www.mohandesyar.com

عنـــــوان

فیزیک

آموزش الكترونيكي دانشگاه علم و صنعت ايران

فیزیک ۲

فصل ۲

استاد و مولف: دکتر مسعود جزایری

پاییز ۱۳۸۴

Edit and develop by: Majid Mohammadi, Sadra Fani

۲- الکترواستاتیک
۲-۱ تجربه کولمب
۲-۲ نیروی N بار (اصل همنش)
۲-۳ میدان الکتریکی
۲-۳-۱ میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای
۲-۳-۲ میدان الکتریکی N بار نقطه‌ای
۲-۴ میدان دوقطبی
۲-۴-۱ بسط خارجی
۲-۴-۲ بسط داخلی
۲-۵ مثالها
۲-۵-۱ چهار قطبی
۲-۵-۱ نیروی وارد به یک دوقطبی در میدان همگرا و واگرا
۲-۵-۲ نیروی بین دوقطبی‌ها
۲-۶ توزیع پیوسته بار
۲-۶-۱ چگالی حجمی
۲-۶-۲ چگالی سطحی
۲-۶-۳ چگالی خطی
۲-۷ میدان الکتریکی یک توزیع پیوسته بار
۲-۷-۱ میدان الکتریکی توزیع حجمی بار
۲-۷-۲ میدان الکتریکی توزیع سطحی بار
۲-۷-۳ میدان الکتریکی توزیع خطی بار
۲-۷-۴ خلاصه
۲-۸ مثال‌ها
۲-۸-۱ مثال ۱
۲-۸-۲ مثال ۲
۲-۸-۳ مثال ۳
۲-۸-۴ مثال ۴
۲-۸-۵ مثال ۵
۲-۸-۶ مثال ۶
۲-۸-۷ مثال ۷
۲-۸-۸ مثال ۸
۲-۸-۹ مثال ۹
۲-۸-۱۰ مثال ۱۰

۲-۱ تجربه کولمب

چارلز اگوستین کولمب با آزمایش‌های خود در سال 1785 دریافت که مقدار نیروی الکترواستاتیکی بین دو بار q_1 و q_2 که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند، به کمیات زیر بستگی دارد.

a- $F\alpha|q_1|$

b- $F\alpha|q_2|$

c- $F\alpha\dfrac{1}{r^2}$

لذا $$F\alpha\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$$F=k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

k ضریب تناسب در یکاهای SI

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon}=8.99\times10^9$$

هر بار این مقدار نیرو را به دیگری وارد می کند، این نیرو از قانون دوم نیوتن تبعیت می‌کند. نیرو روی خط واصل بین دو بار قرار دارد. بارهای همنام یکدیگر را دفع و بارهای غیر همنام یکدیگر را جذب می‌نمایند.

نیروی دافعه

نیروی جاذبه

از آنجا که نیرو الکترواستاتیکی بین دو بار یک بردار است لذا باید مقدار و جهت آن همزمان تعیین شود. موقعیت بار q_1 در دستگاه مختصات (x,y,z) را با $\vec{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$ و موقعیت بار q_2 را در این دستگاه با $\vec{r_2}=(x_2,y_2,z_2)$ مطابق شکل نشان می‌دهیم.

موقعیت بار q_2 نسبت به بار q_1 توسط بردار $\vec{r_2}\quad\vec{r_1}$ مشخص می‌شود و نیروی وارد به بار q_2 از طرف بار q_1 را با $\vec{F}_{21}$ نمایش می‌دهیم. زیرنویس اوّل مربوط به ذرهٔ ۲ و زیرنویس دوّم مربوط به ذرهٔ ۱

مقدار $\vec{F}_{21}$ برابر است با

$$F_{21}=k\frac{q_2-q_1}{\left|\vec{r_2}-\vec{r_1}\right|^2}$$

حال باید جهت این نیرو را در نظر بگیریم. از آنجا که نیروی کولمبی در راستای خط واصل بین دو بار قرار دارد. لذا برداری که در این راستا $\dfrac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{\left|\vec{r_2}\quad\vec{r_1}\right|}$ که در آن

$$\vec{r_2}\quad\vec{r_1}=\hat{i}(x_2-x_1)+\hat{j}(y_2-y_1)+\hat{k}(z_2-z_1)$$

$$\left|\vec{r_2}-\vec{r_1}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

پس نیروی وارد به ذرۀ ۲ از طرف ذره ۱ برابر است با

$$\vec{F}_{21}=k\frac{q_2q_1}{\left|\vec{r_2}-\vec{r_1}\right|^2}\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{\left|\vec{r_2}\quad\vec{r_1}\right|}$$

توجه داریم که مقدار دو نیرو برابر نیروی دارای جهت‌های مختلف هستند یعنی

$$\vec{F}_{12^2}-\vec{F}_{21}$$

نیرو دافعه اگر دو بار همنام و جاذبه اگر دو بار غیر همنام باشند

شکل فوق جهت نیروهای $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{21}$ را برای q_1 و q_2 مثبت نشان می‌دهد.

برای دو بار مختلف‌العلامه q_1 و q_2

چون

$$\vec{F}_{21}=\frac{-|q_1||q_2|}{\left|\vec{r_2}-\vec{r_1}\right|^2}\frac{\vec{r_2}\quad\vec{r_1}}{\left|\vec{r_2}\quad\vec{r_1}\right|}$$

علامت منفی باعث می‌شود که جهت نیرو خلاف برداری $\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{\left|\vec{r_2}\quad\vec{r_1}\right|}$ باشد.

نیروی وارد به ذره ۱ با تعویض اندیس‌ها به دست می‌آید یعنی

$$\vec{F}_{12}=\frac{-|q_1||q_2|}{\left|\vec{r_1}-\vec{r_2}\right|}\frac{\vec{r_1}\quad\vec{r_2}}{\left|\vec{r_1}\quad\vec{r_2}\right|}$$

جهت آن در شکل نمایش داده شده است.

۲-۲ نیروی N بار (اصل بر همنهش)

تعمیم مسأله نیروی بین دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را به سادگی می‌توان تعمیم داد. می‌خواهیم یک توزیع گسستۀ بار که متشکل از N بار نقطه‌ای است را در نظر بگیرید به طوری که

ذرۀ q_1 در $\vec{r_1}$

ذرۀ q_2 در $\vec{r_2}$

$\vdots$

ذرۀ q_i در $\vec{r_i}$

$\vdots$

ذرۀ q_N در $\vec{r_N}$ برار داشته باشد. می‌خواهیم نیروی وارد به ذرۀ iام را از طرف N-1 ذرۀ باقیمانده را به دست آوریم.

طبق اصل بر همنهش (super position) هر جفت بار بطور مستقل اثر خود را اعمال خواهد کرد. یعنی

نیروی وارد به q_i از طرف q_1
$$\vec{F}_{i1}=k\frac{q_i-q_1}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}_i\quad\vec{r}_1}{\left|\vec{r}_i\quad\vec{r}_1\right|}$$

نیروی وارد به q_i از طرف q_2
$$\vec{F}_{i2}=k\frac{q_i\quad q_2}{\left|\vec{r}_i\quad\vec{r}_2\right|^2}\frac{\vec{r}_i\quad\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_i\quad\vec{r}_2\right|}$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

نیروی وارد به q_i از طرف q_N
$$\vec{F}_{iN}=k\frac{q_iq_N}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_N\right|^2}\frac{\vec{r}_i\quad\vec{r}_N}{\left|\vec{r}_i\quad\vec{r}_N\right|}$$

طبق اصل بر همنهش نیروی کل وارد به ذرهٔ iام، $\vec{F}_i$، برابر است با
$$\vec{F}_i=\vec{F}_{i1}+\vec{F}_{i2}+\ldots+\vec{F}_{iN}$$
توجه کنید که در این جمع $\vec{F}_{ii}$ وجود ندارد زیرا هیچ باری به خودش نیرو وارد نمی‌کند

$$\vec{F}_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}$$
$$=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}k\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|^2}\frac{\vec{r}_i\quad\vec{r}_j}{\left|\vec{r}_i\quad\vec{r}_j\right|}$$

$j\neq i$ در علامت جمع یعنی $\vec{F}_{ii}$ وارد نمی‌شود.

۲-۳ میدان الکتریکی

نیروی وارد به q_2 از طرف q_1 را که در فاصله $\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|$ از یکدیگر قرار دارند یعنی

$$\vec{F}_{21}=k\frac{q_2q_1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}_2\quad\vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2\quad\vec{r}_1\right|}$$

را می‌توان به طریق دیگری تغییر نمود. وجود q_1 در $\vec{r}_1$ به فضای اطرافش خاصیتی را می‌دهد که اگر بار q_2 در موضع $\vec{r}_2$ قرار گیرد به آن نیروی $\vec{F}_{21}$ وارد می‌شود. پس رابطه $\vec{F}_{21}$ را می‌توانیم به طریق زیر قسمت نمائیم.

$$\vec{F}_{21}=k\frac{q_2q_1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}_2\quad\vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2\quad\vec{r}_1\right|}$$

$$\vec{F}_{21}=q_2\vec{E}_1$$

قسمتی که دور آن خط کشید شده است میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 که در موضع $\vec{r}_2$ وقتی با q_1 خودش در $\vec{r}_1$ قرار گرفته باشد. پس بار q_1 در موضع $\vec{r}_1$ به هر نقطه از فضا یک بردار الکتریکی $\vec{E}_1$را نسبت می‌دهد، به طوری که اگر بار q_2 در $\vec{r}_2$ قرار گیرد به آن نیروی $\vec{F}_{21}$ وارد می‌شود. برای اینکه این مفهوم را به صورت کلی درآوریم به قرارداد زیر نیاز داریم، از این به بعد
مواضع بار با مختصات پریم‌دار
مواضع میدان با مختصات بدون پریم

۲-۳-۱ میدان بار نقطه ای

با این قرارداد مسأله را بدین طریق مطرح می‌کنیم، اگر بار الکتریکی q در موضع $\vec{r}$ قرار داشته باشد میدان الکتریکی $\vec{E}$ حاصل در موضع $\vec{r}$ چه مقدار است؟

با توجه به رابطهٔ $\vec{E}_1$

$$\vec{E}(\vec{r})=k\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right|^2}\frac{\vec{r}\quad\vec{r}^{\,1}}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{\,1}\right|}$$

نیروی وارد به بار Q که در موضع r قرار می‌گیرد

$$\vec{F}=Q\vec{E}$$

اگر بار q در مرکز مختصات باشد یعنی $\vec{r}'=0$ $\quad \vec{E}=k\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=k\frac{q}{r^2}\hat{r}$

خطوط میدان بار نقطه ای q که در مبدأ مختصات قرار دارد

۲-۳-۲ میدان الکتریکی N بار نقطه‌ائی

فرض کنید N بار نقطه ائی q_1 در موضع $\vec{r}_1^{\,1}$، q_2 در موضع $\vec{r}_2^{\,1}$ ... q_i در موضع $\vec{r}_i^{\,1}$ ... q_N در موضع $\vec{r}_N^{\,1}$ مفروض باشد. میدان الکتریکی حاصل از این توزیع در موضع $\vec{r}$ چه مقدار است؟

طبق اصل بر همنهش هر بار نقطه‌ائی میدان خود را بطور مستقل در موضع $\vec{r}$ ایجاد می‌کند یعنی

$$\vec{E}_1=k\frac{q_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1^{\,1}\right|^2}\frac{\vec{r}\quad\vec{r}_1^{\,1}}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}_1^{\,1}\right|}$$

$$\vdots$$

$$\vec{E}_2 = k\frac{q_2}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_2^{1}\right|^2}\frac{\vec{r}\ \ \ \vec{r}_2^{1}}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_2^{1}\right|}$$

$$\vdots$$

$$\vec{E}_i = k\frac{q_i}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_i^{1}\right|^2}\frac{\vec{r}\ \ \ \vec{r}_2^{1}}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_i^{1}\right|}$$

$$\vdots$$

$$\vec{E}_N = k\frac{q_N}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_N^{1}\right|^2}\frac{\vec{r}\ \ \ \vec{r}_N^{1}}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_N^{1}\right|}$$

میدان کل $\vec{E}$حاصل از این توزیع گسسته N بار در موضع $\vec{r}$ را می‌توان به طریق زیر نوشت:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i^{1}\right|^2}\frac{\vec{r}\ \ \ \vec{r}_i^{1}}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_i^{1}\right|}$$

۲-۴ میدان دوقطبی

توزیع دو بار +q و −q که مطابق شکل روی محور zها در z=+a و z=-a قرار دارند. میدان الکتریکی حاصل از این توزیع را در نقطهٔ دلخواه $\vec{r} = (x, y, z)$ به دست آورید.

برای این مسأله N=2 است از رابطه کلی

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{2} k\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i^{1}\right|}\frac{\vec{r}\ \ \ \vec{r}_i^{1}}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_i^{1}\right|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1^{1}\right|^2}\frac{\vec{r}\ \ \ \vec{r}_1^{1}}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_1^{1}\right|} + \frac{kq_2}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_2^{1}\right|^2}\frac{\vec{r}\ \ \ \vec{r}_2^{1}}{\left|\vec{r}\ \ \ \vec{r}_2^{1}\right|}$$

در رابطه فوق با قرار دادن

$$q_1 = +q$$

$$q_2 = -q$$

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$\vec{r}_1^{1} = \hat{k}a$$

$$\vec{r}_2^{1} = -\hat{k}a$$

$$\left|\vec{r}_+\right| = \left|\vec{r}-\vec{r}_1^{1}\right| =$$

طبق رابطهٔ کسینوس‌ها $\left(a^2 + r^2\ \ \ 2arCos\theta\right)^{1/2}$

$$|\vec{r}_-| = |\vec{r} \quad \vec{r}_2^{\,1}| = \left[a^2 + r^2 \quad 2arCos(\pi \quad \theta)\right]^{1/2} = \left[a^2 + r^2 \quad 2arCos(\pi \quad \theta)\right]^{1/2}$$

از طریق دیگری می‌توان $|\vec{r}_+|$ و $|\vec{r}_-|$ را محـــاسبه نمود. فاصله بار q با مختصات (x, y,z) از نقطه (0,0,2) یعنی

$$|\vec{r}_+| = |\vec{r} - \vec{r}_1^{\,1}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-a)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2}$$

با استفاده از روابط $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ و $z = rCos\theta$

$$|\vec{r}_+| = \sqrt{r^2 + a^2 \quad 2arCos\theta}$$

که دقیقاً برابر رابطه‌ایست که از طریق رابطهٔ کسینوس‌ها در مثلث به دست آمد. مشابهاً

$$\vec{r}_- = |\vec{r} - \vec{r}_2^{\,1}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + [z-(-a)]^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + 2az} = \sqrt{r^2 + a^2 + 2arCos\theta}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x,y,z) = k\frac{q\left(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}t + \hat{k}a\right)}{\left(r^2 + a^2 \quad 2arCos\theta\right)^{3/2}} + k\frac{q\left(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}t + \hat{k}a\right)}{\left(r^2 + a^2 + 2arCos\theta\right)^{3/2}}$$

چون مخرج کسرها با هم برابر نیستند، فقط ترمها را می‌توان به شکل زیر دسته‌بندی نمود.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq\left(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad \hat{k}a\right)}{\left(r^2 + a^2 \quad 2arCos\theta\right)^{3/2}} + \frac{kq\left(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad \hat{k}a\right)}{\left(r^2 + a^2 + 2arCos\theta\right)^{3/2}}$$

ابتدا مخرج اولین کسر را به صورت زیر بنویسیم

$$\left(r^2 + a^2 - 2arcCos\theta\right)^{-3/2}$$

از کمیت بزرگتر r^2 فاکتور می‌گیریم زیرا a<r یعنی $\frac{a}{r} < 1$

$\frac{a}{r}$ نقش ε را در این بسط بازی می‌کند.

$$\left(r^2 + a^2 - 2arCos\theta\right)^{-3/2} = r^{\;\;3}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} + 2\frac{aCos\theta}{r}\right)^{-3/2}$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ائی

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots$$
$$= r^{-3}\left[1 - 3/2\left(\frac{a^2}{r^2} - 2ar\frac{Cos\theta}{r}\right)\right] + \ldots$$

$$= r^{-3}\left[1+\frac{3aCos\theta}{r}-\tfrac{3}{2}\right]\frac{a^2}{r^2}+\ldots$$

در این بسط ترم $\frac{a}{r}$ یعنی ε ظاهر شده است بستگی به مقدار ε و دقت مورد نیاز می‌توان تعداد ترمهای مورد نیاز در بسط را در اختیار کرد هر چه $\frac{a}{r}$ بزرگتر باشد تعداد ترمها بیشتر و هر چه کوچکتر تعداد ترمها کمتر. در حالت خاص r>>a یعنی وقتی که نقطۀ میدان نسبت به فاصله دو بار خیلی دور باشد. می‌توان فقط ترمهای تا مرتبه یک ε را نگه داشت یعنی

$$\left(r^2+a^2 \quad 2arCos\theta\right)^{3/2} \cong r^{\ 3}\left(1+\frac{3aCos\theta}{r}\right)$$

به طریق مشابه مخرج کسر دوّم یعنی

$$\left(r^2+a^2 \quad 2arCos\theta\right)^{3/2} \quad r^{\ 3}\left(1-\frac{3aCos\theta}{r}\right)$$

با جایگزینی این ترتیب‌ها در رابطۀ $\vec{E}$ داریم

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{kq\left(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z-a\hat{k}\right)}{r^3}\left(1+\frac{3aCos\theta}{r}\right)$$
$$-\frac{kq\left(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z+a\hat{k}\right)}{r^3}\left(1-\frac{3aCos\theta}{r}\right)$$

با جمع‌آوری ترمهای فوق به صورت

$$\vec{E}(\vec{r})=\hat{i}E_x+\hat{j}E_y+\hat{k}E_t$$
$$E_x=\frac{6kqxaCos\theta}{r^4}$$
$$E_y=\frac{6kqyaCos\theta}{r^4}$$
$$E_z=-\frac{2kqya}{r^3}+\frac{6kqazCos\theta}{r^4}$$

بردار ممان دوقطبی الکتریکی $\vec{P}$ برداریست که جهت آن از بار منفی به مثبت و مقدار آن برابر حاصلضرب بار q در فاصله دو بار 2a یعنی

P=2aq

لذا در این مسأله بردار دوقطبی الکتریکی

$$\vec{P}2\hat{k}2aq=\hat{k}P$$

با استفاده از P مؤلفه‌های میدان الکتریکی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_x=\frac{3kPxCos\theta}{r^4}$$

اگر صورت و مخرج کسر فوق را در r ضرب کنیم با استفاده از روابط

$$z = r\cos\theta$$
$$r^5 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}$$

مؤلفه x میدان در دستگاه مختصات کارتزین

$$E_x = \frac{3kPxz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

به طریق مشابه برای E_y عمل می کنم

$$E_y = \frac{3kryCos\theta}{r^4} \times \frac{r}{r} = \frac{3Pyr\cos\theta}{r^5}$$
$$= \frac{3kPyz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

برای مؤلفه E_z میدان

$$E_z = -\frac{2kaq}{r^3} + \frac{6kqazCos\theta}{r^4}$$
$$= -\frac{kP}{r^3} + \frac{3kPCos\theta}{r^4}$$

اگر کسر اوّل را در $\frac{r^2}{r^2}$ و کسر دوّم را در $\frac{r}{r}$ ضرب کنیم

$$= -\frac{kP}{r^3} \times \frac{r}{r^2} + \frac{3kPCos\theta}{r^4} \times \frac{r}{r}$$
$$= \frac{-k\,\mathrm{Pr}^2 + 3kPz^2}{r^5}$$
$$= \frac{-kP\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3kPz^2}{r^5}$$
$$E_z = \frac{-kP\left(x^2 + y^2\right) + 2kPz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

می‌توان روابطی برای E_x ، E_y و E_z در دستگاه مختصات کروی نیز به دست آورد.

با توجه به روابط

$$x = rSin\theta Cos\theta$$
$$z = rCos\theta$$
$$r^5 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}$$
$$E_x = \frac{3kPxz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

با جایگزین کردن روابط فوق داریم

$$E_x = \frac{3kPSin\theta Cos\theta Cos\varphi}{r^3}$$

به همین طریق برای

$$E_y = \frac{3kPyz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

با استفاده از روابط

$$y = rSin\theta Sin\varphi$$
$$z = rCos\theta$$
$$r^5 = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}$$
$$E_y = \frac{3kPSin\theta Cos\theta Sin\varphi}{r^3}$$

و برای E_z داریم

$$E_z = \frac{kP\left(x^2+y^2+z^2\right)+3kPz^2}{r^5}$$
$$= \frac{k\Pr^2+3k\Pr^2 Cos^2\theta}{r^3}$$
$$= \frac{kP+3kPCos^2\theta}{r^3}$$
$$E_z = \frac{kP\left(3Cos^2\theta-1\right)}{r^3}$$

حال حالات خاص میدان الکتریکی یک دو قطبی را در نظر می‌گیریم.

a- میدان الکتریکی یک دو قطبی را در نقطهٔ P روی محور z ها در فاصله z>>a به دست آورید.

مختصات این نقطه

در دستگاه کارتزین $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=z \end{cases}$ در دستگاه کروی $\begin{cases} r=z \\ \theta=0 \\ \varphi=\varphi \end{cases}$

از هر دو مجموعه معادلات E_x، E_y و E_z در دستگاه مختصات کارتزین یا کروی

$$E_x = E_y = 0$$
$$E_z = \frac{2kP}{z^3}$$

برای تحقیق در درستی رابطه فوق می‌توانیم میدان الکتریکی را مستقیماً در نقطهٔ P به دست آوریم.

میدان حاصل از بار +q در نقطهٔ P

$$\vec{E}_{+} = \frac{kq}{(z-a)^2}\hat{k}$$

میدان حاصل از بار q– در نقطهٔ P

$$\vec{E} = -\frac{kq}{(z+a)^2}\hat{k}$$

میدان حاصل از دو بار q+ و q– در نقطهٔ P برابر است با:

$$\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-}$$

$$\vec{E} = \frac{kq}{(z-a)^2}\hat{k} - \frac{kq}{(z+a)^2}\hat{k}$$

$$= \left[\frac{kq}{(z-a)^2} - \frac{kq}{(z+a)^2}\right]\hat{k}$$

برای z>>a مخارج کسرها را بسط می‌دهیم یعنی

$$(z-a)^{-2} = z^{-2}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{-2} \approx z^{-2}\left(1+\frac{2a}{z}\right)$$

$$(z+a)^{2} = z^{2}\left(1+\frac{a}{z}\right)^{2} \approx z^{2}\left(1-\frac{2a}{z}\right)$$

پس از جایگزینی

$$\vec{E} = \left[\frac{kq}{z^2}\left(1+\frac{2a}{z}\right)\right] - \frac{kq}{z^2}\left(1-\frac{2a}{z}\right)\hat{k}$$

$$E_z = \frac{2aq}{z^3} = +\frac{kP}{z^3}$$

از آنجا که E_z مثبت است لذا $\vec{E}$ در جهت مثبت محور z هاست. این نکته از لحاظ فیزیکی قابل پیش‌بینی است، زیرا فاصله بار مثبت تا نقطهٔ P ازفاصله بار منفی تا نقطهٔ P کمتر است لذا میدان مجموع در نقطهٔ P باید رد جهت مثبت محور z ها باشد.

توجه: جهت میدان $\vec{E}$ در هر نقطه در فضا جهت حرکت بار واحد مثبت آزمایشی در آن نقطه است.

b- نقطهٔ P وری محور y (وضعیت برای محور x به دلیل تقارن مشابه است)

ابتدا جهت میدان را از طریق فیزیکی پیدا می‌کنیم.

میدان الکتریکی بار q+ در نقطهٔ p در راستای خط واصل بین بار q+ و نقطهٔ P و دافعه است میدان الکتریکی بار q– در نقطهٔ P در راستای خط واصل بین بار –q و نقطهٔ P و جاذبه است. مجموع مؤلفه‌های افقی میدانها $\vec{E}_{+}$ و $\vec{E}$ در راستای محور y یکدیگر را خنثی و مؤلفه‌های عمودی در راستای محور z با

هم جمع می‌شوند. لذا برآیند $\vec{E}_+$ و $\vec{E}_-$ یعنی $\vec{E}$ در جهت محور z هاست. (مطابق شکل) حال مقدار و جهت $\vec{E}$ را از طریق روابط میدان یک دو قطبی محاسبه می‌نمائیم.

مختصات نقطهٔ P

در دستگاه کارتزین $\begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=0 \end{cases}$ در دستگاه کروی $\begin{cases} r=y \\ \theta=\pi/2 \\ \varphi=\pi/2 \end{cases}$

$$E_x = \frac{3kPxz}{\left(x^2+y^2+z_2\right)^{5/2}} = \frac{3kPSin\theta Cos\theta Cos\varphi}{r^3} = 0$$

$$E_y = \frac{3kPyz}{\left(x^2+y^2+z_2\right)^{5/2}} = \frac{3kPSin\theta Cos\theta Cos\varphi}{r^3} = 0$$

$$E_z = \frac{-kP\left(x^2+y^2\right)+2kPz^2}{\left(x^2+y^2+z_2\right)^{5/2}} = \frac{kP\left(3Cos^2\theta-1\right)}{r^3} = -\frac{kP}{y^3}$$

این جواب با استدلال فیزیکی مطابقت دارد.

c- نقطهٔ P روی قسمت منفی محور zها قرار دارد.

مختصات این نقطه

در دستگاه کارتزین $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=z \end{cases}$ در دستگاه کروی $\begin{cases} r=+z \\ \theta=\pi \\ \varphi=\varphi \end{cases}$ $E_x = 0 = E_y$

$$E_z = \frac{2kP}{z^3}$$

یعنی مقدار میدان $\frac{2kP}{z^2}$ و در جهت مثبت محور zهاست. از لحاظ فیزیکی این نتیجه قابل تحقیق است. زیرا فاصله P فاصله بار q– تا نقطهٔ P کمتر از فاصله بار q+ تا نقطهٔ P است. لذا برآیند میدان این دو بار در جهت $+\hat{k}$ است.

$$\vec{E} = E_-\hat{k} + E_+\hat{k} = \left(E_- - E_+\right)\hat{k}$$

چون $E_- > E_+$ لذا $E_- - E_+ > 0$ است.

خطوط میدان روی صفحه xz را با توجه به اطلاعات به دست آمده می‌توان رسم کرد. همانطور که گفته شد خطوط میدان خطوطی هستند که بر بردارهای میدان مماس‌اند. بطور مثال بردارهای میدان در نقاط 1، 2 و 3 را در نظر بگیرید. خطی که بر این سه بردار مماس است را روی شکل نشان داده‌ایم. این عمل می‌تواند تکرار شود تا خطوط دیگر در صفحه zy به دست آیند می‌توان با چرخاندن این نمونه حول محور z خطوط میدان یک دوقطبی الکتریکی را بطور کامل به دست آورید.

به عبارت دیگر خطوط میدان حول محور z دارای تقارن هستند. دلیل وجود این تقارن را می توان به عدم وابستگی E به زاویهٔ φ نسبت داد.

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2+E_z^2}$$
$$=\sqrt{E_\perp^2+E_{11}}$$

به طوری که E_{11} مؤلفهٔ میدان موازی با محور z
$E_\perp$ مؤلفهٔ میدان عمود به محور z

$$E_{11}=E_z=\frac{kP\left(3Cos^2\theta-1\right)}{r^3}$$
$$E_\perp=\sqrt{E_x{}^2+E_y{}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{3kPCos\theta Cos\theta Cos\varphi}{r^3}^2\right)+\left(\frac{3kPSin\theta Cos\theta Cos\varphi}{}\right)^2}$$
$$=\frac{3kPSin\theta Cos\theta}{r^3}$$

مشاهده می‌شود که $E_\perp$ نیز مستقل از زاویهٔ φ است یعنی نسبت به φ دارای تقارن است لذا با چرخاندن نمونه طول محور z E_{11} و $E_\perp$ هر دو بدون تغییر باقی خواهند ماند (مطابق شکل) لذا E نیز نسبت به دوران حول محور z ناورد است.

۲-۴-۲ بسط داخلی r<a

در این بسط، نقاط داخل کره‌ائی به شعاع a را در نظر می‌گیریم.

$$\vec{E}=\frac{kq\left(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z-\hat{k}a\right)}{\left(r^2+a^2-2arCos\theta\right)^{3/2}}-\frac{kq\left(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z+\hat{k}a\right)}{\left(r^2+a^2\quad 2arCos\theta\right)^{3/2}}$$

با بسط سیستماتیک مخرج کسرها

$$\left(r^2+a^2-2aeCos\theta\right)^{3/2}=a^{-3}\left(\frac{r^2}{a^2}+1-2\frac{r}{a}Cos\theta^{3/2}\right)$$
$$\approx a^{-3}\left(1+\frac{3r}{a}Cos\theta\right)$$

در این بسط از توانهای مرتبه دو و بالاتر $E=\frac{r}{a}$ صرف نظر شده است یعنی حالت r<<a در نظر گرفت شده است.

$$\left(r^2+a^2+2arCos\theta\right)^{-3/2}=a^{-3}\left(\frac{r^2}{a^2}+1+\frac{2r}{a}Cos\theta\right)^{-3/2}$$

$$\approx a^{3}\left(1+\frac{3rCos\theta}{a}\right)$$

پس از جایگزینی این روابط در معادله مربوط به $\vec{E}$ داریم

$$\vec{E}=\frac{kq\left(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z-\hat{k}a\right)}{a^3}\left(1+\frac{3rCos\theta}{a}\right)$$

$$\frac{-kq\left(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z+\hat{k}a\right)}{a^3}\left(a-\frac{3rCos\theta}{a}\right)$$

پس از جمع کردن ترم ها

در دستگاه کارتزین

$$E_x=\frac{3kPzx}{a^5}$$

$$E_y=\frac{3kPzy}{a^5}$$

$$E_z=-\frac{kP}{a^3}+\frac{3kPz^2}{a^5}$$

در دستگاه کروی

$$x=rSin\theta Cos\varphi$$

$$y=rSin\theta Sin\varphi$$

$$z=rCos\theta$$

$$E_x=\frac{3k\Pr^2 Sin\theta Cos\theta Cos\varphi}{a^5}$$

$$E_y=\frac{3k\Pr^2 Sin\theta Cos\theta Sin\varphi}{a^5}$$

$$E_z=-\frac{kp}{a^3}\frac{3k\Pr^2 Cos\theta}{a^5}$$

نکات

۱- میدان روی صفحه xy ($z=0$) ثابت و فقط دارای مؤلفۀ z است یعنی

$$E_x=E_y=0 \qquad\qquad E_z=-\frac{kP}{a^3}$$

۲- مشاهده می شود که E_z نسبت به زاویۀ φ دارای تقارن است، یعنی برای r ثابت با چرخش حول محور z مقدار E_z تغییر نمی کند.

۳- از آنجا که E_x و E_y تابعی از φ هستند لذا نسبت به φ دارای تقارن نیستند ولی

$$E_{\perp}=\sqrt{E_x{}^2+E_y{}^2}=\frac{3k\Pr^2 Sin\theta Cos\theta}{a^5}$$

مشاهده می‌شود که $E_{\perp}$ در حوالی مرکز نسبت به φ دارای تقارن است.

مثال ۱:

چهار قطبی

شکل یک چهار قطبی الکتریکی را نمایش می‌دهد که شامل دو قطبی با ممان دو قطبی برابر و مخالف یکدیگر. کمیت $Q_2\, 2qa^2$ را ممان چهار قطبی این توزیع نامند. میدان الکتریکی این دو قطبی را

a- روی محور zها در فاصله z>>a محاسبه نمائید.
b- روی محور yها در فاصله y>>a به دست آورید.

حل:

a- اگر نقطهٔ P روی محور z باشد میدان در نقطهٔ P برابر است با

$$\vec{E}=\frac{kq}{(z-a)^2}\hat{k}-\frac{kzq}{z^2}\hat{k}+\frac{kq}{(z+a)^2}\hat{k}$$

با بسط مخرج کسرها داریم

$$(z-a)^{-2}=z^{-2}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{-2}=z^{-2}\left(1+\frac{2a}{z}\right)+\frac{-z(-2-1)}{2!}\frac{a}{z^2}$$

$$(z+a)^{-2}=z^{-2}\left(1+\frac{a}{z}\right)^{-2}=z^{-2}\left(1+\frac{2a}{z}+\frac{-2(-2-1)}{2!}\right)\frac{a^2}{z^2}+\dots$$

با حفظ ترمهای تا مرتبه دو

$$E=\frac{a}{z}$$

$$\vec{E}=\left[\frac{kq}{z^2}\left(1+\frac{2a}{z}\frac{3a^2}{z^2}-\frac{2kq}{z^2}+\frac{kq}{z^2}\left(1-\frac{2a}{z}+\frac{3a^2}{z^2}\right)\right)\right]$$

$$\vec{E}=\left(\frac{kq}{z^2}+\frac{2kqa}{z^3}+\frac{3kqa^2}{z^4}-\frac{2kq}{z^2}+\frac{kq}{z^2}-\frac{2kqd}{z^3}+\frac{3kqa^2}{z^4}\right)$$

$$=\frac{6kqa^2}{z^4}\hat{k}=\frac{3kQ}{z^4}\hat{k}$$

b- میدان حاصل از چهارقطبی روی محور y (محور x مشابه است) برآیند میدان الکتریکی دو بار +q روی محور y ها قرار می‌گیرد (مطابق شکل) یا به عبارت دیگر مؤلفه‌های میدان این دو بار در راستای عمود به صفحه xy یکدیگر را خنثی و مؤلفه‌های آنها در راستای محور y با هم جمع می‌شوند. لذا برآیند میدان الکتریکی چهار قطبی روی محور yها قرار دارد.

$$\vec{E}=\left[\frac{2kq}{y^2+q^2}Cos\gamma+\frac{2kq}{y^2}\hat{j}\right]$$

$$Cos\gamma=\frac{y}{\left(a^2+y^2\right)^{1/2}}$$

$$\vec{E}=\left[\frac{2kq}{y^2+a^2}\frac{y}{\left(a^2+y^2\right)^{1/2}}-\frac{2kq}{y^2}\right]\hat{j}$$

$$=\left[\frac{2kqy}{\left(y^2+a^2\right)^{3/2}}\right]-\frac{2kq}{y^2}\hat{j}$$

برای حالت y>>a

$$\left(y^2+a^2\right)^{-3/2}=y^{-3}\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-3/2}$$

$$=y^{-3}\left(1-\frac{3a^2}{2y^2}+\dots\right)$$

$$\cong y^{-3}\left(1-\frac{3a^2}{2y^2}\right)$$

پس

$$\vec{E}=\left[\frac{2kqy}{y^3}\left(1-\frac{3a^2}{2y^2}\right)-\frac{2kq}{y^2}\right]\hat{j}$$

$$=\left(\frac{2kq}{y^2}-\frac{6kqa^2}{2y^2}-\frac{2kq}{y^2}\right)\hat{j}$$

$$=-\frac{3kQ}{2y^4}\hat{j}$$

چرا میدان در جهت منفی محور yهاست؟

مثال ۲:

دو قطبی الکتریکی $\vec{P}$ مطابق شکل در میدان الکتریکی a– واگرا b- همگرا قرار دارد نیروی وارد بر آن را محاسبه نمائید.

a- نیروی وارد به این دو قطبی برابر است با

$$\vec{F}=-qE(x)\hat{i}+qE(x+\Delta x)\hat{i}$$

$$=\left[-qE(x)+qE(x)+q\frac{\partial E}{\partial x}\right]\hat{i}$$

جمله دوم بسط تیلور حول نقطهٔ x داده شده استو از مرتبه $(\Delta x)^2$ بالاتر صرف نظر شده است.

$$\vec{F} = q\frac{\partial E}{\partial x}\hat{i}$$

از انجا که میدان واگراست $\frac{\partial E}{\partial x} < 0$ است لذا نیروی فوق در جهت منفی محور x هاست .

b- برای این دو قطبی محاسبات مشابه به نتیجه شبه معادله فوق می‌رسد. یعنی

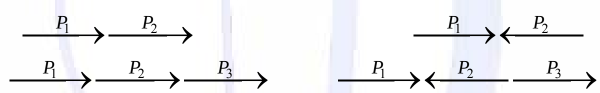
$$\vec{F} = q\frac{\partial E}{\partial x}\hat{i}$$

ولی $\frac{\partial E}{\partial x} > 0$ است زیرا E همگراست. پس $\vec{F}$ در جهت ثبت محور xهاست.

۳-۵-۲ مثال ۳

نیروی بین دوقطبی‌ها

دوقطبی‌هائی مطابق شکل در نظر بگیرید. نیروئی که به یکدیگر وارد می‌کنند جاذبه یا دافعه است.



حلّ:

a- نیروی بین دوقطبی P_1 و P_2 جاذبه است زیرا دوقطبی P_2 در میدان دوقطبی P_1 مطابق شکل قرار گرفته است و طبق مثال ۲- نیروی $\vec{F}$ وارد به $\vec{P}_2$ به طرف $\vec{P}_1$ است.

b- نیروی وارد به دوقطبی P_2 از طرف P_1 دافعه است زیرا

$$\vec{F} = -qE(x+\Delta x) + qE(x)$$

$$= -qE(x) - q\Delta x\frac{\partial E}{\partial x} + qE(x)$$

$$= -q\Delta x\frac{\partial E}{\partial x} = -P\frac{\partial E}{\partial x}$$

از آنجا که $-\frac{\partial E}{\partial x}$ مثبت است لذا نیروی وارد $\vec{P}_2$ در جهت مثبت محور xهاست.

c- مطابق مثال ۲ نیروی بین P_1 و P_2 جاذبه، نیروی بین P_2 و P_3 جاذبه و نیروی بین P_1 و P_3 جاذبه است.

d- نیروی بین $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ جاذبه و نیروی بین $\vec{P}_2$ و $\vec{P}_3$ جاذبه است زیرا مطابق شکل $\vec{P}_3$ در میدان همگرا قرار گرفته است طبق مثال ۲ نیروی وارد به آن جاذبه است.

۲-۶ توزیع پیوسته بار

همانطور که ماده گسسته است تجربه نشان می‌دهد که بار نیز گسسته است یا به عبارت دیگر کوانتیزه (quantiaeh) است بار بنیادی (elementary change) تشکیل دهندهٔ هر بار مثبت یا منفی q دارای مقدار

$$e = 1060 \times 10^{-19} c$$

و $\quad q = ne \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

یعنی n فقط می‌تواند مقادیر صحیح مثبت یا منفی را اختیار نماید.

در بسیاری از پدیده های الکترواستاتیک، توزیع بار را می‌توان پیوسته گرفت. شرط پیوستگی بار آنست که توزیع بار متشکل از حجمی‌هائی مانند ε که نه میکروسکپی و نه ماکروسکپی‌اند باشد. به طوری که

$$\frac{1}{n} << \varepsilon << L^3$$

که در آن n تعداد بارها بر واحد حجم و L کوچکترین بعد ماکروسکپی توزیع بار است. رابطه فوق می‌گوید که شرط پیوستگی توزیع بار مسلماً برقرار است اگر حجمی مانند ε وجود داشته باشد که خیلی بزرگتر از حجمی باشد که توسط یک بار اشغال شده است ولی خیلی کوچکتر از حجم ماکروسکپی سیستم باشد و با وجود این تعداد زیادی بار داخل آن قرار گیرد مثلاً چیزی در حدود $\mathbf{10^9}$. به طور مثال در سیالات، شرط پیوستگی سیال برای مایعات و گازها برقرار است زیرا در حجم یک مکعب گاز به ابعاد ۲ میکرومتر در شرایط نرمال دما و فشار حدود 2×10^5 ملکول وجود دارد و برای یک مایع حدود $\mathbf{2\times10^{11}}$ ملکول.

۲-۶-۱ چگالی حجمی یک توزیع بار

a- اگر q در حجم v بطور یکنواخت توزیع شده باشد ρ چگالی حجمی بار را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود.

$$\rho = \frac{q}{v} \quad \left(\frac{\text{کولمب}}{\text{مترمکعب}}\right) = \text{ثابت}$$

b- اگر q در حجم v بطور یکنواخت توزیع نشده باشد در هر نقطه از توزیع بار یک المان حجم مانند Δv را در نظر می‌گیریم اگر بار داخل آن Δq باشد $\rho(\vec{r})$ به طریق زیر تعریف می‌شود

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta v \to \varepsilon} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}$$

$$dq = \rho(\vec{r}) dv$$

Dvالمان حجم، $\rho(\vec{r})$ چگالی حجمی و dq بار داخل المان حجم.

۲-۶-۲ چگالی سطحی بار

در بسیاری مواقع بار روی یک سطح توزیع می‌شود، مثلاً بار روی سطح یک کرهٔ هادی، لذا چگالی سطحی یک توزیع بار σ را تعریف می‌کنیم

a- اگر بار q روی سطح s بطور یکنواخت توزیع شده باشد

$$\sigma = \frac{q}{s}\left(\frac{\text{کولمب}}{\text{مترمربع}}\right) = \text{ثابت}$$

b- اگر بار q روی سطح s دارای توزیع غیر یکنواخت باشد المان سطح Δs که دارای بار Δq است را روی سطح s در نظر می‌گیریم

$$dq = \sigma ds$$

که در آن ds المان سطح، σ چگالی بار که تابعی از مختصات سطح است و dq بار روی المان سطح.

۲-۶-۳ چگالی خطی

a- اگر بار q روی میله‌ائی به طول l بطور یکنواخت توزیع شده باشد چگالی خطی بار λبرابر است با

$$\lambda = \frac{q}{l}\left(\frac{\text{کولن}}{\text{متر}}\right) = \text{ثابت}$$

اگر بار q روی میلهٔ بطور غیر یکنواخت توزیع شده باشد، با در نظر گرفتن Δl روی میله که دارای بار Δq است λ را به طریق زیر تعریف می‌کنیم

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to \varepsilon} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

یا

$$dq = \lambda dl$$

که در ان dl المان طول میله λتابعی از مختصر توزیع خطی بار و dq بار روی المان طول می باشد.

۲-۷ میدان الکتریکی توزیع پیوسته بار

در این قسمت رابطه کولمب برای توزیع‌های پیوسته را استخراج می‌کنیم یک توزیع همانطور که گفته شد می‌تواند حجمی، سطحی یا خطی باشد.

۲-۷-۱ میدان توزیع حجمی بار

یک توزیع حجمی بار به چگالی $\rho(\vec{r})$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم میدان الکتریکی حاصل از آن را در یک نقطه داخل یا خارج توزیع به دست آوریم.

اگر المان حجم dv را در موضع $\vec{r}^1$ مطابق شکل در نظر بگیریم میدان الکتریکی حاصل از بار dq داخل این المان حجم با استفاده از میدان بار نقطه‌ائی q قابل محاسبه است. میدان بار نقطه‌ائی q که در موضع $\vec{r}^1$ قرار دارد در نقطهٔ $\vec{r}$ برابر است با

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}^1\right|^2}\frac{\vec{r}\quad\vec{r}^1}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^1\right|}$$

میدان بار dq که در موضع $\vec{r}^1$ قرار دارد در نقطهٔ $\vec{r}$ برابر است با

$$d\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}^1\right|^2}\frac{\vec{r}\quad\vec{r}^1}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^1\right|}$$

پس میدان کل یعنی $\vec{E}(\vec{\sigma})$ برابر است با انتگرال رابطه فوق

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int_{\text{توز ووز ار وو}}\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^1\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^1\right|^3} = k\int_{\text{توز ووز و}}\frac{\rho\left(\vec{r}^1\right)\left(\vec{r}-\vec{r}^1\right)d}{\left|\bar{r}-\vec{r}^1\right|^3}$$

۲-۷-۲ میدان توزیع سطحی بار

یک توزیع سطحی بار به چگالی $\sigma(\vec{r}^1)$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم میدان الکتریکی را حاصل از این توزیع را در نقطه $\vec{r}$ به دست آوریم

با استفاده از میدان بار نقطه‌ائی

$$d\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}^1\right|^2}\frac{\vec{r}\quad\vec{r}^1}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^1\right|}$$

لذا

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^1\right)}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^1\right|^3}$$

$$= k\int\frac{\sigma\left(\vec{r}^1\right)\left(\vec{r}-\vec{r}^1\right)ds'}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^1\right|^3}$$

۲-۷-۳ میدان توزیع خطی بار

یک توزیع خطی بار به چگالی $\lambda(\vec{r})$ مطابق شکل در نظر بگیرید.

می‌خواهیم میدان الکتریکی حاصل از این توزیع را در نقطه $\vec{r}$ به دست آوریم.

با استفاده از میدان بار نقطه‌ائی

$$d\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|^{2}}\frac{\vec{r}\quad\vec{r}^{1}}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}\right|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^{1}\right)}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}\right|^{3}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int\frac{\lambda dl\left(\vec{r}-\vec{r}^{1}\right)}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}\right|^{3}}$$

۲-۷-۴ خلاصه

میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع پیوسته بار

$$\vec{E} = k\int\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^{1}\right)}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{1}\right|^{3}}$$

۱- اگر توزیع حجمی باشد $dq = \rho\left(\vec{r}^{1}\right)dv'$ ، انتگرال سه گانه است.

۲- اگر توزیع سطحی باشد $dq = \sigma\left(\vec{r}^{1}\right)ds'$ ، انتگرال دوگانه است.

۳- اگر توزیع خطی باشد $dq = \lambda\left(\vec{r}^{1}\right)dl'$ ، انتگرال یگانه است.

و مختصات مورد نیاز را هندسه توزیع مشخص می‌کند.

۲-۸-۱ مثال ۱

دو میله به طول L که دارای بار خطی به چگالی یکنواخت λ هستند را مطابق شکل در نظر بگیرید نیروئی که این دو میله به یکدیگر وارد می‌کند را محاسبه نمائید.

دستگاه مختصاتی مطابق شکل اختیار نمائید.

میدان الکتریکی میله ۱ روی یک نقطه دلخواه از میله ۲ را $\vec{E}_1(x)$ می‌نماییم. نیروی وارد به میله ۲ از طرف میله۱ $\vec{F}_{21}$ را می‌خواهیم محاسبه نمائیم. نیروی وارد به المان بار میله ۲ dq_2 برابر است با

$$d\vec{F}_{21} = \vec{E}_1(x)dq_2 = \vec{E}_1(x)\lambda dx$$

لذا نیروی کل وارد به میلهٔ ۲ از طرف میله ۱

$$\vec{F}_{21} = \int_{L+d}^{2L+d}\vec{E}_1(x)\lambda dx$$

برای محاسبه $\vec{E}_1(x)$ در یک نقطهٔ دلخواه روی محور xها از رابطه کولمب استفاده می‌کنیم.

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = k\int\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^{1}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right|^{3}}$$

موضع میدان در نقطهٔ x را با بردار $\vec{r}$ نمایش می‌دهیم $\vec{r} = \hat{i}x$

موضع المان بار در نقطهٔ x^1 را با بردار $\vec{r}^1$ نمایش می‌دهیم

$$\vec{r}^1 = \hat{i}x^1$$

المان بار $dq = \lambda dx^1$

موقعیت المان بار نسبت به نقطهٔ میدان

$$\vec{r} - \vec{r}^1 = \hat{i}x - \hat{i}x^1 = \hat{i}\left(x - x^1\right)$$

لذا

$$\vec{E}_1 = k\frac{\lambda dx^1\left(\hat{i}x - \hat{i}x^1\right)}{\left(x - x^1\right)^3}$$

$$\vec{E}_1(x) = \hat{i}k\lambda\int_{\circ}^{L}\frac{dx^1}{\left(x - x^1\right)^2} = \hat{i}k\lambda\left(\frac{1}{x - x^1}\right)\Big|_{\circ}^{L}$$

$$= \hat{i}k\lambda\left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x}\right)$$

با قرار دادن $\vec{E}_1(x)$ دررابطهٔ نیرو داریم

$$\vec{F}_{21} = \int_{L+d}^{2L+d}\hat{i}k\lambda\left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x}\right)\lambda dx$$

$$= \hat{i}k\lambda^2\int_{L+d}^{2L+d}\left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \hat{i}k\lambda^2\left[\ln(x - L)\Big|_{L+d}^{2L+d} - \ln x\Big|_{L+d}^{2L+d}\right]$$

$$= \hat{i}k\lambda^2\left[\ln\frac{L + d}{d}\right] - \ln\frac{2L + d}{L + d}$$

$$= \hat{i}k\lambda^2\ln\frac{L + d/d}{\frac{2L + d}{L + d}} = \hat{i}k\lambda^2\frac{(L + d)^2}{d(2L + d)}$$

۲-۸-۲ مثال ۲

میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع خطی بار بی‌نهایت طویل را که حامل بار به چگالی λ است را در نقطهٔ P که در فاصله l از آن قرار دارد را به دست آورید.

حلّ:

ابتدا دستگاه مختصات را بنحوی اختیار می کنیم که توزیع خطی بی‌نهایت بر محور zها منطبق شود و نقطهٔ P روی صفحه xy در ربع اوّل قرار گیرد. برای حلّ این مسأله از طریق قانون کولمب اقدام می‌نمائیم.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{dq(\vec{r}-\vec{r}^{1})}{\left|\vec{r} \quad \vec{r}^{1}\right|^{3}}$$

[توجه: مناسب‌ترن راه حلّ برای این مسأله به علت تقارن‌های موجود قانون گوس است ولی ما این مسأله را به دلیل آموزنده‌گی از قانون کولمب حلّ می نمائیم]

موقعیت نقطهٔ P روی صفحه xy $\quad \vec{r} = \rho\hat{\rho}$

موقعیت المان بار روی توزیع خطی بار $\quad \vec{r}^{1} = z\hat{k}$

فاصله المان بار نسبت به نقطهٔ میدان (از روی شکل)

$$\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right| = \left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{1/2}$$

المان بار $\quad dq = \lambda dl = \lambda dz$

پس

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\rho/\varphi/\partial) = k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda dz\left(z\hat{k}-\rho\hat{\rho}\right)}{\left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}$$

$$= \hat{k}k\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{zdz}{\left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{3/2}} - \hat{\rho}k\delta\lambda\rho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}$$

انتگرال اولی صفر است زیرا تابع زیر این انتگرال $f(z) = \dfrac{z}{\left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}$ تابع فرد است چون $f(z) = -f(-z)$ انتگرال یک تابع فرد وقتی حدود انتگرال قرینه باشد برابر صفر است یعنی

$$\int_{-a}^{a} f(z)dz = 0$$

لذا

$$\vec{E}(\rho/\varphi/0) = -\hat{\rho}k\lambda\rho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}$$

تابع زیر این انتگرال $g(z) = \dfrac{1}{\left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}$ یک تابع زوج است زیرا $g(z) = g(-z)$ انتگرال یک تابع زوج روی حدود قرینه

$$\int_{-a}^{a} g(z)dz = 2\int_{\circ}^{a} g(z)dz$$

پس

$$\vec{E}(\rho,\varphi,\mathbf{0}) = \mathbf{2}\hat{\rho}k\lambda\rho\int_{\circ}^{\infty}\frac{dz}{\left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}$$

$$= -2\hat{\rho}k\lambda\rho\left[\frac{z}{\rho^{2}\left(\rho^{2}+z^{2}\right)^{1/2}}\right]\Bigg|_{\circ}^{\infty}$$

$$= -2\hat{\rho} x \lambda \rho \left(0 - \frac{1}{\rho^2} \right)$$

$$= \hat{\rho} \frac{2k\lambda}{\rho}$$

نکات

a- رابطهٔ $\vec{E}$ مستقل از φ و z است و در جهت $\hat{\rho}$ است.

میدان روی دایره‌ائی به شعاع ρ ثابت است از آنجا که $\vec{E}$ مستقل از z است لذا میدان $\vec{E}$ بر استوانه‌ای به شعاع ρ که محور آن z است عمود و مقدار آن ثابت است.

b- جهت میدان الکتریکی $\hat{\rho}$ با توجه به تقارن مسأله با استدلال فیزیکی قابل استخراج است.

مطابق شکل هر المان بار روی توزیع بار خطی نسبت به صفحه xy دارای یک المان قرینه است لذا برآیند این دو میدان در جهت $\hat{\rho}$ است.

c- شار الکتریکی گذرنده از سطح جانبی استوانه‌ای به طول L و شعاع به سادگی قابل محاسبه است.

$$Q_{\vec{E}} = \int \vec{E} . \overrightarrow{ds}$$

$\overrightarrow{ds}$ المان سطح جانبی استوانه است. یعنی

$$\overrightarrow{ds} = \hat{\rho} \rho d\varphi\, dt$$

$$Q_{\vec{E}} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{2k\lambda}{\rho} \hat{\rho} . \hat{\rho} \rho d\varphi\, dz$$

$$= 2k\lambda \times 2\pi \times L = 4\pi \times \lambda L$$

۲-۸-۳ مثال ۳

حلقهٔ دایروی به شعاع R حامل بار یکنواخت خطی به چگالی λ است. میدان الکتریکی را در نقطهٔ P روی محور حلقه بیآبید.

حلّ:

میدان الکتریکی
$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}^1)}{|\vec{r} \quad \vec{r}^1|^3}$$

موقعیت نقطهٔ میدان $\vec{r} = z\hat{k}$

موقعیت المان بار $\vec{r}^1 = R\hat{\rho}$

مقدار بردار موقعیت نقطهٔ میدان نسبت به المان بار

$$|\vec{r} - \vec{r}^1| = (z^2 + R^2)^{1/2}$$

المان بار $dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi$

$$\vec{E}(0,0,z)=k\int_{\circ}^{2\pi}\frac{\lambda kd\varphi\left(\hat{k}z-\hat{\rho}R\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{k\lambda Rz\hat{k}}{\left(R^2{}'+z^2\right)^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi}d\varphi-\frac{k\lambda R^2}{\left(R^2{}'+z^2\right)^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi}\hat{\rho}d\varphi$$

انتگرال دوی برابر صفر است زیرا

$$\int_{\circ}^{2\pi}\hat{\rho}d\varphi=\int\left(\hat{i}Cos\varphi+\hat{j}Sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=\hat{i}\int Cos\varphi\, d\varphi+\hat{j}\int Sin\varphi\, d\varphi$$

$$=\hat{i}Sin\varphi\Big|_{\circ}^{2\pi}-\hat{j}Cos\varphi\Big|_{\circ}^{2\pi}$$

$$=\mathbf{0}$$

$$\vec{E}(0,0,z)=\frac{2\pi k\lambda Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

نکته:

جهت میدان در نقطهٔ P با استفاده از تقارن نیز قابل استخراج است.
جمع میدان حاصل از المان بار و المان قرینه در جهت محور zهاست

۲-۸-۴ مثال ۴

میدان الکتریکی یک صفحه بی‌نهایت که دارای بار سطحی به چگالی یکنواخت σ است را در نقطهٔ P که در فاصله z از ان قرار دارد را محاسبه نمائید.

حلّ:

فرض کنید صفحه بی‌نهایت روی صفحه xy قرار دارد و نقطهٔ P روی محور zها قرار گرفته باشد

$$\vec{E}(\vec{r})=k\int\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right)}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{\,1}\right|^3}$$

موقعیت نقطهٔ میدان $\vec{r}=z\hat{k}$

موقعیت المان بار در ربع اوّل $\vec{r}^{\,1}=\rho\hat{\rho}$

مقدار بردار (از روی شکل) نقطهٔ میدان نسبت به المان بار

$$\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right|=\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}$$

المان بار $dq=\sigma ds$

Ds المان سطحی با z ثابت است دو دستگاه استوانه‌ائی $ds=\rho d\rho d\varphi$

پس $dq=\sigma\rho\, d\rho\, d\varphi$

$$\vec{E}(0,0,z) = k\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{2\pi} \frac{\sigma\rho\, d\rho\, d\varphi\left(\hat{k}z - \hat{\rho}\rho\right)}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{k}k\sigma z\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$= k\sigma z\int\int^{2\pi} \frac{\rho^2 d\rho d\varphi\hat{\rho}}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$= \hat{k}k\sigma z\int^{\infty} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi} d\varphi$$

$$= k\sigma\int^{\infty} \frac{\rho^2 d\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}\int^{2\pi} \hat{\rho}\, d\varphi$$

انتگرال دومی صفر است زیرا $\int_{\circ}^{2\pi} \hat{\rho} d\varphi = \circ$ (انتگرل $\hat{\rho}$ روی پریود کامل برابر صفر است)

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{k}2\pi k\sigma z\int_{\circ}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{\left(\chi\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$= \hat{k}2\pi k\sigma z\left[-\left(\rho^2 + z^2\right)^{-1/2}\right]_{\circ}^{\infty}$$

$$= \hat{k}2\pi k\sigma z\frac{1}{12} = \hat{k}2\pi k\sigma$$

$$= \hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

نکته ۱

امکان حل این مسأله در دستگاه کارتزین نیز وجود دارد، صرفاً به فرموله کردن آن می‌پردازیم.

$$\vec{E}(0,0,z) = k\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\sigma}^{\infty} \frac{\sigma dx dx\left(\hat{x}z - \hat{i}x - \hat{j}y\right)}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

پس از گرفتن انتگرال فوق جواب $\vec{E}_2 + \hat{k}\frac{\sigma 2}{2\varepsilon_{\circ}}$ خواهد بود.

نکته ۲

راه حلّ مناسب‌تر برای حلّ این مسأله قانون گوس است که بعداً به آن خواهیم پرداخت.

نکته ۳

جهت میدان $\vec{E}$ عمود به صفحه بی نهایت است. این مسأله قابل پیش‌بینی ایست اگر صفحه را به حلقه‌هائی تبدیل نمائیم، میدان کل برابر است با جمع میادین این حلقه‌ها

۲-۸-۵ مثال ۵

دیسکی به شعاع R حامل بار سطحی به چگالی یکنواخت σ است
میدان حاصل از این دیسک را در نقطهٔ P روی محور آن به دست آورید.
دستگاه مختصات را بنحوی اختیار می نمائیم که دیسک روی صفحه xy و نقطهٔ P روی محور zها قرار گیرد. میدان الکتریکی از رابطه کولمب به دست میآید.

$$\vec{E}(r\ ) = k\int \frac{dq(\vec{r}-\vec{r}^{1})}{\left|\vec{r}\quad \vec{r}^{1}\right|^{3}}$$

موضع نقطهٔ میدان $\vec{r} = \hat{k}z$

موضع المان بار $\vec{r}^{1} = \hat{\rho}\rho$

تعداد موقعیت نقطهٔ میدان نسبت به المان بار از روی شکل

$$\left|\vec{r}-\vec{r}^{1}\right| = \left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}$$

المان بار $dq = \sigma ds = \sigma\rho d\rho d\varphi$

$$\vec{E}(0,0,z) = k\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{R}\frac{\sigma\rho\, d\rho d\varphi\left(\hat{k}z-\hat{\rho}\rho\right)}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{k}k\sigma z\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{R}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$-k\sigma\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{R}\frac{\rho^2 d\rho d\varphi\hat{\rho}}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$= \hat{k}k\sigma z\int_{\circ}^{2\pi}d\varphi\int_{\circ}^{2\pi}\frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$-k\sigma\int_{\circ}^{2\pi}\hat{\rho}d\rho\int_{\circ}^{R}\frac{\rho^2 d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

انتگرال دومی صفر است زیرا انتگرال $\hat{\rho}$ روی پریود کامل برابر صفر است.

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{k}k\sigma z2\pi\left[-\left(\rho^2+z^2\right)^{-1/2}\right]_{\circ}^{R}$$

$$= \quad \hat{k}\mathbf{2}\pi k\sigma z \quad \frac{\mathbf{1}}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} \quad \frac{\mathbf{1}}{z}$$

$$= \quad \hat{k}\mathbf{2}\pi k\sigma z\mathbf{1} \quad \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

نکته: برخلاف تصور که میدان در مرکز دیسک به علت تقارن ممکن صفر باشد از رابطه فوق با حدّگیری

$$\lim_{z\to\circ}\vec{E}(0,0,z)=\hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}$$

که برابر میدان حاصل از یک صفحه بی‌نهایت است.

۲-۸-۶ مثال ۶

حلقه‌ائی با چگالی بار خطی غیر یکنواخت $\lambda=\lambda_\circ Cos\varphi$ را مطابق شکل در نظر بگیرید. میدان این حلقه را در نقطهٔ P روی محور آن بیآبید.

$$\vec{E}(\vec{r})=k\int\frac{dq(\vec{r}-\vec{r}^1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^1\right|^3}$$

موضع میدان $\vec{r}=\hat{k}z$

موضع المان بار $\vec{r}^1=\hat{\rho}R$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان مطابق شکل $\left|\vec{r}-\vec{r}^1\right|=\left(R^2+z^2\right)^{1/2}$

$$\vec{E}(0,0,z)=k\int_\circ^{2\pi}\frac{\lambda_\circ RCos\varphi d\varphi\left(\hat{k}z-\hat{\rho}R\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(0,0,z)=\frac{\hat{k}k\lambda_\circ Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}Cos\varphi\,d\varphi-\frac{k\lambda_\circ R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}\hat{\rho}Cos\varphi\,d\varphi$$

انتگرال اوّلی برابر صفر است زیرا انتگرال روی پریود کامل $Cos\varphi$ برابر صفر است. و انتگرال دوّم به نوشتن $\hat{\rho}=\hat{i}Cos\varphi+\hat{j}Sin\varphi$

$$\vec{E}(0,0,z)=-\frac{k\lambda_\circ R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}Cos\varphi\left(\hat{i}Cos\varphi+\hat{j}Sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=-\frac{k\lambda_\circ R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\left[\hat{i}\int_\circ^{2\pi}Cos^2\varphi\,d\varphi+\hat{j}\int_\circ^{2\pi}Sin\varphi\,Cos\varphi v d\varphi\right]$$

$$=\frac{k\lambda_\circ R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\left[\hat{i}\int^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Cos2\varphi\right)d\varphi+\hat{j}\int^{2\pi}\frac{1}{2}Sin2\varphi\,d\varphi\right]$$

$$=\mathrm{i}\frac{k\lambda_\circ R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}\frac{1}{2}d\varphi-i\frac{k\lambda_\circ R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int^{2\pi}\frac{1}{2}Cos2\varphi d\varphi$$

$$+\hat{i}\int_\circ^{2\pi}\frac{1}{2}Sin2\varphi d\varphi$$

انتگرال دوّم و سوّم برابر صفر نه زیرا انتگرال روی پریود کامل $Sin2\varphi$ و $Cos2\varphi$ برابر صفر است.

$$\vec{E}(0,0,z)=-\hat{i}\frac{k\pi\lambda_\circ R}{\left(R^2+z^2\right)^{6/2}}$$

۲-۸-۷ مثال ۷

بار الکتریکی با چگالی سطحی $\sigma = \alpha\left(x^2 + y^2\right)$ روی سطح مربعی مطابق شکل توزیع شده است میدان الکتریکی را در نقطهٔ o مبدأ مختصات به دست آورید.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{dq\left(\vec{r} - \vec{r}^{\,1}\right)}{\left|\vec{r} \quad \vec{r}^{\,1}\right|^3}$$

وضع میدان $\vec{r} = \mathbf{0}$

موضع المان بار $\vec{r}^{\,1} = \hat{i}x + \hat{j}y$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $\left|\vec{r} - \vec{r}^{\,1}\right| = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$

$$E(0,0) = k\int_{-b}^{b}\int_{\circ}^{2b} \frac{\sigma\left(x^2 + y^2\right)\left(0 - \hat{i}x - \hat{j}y\right)dxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$E(0,0) = -k\sigma\int_{b}^{b}\int^{2b} \frac{\hat{i}x + \hat{j}yy}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}dxdy$$

$$= -\hat{i}k\sigma\int_{-b}^{b}\int_{\circ}^{2b} \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}dxdy - \hat{j}k\sigma\int_{-b}^{b}\int_{\circ}^{2b} \frac{ydxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

$$= \quad \hat{i}k\sigma\int_{b}^{b} dy\int_{-b}^{b} \frac{xdx}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}} \quad \hat{j}k\sigma\int_{b}^{b} dx\int_{\circ}^{2b} \frac{ydxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

انتگرال اوّل صفر است زیرا تابع زیر انتگرال $\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$ تابع فرد است، انتگرال تابع فرد روی حدود قرینه برابر صفر است.

$$\vec{E}(0,0) = -\hat{j}k\sigma\int_{-b}^{b} dx\int_{\circ}^{2b} \frac{ydy}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(0,0) = \quad \hat{j}k\sigma\int_{b}^{b} dx\left[\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}\Big|_{\circ}^{-b}\right]$$

$$= -\hat{j}k\sigma\int_{-b}^{b} dx\left[\left(x^2 + 4b^2\right)^{1/2} - |x|\right] -$$

$$= -\hat{j}k\sigma\left[\int_{-b}^{b} dx\left[\left(x^2 + 4b^2\right)^{1/2} - 2\int_{\circ}^{b} xdx\right]\right]$$

$$=-\hat{j}k\sigma\left[2\int_{\circ}^{b}\left(x^2+4b^2\right)^{1/2}-b^2\right]$$

$$\int\left(x^2+a^2\right)^{1/2}dx=\frac{x\left(x^2+a^2\right)^{1/2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\left(x^2+a^2\right)^{1/2}\right)$$

$$=-\hat{j}k\sigma\left[2\times\frac{x\left(x^2+4b^2\right)^{1/2}}{2}+2\times\frac{4b^2}{2}\right]\ln\left(x\left(x^2+4b^2\right)^{1/2}\Big|_{\circ}^{b}\right)-b^2$$

$$=\quad\hat{j}k\sigma\left[b\left(x^2+4b^2\right)^{1/2}+4b^2\right]\ln\left(b+\left(b^2+4b^2\right)^{1/2}\right)-4b^2\ln 2b-b^2$$

$$=-\hat{j}k\sigma\left(\sqrt{5}b^2+4b^2\ln b+b\sqrt{5}-4b^2\ln 2b-b^2\right)$$

$$=-\hat{j}k\sigma\left(\sqrt{5}b^2+4b^2\ln\frac{b+b\sqrt{5}}{2b}-b^2\right)$$

$$=-\hat{j}k\sigma b^2\left(\sqrt{5}+4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-1$$

۲-۸-۸ مثال ۸

دیسکی به شعاع R و با چگالی $\sigma=\alpha\rho$ را مطابق شکل در نظر بگیرید میدان الکتریکی در نقطهٔ o لبه دیسک را به دست آورید.

$$\vec{E}(\vec{r})=k\int\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right)}{\left|\vec{r}\quad\vec{r}^{\,1}\right|^3}$$

موقعیت میدان $\vec{r}=0$

موقعیت المان بار $\vec{r}^{\,1}=\hat{\rho}\rho$

فاصله المان بار داز نقطهٔ میدان $\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right|=\rho$

المان بار $dq=\sigma ds=\alpha\rho\ \rho d\rho d\varphi$

$$\vec{E}(0,0)=k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\circ}^{2RCos\varphi}\frac{\alpha\rho^2 d\rho d\varphi(\circ-\hat{\rho}\rho)}{\rho^3}$$

حدود انتگرال برای ρ از 0 تا $2RCos\varphi$ تغییر می‌کند، یعنی تغییرات ρ به φ بستگی دارد، برای φ دلخواه حدود تغییرات از روی شکل فوق به دست می‌آید.

$$=-k\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\hat{\rho}\int_{\circ}^{2RCos\varphi}d\rho$$

بعلت تقارن میدان فقط در جهت منفی محور x هاست.

$$\vec{E}(0,0)=-\hat{i}\,\alpha Rk\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi Cos^2\varphi$$

$$=\hat{i}\,\frac{-2Rk\alpha R}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+Cos2\varphi)d\varphi$$

$$=-\hat{i}R\alpha k\pi$$

۲-۸-۹ مثال ۹

بار سطحی یکنواخت الکتریکی σروی سطح جانبی استوانه‌ای به شعاع R و طول L قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقطهٔ o مرکز سطح قاعده استوانه به دست آورید.

$$\vec{E} = k\int \frac{dq(\vec{r}-\vec{r}^1)}{|\vec{r} \quad \vec{r}^1|^3}$$

موقعیت میدان $\vec{r} = \mathbf{0}$

موقعیت بار $\vec{r}^{\mathbf{1}} = \hat{\rho}R + \hat{k}z$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $|\vec{r}-\vec{r}^1| = r^1 z(R^2+z^2)^{1/2}$

المان بار $dq = \sigma ds = \sigma R d + dz$

$$\vec{E}(0,0,0) = k\int^{2\pi}\int^{L} \frac{\sigma R d\varphi\, dz(0 \quad \hat{\rho}R \quad \hat{k}z)}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= -k\sigma R\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{L} \frac{\hat{\rho} d\varphi\, dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} - k\sigma R\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{L} \frac{\hat{k}z\, d\varphi\, dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \quad k\sigma R\int_{\circ}^{L} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi} \hat{\rho} d\varphi - \hat{k}k\sigma R\int_{\circ}^{2\pi} d\varphi\int_{\circ}^{L} \frac{zdz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

انتگرال اوّل صفر است زیرا انتگرال $\hat{\rho}$ روی پریود کامل برابر صفر است.

$$\vec{E}(0,0,0) = -\hat{k}2\pi k\sigma R\left[-(R^2+z^2)^{-1/2}\Big|_{\circ}^{L}\right]$$

$$= -\hat{k}2\pi k\sigma R\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{(R^2+L^2)^{1/2}}\right]$$

۲-۸-۱۰ مثال ۱۰

پوستهٔ کروی به شعاع R با چگالی بار σ در نظر بگیرید. اگر عرقچینی مطابق شکل از آن برداشته شود بطور که زاویه رأس مخروط مربوطه γ باشد. میدان الکتریکی را در نقطهٔ P روی سطح کره و مرکز عرقچین به دست آورید.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{dq(\vec{r}-\vec{r}^1)}{|\vec{r}-\vec{r}^1|^3}$$

موضع میدان $\vec{r} = \hat{k}R$

موضع المان بار $\vec{r}^1 = \hat{r}R$

فاصله المان بار از نقطه میدان $|\vec{r}-\vec{r}^1| = R^2 + R^2 - 2R^2 Cos\theta$

$$\vec{E}(R,0,\varphi) = k\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\sigma}^{\pi} \frac{\sigma R^2 Sin\theta\, d\theta\, d\varphi(\hat{k}R - \hat{r}R)}{(2R^2)^{3/2}(1-Cos\theta)^{3/2}}$$

از آنجا که $\hat{r} = \hat{i}Sin\theta\, Cos\varphi + \hat{j}Sin\theta\, Sin\varphi + \hat{k}Cos\theta$

$$\vec{E}(\pi,\circ,\varphi) = \frac{k\sigma}{2^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\frac{\hat{k} - \hat{i}Sin\theta\, Cos\varphi - \hat{j}Sin\theta\, Sin\varphi - \hat{k}Cos\theta}{(1 - Cos\theta)^{3/2}}Sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{x\sigma}{2^{3/2}}\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\frac{\hat{k}Sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{(2Sin^2\theta/2)^{1/2}} = \hat{k}\frac{k\sigma}{4}\times 4\pi\int_{\gamma}^{\pi}Cos\,\theta/2d\theta$$

$$= \hat{k}\frac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}(1 - Sin\,\gamma/2)$$

انتگرال در جهات $\hat{i}$ و $\hat{j}$ صفرند زیرا، انتگرال روی پریود کامل $Sin\varphi$ و $Cos\varphi$ برابر صفر است.

۱۱-۸-۲ مثال ۱۱

یک نیم حلقه به شعاع R و چگالی یکنواخت λ مطابق شکل را در نظر بگیرید میدان الکتریکی را در نقطه P بیآبید.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int\frac{dq(\vec{r} - \vec{r}^{\,1})}{(\vec{r} \quad \vec{r}^{\,1})^3}$$

موقعیت میدان $\vec{r} = \hat{j}R$

موقعیت المان بار $\vec{r}^{\,1} = \hat{\rho}R$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان

$$|\vec{r} - \vec{r}^{\,1}| = \left[R^2 + R^2 - 2R^2Cos(\pi/2 - \varphi)\right]^{1/2}$$

$$= (2R^2 - 2R^2Sin\varphi)^{1/2} = R\sqrt{2(1 - Sin\varphi)}^{1/2}$$

المان بار $dq = \lambda dl = \lambda Rd\varphi$

$$\vec{E}(0,R) = k\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\lambda Rd\varphi(\hat{j}R - \hat{\rho}R)}{(R\sqrt{2})^3(1 - Sin\varphi)^{3/2}}$$

$$= \frac{k\lambda R^2}{2^{3/2}R^3}\left[\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\varphi\hat{j}(1 - Sin\varphi)}{(1 - Sin\varphi)^{3/2}}\right.$$

$$- = \int_{\pi}^{2\pi}\frac{iCos\varphi d\varphi}{(1 - Sin\varphi)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(\circ,R) = \frac{k\lambda}{2^{3/2}}\left[j\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1 - Sin\varphi)^{1/2}} + (1 - Sin\varphi)^{-1/2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]\hat{i}$$

$$= \hat{j}\frac{k\lambda}{2^{3/2}\lambda}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\varphi}{[1 - Cos(\pi/2 - \varphi)]^{1/2}} = \hat{j}\frac{k\lambda}{2^{3/2}R}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\varphi}{2^{1/2}Sin(\varphi/2 - \pi/2)}$$

$$= \hat{j}\frac{k\lambda}{4^2 R}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\varphi}{Sin(\varphi/2-\pi/4)}$$

$$\Phi = \varphi/2-\pi/4 \quad d\Phi = d\varphi/s$$

$$= j\frac{k\lambda}{4R} = \int\frac{d\Phi}{Sin\Phi} = \hat{j}\frac{k\lambda}{2\pi}\ln\tan(\varphi/4-\pi/8)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$\vec{E}(0,R) = \hat{j}\frac{k\lambda}{2\pi}\left[\ln\tan(\pi/2-\pi/8)-\ln(\pi/4-\pi/8)\right]$$

$$\vec{E}(0,R) = \hat{j}\frac{k\lambda}{2R}\ln\frac{\tan\frac{3\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}$$

۲-۸-۱۲ مثال ۱۲

مکعبی با بار حجمی غیر یکنواخت $\rho = \alpha r^3$ مطابق شکل در نظر بگیرید. میدان الکتریکی در گوشه آن و در مبداء مختصات نقطهٔ o بیآبید. (ضلع مکعب را a بگیرید).

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int\frac{dq(\vec{r}-\vec{r}^1)}{|\vec{r}\quad\vec{r}^1|^3}$$

موقعیت میدان $\vec{r} = 0$

موقعیت المان بار $\vec{r}^1 = \hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z$

فاصلهٔ المان بار از نقطهٔ میدان $|\vec{r}-\vec{r}^1| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

المان بار $dq = \rho dv = \alpha(x^2+y^2+z^2)^{3/2}dxdydz$

$$\vec{E}(0,0,0) = k\int_{\circ}^{a}\int_{\circ}^{a}\int_{\circ}^{a}\frac{\alpha(x^2+y^2+z^2)^{3/2}(0-\hat{i}x-\hat{j}y-\hat{k}z)dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(0,0,0) = \quad k\alpha\left[\int^{a}\int^{a}\int^{a}(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}y)\right]dxdydz$$

$$= \quad k\alpha\left[\hat{i}\int^{a}\int^{a}\int xdxdydz+\hat{j}\int^{a}\int^{a}\int^{a}ydxdydz+\right.$$

$$\left.\hat{k}\int_{\circ}^{a}\int_{\circ}^{a}\int_{\circ}^{a}zdxdydz\right]$$

$$= -k\alpha\left[\hat{i}\int_{\circ}^{a}xdx\int_{\circ}^{a}dy\int_{\circ}^{a}dz+\hat{j}\int_{\circ}^{a}dx\int_{\circ}^{a}ydy\int_{\circ}^{a}dz+\right.$$

$$\hat{k}\int_{\circ}^{a}dx\int^{a}dy\int^{a}dz+j\int_{\circ}^{a}dx\int_{\circ}^{a}ydy\int_{\circ}^{a}dz+$$

$$= -k\alpha\left(\hat{i}\,1/2a^4+\hat{j}\,1/2a^4+\hat{k}\,1/2\,a^4\right)$$

$$\vec{E}(0,0,0) = -\frac{k\alpha a^4}{2}\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$$

۲-۸-۱۳ مثال ۱۳

استوانه‌ای باردار با چگالی بار حجمی ثابت $\rho_\circ$ در نظر بگیرید. سوراخی مطابق شکل در آن ایجاد شده اس. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات به دست آورید.

حلّ:

طبق اصل بر همنهش میدان الکتریکی حاصل در مبدأ o برابر است با میدان الکتریکی یک استوانه توپر با بار حجمی $\rho_\circ$ بعلاوه میدان حاصل از قسمت سوراخ اگر بار آن $\rho_\circ$- باشد.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{dq\left(\vec{r} - \vec{r}^1\right)}{\left|\vec{r} \quad \vec{r}^1\right|^3}$$

a- ابتدا میدان استوانۀ توپر محاسبه می‌شود

موضع بار $\vec{r} = \circ$

موضع المان بار $\vec{r}^1 = \hat{\rho}R + \hat{k}z$

فاصله المان بار از نقطۀ میدان $\left|\vec{r} - \vec{r}^1\right| = \left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}$

المان بار $dq = \rho dv = \rho_\circ \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$

میدان استوانه $\vec{E}_c$

$$\vec{E}_c(0,0,0) = k\int_{z_1}^{z_2}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{R} \frac{\rho_\circ \rho d\rho d\varphi dz\left(0 - \hat{\rho}R - \hat{k}z\right)}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_c = -k\int_{z_1}^{z_2}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{R} \frac{\hat{\rho}\rho_\circ R\rho d\varphi dz}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} - \hat{k}k\int_{z_1}^{z_2}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{R} \frac{\rho_\circ z\rho d\rho d\varphi dz}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$= -kR\rho_\circ\int_{z_1}^{z_2} dz\int_\circ^{2\pi} \hat{\rho} d\varphi\int_\circ^{R} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} - \hat{k}k\rho_\circ\int_{z_1}^{z_2} zdz\int_\circ^{2\pi} d\varphi\int_\circ^{R} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

انتگرال اوّل صفر است زیرا $\int \hat{\rho} d\varphi = 0$ ، لذا

$$\vec{E}_c(0,0,0) = -\hat{k}k\rho_\circ 2\pi\int_{z_1}^{z_2} zdz\int_\circ^{R} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\hat{k}2\pi k\rho_\circ\int_{z_1}^{z_2} zdz\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right] - \frac{1}{z}$$

$$= \hat{k}2\pi k\rho_\circ\left[\left(R^2 + z^2\right)^{1/2}\right] - z_{z_1}^{z_2}$$

$$\vec{E}_c(0,0,0) = +\hat{k}2\pi k\rho_\circ\left[\left(R^2+{z_2}^2\right)^{1/2}\right]\left(R^2+{z_1}^2\right)^{1/2} - t_2 + z_1 -$$

b- میدان حاصل از حفره که بار آن $\rho_\circ$ - فرض شده است.

$$\vec{E}_n(0,0,0) = k\int_{z_1}^{z_2}\int_\circ^b\int_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\rho_\circ\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz\left(0-\hat{\rho}R-\hat{k}z\right)}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

توجه نمائید که فرموله کردن مسأله دقیقاً مانند استوانه است فقط حدود انتگرال محلو ابعاد توزیع را تعیین نموده است.

$$\vec{E}_n(0,0,0) = k\rho_\circ R\int_{z_1}^{z_2}\int_a^b\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\hat{\rho}\rho d\rho d\varphi\, dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} + \hat{k}k\rho_\circ\int_{z_1}^{z_2}\int_a^b\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{z\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$= k\rho_\circ R\int_{z_1}^{z_2} dz\int_{\pi/2}^{\pi}\hat{\rho}d\varphi\int_a^b\frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} + \hat{k}k\rho_\circ\int_{z_1}^{z_2} zdz\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi\int_a^b\frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$= k\rho_\circ R\int_{z_1}^{z_2} dz\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\hat{i}Cos\varphi+\hat{j}Sin\varphi\right)d\varphi\left[-\left(\rho^2+z^2\right)^{-1/2}\right]_a^b$$

$$+\hat{k}k\rho_\circ\,\pi/2\int_{z_1}^{z_2} zdz\left[-\left(\rho^2+z^2\right)^{-1/2}\right]_a^b$$

$$= -k\rho_\circ R\int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{1}{\left(b^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}\right]dz\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\hat{i}Cos\varphi+\hat{j}Sin\varphi\right)d\varphi$$

$$-\hat{k}k\rho_\circ\frac{\pi}{2}\left[\left(b^2+z^2\right)^{1/2}\right] - \left(a^2+z^2\right)^{1/2}\Big|_{z_1}^{z_2}$$

$$= -k\rho_\circ R\left(Sinh^{-1}\frac{z}{b}\right) - Sinh^{-1}\frac{z}{a}\Big|_{z_1}^{z_2}\left(\hat{i}Sin\varphi - \hat{J}Cos\varphi\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$\frac{-\hat{k}k\rho_\circ\pi}{2}\left[\left(b^2+{z_2}^2\right)^{1/2} - \left(a^2+{z_2}^2\right)^{1/2}\left(b^2+{z_1}^2\right)^{1/2} + \left(a^2+{z_1}^2\right)^{1/2} - \right]$$

در انتگرال اوّل از رابطه $Sinh^{-1}\frac{x}{a}$ یا $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

$$\vec{E}_h(0,0,0) = \text{-}k\rho_\circ R\left(Sinh^{\ 1}\frac{z_2}{b} - Sinh^{\ 1}\frac{z_2}{a}\right)\quad Sinh^{\ 1}\frac{z_1}{b} + Sinh^{\ 1}\frac{z_1}{a}$$

$$\hat{i}Sin\pi - \hat{j}Cos\pi - \hat{i}Cos\,\pi/2 + \hat{j}Cos\,\pi/2$$

$$\text{-}\frac{\hat{k}k\rho_\circ\pi}{2}\left[\left(b^2+{z_2}^2\right)^{1/2}\right]\text{-}\left(a^2+{z_2}^2\right)^{1/2} - \left(b^2+{z_1}^2\right)^{1/2} + \left(a^2+{z_1}^2\right)^{1/2}$$

$$\vec{E}_h(0,0,0) = \text{-}k\rho_\circ R\left(Sinh^{\ 1}\frac{z_2}{b} - Sinh^{\ 1}\frac{z_2}{a}\right)\text{-}\,Sinh^{\ 1}\frac{z_1}{b}\left(\hat{j}\text{-}\hat{i}\right)$$

$$-\frac{\hat{k}k\rho_{\circ}\pi}{2}\left[\left(b^2+z_2{}^2\right)^{1/2}\right]-\left(a^2+z_2{}^2\right)^{1/2}-\left(b^2+z_1{}^2\right)^{1/2}+\left(a^2+z_1{}^2\right)^{1/2}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_c+\vec{E}_h$$

۲-۸-۱۴ مثال ۱۴

مخروطی به زاویهٔ رأس $\theta_{\circ}$ و به ارتفاع h مطابق شکل در نظر بگیرید. بار حجمی $\rho_{\circ}$ بطور یکنواخت در آن توزیع شده است.

میدان الکتریکی را در نقطهٔ o رأس مخروط به دست آورید.

$$\vec{E}(\vec{r})=k\int\frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right|^3}$$

این مسأله را می‌توان در دو دستگاه کروی و استوانه‌ائی حل نمود.

a- دستگاه کروی:

موضع میدان $\vec{r}=0$

موضع بار $\vec{r}^{\,1}=\hat{r}r$

فاصلهٔ المان بار از نقطهٔ میدان $\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right|=r$

المان بار $dq=\rho dv=\rho_{\circ}r^2 Sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$$\vec{E}(0,0,0)=k\iiint\frac{\rho_{\circ}r^2 Sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\left(0-\hat{r}r\right)}{r^3}$$

تغییرات φ از 0 تا 2π ایست، ولی تغییرات $\vec{r}^{\,1}$ موقعیت المان بار به زاویهٔ θ بستگی دارد. برای θ دلخواه مطابق شکل $\vec{r}^{\,1}$ از 0 تا $\frac{h}{Cos\theta}$ تغییر می‌کند از آنجا که تغییرات $\vec{r}^{\,1}$ به θ بستگی دارد لذا باید انتگرال مربوط به $\vec{r}^{\,1}$ قبل از θ گرفته شود، برای انتگرال نسبت به φ محدودیتی وجود ندارد. لذا

$$\vec{E}(0,0,0)=-k\rho_{\circ}\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\theta_{\circ}}\int_{\circ}^{h/Cos\theta}\hat{r}Sin\theta\, dr d\theta\, d\varphi$$

چون $\hat{r}=\hat{i}Sin\theta\, Cos\varphi+\hat{j}Sin\theta\, Sin\varphi+\hat{k}Cos\theta$

$$\vec{E}(0,0,0)=-k\rho_{\circ}\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{\theta_{\circ}}\int_{\circ}^{h/Cos\theta}\left(\hat{i}Sin\theta+Sin\varphi+\hat{j}Sin\theta\, Sin\varphi+\hat{k}Cos\theta\right)Sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\ \hat{i}k\rho_{\circ}\int^{2\pi}\int^{\theta_{\circ}}\int^{h/Cos\theta}Sin^2\theta\, Cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$-\hat{j}k\rho_{\circ}\int^{2\pi}\int^{\theta_{\circ}}\int^{h/Cos\theta}Sin^2\theta\, Sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\hat{k}k\rho_{\circ}\int^{2\pi}\int^{\theta_{\circ}}\int^{h/Cos\theta}Sin\theta\, Cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$=-\hat{i}k\rho_{\circ}\int_{\circ}^{2\pi}Cos\varphi\, d\varphi\int_{\circ}^{\theta_{\circ}}Sin^2\theta\, d\theta\int_{\circ}^{h/Cos\theta}dr$$

$$-\hat{j}k\rho_{\circ}\int_{\circ}^{2\pi}Sin\varphi\, d\varphi\int_{\circ}^{\theta_{\circ}}Sin^2\theta\, d\theta\int_{\circ}^{h/Cos\theta}dr$$

انتگرال‌های اوّل و دوّم صفرند زیرا انتگرال روی پریود کامل $Sin\varphi\, Cos\varphi$ برابر صفرند

$$\vec{E}(0,0,0)= \hat{k}k\rho_\circ 2\pi \int_\circ^{\theta_\circ} Sin\theta\, Cos\theta\, d\theta \left(r\Big|_\circ^{h/Cos\theta}\right)$$

$$=-\hat{k}2\pi k\rho_\circ h\int_\circ^{\theta_\circ} Sin\theta\, d\theta$$

$$=-\hat{k}2\pi k\rho_\circ h\left(-Cos\theta\Big|_\circ^{\theta_\circ}\right)=\hat{k}2\pi k\rho_\circ h(Cos\theta_\circ -1)$$

b- دستگاه استوانه‌ائی

موضع میدان $\vec{r}=\circ$

موضع بار $\vec{r}^{\,1}=\hat{\rho}\rho+\hat{k}z$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right|=\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}$

المان بار $dq=\rho_\circ\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

$$\vec{E}(0,0,0)=k\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{h}\int_\circ^{z\tan\theta_\circ}\frac{\rho_\circ\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

حدود انتگرال نسبت φ د ه موقع قبل یا بعد از دو انتگرال دیگر نسبت به ρ و z می‌تواند گرفته شود. انتگرال نسبت به ρ به z بستگی دارد برای یک z دلخواه ρ از صفر تا $z\tan\theta_\circ$– تغییر می‌کند (مطابق شکل) لذا باید ابتدا انتگرال نسبت به ρ گرفته شود و سپس انتگرال نسبت به z

$$\vec{E}(0,0,0)=-k\rho_\circ\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{h}\int_\circ^{z\tan\theta_\circ}\frac{\hat{\rho}\rho^2 d\rho\, d\varphi\, dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$-\hat{k}k\rho_\circ\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{h}\int_\circ^{z\tan\theta_\circ}\frac{z\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$=-k\rho_\circ\int_\circ^{2\pi}\hat{\rho}d\varphi\int_\circ^{h}dz\int_\circ^{z\tan\theta_{\pm\circ}}\rho^2 d\rho-\hat{k}k\rho_\circ\int_\circ^{2\pi}d\varphi\int_\circ^{h}zdz\int_\circ^{z\tan\theta_\circ}\frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

انتگرال اوّل صفر است زیرا $\int_\circ^{2\pi}\hat{\rho}d\varphi$ برابر صفر است.

$$\vec{E}(0,0,0)=-\hat{k}k\rho_\circ 2\pi\int_\circ^{h}zdz\left[-\left(\rho^2+z^2\right)^{-1/2}\Big|_\circ^{z\tan\theta_\circ}\right]$$

$$=+\hat{k}2\pi k\rho_\circ\int_\circ^{h}zdz\left[\frac{1}{\sqrt{z^2\tan^2\theta_\circ+1}}\right]-\frac{1}{z}$$

$$=\hat{k}2\pi k\rho_\circ(Cos\theta_\circ-1)$$

۲-۸-۱۵ مثال ۱۵

مخروطی ناقص مطابق شکل در نظر بگیرید. σ چگالی سطحی این مخروط یکنواخت است و روی سطح جانبی آن توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطهٔ o مبدأ دستگاه مختصات به دست آورید.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right)}{\left|\vec{r}\quad \vec{r}^{\,1}\right|^{3}}$$

موضع میدان $\vec{r}=0$

موضع المان بار $\vec{r}^{\,1}=\hat{r}r$

فاصله المان بار از نقطهٔ میدان $\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,1}\right|=r$

المان بار $dq=\sigma\, ds=\sigma r Sin\theta\, dr\, d\varphi$

$$\vec{E}(0,0,0)=k\int_{\frac{h_1}{Cos\theta_\circ}}^{\frac{h_2}{Cos\theta_\circ}}\int_\circ^{2\pi}\frac{\sigma r Sin\theta_\circ dr d\varphi\left(0-\hat{r}r\right)}{r^3}$$

$$=-k\sigma\int_{\frac{h_1}{Cos\theta_\circ}}^{\frac{h_2}{Cos\theta_\circ}}\frac{dr}{r}\int_\circ^{2\pi} Sin\theta_\circ\left(\hat{i}Sin\theta_\circ Cos\varphi+\hat{j}Sin\theta_\circ Cos\varphi+\hat{k}Cos\theta_\circ\right)$$

$$=\hat{i}k\sigma\int_{\frac{h_1}{Cos\theta_\circ}}^{\frac{h_2}{Cos\theta_\circ}}\frac{dr}{r}\int_\circ^{2\pi} Sin^2\theta_\circ Cos\varphi d\varphi$$

$$\hat{j}k\sigma\int_{\frac{h_1}{Cos\theta_\circ}}^{\frac{h_2}{Cos\theta_\circ}}\frac{dr}{r}\int^{2\pi} Sin^2\theta_\circ Sin\varphi\, d\varphi$$

$$\hat{j}k\sigma\int_{\frac{h_1}{Cos\theta_\circ}}^{\frac{h_2}{Cos\theta_\circ}}\frac{dr}{r}\int^{2\pi} Sin\theta_\circ Cos\theta_\circ\, d\varphi$$

دو انتگرال اوّل و دوّم برابر صفرند زیرا انتگرال $Cos\varphi$ و $Sin\varphi$ روی پریود کامل برابر صفر است.

$$\vec{E}(0,0,0)=-\hat{k}2\pi k\sigma\, Sin\theta_\circ Cos\theta_\circ \ln r\Big|_{h_1/Cos\theta_\circ}^{h_2/Cos\theta_\circ}$$

$$=-\hat{k}2\pi k\sigma\, Sin\theta_\circ Cos\theta_\circ\left(\ln\frac{h_2}{Cos\theta_\circ}\right)-\ln\frac{h_1}{Cos\theta_\circ}$$

$$=-\hat{k}2\pi k\sigma\, Sin\theta_\circ Cos\theta_\circ \ln\frac{h_2/Cos\theta_\circ}{h_1/Cos\theta_\circ}$$

$$=-\hat{k}2\pi k\sigma\, Sin\theta_\circ Cos\theta_\circ \ln h_2/h_1$$