذره کار انجام نمی‌دهد.

$$dW=\vec{F}.\vec{dl}=q\left(\vec{V}\times\vec{B}\right).\vec{V}dt$$

$$=q\left(\vec{V}\times\vec{V}\right).\vec{B}dt=\circ$$

ولی جهت $\vec{V}$ می‌تواند توسط نیروی مغناطیسی تغییر کند.

نیروی وارد بر سیم حامل جریان

مشاهده کردیم که ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی $\vec{F}$ را تجربه می‌کند. چون جریان الکتریکی شامل مجموعه‌ای از بارهای متحرک است وقتی که سیم حامل جریان در میدان مغناظیسی قرار گیرد، به آن نیروی مغناطیسی وارد می‌شود.

فرض کنید که سیمی انعطاف‌پذیر مطابق شکل در میدان مغناطیسی قرار دارد. میدان مغناطیسی که به طرف بیرون صفحه است با نقاط (•) نمایش داده شده است. می‌توان نشان داد که وقتی که جریان به طرف پائین است سیم به طرف چپ خم می‌شود، وقتی که جریان به طرف بالاست سیم به طرف راست ختم می شود.

برای محاسبه نیروی وارد به سیم حامل جریان، قسمتی از سیم به طول l و سطح مقطع A را در نظر بگیرید. (مطابق شکل) میدان معناطیسی به طرف داخل صفحه است. و با علام (×) نمایش داده می‌شود.

بارها با سرعت متوسط سوق $\vec{V}_d$ حرکت می‌کنند. بار کل متحرک در این نقطه برابر است با

$$Q_{tot}=q\left(nAl\right)$$

به طوری که n تعداد بارهای متحرک بر واحد حجم سیم است. نیروی مغناطیسی کل وارد به قطعه

$$\vec{F} = Q_{tot}\vec{V}_d \times \vec{B} = qnAl\left(\vec{V}_d \times \vec{B}\right)$$

$$= I\vec{l} \times \vec{B}$$

به طوری که $I = nqV_d A$ و $\vec{l}$ بردار طول با مقدار l و جهت آن در جهت جریان است. برای سیمی به شکل دلخواه، نیروی مغناطیسی از جمع نیروهای مؤثر بر المان‌های طول تشکیل دهندهٔ سیم به دست می‌آید. فرض کنید المان طول قطعات توسط $\vec{dl}$ نمایش داده شود.

نیروی مغناطیسی مؤثر بر المان طول $\vec{dl}$

$$d\vec{F} = I\,\vec{dl} \times \vec{B}$$

لذا نیروی کل

$$\vec{F} = I\int_a^b \vec{dl} \times \vec{B}$$

به عنوان مثال فرض کنید یک سیم خمیدهٔ حامل جریان I در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار گرفته است. می‌توان ثابت کرد که نیروی وارد بر آن برابر است با

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

که در آن $\vec{l}$ برداریست که دو سر سیم را به هم وصل می‌کند (مطابق شکل)

با استفاده از رابطهٔ کلی نیرو

$$\vec{F} = I\int \vec{dl} \times \vec{B}$$

میدان مغناطیسی

$$\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$$

المان طول

$$\vec{dl} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & dy & dz \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(B_z dy - B_y dz\right) + \hat{j}\left(B_x dz - B_z dx\right)$$

$$+\hat{k}\left(B_y dx - B_x dy\right)$$

$$\vec{F} = I\left[\hat{i}\int\left(B_x dy - B_y dz\right) + \hat{j}\int\left(B_x dz - B_z dx\right)\right.$$

$$\left. +\hat{k}\int\left(B_y dx - B_x dy\right)\right]$$

$$= I\left[\hat{i}\left(B_x b - B_y c\right) + \hat{j}\left(B_x c - B_z a\right) + \hat{k}\left(B_y a - B_x b\right)\right.$$

$$= I\left(\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\right)$$

$= I\vec{l} \times \vec{B}$

که در آن $\vec{l} = \hat{i}a + \hat{j}b + \hat{k}c$ برداریست که مبدأ را نه انتهای سیم در نقطهٔ (a,b,c) وصل می کند. اگر سیم به شکل یک حلقهٔ بسته حامل جریان I به شکل دلخواه باشد که در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار گرفته (مطابق شکل) نیروی وارد به حلقه

$$\vec{F} = I\left(\oint \vec{dl}\right) \times \vec{B}$$

چون مجموعهٔ المان های طول $\vec{dl}$ تشکیل یک چند ضلعی بسته را می‌دهند لذا جمع برداری آنها صفر است یعنی

$$\oint \vec{dl} = \circ$$

پس نیروی مغناطیسی وارد به یک حلقه حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت برابر صفر است

$$\vec{F} = \circ$$

مثال ۱

یک نیم حلقهٔ دایروی به شعاع R که حاصل جریان I است را در نظر بگیرید. این نیم حلقه در صفحه xy قرار دارد اگر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B\hat{k}$ به آن اعمال شود. نیروی وارد به این نیم حلقه را پیدا کنید.

حلّ:

اگر $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ نیروهای وارد بر قسمت مستقیم و قسمت نیم دایره باشند.

$$\vec{F}_1 = I\vec{l} \times \vec{B} = I\left(2R\hat{i}\right) \times B\hat{k} = 2IRB\left(-\hat{j}\right)$$

برای محاسبه $\vec{F}_2$ از رابطهٔ کلی $\vec{F} = I\int \vec{dl} \times \vec{B}$ استفاده می‌نمائیم.

$$\vec{dl} = Rd\varphi\hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi} = -\hat{i}Sin\varphi + \hat{j}Cos\varphi$$

$$\vec{F}_z = I\int_\circ^\pi Rd\varphi\hat{\varphi} \times B\hat{k}$$

$$= IRB\int_\circ^\pi \hat{\rho}d\varphi$$

$$= IRB\int_\circ^\pi \left(\hat{i}Cos\varphi + \hat{j}Sin\varphi\right)d\varphi$$

$$= IRB\int_\circ^\pi \left(\hat{i}Sin\varphi - \hat{j}Cos\varphi\right)\Big|_\circ^\pi$$

$$= 2IRB\left(\hat{j}\right)$$

پس نیروی خالص مؤثر بر سیم حلقه

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \circ$$

این نتیجه با آنچه که قبلاً به دست آوردیم در توافق است. یعنی نیروی وارد به حلقهٔ حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت برابر صفر است.

گشتاور وارد به حلقهٔ حامل جریان

یک قابل مستطیل شکل به ابعاد $a\times b$ حامل جریان I را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=B\hat{k}$ در نظر بگیرید.

نیروی کل وارد به قاب $\vec{F}_{net}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4$

نیروی وارد به ضلع ۱ $\vec{F}_1=IbB\left(-i\right)$

نیروی وارد به ضلع ۲ $\vec{F}_2=IaBSin\left(\frac{\pi}{2}-r\right)\hat{j}$

نیروی وارد به ضلع ۳ $\vec{F}_3=IbB\left(\hat{i}\right)$

نیروی وارد به ضلع ۴ $\vec{F}_4=IaBSin\left(\frac{\pi}{2}-r\right)\left(-\hat{j}\right)$

لذا $\vec{F}_{net}=\circ$

همانطور که انتظار می‌رفت، گرچه نیروی خالص وارد به حلقه صفر است، نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ تولید گشتاور می‌کنند که باعث دوران حلقه حول محور y می‌شود.

$$\vec{\tau}=\vec{\tau}_1+\vec{\tau}_3=\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_3\times\vec{F}_3$$
$$=\left(-\vec{r}_3\right)\times\left(-\vec{F}_3\right)+\vec{r}_3\times\vec{F}_3=2\vec{r}_3\times\vec{F}_3$$
$$\vec{\tau}=2\frac{a}{2}IbBSin\gamma\left(\hat{i}\right)=IabBSin\gamma\left(\hat{j}\right)$$

رابطهٔ فوق برای $\vec{\tau}$ را با تعریف بردار ممان دو قطبی مغناطیسی به فرم دیگری در می‌آوریم. برای یک حلقهٔ حامل جریان ممان دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu}=IA\hat{n}$، که در آن I جریان حلقه و A مساحت حلقه $\hat{n}$ بردار یکهٔ عمود به سطح حلقه که جهت آن طبق قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود.

با توجه به تعریف فوق و رابطهٔ $\vec{\mu}$، گشتاور اعمال شده بر حلقهٔ حامل جریان را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$$

این رابطه مشابه با $\vec{\tau}=\vec{\rho}\times\vec{E}$ است، یعنی گشتاور اعمال شده بر دو قطبی الکتریکی $\vec{\rho}$ در میدان الکتریکی $\vec{E}$. لذا با توجه به این تشابه، انرژی پتانسیل مغناطیسی یک دو قطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی را می‌توان با مقایسه با رابطه $U=-\vec{\rho}.\vec{E}$ (انرژی پتانسیل دو قطبی الکتریکی) نوشت. یعنی

$$U=-\vec{\mu}.\vec{B}$$

در حقیقت کاری که توسط عامل خارجی برای چرخاندن یک دو قطبی مغناطیسی از زاویهٔ $\theta_\circ$ به θ انجام می‌شود برابر است با

$$W_{ext}=\int_{\theta_\circ}^{\theta}\tau d\theta'=\int_{\theta_\circ}^{\theta}\mu BSin\theta' d\theta'=\mu B\left(Cos\theta_\circ-Cos\theta\right)$$
$$=\Delta U=U-U_\circ$$

در اینجا $W_{ext}=-W$، به طوری که W کاریست که توسط میدان مغناطیسی انجام می شود. اگر $U_\circ=\circ$ در $\theta_\circ=\frac{\pi}{2}$ دو قطبی در حضود میدان خارجی مغناطیسی دارای انرژی پتانسیل

$$U=-\mu BCos\theta=-\vec{\mu}.\vec{B}$$

اگر $\vec{\mu}$ موازی و هم جهت $\vec{B}$ باشد پیکربندی در تعادل پایدار است و انرژی پتانسیل آن مینیمم است یعنی $U_{\min}=-\mu B$. از طرف دیگر اگر $\vec{\mu}$ و $\vec{B}$ موازی ولی در خلاف جهت یکدیگر باشند انرژی پتانسیل سیستم ماکزیمم و پیکربندی در تعادل ناپایدار است.

تعادل ناپایدار (بیشترین انرژی) تعادل پایدار (کمترین انرژی)

مقدار کاری که برای چرخاندن دو قطبی از پایدارترین حالت به ناپایدارترین حالت باید انجام شود

$$U=U_{180^\circ}-U_{\circ^\circ}=-\mu BCos180+\mu BCos\circ$$
$$=2\mu B$$

نکته: نتیجه فوق برای دوقطبی‌های مغناطیسی ذاتی درست است. در فصول بعد خواهیم دید که چرخاندن حلقه حامل جریان باعث تغییر جریان آن می شود لذا باید برای ثابت نگه داشتن جریان حلقه کار دیگری انجام شود. لذا نتیجه فوق برای این که دوقطبی فقط یک قسمت کار است.

نیروی مغناطیسی وارد بر یک دو قطبی

در مثال قبل مشاهده شد که نیروی وارد به قاب مستطیلی حامل جریان (دو قطبی مغناطیسی) در میدان مغناطیسی یکنواخت برابر صفر است اگر میدان غیر یکنواخت باشد، نیروی خالصی بر دو قطبی وارد می‌شود. فرض کنید که یک دو قطبی کوچک $\vec{\mu}$ روی محور تقارن یک آهنربا قرار گرفته باشد (مطابق شکل)

نیروی جاذبه را تجربه می‌کند. این نیرو توسط میدان غیریکنواخت آهنربا به دو قطبی وارد می‌شود. لذا برای حرکت دادن دو قطبی به طرف راست باید نیروی خارجی به آن اعمال شود. نیروی خارجی F_{ext} که توسط عامل خارجی برای حرکت دادن دو قطبی به اندازهٔ σx باید اعمال شود.

$$F_{ext}\Delta x = W_{ext} = \Delta = -\mu B\left(x+\Delta x\right)+\mu B\left(x\right)$$
$$= -\mu\left[B\left(x+\Delta x\right)-B\left(x\right)\right]$$

برای Δx کوچک، نیروی خارجی را می‌توان از رابطۀ

$$F_{ext} = -\mu\frac{B\left(x+\Delta x\right)-B\left(x\right)}{\Delta x} = -\mu\frac{dB}{dx}$$

به دست آورد. این نیرو مثبت است زیرا $\frac{dB}{dx}<0$ یعنی میدان مغناطیسی با افزایش x کاهش پیدا می‌کند. پس نیروی جاذبه آهنربا

$$F = \mu\frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\vec{\mu}.\vec{B}\right)$$

بطور کلی‌تر، نیروی مغناطیسی وارد بر دو قطبی $\vec{\mu}$ که در میدان مغناطیسی غیر یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{\mu}.\vec{B}\right)$$

که در آن $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

ذرات باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت

ذره‌ای باردار با بار q+ با سرعت اولیۀ $\vec{V}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت می‌کند جهت میدان $\vec{B}$ به طرف خارج صفحه می‌باشد. اگر سرعت ذره $\vec{V}$ بر میدان مغناطیسی $\vec{B}$ عمود باشد. رابطۀ $\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B}$ نشان می‌دهد که این ذره تحت تأثیر یک نیروی منحرف کنندۀ جانب به مرکز به بزرگی qVB قرار خواهد گرفت. این نیرو در صفحۀ شکل قرار دارد، یعنی ذره نمی‌تواند از این صفحه خارج شود.

ذره باردار با سرعت ثابت روی یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، با توجه به قانون دوّم نیوتون داریم

$$qVB = \frac{mV^2}{r}$$

شعاع دایره

$$r = \frac{mV}{qB}$$

سرعت زاویه‌ای ω از نسبت $\frac{V}{r}$ به دست می‌آید

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{qB}{m}$$

فرکانس ν عبارت است از

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{qB}{2\pi m}$$

پریود حرکت T

$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

توجه کنید که ν به سرعت ذره بستگی ندارد . ذرات سریع دایره‌های بزرگ و ذرات آهسته دایره‌های کوچک را طی می‌کنند، ولی تمام ذرات در زمان یک T (دورهٔ تناوب) یک دور کامل می‌زنند.

اگر $\vec{V}$ سرعت اولیهٔ ذرهٔ باردار q+ بر میدان $\vec{B}$ عمود نباشد بلکه با آن زاویهٔ θ بسازد، در این حالت سرعت دارای مؤلفهٔ موازی با میدان مغناطیسی $\vec{B}$ است. مسیر حاصل به جای یک دایره یک مسیر مارپیچی (مطابق شکل) خواهد بود. با تجزیه $\vec{V}$ به دو مؤلفهٔ $\vec{V}_{\parallel}$ یعنی موازی با $\vec{B}$ و $\vec{V}_{\perp}$ مؤلفهٔ عمود به میدان (مطابق شکل) یعنی

$$V_{\parallel}=VCos\theta$$

$$V_{\perp}=VSin\theta$$

یا

$$\vec{V}=\vec{V}_{\parallel}+\vec{V}_{\perp}$$

لذا از قانون دوّم نیوتن

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=q\vec{V}\times\vec{B}$$

$$m\frac{d\vec{V}_{\parallel}}{dt}+m\frac{d\vec{V}_{\perp}}{dt}=q\left(\vec{V}_{\parallel}+d\vec{V}_{\perp}\right)\times\vec{B}$$

$$m\frac{d\vec{V}_{\parallel}}{dt}+m\frac{d\vec{V}_{\perp}}{dt}=q\vec{V}_{\perp}\times\vec{B}$$

از معادله فوق دو معادله برای $\vec{V}$ و $\vec{V}_{\perp}$ به دست می‌آید

$$m\frac{d\vec{V}_{\perp}}{dt}=\circ\Rightarrow\frac{d\vec{V}_{\parallel}}{dt}=\circ\Rightarrow\vec{V}_{\parallel}=\text{ثابت}$$

$$m\frac{d\vec{V}_{\perp}}{dt}=q\vec{V}_{\perp}\times\vec{B}$$

معادله $\vec{V}_{\perp}$ دقیقاً مشابه حالت قبل است یعنی یک حرکت دایروی با شعاع $r=\frac{mV_{\perp}}{qB}$ و پریود $\frac{2\pi m}{qB}$ با فرکانس $\nu=\frac{qB}{2\pi m}$ و فرکانس زاویه‌ای $\omega=2\pi\nu=\frac{qB}{m}$ گام مسیر مارپیچی یعنی توسط مؤلفهٔ موازی تعیین می‌شود $P=V_{\parallel}T=\frac{VCos\theta 2\pi m}{qB}$ مشاهده می‌شود که وقتی سرعت ذره به $\vec{B}$ عمود

نباشد مسیر حرکت ذره ترکیب دو حرکت دایروی و حرکت با سرعت ثابت در جهت $\vec{B}$ ایست.

نکته:

حرکت ذرات باردار در میدان‌های مغناطیسی غیر یکنواخت می‌تواند کاملاً پیچیده باشد. در شکل یک بطری مغناطیسی مشاهده می‌شود، پیکربندی خاصی از میدان مغناطیسی که در مرکز ضعیف و در هر دو سر قوی ایست. ذرات به صورت مارپیچی حرکت می‌کنند اگر میدان در دو انتها به اندازه کافی قوی باشد به طرف مرکز بطری منعکس می‌شوند. پدیدهٔ مشابه دیگر نوسانات یون‌ها بین قطب‌های مغناطیسی زمین در کمربند Von Allen است.

سیکلوترون‌ها

ذرات بارداری مانند هسته‌های هیدروژن (پروتون‌ها) و هسته‌های هیدروژن سنگین (دوترون‌ها) را تا انرژی‌های بالا شتاب می‌دهند، به طوری که بتوان از آن‌ها در آزمایشگاه‌های اتمشکنی استفاده کرد. در سیکلوترون، برای شتاب دادن یون از یک اختلاف پتانسیل نسبتاً بزرگ (مثلاً $10^5 V$) استفاده می‌شود، ولی باید یون چندین مرتبه از اختلاف پتانسیل عبور کند. برای رسیدن به انرژی $10 Mev$تحت پتانسیل شتاب دهندهٔ $10^5 V$، یون باید 100 بار از این پتانسیل عبور کند. برای دوران یون‌ها از میدان مغناطیسی استفاده می‌شود و یون‌ها بارها و بارها از پتانسیل شتاب‌دهنده عبور می‌کند. شکل تصویر یک سیکلوترون را که از بالا دیده می‌شود نشان می‌دهد. دو جسم D شکل، که دی نامیده می‌شوند، از ورقه‌های مسی ساخته شده‌اند و یک نوسانگر الکتریکی که در شکاف میان دی‌ها اختلاف پتانسیل شتابنده برقرار می‌کند. جهت این اختلاف پتانسیل در هر ثانیه چند میلیون مرتبه عوض می شود.

دی‌ها در میدان مغناطیسی ($B \approx 1.6T$) که جهت آن به طرف خارج صفحه شکل است قرار می‌گیرند. بالاخره فضائی که یون‌ها در آن حرکت می‌کنند، تا فشار حدودی $10^{-6} mmHg$ تخلیه می‌شود، اگر این کار صورت نگیرد.

یون‌ها به طور پیوسته با مولکول‌های هوا برخورد می‌کند فرض کنید پروتون از چشمه یونی نقطهٔ S از مرکز سیکلوترن مطابق شکل خارج شود پروتون به سمت دی منفی شتاب می‌گیرد و وارد آن می‌شود. در داخل دی، پروتون به وسیلهٔ دیوارهای فلزی دی‌ها از اثر میدان‌های الکتریکی محفوظ می‌ماند. ولی دی‌های از جنس مس مانع تأثیر میدان مغناطیسی نمی‌شوند

و در نتیجه یون منحرف می‌شود و در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. شعاع مسر به سرعت بستگی دارد و از رابطه زیر به دست می‌آید،

$$r=\frac{mv}{qB}$$

فرض کنید که وقتی که پروتون دوباره از دی خارج و وارد شکاف می‌شود اختلاف پتانسیل تغییر علامت دهد. بار دیگر در مقابل دی منفی قرار می‌گیرد، باز هم شتاب می‌گیرد و ورودی دیگر یک مسیر نیم دایره با شعاع بزرگتر را می‌پیماید. این فرآیند ادامه می‌یابد تا آن که یون به لبهٔ خارجی یکی از دی‌ها می‌رسد و در آنجا به وسیلهٔ یک صفحه منحرف کنندهٔ با بار منفی از دستگاه خارج می‌شود. موضوع اساسی در طرز کار سیکلوترن این است که فرکانس مشخصهٔ ν که یون با آن در میدان دوران می کند (که به سرعت‌اش بستگی ندارد)، باید با فرکانس ثابت ν_{osc} نوسانگر الکتریکی مساوی باشد، یا

$$\nu=\nu_{osc} \qquad \text{(شرط تشدید)}$$

بنا به شرط تشدید چنانچه بخواهیم انرژی یون چرخنده افزایش پیدا کند، باید به آن با فرکانس ν_{osc} انرژی داده شود. این فرکانس با فرکانس طبیعی ν که یون با آن در میدان دوران می‌کند برابر است.

با توجه به معادله $\gamma=\frac{qB}{2\pi m}$، معادله تشدید را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{qB}{2\pi m}=\nu_{osc}$$

مقدار $\frac{q}{m}$ برای هر یون معینی ثابت است، معمولاً نوسانگر طوری طرح می‌شود که با تک فرکانس ν_{osc} کار کند. در این صورت سیکلوترون به شعاع دی ها R بستگی دارد. با استفاده از معادله $r=\frac{mV}{qB}$ سرعت ذره‌ای که با این شعاع دوران می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$v=\frac{qBR}{m}$$

و انرژی جنبشی ذره برابر است با $k=\frac{1}{2}mV^2=\frac{q^2B^2R^2}{2m}$.

اثر هال:

می‌دانیم باریکهٔ الکترون در خلأ توسط میدان مغناطیسی منحرف می‌شود. سؤالی که می‌تواند مطرح شود آنست که آیا الکترون‌ها یک سیم مسی نیز توسط میدان مغناطیسی منحرف می‌شوند! هال نشان داد که

واقعاً این چنین است. با اثر هال می‌توان دریافت که حاملین بار در یک هادی بارهای مثبت یا منفی‌اند. علاوه بر آن تعداد حاملین بار بر واحد حجم هادی نیز می‌تواند اندازه‌گیری شود.

شکل یک نوار مشی به پهنای d را نشان می‌دهد که حامل جریان I در جهت نشان داده شده است. طبق معمول جهت جریان، جهت حرکت حامل‌های بار مثبت را نشان می‌دهد. ولی می‌دانیم که حامل‌های بار الکترون‌ها هستند و با سرعت سوق V_d در جهت مخالف از پائین به بالا حرکت می‌کنند. نوار مسی را در میدان مغناطیسی قرار می دهیم به طوری که $\vec{B}$ بر سطح آن عمود باشد. این میدان نیروی مغناطیسی $\vec{F}_B = q\vec{V} \times \vec{B}$ را به حاملین بار اعمال می کند در نتیجه حامل‌های بار، اعم از این که مثبت یا منفی باشند، ضمن سوق یافتن در طول نوار به طرف راست نیز سوق پیدا می‌کنند و اختلاف پتانسیل عرضی هال را بین دو لبه به وجود می‌آورند. علامت حامل‌های بار از علامت اختلاف پتانسیل هال تعیین می‌شود. اگر حامل‌های بار منفی باشند پتانسیل لبۀ راست، پائین‌تر از لبه چپ خواهد بود و اگر حامل‌های بار مثبت باشند پتانسیل لبه راست بالاتر. در اثر تجمع الکترون‌ها روی لبۀ راست نوار میدان الکتریکی عرضی هال، E، ایجاد می‌شود این میدان نیروی الکتریکی $\vec{F}_E$ که به سمت چپ است را به هر الکترون اعمال خواهد کرد.

سرانجام هنگامی که تعادل برقرار شود. نیروی الکتریکی و مغناطیسی وارد بر الکترون یکدیگر را خنثی می‌نمایند. الکترون‌ها از این پس با سرعت سوق $\vec{V}_d$ بدون انحراف از پائین به طرف بالا حرکت خواهند کرد. و تجمع الکترون‌ها روی لبه راست و در نتیجه میدان الکتریکی هال E بیشتر افزایش نخواهند یافت. اختلاف پتانسیل هال V وابسته به میدان الکتریکی هال که بین دو لبه نوار مسی به عرض d برقرار می‌شود از رابطۀ زیر به دست می‌آید

$$V=Ed$$

با متصل کردن یک ولت متر بین دو لبه نوار سی می‌توانیم بگوئیم که کدام لبه در پتانسیل بالاتری قرار دارد. برای شرائط شکل (a) در می‌یابیم که لبه چپ دارای پتانسیل بالاتر است که با فرض ما که حاملین بار منفی هستند در توافق است. شکل (b)

اگر فرض می‌کردیم که حاملین بار مثبت هستند و از طرف بالای نوار با سرعت سوق $\vec{V}_d$ به سمت پائین حرکت می‌کنند. نیروی مغناطیسی $\vec{F}_B$ دوباره آنها را به طرف لبه راست منحرف می‌کرد. به طوری که لبه راست در پتانسیل بالاتر قرار می‌گرفت. چون این فرض با چیزی که ولت متر می‌خواند

در توافق نیست پس نتیجه می‌گیریم که حاملین بار باید منفی باشند. شکل (c)

در حالت تعادل یعنی وقتی که ازدیاد تجمع حاملین بار روی لبه‌ها قطع می‌شود نیروی فورتس برابر صفر است. یعنی $\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{V}_d\times\vec{B}=\circ$ یعنی وقتی که $\vec{F}_E=\vec{F}_B$

$$\vec{E}=-\vec{V}_d\times\vec{B}\Rightarrow E=V_dB$$

این معادله نشان می‌دهد که با اندازه‌گیری E و B می‌توانیم بزرگی در جهت V_d را پیدا کنیم. تعداد حامل‌ها را می‌توان از اندازه‌گیری‌های مربوط به اثر هال نیز به دست آورد. با توجه به رابطهٔ چگالی جریان و سرعت سوق

$$\vec{J}=\rho\vec{V}_d=en\vec{V}_d$$

که در آن n تعداد الکترون‌های رسانشی حجم است.

$$\vec{F}_3=I\left(-aCos30^\circ\,\hat{i}+aSin30^\circ\,\hat{j}\right)\times\hat{i}B$$

$$=ILBSin\theta\left(-\hat{j}\right)$$

A سطح مقطع نوار. با جایگزینی V_d در رابطه $E=V_dB$ و با استفاده از رابطهٔ V=Ed

$$E=\frac{I}{neA}B\Rightarrow n=\frac{IB}{eAE}=\frac{IB}{eA\frac{V}{d}}=\frac{IB}{elV}$$

$l=\frac{A}{d}$ ضخامت نوار است.

توافق میان تجربه و معادله فوق برای فلزات یک ظرفیتی نسبتاً خوب است. در مورد فلزات چند ظرفیتی آهن و مواد مغناطیسی مشابه و نیمرساناهایی مانند ژرمانیوم توجیه سادهٔ اثر هال به کمک مدل الکترون آزاد اعتباری ندارد. توجیه نظری اثر هال بر مبنای فیزیک کوانتومی، در تمام حالت‌ها توافق قابل قبولی با تجربه دارد.

تعداد الکترون‌های رسانشی

نام فلز	تعداد براساس داده‌های اثر هال بر حسب $10^{22}/cm^3$	تعداد محاسبه شده با فرض یک الکترون بر اتم بر حسب $10^{22}/cm^3$
Li	3.7	4.8
Na	2.5	2.6

1.3	1.0	K
0.8	0.8	Cs
8.4	11	Cu
6.0	7.4	Ag
5.1	8.7	Au

مثال ۲

نشان دهید که نسبت میدان الکتریکی هال، E_H، به میدان الکتریکی E، میدان مولد جریان، عبارت است از

$$\frac{E_H}{E}=\frac{B}{ne\rho}$$

که در آن ρ مقاومت ویژه ماده است.

حلّ:

$$E_H=V_dB$$

$$\Rightarrow \frac{E_H}{E}=\frac{V_dB}{\rho J}$$

$$E=\frac{J}{\sigma}=\rho J$$

با استفاده از رابطه $J=\rho V_d=enV_d$ برای چگالی جریان

$$\frac{E_H}{E}=\frac{V_dB}{\rho neJ}=\frac{B}{ne\rho}$$

گزینشگر سرعت

در حضور میادین الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ نیروی وارد بر ذرهٔ باردار q به نیروی فورتس معروف است.

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B}\right)$$

می‌توان با ترکیب دو میدان ذراتی که با سرعت خاصی حرکت می‌کنند را گزینش نمود. این اصل توسط J.J. Thomson برای اندازه‌گیری نسبت بار به جرم الکترون به کار گرفته شد. در شکل دیاگرام دستگاه تامسون نمایش داده شده است. الکترون‌ها با بار q=-e و جرم m از کاتد C تابیده می‌شئنذ و سپس به طرف شکاف‌های A و B شتاب می‌گیرند. اختلاف پتانسیل بین شکاف A و کاتد C برابر تغییر در انرژی پتانسیل الکترون

$$\Delta U=-eV$$

طبق اصل بقاء انرژی، انرژی جنبشی به دست آمده

$$\Delta K = -\Delta U = \frac{mV^2}{2}$$

بنابراین سرعت الکترون‌ها

$$V = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

اگر الکترون‌ها به طرف ناحیه‌ائی که میدان الکتریکی به طرف پائین است حرکت کنند، چون بارش منفی ایست به طرف بالا منحرف خواهد شد. اگر علاوه بر میدان الکتریکی یک میدان مغناطیسی به طرف داخل صفحه موجود باشد الکترون نیروی $-e\vec{V}\times\vec{B}$ را نیز تجربه می‌کند. وقتی که این دو نیرو دقیقاً برابر باشند الکترون روی سیم مستقیم حرکت خواهد کرد. از معادلهٔ نیروی فورتس مشاهده می‌شود که

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V}\times\vec{B} = \circ$$

$$eE = eVB$$

$$V = \frac{E}{B}$$

یعنی فقط ذراتی که دارای سرعت $V = \frac{E}{B}$ باشند قادر به حرکت روی خط مستقیم هستند با ترکیب دو رابطهٔ $V = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ و $V = \frac{E}{B}$ داریم

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB}$$

با اندازه‌گیری E، V و B نسبت بار به جرم الکترون می‌تواند اندازه‌گیری شود. دقیق‌ترین اندازه‌گیری تاکنون

$$V = \frac{e}{m} = 1.758820174(71)\times 10^{11}\ {}^{c}\!/_{kg}$$

اسپکترومتر جرمی

روش‌های مختلفی را می‌توان برای اندازه‌گیری جرم یک اتم به کار گرفت، یکی امکان به کارگیری اسپکترومتر جرمی ایست. سیمای اساسی یک اسپکترومتر در شکل نمایش داده شده است

ذره‌ای با بار q+ ابتدا به گزینشگر سرعت فرستاده می‌شود. میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی در رابطه E=VB صدق می‌کنند، لذا مسیر حرکت ذره خط مستقیم می‌باشد. با ورود به ناحیه‌ای که دومین میدان مغناطیسی به طرف داخل صفحه اعمال می‌شود، ذره روی مسیر دایروی به شعاع r حرکت می‌کند و در نهایت به صفحه عکاسی برخورد می کند. با استفاده از رابطهٔ شعاع سیکلوترون

$$r = \frac{mV}{qB_\circ} \Rightarrow m = \frac{qB_\circ r}{V}$$

چون $V = \frac{E}{B}$، پس

$$m = \frac{qB_\circ Br}{E}$$

مثال ۳

ذرهٔ A با بار q و جرم m_A و ذرهٔ b با بار 2q و جرم m_B توسط پتانسیل ΔV از حالت سکون شتاب داده می‌شوند، بعد توسط میدان مغناطیسی یکنواخت روی مسیرهای نیم دایره‌ائی منحرف می‌شوند. شعاع مدارهای ذرات A و B به ترتیب R و 2R است. اگر جهت میدان مغناطیسی عمود به سرعت ذرات باشد نسبت جرمهایشان چقدر است؟

حلّ:

انرژی جنبشی به دست آمده توسط ذرات برابر است با

$$\frac{1}{2}mV^2 = q\Delta V$$

در نتیجه

$$V = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

بارها روی نیم دایره حرکت می‌کنند، لذا نیروی مغناطیسی شعاعی و به طرف مرکز یعنی نیروی جانب مرکز از قانون دوّم نیوتن

$$m\frac{V^2}{r} = qVB$$

شعاع دایره را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد.

$$r = \frac{mV}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m\Delta V}{q}}$$

که نشان می‌دهد r با $\left(\frac{m}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$ متناسب است. نسبت جرمها از طریق زیر قابل استخراج است

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{\left(m_A/q_A\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(m_B/q_B\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{R}{2R} = \frac{\left(m_A/q_A\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(m_B/q_B\right)^{\frac{1}{2}}}$$

که در نهایت

$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{1}{B}$$

مثال ۴

یک سیم نازک حامل جریان I مطابق شکل می‌تواند حول محور y دوران کند. هر گاه میدان اندکسیون مغناطیسی B در جهت محور z به سیم مزبور اعمال شود.

الف- نیروی مغناطیسی موثر بر اضلاع 1، 2 و 3 را تعیین کنید. (طول هر یک از اضلاع برابر L است)

ب- بردار گشتاور نیروی مغناطیسی مؤثر را محاسبه نمائید.

ج- با فرض اینکه چگالی جرمی سیم λ است، مقدار زاویهٔ θ را به دست آورید.

نیروی مغناطیسی مؤثر بر اضلاع

$$\vec{F}=I\vec{l}\times\vec{B}$$

$$\vec{F}=-eV\times BSin30^\circ\hat{k}=-eV\hat{i}\times\left(BCos60^\circ\hat{i}+BSin30^\circ\right)$$

$$=ILBSin\theta\left(-\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}_3=I\vec{l}\times\vec{B}=ILBSin\theta\left(\hat{j}\right)$$

لذا برآیند نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_3$ برابر صفر است.

$$\vec{F}_2=ILB\left(\hat{i}\right)$$

گشتاور الکتریکی

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{\tau}_e=LF_2Sin\left(\pi/2-\theta\right)\left(-\hat{j}\right)$$

$$\vec{\tau}_e=IL^2BCos\theta\left(-\hat{j}\right)$$

گشتاور مکانیکی

$$\vec{\tau}_m=\vec{\tau}_1+\vec{\tau}_2+\vec{\tau}_3$$

$$=\lambda LgSin\theta\left(\hat{j}\right)$$

$$+\frac{L}{2}\lambda gLSin\theta\left(\hat{j}\right)$$

$$+\frac{L}{2}\lambda LgSin\theta\left(\hat{j}\right)$$

$$\vec{\tau}_m=\left(\lambda L^2gSin\theta+\lambda L^2gSin\theta\right)\left(\hat{j}\right)$$

$$=2\lambda L^2gSin\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_e = \vec{\tau}_m \Rightarrow IL^2.BCos\theta = 2\lambda L^2 gSin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{IB}{2\lambda g}$$

مثال ۵

سیمی به شکل مثلث متساوی الاضلاع حامل جریان I مطابق شکل در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار گرفته است.

a- مطلوبست محاسبه نیروی وارد بر هر یک از اضلاع مثلث. (میدان مغناطیسی در صفحه مثلث قرار دارد)

b- گشتاور مغناطیسی وارد به سیم مثلثی شکل چه مقدار است؟

حلّ:

نیرو وارد به اضلاع

$$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B}$$

$$\vec{F}_1 = I\left(aCos30^\circ\hat{i} + aSin30^\circ\hat{J}\right)\times\left(\hat{i}B\right)$$

$$\vec{F}_1 = IaBSin30^\circ\left(-\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}_2 = Ia\left(-\hat{j}\right)\times\left(\hat{i}B\right) = IaB\left(\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}_3 = I\left(-aCos30^\circ\hat{i} + aSin30^\circ\hat{j}\right)\times\hat{i}B$$

$$= IaBSin30^\circ\left(-\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \circ$$

جمع نیروهای وارد به اضلاع مثلث صفر است. زیرا نیروی وارد به هر حلقهٔ حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت برابر صفر است.

گشتاور

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = IA\left(-\hat{k}\right)\times B\hat{i}$$

$$= IAB\left(-\hat{j}\right)$$

مثال ۶

یک آهنربا که قطب شمالش به طرف بالاست روی محور تقارن یک حلقهٔ حامل جریان I مطابق شکل قرار دارد میدان مغناطیسی با خط قائم زاویهٔ θ می‌سازد، نیروی مغناطیسی وارد به حلقه را محاسبه نمائید.

$$\vec{F} = I\int\vec{dl}\times\vec{B}$$

$$\vec{B} = BCos\theta\hat{k} + BSin\theta\hat{\rho}$$

$$I\vec{dl} = -IRd\varphi\hat{\varphi}$$

$$\vec{F}=-IR\int_{\circ}^{2\pi}d\varphi\hat{\varphi}\times\left(BCos\hat{k}+BSin\theta\hat{\rho}\right)$$
$$=-IRBCos\theta\int_{\circ}^{2\pi}\hat{\rho}d\varphi-IRBSin\theta\int_{\circ}^{2\pi}d\varphi\left(-\hat{k}\right)$$
$$=2\pi RBI\sin\theta\hat{k}$$

نیرو در جهت $+\hat{k}$ است لذا دافعه است.

مثال ۷

حلقه‌ای دایروی به شعاع R و چگالی بار خطی λ با چه سرعت زاویه‌ای ω بچرخد تا حلقه معلق باقی بماند. $\vec{B}$ با رابطهٔ $B_{\circ}\hat{r}$ داده شده است.

$$I=\lambda V=\lambda R\omega$$

جهت جریان باید به نحوی باشد که نیروی مغناطیسی به طرف بالا به حلقه وارد شود. لذا با استفاده از نتیجه مثال ۶ جریان باید ساعتگرد باشد. یعنی حلقه باید ساعتگرد بچرخد (مطابق شکل)

پس نیروی مغناطیسی وارد به حلقه $\vec{F}_m=2\pi RBI\sin\theta\hat{k}$

$$=2\pi RB\lambda R\omega\sin\theta\hat{k}=2\pi R^2B\lambda\omega Sin\theta$$

این نیرو باید برابر نیروی جاذبه $\vec{F}_g=m\vec{g}$ باشد یعنی

$$2\pi R^2B_{\circ}\lambda\omega Sin\theta=mg$$

لذا

$$\omega=\frac{mg}{2\pi R^2B_{\circ}\lambda Sin\theta}$$

مثال ۸

دیسک غیر هادی به جرم M و شعاع R دارای بار سطحی به چگالی σ است و با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می‌چرخد. ممان دو قطبی مغناطیسی دیسک را محاسبه نمائید.

حلقهٔ به شعاع ρ و عرض $d\rho$ مطابق شکل روی دیسک در نظر بگیرید. جریان الکتریکی این حلقه dI را می‌توانیم محاسبه نمائیم. بار المان سطح دیسک

$$dq=\sigma\rho d\rho d\varphi$$
$$dI=\frac{dq}{dt}=\sigma\rho d\rho\frac{d\varphi}{dt}=\sigma\rho\omega.d\rho$$

ممان دو قطبی مغناطیسی این حلقه

$$d\hat{\mu}=AdI\hat{k}=\pi\rho^2\sigma\rho\omega d\rho\hat{k}$$
$$=\pi\sigma\omega\rho^3d\rho\hat{k}$$

لذا

$$\hat{\mu} = \pi\sigma\omega\hat{k}\int_{\circ}^{R}\rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi\sigma\omega\rho^4}{4}\hat{k}\Big|_{\hat{k}}^{R} = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}\hat{k}$$

$$\vec{\mu} = \frac{\pi\sigma R^4\vec{\omega}}{4}$$

نکته: بر حسب بار کل روی دیسک Q

$$\vec{\mu} = \frac{1}{4}QR^2\vec{\omega}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای دیسک $\vec{L} = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\vec{\omega}$

لذا ممان دو قطبی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{\mu} = \frac{Q}{2M}\vec{L}$$

یک نتیجهٔ کلی‌ایست.

مثال ۹

ذره‌ای به جرم m و با بار q روی دایره‌ای به شعاع r با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند.

a- نشان دهید که ممان دو قطبی مغناطیسی آن $\mu = \frac{1}{2}q\omega r^2$

b- نشان دهید که اندازه حرکت زاویه‌ای آن $L = mr^2\omega$

c- نشان دهید که بردارهای ممان دو قطبی مغناطیسی و اندازه حرکت زاویه‌ای طبق رابطهٔ زیر به هم مربوطاند

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$$

ممان دوقطبی مغناطیسی

$$\mu = IA$$

$$I = qv = q\frac{\omega}{2\pi}$$

$$\mu = \frac{q\omega}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}q\omega r^2$$

اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{V} \Rightarrow L = mrV = mr^2\omega$$

رابطهٔ $\vec{\mu}$ و $\vec{L}$

اگر بار q مثبت باشد $\vec{\mu}=\frac{1}{2}q\omega r^2\hat{k}$

و بردار اندازه حرکت زاویه ائی $\vec{L}=mr^2\omega\hat{k}$

پس از مقایسه دو رابطه برداری فوق

$$\vec{\mu}=\frac{q}{2m}\vec{L}$$

مثال ۱۵

فرض کنید الکترون یک کره به شعاع R است که بار و جرم آن در حجمش بطور یکنواخت توزیع شده است. ممان مغناطیسی الکترون μ را محاسبه نمائید و نشان دهید که $\vec{\mu}=\frac{1}{2}\frac{e}{M}\vec{L}$ که در آن اندازه حرکت این $L=I\omega=\frac{2}{5}MR^2\omega$ و M جرم الکترون و e بار الکترون است.

حلّ:

$$d\mu=\pi\rho^2 dI=\pi r^2 Sin^2\theta dI$$

$$dI=\frac{dq}{dt}=\rho\frac{r^2 Sin\theta dr d\theta d\varphi}{dt}$$

$$=\rho r^2 Sin\theta dr d\theta\omega$$

$$d\mu=\pi r^2 Sin^2\theta\left(\rho r^2 Sin\theta dr d\theta\omega\right)$$

$$=\pi\rho\omega r^4\sin^3\theta dr d\theta$$

$$\mu=\rho\pi\omega\int_\circ^\pi\int_\circ^R r^4 Sin^3\theta d\theta dr$$

$$=\rho\pi\omega\frac{1}{5}R^5\int_\circ^\pi Sin^3\theta d\theta$$

$$=\frac{\rho\pi\omega R^5}{5}\int_\circ^\pi Sin\theta\left(1-Cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{\rho\omega\pi}{5}R^5\times\frac{4}{3}$$

$$\vec{\mu}=\frac{4}{15}\rho\omega\pi R^5\hat{k}$$

$$\vec{L}=\frac{2}{5}MR^2\vec{\omega}$$

بار کل الکترون $e=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$

$$\vec{\mu}=\frac{1}{5}\omega eR^2\hat{k}=\frac{1}{5}wR^2\frac{2M}{2M}\vec{\omega}=\frac{1}{2}\frac{e}{M}\vec{L}$$

مثال ۱۱

حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع R حامل جریان I حول یکی از اقطارش طوری خم می‌شود که نیمی از آن در صفحه oxy و نیم دیگرش در صفحه oxz مطابق شکل قرار گیرد.

اگر میدان مغناطیسی یکنواخت در جهت محور z باشد

a- نیروی مغناطیسی وارد به نیم حلقهٔ واقع در صفحه oxz را محاسبه نمائید.

b- گشتاور مغناطیسی وارد به کل حلقه را به دست آورید.

نیروی مغناطیسی

چون میدان مغناطیسی B یکنواخت است

لذا نیروی وارد به این نیم حلقه برابر است

با نیروئی که به جریان مستقیم از A به B وارد می‌شود. پس

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = I2R\left(-\hat{i}\right) \times B\hat{k}$$

$$= 2RIB\left(\hat{j}\right)$$

گشتاور

برای محاسبه گشتاور از رابطه زیر استفاده می‌شود

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

ممان دو قطبی حلقهٔ خم شده

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$$

$$= IA_1\hat{j} + IA_2\hat{k}$$

$$= I\frac{\pi R^2}{2}\hat{j} + I\frac{\pi R^2}{2}\hat{k}$$

زیرا حلقه خم شده را می‌توان متشکل از دو نیم حلقهٔ دایروی روی صفحه xz و xy در نظر گرفت (مطابق شکل)

جریان‌ها در محل خم شده یکدیگر را حذف می‌نمایند.

$$\vec{\tau} = \left(\frac{I\pi R^2}{2}\hat{j} + \frac{I\pi R^2}{2}\hat{k}\right) \times B\hat{k}$$

$$= \frac{I\pi R^2}{2}B\hat{j} \times \hat{k} + \frac{I\pi R^2}{2}B\vec{k} \times \hat{k}$$

$$= \frac{I\pi R^2}{2}B\left(\hat{i}\right)$$

مثال ۱۲

یک نوار مسی به عرض d با سرعت اولیه V در میدان مغناطیسی ثابت که عمود بر سطح ندارد به سمت خارج از آن است کشیده می‌شود. مقاومت R به دو سر عرضی نوار مطابق شکل بسته شده است.
الف- جریان الکتریکی گذرنده از R را به دست آورید. ب- توان مصرفی در R را به دست آورید. این توان از کجا تأمین می‌شود!

حلّ:

به بارهای آزاد این نوار فلزی نیروی فورتس وارد می شود. در حالت تعادل نیروی فورتس برابر صفر است

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) = \circ$$

یعنی

$$E=VB=$$

E میدان الکتریکی اثر هال است. لذا

$$E = {\Delta V}/{d} = VB$$

$$\Delta V = BVd$$

پس جریان ناشی از اثر میدان هال

$$I = \frac{BVd}{R}$$

$$P = IR = I\Delta V = \frac{VBd}{R}\Delta V = \frac{\left(VBd\right)^2}{R}$$

این انرژی که به صورت حرارت مقاومت تلف می‌شود از انرژی جنبشی نوار ستی تأمین می شود

مثال ۱۳

فرض کنید میدان مغناطیسی یکنواختی با محور yها زاویه 30° می‌سازد اگر یک تیغۀ مسی به ابعاد a، b و d در صفحه xz با سرعت ثابت $\vec{V} = V\hat{i}$ حرکت کند. محل تجمع بار و اختلاف پتانسیل حاصل از این تجمع را به دست آورید.

حلّ:

با حرکت تیغه الکترون‌های آزاد آن با سرعت V حرکت کرده لذا تحت تأثیر نیروی مغناطیسی قرار می‌گیرند.

$$\vec{F} = -e\vec{V} \times \vec{B} = -eV\hat{i} \times \left(BCos60^\circ \hat{i} + BSin30^\circ\right)$$

$$= -eV \times BSin30^\circ \hat{k}$$

لذا سطح پائینی تیغه محل تجمع بارهای منفی و سطح بالائی ان بارهای مثبت جمع می‌شوند. در حالت تعادل یعنی وقتی موقعی که نیروی فورتس صفر می شود.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \times \vec{B} = \circ \quad \vec{F} = \frac{I\alpha L^2}{2}\left(-\hat{k}\right)\frac{1}{2}y^2\Big|_\circ^L$$

$$-eEeVBSin30^\circ = \circ$$

میدان هال $E = -VBSin30^\circ$

پس اختلاف پتانسیل هال $\Delta V = Ea = -VaBSin30^\circ$

$$= -\frac{VaB}{2}$$

مثال ۱۴

سیمی به طول L مطابق شکل روی محور yها قرار دارد و حامل جریان I است. اگر میدان مغناطیسی $\vec{B} = \alpha y\hat{i} + \beta x\hat{j}$ به آن اعمال شود. نیروی مغناطیسی وارد به آن چه مقدار است؟

حلّ:

$$\vec{F} = I\int \vec{dl} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I\int_\circ^L \hat{j}dy \times \left(\alpha y\hat{i} + \beta x\hat{j}\right)$$

$$= I\alpha\int_\circ^L \left(\hat{j} \times \hat{i}\right) ydy + I\beta\int_\circ^L \left(\hat{j} \times \hat{j}\right)xdy$$

$$= I\alpha\left(-\hat{k}\right)\int_\circ^L ydy$$

$$= I\alpha\left(-\hat{k}\right)\frac{1}{2}y^2\Big|_\circ^L$$

$$= \frac{I\alpha L^2}{2}\left(-\hat{k}\right)$$