www.mohandesyar.com

عنـــــــوان

معادلات دیفرانسیل

جرج ف. سیمونز

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها

ترجمهٔ
دکتر علی اکبر بابائی
دکتر ابوالقاسم میامئی

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها

تألیف جرج ف. سیمونز

ترجمهٔ
دکتر علی اکبر بابائی
دکتر ابوالقاسم میامئی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۱۱

مرکز نشر دانشگاهی
۱۵۴

DIFFERNTIAL EQUATIONS
with Applications and Historical Notes
George F. Simmons
by McGraw-Hill Inc., 1972

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
تألیف جرج ف. سیمونز
ترجمهٔ علی‌اکبر بابائی، ابوالقاسم میامئی
ویراستهٔ دکتر منوچهر وصال، محمد باقری

مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۴
مرکز نشر دانشگاهی، چاپ چهارم ۱۳۷۲
تعداد ۴۰۰۰
چاپ و صحافی: فرهنگ

سیمونز، جرج — Simmons, George Finaly, 1925-
معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
عنوان اصلی:
Differential equations with applications and historical notes.
واژه‌نامه: ص.
کتابنامه: ص.
۱. معادله‌های دیفرانسیل. الف. بابائی، علی‌اکبر، مترجم. ب. میامئی، ابوالقاسم، مترجم. ج. عنوان
QA ۳۷۱ ۵۱۵/۳۵
شابک: ۰-۱۵۴-۰۱-۹۶۴ ISBN: 964-01-0154-0

فهرست

عنوان	صفحه

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

پیشگفتار مترجمین

با توجه به‌کاربرد و اهمیت بسزای ریاضیات و بویژه معادلات دیفرانسیل در یاری رساندن به درك و توجیه پدیده‌های علمی و نظر به اینکه کتابهای ریاضی که تاکنون به زبان فارسی تألیف یا ترجمه شده‌اند ، احتیاجات فعلی مارا آن گونه که باید وشاید برنمی‌آورند ، برآن شدیم که به ترجمهٔ کتاب حاضر بپردازیم تا ما نیز در رفع این کمبود سهمی داشته باشیم.

سطح این کتاب ، به‌گونه‌ای است که خوانندهٔ آشنا با ریاضیات عمومی ازعهدهٔ فهم آن برمی‌آید. یکی ازویژگیهای این کتاب توجهی است که به‌کاربردهای معادلات‌دیفرانسیل شده است و می‌تواند برای دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی مفید باشد. علاوه برآن دارای یادداشتهایی تاریخی است که به مطالب کتاب ، روح بیشتری می‌بخشند وخواننده را کم وبیش بازندگانی ریاضیدانان وپژوهشهای آنان‌آشنا می‌کنند و اورا سرشوق می‌آورند.

در ترجمهٔ این کتاب سعی برآن بوده است تا حد امکان اصالت مطالب حفظ و از واژه‌ها وعباراتی استفاده شود که هم معمول باشند وهم روان. البته اگر توفیقی دراین امر حاصل شده باشد، نسبی است. ازاین رو، نظرات اصلاحی همکاران محترم، دانشجویان‌عزیز و سایر استفاده‌کنندگان گرامی‌را باکمال رغبت می‌پذیریم و ازآنان پیشاپیش تشکرمی‌کنیم و امیدواریم که باارسال اصلاحات پیشنهادی خود ما را در اعتلای کیفیت چاپ دوم کتاب یاری دهند.

در خاتمه ، از آقای منوچهر قمصری که در ابتدای کار از همکاری ایشان برخوردار بوده‌ایم ، از مسئولین مرکز نشر دانشگاهی که انتشار این کتاب را برعهده گرفته‌اند ، از ویراستاران کتاب که زحمت ویرایش کتاب را تقبل کرده‌اند ونیزاز تمامی کسانی که به‌نحوی در امر انتشار و چاپ کتاب سهیم بوده‌اند تشکر می‌کنیم.

دکتر علی‌اکبر بابائی
دانشگاه صنعتی اصفهان

دکتر ابوالقاسم میامئی
دانشگاه صنعتی اصفهان
آذر ۱۳۶۳

پیشگفتار مؤلف

این نکته درخور توجه است که هر کتاب درسی جدید دربارهٔ موضوعی قدیمی باید نقطه‌نظر معین و معقولی را عرضه کند که در کتابهای قبلی ارائه نشده باشد. یقیناً چنین نقطه‌نظری بازتابی از تجربه، سلیقه، و تمایلات شخصی نویسنده است، و بنابراین باید در ابتدا بوضوح بیان گردد، تا کسانی که با آن موافق نیستند به کتاب دیگری رجوع کنند. همچنانکه درزیر ملاحظه خواهید کرد، آرایش و محتویات این کتاب به‌طرق گوناگون بیانگر نظرات شخصی من است.

جایگاه معادلات دیفرانسیل در ریاضیات. ۳۰۰ سال است که آنالیز تواناترین شاخهٔ ریاضیات بوده، و مبحث معادلات دیفرانسیل بخش عمدهٔ آن است. این موضوع، هدف طبیعی حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی و مهمترین بخش ریاضیات در درک علوم طبیعی است. همچنین، در مسائل عمیق‌تری که زائیدهٔ همین بخش از ریاضیات هستند، معادلات دیفرانسیل منبع اکثر ایده‌ها و نظریه‌هایی است که آنالیز عالی را تشکیل می‌دهند. سری توانی، سری فوریه، تابع گاما و توابع ویژهٔ دیگر، معادلات انتگرالی، قضایای وجود ونیاز به توجیه دقیق بسیاری از روندهای تحلیلی ـ همگی، در طبیعی‌ترین زمینهٔ خود، درکارما ظاهر می‌شوند، و در مرحلهٔ بعدی انگیزش اصلی مطالعه و تحقیق در آنالیز مختلط، نظریهٔ سری فوریه و بسطهای متعامد عمومی‌تر، انتگرال‌گیری لبگ، فضاهای‌متریک و فضاهای هیلبرت، و بسیاری دیگر از مباحث زیبای ریاضیات نوین را فراهم می‌کنند. به‌عنوان مثال، نشان خواهم داد که یکی از ایده‌های اصلی آنالیز مختلط، رهانیدن سریهای توانی از قید محدودهٔ دستگاه اعداد حقیقی است، وکسانی که کوشیده‌اند با استفاده از سریهای توانی حقیقی معادلات دیفرانسیل‌را حل‌کنند، این انگیزه‌را بوضوح درک می‌کنند. بدیهی است که در گیاه‌شناسی، هیچکس نمی‌تواند بدون درک معقولی از ریشه‌ها، ساقه‌ها و برگها که شکوفه‌های گیاهان گلدار را تغذیه و تقویت می‌کنند به ارزش این شکوفه‌ها

کاملا پی‌ببرد. همین اصل در ریاضیات نیز صحت دارد، لیکن اغلب ازآن صرفنظر می‌گردد یا به بوتهٔ فراموشی سپرده می‌شود.

در ریاضیات نیز همچون دیگـر فعالیتهای بشری، تفنن امری رایج است، و همواره مشکل می‌توان دستاوردهای ماندگار و گذرای شخص در طول حیاتش را از یکدیگرجدا کرد. درحال حاضر، یك‌جریان قوی تجرید در دوره‌های بالاتر از لیسانس ریاضی وجود دارد. این‌جریان بسیاری از طرحهای پراکنده را ازچشم‌انداز زدوده و به‌جای‌آنها نظریه‌های شسته ورفتهٔ عمومی آورده است. چنانچه جانب اعتدال نگاه داشته شود، این نظریه‌هـای عمومی هم‌مفید وهم ارضاکننده می‌باشند،لیکن یکی از نتایج تأسف‌بار پرداختن بیش‌ازحد به‌آنها، این است که چنانچه دانشجویی طی‌دورهٔ لیسانس، مقدار کمی راجع به‌موضوعات گوناگون و ارزشمندی چون معادلهٔ موج، تابع فوق هندسی گاوس، تابع گاما، و مسائل اساسی حساب تغییرات (ومطالب فراوان دیگر) فرانگیرد، بعید است‌که بعدها به‌چنین‌کاری مبادرت ورزد. مناسبترین فرصت برای آشنایی کلی باچنین ایده‌هایی، یك‌درس مقدمـاتی غیرفشرده در زمینهٔ معادلات دیفـرانسیل است. بعضی از کتابهای موجود در ایـن زمینه، سیاحت بااتوبوسی را به‌یادمن می‌آورد‌که رانندهٔ آن به‌قصد پیروی ازبرنامهٔ معین به‌قدری تند می‌راند‌که مسافران فرصت‌چندانی، یاهیچ‌فرصتی، برای‌لذت بردن از مناظر نمی‌یابند. بگذارید گاهگاهی دیرمان شود واز سیاحت لذت بیشتری ببریم.

کاربردها. بدیهی است که هیچ‌چیز بجز تغییر، دایمی نیست، وهدف اولیهٔ معادلات دیفرانسیل آن‌است‌که وسیله‌ای برای مطالعهٔ تغییرات جهان مادی باشد. بنابراین، هرکتاب عمومی دربارهٔ این‌موضوع، اگـر میزان معقولـی از کاربردهای علمی آن‌را دربـرنگیرد، همان‌قدر بیهوده و بی‌لطف است که نوشتن مقاله‌ای دربارهٔ تخم‌مرغ، بدون‌ذکرنقشی کـه تخم‌مرغ در تولیدمثل دارد. این‌کتاب آنچنان بنا شده است که هرفصل‌آن، بجز فصل‌آخر، حداقل یك‌ـواغلب چندین‌ـ«دستاورد»عمده، به‌صورت یك‌مسئلهٔ علمی‌کلاسیك،درحدامکانات روشهای آن‌فصل ارائه می‌کند. این‌کاربردها مشتمل‌اند بر:

مسئلهٔ منحنی کوتاهترین‌زمان؛
فرمول‌اینشتین $E = mc^2$؛
قانون گرانش نیوتن؛
معادلهٔ موج برای تارمرتعش؛
نوسانگر همساز درمکانیك کوانتومی؛
نظریهٔ پتانسیل؛
معادلهٔ موج برای غشای مرتعش؛
معادلات شکار و شکارچی؛
مکانیك غیرخطی؛
اصل همیلتن، و
مسئلهٔ مکانیکی‌آبل.

به‌گمان من، بررسی ریاضی این مسائل، در زمرهٔ افتخارات مهم تمدن غرب است، وامیدوارم که خواننده با من موافق باشد.

مسئلهٔ دقت ریاضی. در مراحل عالی ریاضیات محض، هر بحثی که قرار است یك اثبات باشد، باید بتواند در برابر سخت‌ترین انتقادات کارشناسان‌شکاك تاب بیاورد. این، یکی از قواعد بازی است، و در صورتی که مایل به بازی باشید، باید به قواعد گردن‌نهید. اما این تنها بازی ممکن در این دیار نیست.

بعضی قسمتهای ریاضیات وجود دارند ـ شاید نظریهٔ اعداد و جبرمجرد ـ که در تمام مراحل‌آنها سطوح بالایی از اثبات دقیق می‌تواند مطرح باشد. لیکن درمعادلات دیفرانسیل مقدماتی پافشاری موشکافانه‌بردقت‌نظری، منجر به‌گرفتن عصارهٔ موضوع می‌شود، به‌طوری که تنها سبوس خشك به‌جای می‌ماند. هدف اصلی‌من دراین‌کتاب آن‌است که دانشجورا برای درك ماهیت و اهمیت معادلات دیفرانسیل یاری دهم، و برای این‌مقصود، خیلی ترجیح می‌دهم که گهگاه مطلب غیردقیق لیکن قابل درك شود تااینکه کاملا دقیق ولی غیرقابل‌درك باشد. به هیچ‌وجه علاقه‌ندارم که یك‌ساختمان ریاضی بناکنم که ازنظر منطقی بی‌عیب باشد ودرآن، تعاریف، قضایا، وبرهانهای دقیق چنان بایکدیگرپیوند یابندکه در برابرخواننده‌ای که می‌خواهد به‌درون راه‌یابد، سدی‌استوار پدید آورند.

باوجود این ساده‌گیری، گهگاه و به‌طور مشخص درفصل ۱۱ و پیوستهای الف از فصول ۴ و ۵، وپیوست ب از فصل ۸، به‌بحثهای نسبتاً دقیقی پرداخته‌ام، منظور این نیست که بقیهٔ این کتاب نادقیق است، بلکه منظور آن‌است‌که تکیهٔ ما برجنبهٔ عملی ریاضیات است که هدف اصلیش ایجاد روشهایی برای حل‌مسائل علمی است ـ درمقابل ریاضیات نظری که ایده‌ها وابزارهای تولید شده توسط ریاضیات عملی را تحلیل و تنظیم می‌کند.

به‌گمان برخی‌افراد، یك‌بحث ریاضی یابرهان است ویابرهان‌نیست. در زمینهٔ‌آنالیز مقدماتی، من با این نظرموافق نیستم، و در عوض، براین اعتقادم‌که نقش اصلی یك برهان، همانا متقاعدکردن معقولانهٔ شنونده است. به‌نظرمن، دقت‌ریاضی همانند پوشاك است: مدل آن بایدمناسب موقعیت باشد، واگربیش‌ازحد‌گشاد یاتنگ باشد از راحتی‌می‌کاهد وآزادی حرکت شخص را محدود می‌کند.

تاریخچه و زندگینامه. بنا به‌یك‌مثل قدیمی‌ارمنی: «کسی که بی‌خبراز پیشینیان باشد، به‌سپری‌کردن زندگی‌در دنیای تنگ و تاریك زمان خود محکوم است.» ریاضیات بدون تاریخچه، به‌معنای ریاضیات عاری از عظمت است، زیرا ریاضیات که یکی از هنرهای والای تمدن است ـ مانند سایرهنرها ـ بدین‌لحاظ عظمت داردکه حاصل آفرینش بشری است.

در عصر سلطهٔ فزایندهٔ فرهنگ همگانی و بی‌هویتی ناشی از دیوان‌سالاری، اطلاع ازاین‌امر مایهٔ بسی خوشوقتی است‌که مطالب ضروری ریاضیات را کامپیوتر چاپ نکرده یا یك‌کمیته تصویب نکرده است، بلکه کارفردی و نبوغ‌شخصی چندانسان برجسته آنها را پدید آورده است. یادداشتهای متعدد راجع به زندگینامهٔ افراد دراین‌کتاب، بازتابی از علاقهٔ‌من به‌شناساندن اندکی از دستاوردها وخصایل شخصی‌این انسانهای شگفت‌انگیزاست.

اکثر یادداشتهای طولانی در پیوستها جای داده‌شده‌اند، ولی هریك‌ازآنها باکارخاصی از آن شخص که در متن مورد بحث قرارگرفته است، ارتباط مستقیم دارد. این یادداشتها بزرگترین ریاضیدانان سه قرن گذشته بجز چندتن را شامل می‌شود: فرما، نیوتن، برنولی‌ها، اویلر، لاگرانژ، لاپلاس، گاوس، آبل، همیلتون، لیوویل، چبیشف، هرمیت، ریمان و پوانکاره. همان طورکه ت. س. الیوت[1] در یکی از مقالات خود نوشته است: «شخصی‌می‌گفت: نویسندگان گذشته ازما فاصله گرفته‌اند، زیرا ما خیلی بیشترازآنچه آنها می‌دانستند، می‌دانیم. دقیقاً همین طور است، و ما می‌دانیم که چنین‌اند».

ارائهٔ تاریخچه و زندگینامه، بسیار پیچیده است، و من آگاهم که بندرت مطلبی در یادداشتهایم واقعاً به‌همان‌سادگی است که می‌توانست باشد و ازاین‌بابت متأسفم. همچنین بایدبه‌خاطر اشارات بیش‌ازحد فشرده به مفاهیم ریاضی‌که بسیاری از خوانندگان دانشجو هنوز باآنها مواجه نگشته‌اند، پوزش بطلبم. لیکن دانشجوی علاقمند باید بتواند، به کمك کتابخانه‌ای خوب، اغلب آنها را برای‌خود روشن نماید. حداقل اینکه، چنین کوششهایی ممکن است شخص را در کسب احساس تنوع وسیع ریاضیات کلاسیك یاری دهد. و این جنبه‌ای از موضوع است که دربرنامهٔ تحصیلی دورهٔ لیسانس، تقریباً یافت نمی‌شود.

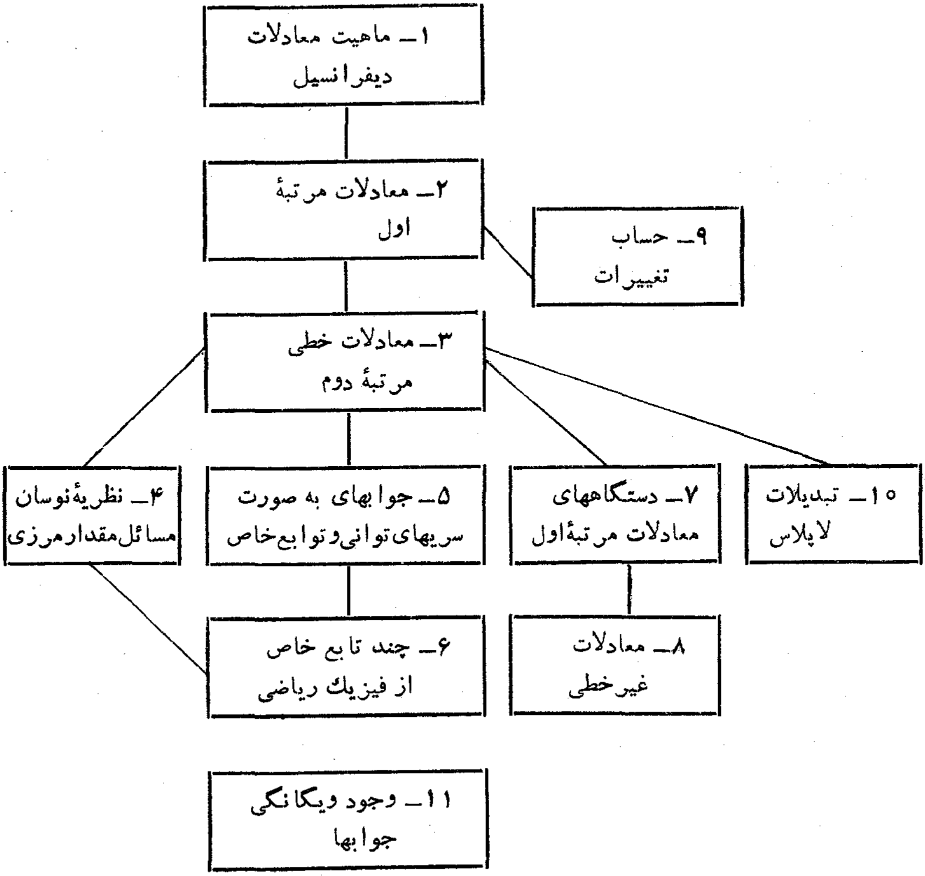
جورج ف. سیمونز[2]

---

1. T . S . Eliot
2. George F . Simmons

پیشنهادهایی به مدرس

نمودار زیر بستگی منطقی فصول را به‌یکدیگر نشان می‌دهد وراههای گوناگون استفاده از این کتاب را، بسته‌به‌سلیقهٔ معلم و معلومات قبلی و اهداف دانشجویان، پیشنهاد می کند.



فصول ۱، ۲ و ۹ نسبتاً ساده هستند، وبسیاری از مطالب دوفصل اول اغلب در دروس حساب دیفرانسیل و انتگرال ارائه می‌شوند. فصل ۳ شالودهٔ بنای کتاب است. فصول ۴، ۵ و ۶ نظریهٔ پیشرفته‌تر معادلات خطی مرتبهٔ دوم و جوابهای به‌صورت سری را موردبحث و بررسی قرار می‌دهند، و فصل ۱۰ یك شیوهٔ تکمیلی را ارائه می کند. هدف فصول ۷ و ۸ بحث پیرامون معادلات غیرخطی مرتبهٔ دوم است و فصول ۸ و ۱۱ به‌ریاضیات موردتوجه دوران‌ما، از همه نزدیکتر است. ضمناً گوشزد می‌شود که مطالب مطرح شده در بخشهای ۲۸ تا ۳۵ تقریباً دشوارند و برای معلمی که درس کوتاهی ارائه می‌کند، شاید بهتر آن باشد که آنهارا تنها به دانشجویان مشتاق‌تر خود عرضه کند.

دانشمند، طبیعت را به خاطر فایده اش مطالعه نمی کند: آن را برای این مطالعه می کند که از آن لذت می برد، و از طبیعت لذت می برد زیرا که زیباست. اگر طبیعت زیبا نبود، ارزش شناختن نداشت، و اگر طبیعت ارزش شناختن نداشت، زندگی هم ارزش زیستن نداشت. البته، من در اینجا از آن گونه زیبایی که حواس را متأثر می کند، یعنی از زیبایی اوصاف و ظواهر سخن نمی گویم؛ نه آنکه این گونه زیبایی را دست کم بگیرم، چنین چیزی نیست؛ اما این زیبایی ربطی به علوم ندارد؛ منظورم زیبایی ژرفتری است که از نظم هماهنگ اجزا به وجود می آید، و هوش ناب قادر به درك آن است.

هانری پوانکاره

هر گاه یك رشتهٔ ریاضی از منشأ تجربی خود دور شود، یا چنانچه نسلهای دوم یا سوم تنها به طور غیرمستقیم از ایده‌های ناشی از «واقعیت» الهام بگیرند، خطرات بسیار جدی پیش می آید. رشتهٔ مزبور بیشتر و بیشتر به زیبایی ناب توجه می کند و بیشتر و بیشتر به سوی «هنر برای هنر» می گراید. چنانچه زمینهٔ مورد نظر را موضوعات مرتبطی احاطه کرده باشند که با تجربه حتی روابط نزدیکتری دارند، یا اگر رشتهٔ مزبور تحت تأثیر اشخاصی با شم فوق العاده پیشرفته قرار گیرد، این امر لزوماً بد نخواهد بود. ولی این خطر جدی وجود دارد که موضوع در جهت حداقل مقاومت گسترش یابد، و این جویبار، دور از سرچشمه، به شاخه‌های ناچیز فراوان تقسیم گردد و این رشته به توده ای از مطالب جزئی و پیچیدهٔ نابسامان بدل شود. به عبارت دیگر هر رشتهٔ ریاضی، بسیار دور از منشأ تجربی یا پس از گسترش «انتزاعی» فراوان، در معرض خطر تباهی قرار می گیرد.

جان‌فون نویمان

درست همان طور که استنتاج باید توسط شهود تکمیل شود، حرکت به سوی تعمیم پیشرو نیز باید به وسیلهٔ احترام و عشق به جزئیات رنگارنگ تعدیل شود. مسئلهٔ خاص نباید به مرتبهٔ مثال خاصی از نظریه‌های کلی مهم تنزل داده شود. درواقع نظریه‌های عمومی از بررسی مسائل خاص پدید می آیند و اگر برای تشریح و تنظیم خواص مشخص تر موارد گوناگون به خدمت گرفته نشوند، بی معنا خواهند بود. اثر متقابل بین کلیت و فردیت، استنتاج و ابداع، منطق و تخیل ـ این است جوهر ژرف ریاضیات زنده. هر یك از این جنبه‌های ریاضی می تواند محور یك دستاورد مشخص باشد. همهٔ اینها در یك مبحث خیلی پیشرفته، به کار خواهند رفت. به طور کلی چنین مبحثی از یك زمینهٔ «ملموس» آغاز می شود، آنگاه به وسیلهٔ تجرید، سنگلاخها را رها می کند و به لایه‌های رفیع هوای لطیف صعود می کند، جایی که در آن پرواز و نظاره آسان است. پس از این پرواز، نوبت به آزمون حساس فرود و دستیابی به اهداف خاص در دشتهای پست نو یافته از «واقعیت» منفرد می رسد. خلاصه آنکه، پرواز به کلیت مجرد باید از واقعیت عینی و خاص آغاز شود و بدان بازگردد.

ریچارد کورانت

۱

ماهیت معادلات دیفرانسیل

۱. مقدمه

هرمعادله مشتمل بریك متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یك یا چند متغیر مستقل را معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامند. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت (درفیزیك، شیمی، زیست‌شناسی، و نجوم) طبیعی‌ترین بیان خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند. کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنین درخود ریاضیات، خصوصاً درهندسه، و درمهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگرعلوم کار بسته فراوان‌اند.

دلیل این کارآیی گستردهٔ معادلات دیفرانسیل بآسانی‌قابل درك است، یادآوری‌می‌کنیم که چنانچه $y=f(x)$ تابعی مفروض باشد، آنگاه مشتق آن dy/dx را می‌توان به‌عنوان میزان تغییر y نسبت به x درنظر گرفت. درهر روند طبیعی، متغیرهای مربوطه و میزان تغییرات آنها به وسیلهٔ اصول علمی اساسی حاکم بر آن روند، به‌یکدیگر مربوط می‌شوند. هنگامی که این ارتباط با علایم ریاضی بیان شود، نتیجه اغلب یك معادلهٔ دیفرانسیل‌است.

مثال زیر می‌تواند این نکات را روشن کند. طبق قانون دوم حرکت نیوتن، a، شتاب جسمی به‌جرم m،متناسب است با نیروی کل F وارد برآن، باثابت تناسب $1/m$، بنابراین $a=F/m$ یا

$$ma=F \tag{۱}$$

به‌عنوان مثال فرض کنید جسمی به‌جرم m، تنها تحت‌تأثیر ثقل زمین، آزادانه سقوط کند.

دراین‌حالت تنها نیروی وارد برآن mg است که درآن g شتاب ثقل‌زمین است[1]. هرگاه y فاصلهٔ جسم از ارتفاع ثابتی‌باشد، آنگاه‌شتاب جسم d^2y/dt^2 است و رابطهٔ(۱)به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg$$

یا

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g \tag{۲}$$

چنانچه وضعیت را، بااین فرض‌که هوا نیز نیروی مقاومی متناسب با سرعت جسم بـرآن اعمال‌می‌کند، تغییر دهیم، آنگا نیروی کل‌وارد برجسم $mg-k(dy/dt)$ است و رابطهٔ (۱) چنین خواهد شد:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-k\frac{dy}{dt} \tag{۳}$$

معادلات (۲) و (۳) معادلات دیفرانسیلی هستند که خواص اساسی روندهای فیزیکی مورد نظر را بیان می‌کنند.

به‌عنوان مثالهای بیشتری از معادلات دیفرانسیل، معادلات زیر را ذکرمی‌کنیم:

$$\frac{dy}{dt}=-ky \tag{۴}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky \tag{۵}$$

$$\frac{dy}{dx}+2xy=e^{-x^2} \tag{۶}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0 \tag{۷}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0 \tag{۸}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0 \tag{۹}$$

---

۱. دراکثرکاربردها، g را می‌توان روی سطح زمین، ثابت درنظرگـرفت، ومقدار آن تقریباً ۹۸۰ سانتی‌متر برمجذور ثانیه است.

متغیر وابسته درهریك از این معادلات y و متغیر مستقل، t یا x است. حروف k، m، و p معرف ثابتها هستند. معادلهٔ دیفرانسیل معمولی یا عادی معادله‌ای است که تنها یك متغیر مستقل درآن وجود داشته باشد، بنا براین تمام مشتقات موجود درآن مشتقات معمولی می‌باشند. همهٔ معادلات بالا معمولی هستند. مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل، مرتبهٔ بالاترین مشتق موجود در معادله است. معادلات (۴) و (۶) معادلات مرتبهٔ اول و معادلات دیگر از مرتبهٔ دوم‌اند. معادلات (۸) و (۹) کلاسیك هستند و بترتیب، به معادلهٔ لژاندر[1] و معادلهٔ بسل[2] موسوم‌اند. هرکدام از این دومعادله تاریخچهٔ مفصلی داردکه به صدها سال قبل برمی‌گردد. همهٔ این معادلات را بعداً بتفصیل مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

معادلهٔ دیفرانسیل بامشتق جزئی، معادله‌ای است که مشتمل بر بیش‌از یك متغیر مستقل است، بنابراین مشتقات موجود درآن ، مشتقات جزئی هستند. به‌عنوان مثال، هرگاه $w=f(x, y, z, t)$ تابعی از زمان وسه‌مختص قائم یك‌نقطه درفضا باشد،آنگاه‌معادلات زیر، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دوم خواهند بود:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

این معادلات نیز کلاسیك هستند، و بترتیب معادلهٔ لاپلاس[3] ، معادلهٔ حرارت ، و معادلهٔ موج نامیده می‌شوند. هرکدام از این معادلات درفیزیك نظری اهمیت زیادی دارد و مطالعهٔ آنها موجب ظهور بسیاری از نظرات مهم ریاضی شده است. معادلات دیفرانسیل جزئی عموماً درفیزیك محیطهای پیوسته پیش می‌آید. مانند مسائل مشتمل برمیدانهای الکتریکی، دینامیك سیالات، پخش، وحرکت‌موجی. نظریهٔ معادلات دیفرانسیل‌جزئی بانظریهٔ معادلات‌دیفرانسیل معمولی خیلی متفاوت و تقریباً از هرلحاظ بسیار مشکلتر است. فعلا برای مدتی توجه خود را منحصراً به‌معادلات دیفرانسیل معمولی معطوف خواهیم داشت.

۲. نکات‌کلی درمورد جوابهای معادلات دیفرانسیل

معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ n ام، عموماً، به‌صورت

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{1}$$

یا با استفاده از علامت «پریم» برای مشتقات، به‌صورت

1. Legendre 2. Bessel 3. Laplace

$$F(x , y , y' , y'' , \dots , y^{(n)}) = 0$$

نوشته می‌شود. بحث نظری مناسبی درمورد این معادله باید مبتنی برمطالعهٔ دقیق خواصی از تابع F باشد که صریحاً فرض شده‌اند. ولی، تأکید بیمورد برنکات ظریف نظریه اغلب مانع از آن می‌شود که دریابیم واقعاً چه چیزی درجریان است. بنابراین سعی خواهیم کرد که، دست‌کم درحال‌حاضر، از توجه بیش‌ازحد درمورد اینگونه مطالب اجتناب ورزیم.

تحقیق اینکه تابع مفروض $y = y(x)$ جواب معادله‌ای نظیر (۱) باشد، معمولا کار ساده‌ای است. دراینجا کافی است مشتقات $y(x)$ را محاسبه‌کنیم ونشان دهیم که جایگذاری $y(x)$ ومشتقاتش درمعادله، آن‌را تبدیل به اتحادی برحسب x می‌کنند. بدین‌ترتیب مشاهده می‌کنیم که

$$y = e^{2x} \quad \text{و} \quad y = e^{3x}$$

هردو جوابهای معادلهٔ مرتبهٔ دوم

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \tag{۲}$$

هستند، وبه‌طور کلیتر

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \tag{۳}$$

نیز به‌ازای هرمقداری‌که برای ثابتهای c_1 و c_2 انتخاب‌کنیم، جواب معادلهٔ (۲) است. اغلب جوابهای معادلات دیفرانسیل به‌شکل توابعی‌که به‌صورت ضمنی تعریف شده، ظاهر می‌شوند وگاهی بیان متغیر وابسته برحسب متغیر مستقل به‌طور صریح مشکل ویا غیرممکن است. به‌عنوان مثال،

$$xy = \log y + c \tag{۴}$$

به‌ازای هرمقدار از ثابت c یك جواب معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy} \tag{۵}$$

است. این امر را می‌توان با مشتقگیری از معادلهٔ(۴) و مرتب‌کردن نتیجه، بآسانی تحقیق کرد. مثالهایی که آورده شد این موضوع را نیزنشان می‌دهند که جواب هر معادلهٔدیفرانسیل معمولا شامل یك یاچند ثابت اختیاری است‌که تعداد ثابتها برابر بامرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل است.

دراکثر حالات، کاربرد اینگونه شیوه‌ها درمورد جواب احتمالی معادلهٔ دیفرانسیل کار ساده‌ای‌است، لیکن‌آغازکردن بامعادلهٔ دیفرانسیل و یافتن جوابی برای‌آن، طبعاً، بسیار دشوارتر است. بموقع روشهای اصولی و منظمی جهت حل معادلاتی نظیر(۲) و (۵)ارائه خواهیم کرد. درحال حاضر، به ذکر چند نکته در مورد جنبه‌های عمومی جوابها اکتفا می‌کنیم.

ساده‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{۶}$$

است و آن را بانوشتن

$$y=\int f(x)dx+c \tag{۷}$$

حل می‌کنیم. دربعضی‌حالات انتگرال نامعین رابطهٔ (۷) را می‌توان به‌وسیلهٔ روشهای‌حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبه کرد. درحالات دیگر ممکن است یافتن فرمولی برای این انتگرال دشوار یاغیرممکن باشد. به‌عنوان‌مثال، می‌دانیم که

$$\int e^{-x^2}dx \quad \text{و} \quad \int\frac{\sin x}{x}dx$$

را نمی‌توان برحسب تعدادی متناهی از توابع مقدماتی بیان کرد.[۱] اما به‌یاد داریم که

$$\int f(x)dx$$

صرفاً علامتی برای تابعی (هرتابعی) است که مشتق آن $f(x)$ باشد، لذا تقریباً همواره می‌توانیم بانوشتن رابطهٔ(۷) به‌صورت زیر، مفهوم معتبری برای‌آن قائل شویم

$$y=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+c \tag{۸}$$

اساس مطلب این است که این انتگرال معین تابعی ازحد بالایی x (حرف t زیر علامت انتگرال فقط یك متغیر ظاهری است) است و این تابع، هنگامی که تابع زیر انتگرال درناحیهٔ انتگرال گیری پیوسته باشد، موجود ومشتق آن $f(x)$ است.[۲]

---

۱. خواننده‌ای‌که درمورد دلایل این موضوع‌کنجکاو باشد می‌تواند به

D. G. Mead, Integration, *Am. Math. Monthly*, Vol. 68, pp. 152-156, 1961.

رجوع کند. برای توضیحات اضافی به،

G. H. Hardy, «The Integration of Functions of a Single Variable,» Cambridge University Press, London, 1916.

یا به:

J. F. Ritt, «Integration in Finite Terms,» Columbia University Press, New York, 1948.

مراجعه کنید.

۲. این بیان صورتی از قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل وانتگرال است.

معادلهٔ مرتبهٔ اول عمومی، حالت خاص (۱) است که با قرار دادن $n=1$ حاصل می‌شود:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (۹)$$

معمولا انتظار داریم که یك چنین معادله‌ای دارای جواب باشد و این جواب شامل یك ثابت دلخواه باشد. اما معادلهٔ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$

جواب حقیقی ندارد و معادلهٔ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=0$$

تنها دارای جواب واحدی به‌صورت $y=0$ است (که شامل ثابت اختیاری نیست). مواردی از این قبیل، موجب طرح سؤالات نظری مشکلی راجع به وجود و ماهیت جوابهای معادلات دیفرانسیل می‌شود. در این جا نمی‌توانیم وارد بحث کاملی راجع به این سؤالات شویم، ولی اگر توصیفی شهودی از چند مطلب اساسی ارائه دهیم، ممکن است این موضوعها روشن شوند.

به‌خاطر سهولت، فرض کنیم که معادلهٔ (۹) را بتوان نسبت به dy/dx حل کرد.

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \qquad (۱۰)$$

همچنین فرض می‌کنیم که $f(x, y)$ تابع پیوسته‌ای، در درون مربع مستطیل R واقع در صفحهٔ xy، باشد. معنای هندسی یك جواب (۱۰) را می‌توان به بهترین وجه به شرح زیر درك کرد (شکل ۱). چنانچه $P_0=(x_0, y_0)$ نقطه‌ای در R باشد، آنگاه عدد

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_0}=f(x_0, y_0)$$

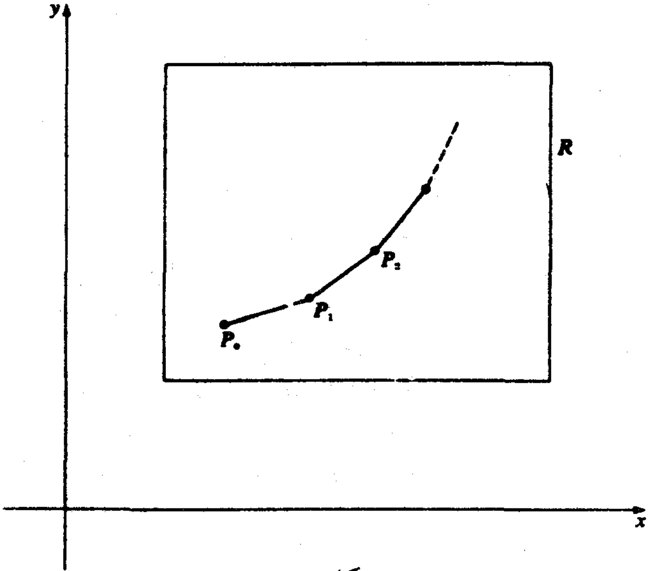
راستایی را در P_0 معین می‌کند. حال فرض می‌کنیم $P_1=(x_1, y_1)$ نقطه‌ای نزدیك به P_0، در این راستا، باشد و از رابطهٔ زیر برای تعیین راستایی جدید در P_1 استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1}=f(x_1, y_1)$$

سپس فرض می‌کنیم $P_2=(x_2, y_2)$ نقطه‌ای نزدیك به P_1، در این راستای جدید باشد و از عدد

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_2}=f(x_2, y_2)$$

استفاده می‌کنیم تا باز جهت دیگری را در P_2 تعیین نماییم. اگر این روند را ادامه دهیم، خط شکسته‌ای به دست خواهیم آورد که نقاط P_0 و P_1 و P_2 و ... درطول آن همانند مهره‌هایی پراکنده شده‌اند؛ حال اگر تصور کنیم که این نقاط متوالی به‌همدیگر نزدیك و تعدادشان زیاد شود، خط شکسته به‌منحنی همواری میل می‌کند که از نقطهٔ اولیه P_0 می‌گذرد. این منحنی یك جواب $y=y(x)$ معادلهٔ (۱۰) است، زیرا درهر نقطهٔ (x, y) آن، شیب منحنی به‌وسیلهٔ $f(x, y)$ تعیین می‌گردد واین دقیقاً همان شرطی است که درمعادلهٔ دیفرانسیل خواسته شده است. اگر این عمل را از نقطهٔ اولیهٔ دیگری شروع کنیم، آنگاه عموماً منحنی (یا جواب) متفاوتی به‌دست خواهیم آورد. بنابراین جوابهای معادلهٔ (۱۰) دسته‌ای منحنی تشکیل



شکل ۱

خواهند داد که به منحنیهای انتگرال[1] موسوم‌اند. بعلاوه این حدس، معقول به‌نظر می‌رسد که از هرنقطه در R تنها یك منحنی انتگرال (۱۰) می‌گذرد. این بحث تنها به‌منظور آماده‌ساختن زمینه برای بیان دقیق‌تر، پیش کشیده شده است.

قضیهٔ الف. (قضیهٔ پیکار[2]) اگر توابع $f(x, y)$ و $\partial f/\partial y$ در مستطیل بستهٔ R پیوسته باشند، از هرنقطهٔ (x_0, y_0)، واقع در درون R، یك منحنی انتگرال منحصر به‌فرد معادلهٔ $dy/dx=f(x, y)$ می‌گذرد.

---

۱. گاهی جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل، انتگرالهای معادله نامیده می‌شوند، چراکه مسئلهٔ یافتن آنها، کم‌وبیش، تعمیمی از مسئلهٔ عادی انتگرال‌گیری است.

2. Picard

چنانچه دراین قضیه یك مقدار ثابت $x_{\circ}$ را درنظر بگیریم، آنگاه منحنی انتگرالی که ازنقطهٔ $(x_{\circ}, y_{\circ})$ می‌گذرد با انتخاب $y_{\circ}$ کاملا معین می‌شود. بهاین طریق ملاحظه می‌کنیم که منحنیهای انتگرال (۱۰) آنچه راکه دسته‌ای از منحنیهای تك پارامتری نامیده می‌شود تشکیل می‌دهند. معادلهٔ این دسته منحنی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$y = y(x, c) \tag{۱۱}$$

که درآن انتخاب مقادیرمختلف برای پارامتر c، منحنیهای متفاوتی ازدسته منحنی را به‌دست می‌دهد. منحنی انتگرالی که از $(x_{\circ}, y_{\circ})$ می‌گذرد متناظراست با مقداری از c که برای آن $y_{\circ} = y(x_{\circ}, c)$. اگر این‌عدد را با $c_{\circ}$ نشان دهیم، آنگاه رابطهٔ (۱۱) را جواب عمومی معادلهٔ (۱۰) می‌خوانند، و $y = y(x, c_{\circ})$ جواب خصوصی صادق درشرط اولیهٔ

$$y = y_{\circ} \qquad \text{وقتی} \qquad x = x_{\circ}$$

خوانده می‌شود.

ویژگی اساسی جواب عمومی (۱۱) آن است که ثابت c موجود درآن را می‌توان طوری انتخاب کرد که منحنی انتگرال ازهرنقطهٔ مفروض درمستطیل مورد نظر بگذرد.

قضیهٔ پیکار درفصل یازدهم اثبات می‌شود. این اثبات کاملا پیچیده است و احتمالا بهتر است آن را تا وقتی که خواننده تجربهٔ قابل ملاحظه‌ای درقسمتهای ساده‌تر موضوع کسب نماید، به‌تعویق‌اندازیم. خود قضیه را می‌توان باتضعیف فرضهایش درجهات مختلف تقویت کرد ونیز می‌توان طوری‌آن‌را تعمیم داد که درمورد معادلات مرتبهٔ nام قابل حل نسبت به مشتق مرتبهٔ nام، به‌کار رود. توصیف مفصل‌این نتایج خارج از بحث فعلی است وما درحال حاضر به بررسی کلی مفاهیم اساسی قناعت می‌کنیم. دربقیهٔ این فصل بعضی از مواردکاربرد علمی معادلات دیفرانسیل را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تمرین

۱ـ تحقیق کنیدکه توابع (ضمنی یا صریح) زیر، جوابهای معادلات دیفرانسیل مربوط هستند:

الف)	$y = x^{۲} + c$	$y' = ۲x$
ب)	$y = cx^{۲}$	$xy' = ۲y$
ج)	$y^{۲} = e^{۲x} + c$	$yy' = e^{۲x}$
د)	$y = ce^{kx}$	$y' = ky$
هـ)	$y = c_{۱} \sin ۲x + c_{۲} \cos ۲x$	$y'' + ۴y = ۰$
و)	$y = c_{۱}e^{۲x} + c_{۲}e^{-۲x}$	$y'' - ۴y = ۰$
ز)	$y = c_{۱} \sinh ۲x + c_{۲} \cosh ۲x$	$y'' - ۴y = ۰$

ح) $y=\sin^{-1} xy$ $\quad$ $xy'+y=y'\sqrt{1-x^2y^2}$

ط) $y=x\tan x$ $\quad$ $xy'=y+x^2+y^2$

ی) $x^2=2y^2\log y$ $\quad$ $y'=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

ک) $y^2=x^2-cx$ $\quad$ $2xyy'=x^2+y^2$

ل) $y=c^2+c/x$ $\quad$ $y+xy'=x^4(y')^2$

م) $y=ce^{y/x}$ $\quad$ $y'=y^2/(xy-x^2)$

ن) $y+\sin y=x$ $\quad$ $(y\cos y-\sin y+x)y'=y$

س) $x+y=\tan^{-1} y$ $\quad$ $1+y^2+y^2y'=0$

۲ـ جواب عمومی هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید:

الف) $y'=e^{3x}-x$ $\qquad$ ب) $xy'=1$

ج) $y'=xe^{x^2}$ $\qquad$ د) $y'=\sin^{-1} x$

۳ـ برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر، جوابی خصوصی بیابیدکه شرط اولیه داده‌شده را ارضا کند:

الف) $y'=xe^x$ ، $y=3$ وقتی $x=1$

ب) $y'=2\sin x\cos x$ ، $y=1$ وقتی $x=0$

ج) $y'=\log x$ ، $y=0$ وقتی $x=e$

۳. دسته‌های منحنی. مسیرهای متعامد

دیدیم که جواب عمومی هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول معمولا شامل یك ثابت اختیاری موسوم به «پارامتر» است. وقتی مقادیر مختلفی به‌این پارامتر نسبت داده می‌شود، یك دسته منحنی تك پارامتری به دست می‌آوریم. هر یك از این منحنیها یك جواب خصوصی ، یا منحنی انتگرال، معادلهٔ دیفرانسیل مفروض است وهمهٔ آنها باهم جواب عمومی‌آن را تشکیل می‌دهند.

برعکس،همان‌طور که انتظار می‌رود، منحنیهای هردسته منحنی تك‌پارامتری، منحنیهای انتگرال یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول هستند. چنانچه دسته‌منحنی به‌صورت زیر باشد:

$$f(x, y, c)=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ دیفرانسیلش باانجام مراحل زیر به‌دست می‌آید. نخست از (۱) به‌طور ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم تا رابطه‌ای به‌صورت زیر به دست‌آید:

$$g\left(x , y , \frac{dy}{dx}, c\right)=0 \qquad (۲)$$

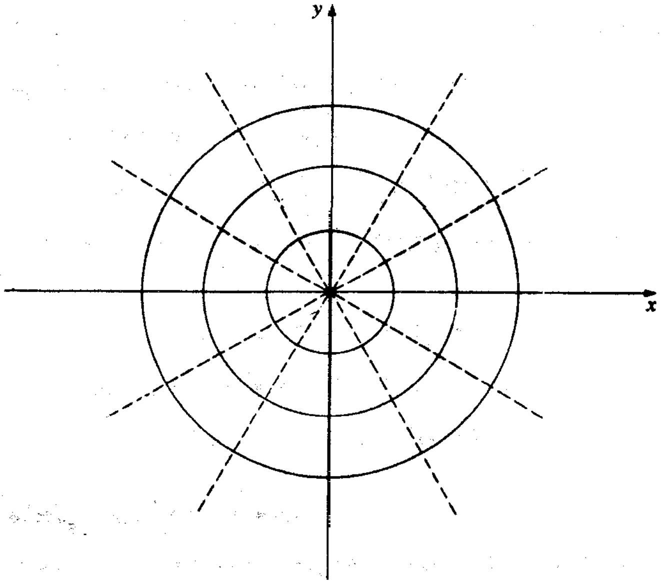
سپس بین روابط (۱) و (۲) پارامتر c را حذف می کنیم تا رابطهٔ

$$F\left(x , y , \frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (۳)$$

که همان معادلهٔ دیفرانسیل مطلوب است، به‌دست‌آید. به‌عنوان مثال، رابطهٔ

$$x^2+y^2=c^2 \qquad (۴)$$

معادلهٔ دستهٔ تمام دوایری است که مرکز آنها مبدأ مختصات می‌باشد (شکل۲).



شکل ۲

بامشتق گیری نسبت به x ، این رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

وازآنجایی که c در رابطهٔ اخیر وجود ندارد، نیازی به‌حذف آن نیست و

$$x+y\frac{dy}{dx}=0 \qquad (۵)$$

معادلهٔ دیفرانسیل دسته دوایرمفروض است. همین‌طور

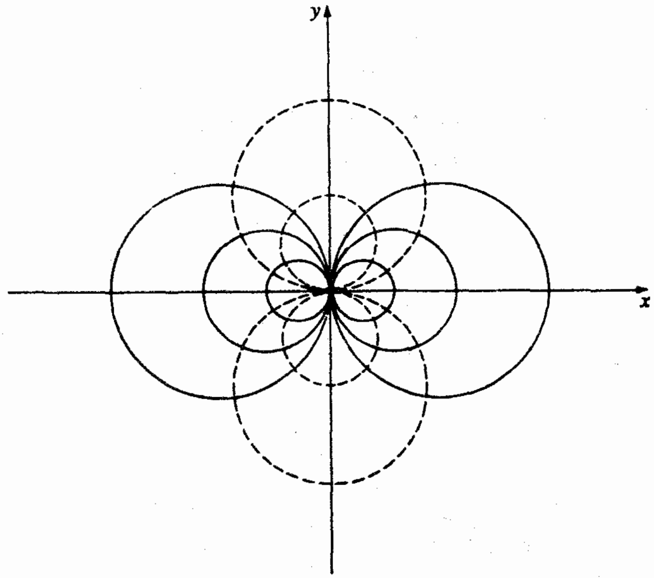
$$x^2+y^2=2cx \tag{6}$$

معادلهٔ دستهٔ تمام دوایری است که در مبدأ مختصات برمحور y مماس هستند، (شکل ۳). وقتی از طرفین این معادله نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2c$$

یا

$$x+y\frac{dy}{dx}=c \tag{7}$$



شکل ۳

ازآنجاکه پارامتر c هنوز در(۷) وجود دارد، لازم است که آن‌را باترکیب روابط (۶) و (۷) حذف کنیم. این عمل نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy} \tag{8}$$

واین معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنیهای(۶) است.

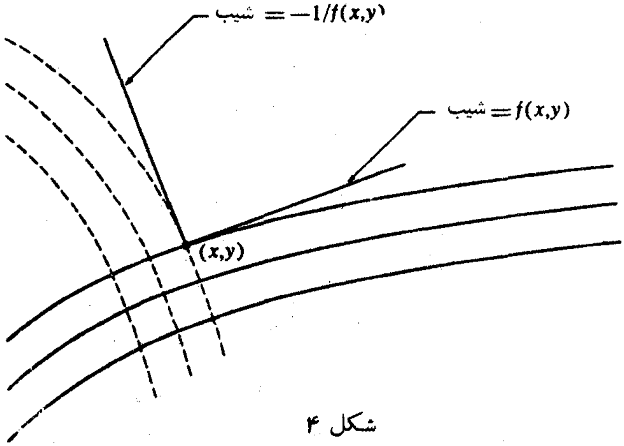
به‌عنوان یك کاربرد جالب این عملیات مسئلهٔ یافتن مسیرهای متعامد را بررسی می‌کنیم. برای‌آنکه توضیح داده باشیم که این مسئله چیست، مشاهده می‌کنیم که دسته دوایر نمایش‌داده شده به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۴) و دسته خطوط مستقیمی که از مبدأ مختصات می‌گذرند،

یعنی $y=mx$ (خطوط نقطه چین شکل۲) خاصیت زیر را دارند: هرمنحنی درهریك از دسته‌ها برتمام منحنیهای دستهٔ دیگرعمود است، هرگاه دو دسته منحنی بدین طریق به هم‌دیگر مربوط شوند، هریك را دستهٔ مسیرهای متعامد دستهٔ دیگرمی‌نامند. مسیرهای متعامد درهندسهٔ منحنیهای مسطح ونیز دربعضی قسمتهای ریاضیات‌کار بسته مورد توجه هستند. برای مثال، چنانچه جریان الکتریکی دریك ورقهٔ مسطح هادی جاری شود، خطوط هم‌پتانسیل، مسیرهای متعامد خطوط جریان هستند.

درمثال مربوط به دوایری‌که مرکزشان مبدأ است، ازلحاظ هندسی واضح است که مسیرهای متعامد خطوط مستقیمی هستند که از مبدأ می‌گذرند و برعکس. ولی برای اینکه از عهدهٔ تشریح حالات پیچیده‌تر برآییم، به‌یك روش تحلیلی برای یافتن مسیرهای متعامد نیاز داریم. فرض کنید که

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (۹)$$

معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنیهایی باشد که باخط پر درشکل (۴) نشان داده شده‌اند. این منحنیها این گونه مشخص می‌شوندکه شیب هریك از آنها در هرنقطهٔ (x,y) واقع برآن منحنی برابر با $f(x,y)$ است.



شکل ۴

مسیر متعامد نقطه‌چینی که از همان نقطهٔ (x,y) می‌گذرد، برمنحنی اول عمود است وشیب آن منفی عکس شیب اولی است. بنابراین، در امتداد هر مسیر متعامد، داریم $dy/dx=-1/f(x,y)$ ویا

$$-\frac{dx}{dy}=f(x,y) \qquad (۱۰)$$

بنابراین روش ما برای یافتن مسیرهای متعامد یك دسته منحنی مفروض به قرار زیر است: ابتدا، معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنیها را می‌یابیم وسپس $-dx/dy$ را به‌جای dy/dx

درآن می گذاریم تا معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای متعامد بـه‌دست آید وسرانجام این معادلـهٔ دیفرانسیل جدید را حل می کنیم.

با کاربست روش مذکور درمورد دسته دوایر رابطهٔ(۴)، نتیجه می‌شودکه معادلهٔ

$$x+y\left(-\frac{dx}{dy}\right)=0$$

یا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{11}$$

معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای متعامد می‌باشد. حـال می‌توان متغیرها را در (۱۱) جدا نمود ونتیجه گرفت

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

انتگرال‌گیری مستقیم از این رابطه چنین نتیجه می‌دهد که

$$\log y=\log x+\log c$$

یا

$$y=cx$$

معادلهٔ مسیرهای‌متعامد است.

اغلب مناسب است که دسته منحنیهای داده شده را برحسب مختصات قطبی بیان کنیم. دراین‌حالت از این موضوع استفاده می کنیم که اگر ψ زاویهٔ بین شعاع حامل وخط‌مماس باشد، آنگاه $\tan\psi=rd\theta/dr$ (شکل ۵). بااستناد به بحث بالا، برای یافتن‌معادلهٔ‌دیفرانسیل مسیرهای متعامد در معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنیهـای داده شده بـه‌جای ایـن عبارت، منفی عکس آن یعنی $-dr/rd\theta$ را می گـذاریم. بـه‌عنوان مثالی برای روشن‌کردن ارزش این تکنیك، مسیرهای متعامد دسته دوایر رابطهٔ (۶) را پیدا می کنیم. چنانچه از مختصات قائم استفاده کنیم از رابطهٔ (۸) نتیجه می‌شود که‌معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای متعامدعبارت است‌از

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2} \tag{12}$$

متأسفانه دراین معادله متغیرها را نمی‌توان از یکدیگر جدا نمود و لذا بدون آگاهـی از تکنیك‌های بیشتری درمورد حل معادلات دیفرانسیل نمی‌توانیم قـدمی فراتر بگذاریم. ولی اگر از مختصات قطبی استفاده کنیم، معادلهٔ دسته منحنیها را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$r=2c\cos\theta \tag{13}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{dr}{d\theta} = -2c \sin\theta \qquad (۱۴)$$

و پس‌از حذف c بین (۱۳) و (۱۴) به‌این‌نتیجه می‌رسیم که

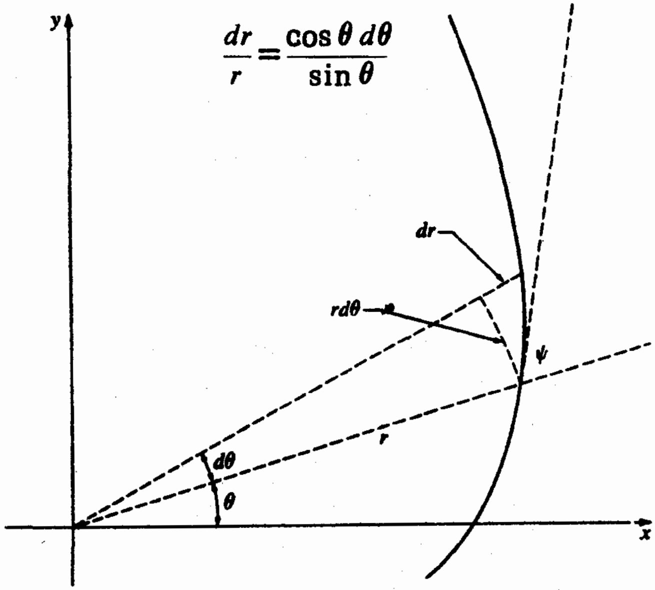
$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی داده شده است. درنتیجه

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای متعامد آن است. دراین‌حالت متغیرها را می‌توان جدا کرد و رابطهٔ زیر را به‌دست‌آورد:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sin\theta}$$



شکل ۵

پس‌از انتگرال گیری مشاهده می‌کنیم که معادلهٔ

$$\log r = \log(\sin\theta) + \log 2c$$

یا

$$r = 2c \sin\theta \qquad (۱۵)$$

معادلهٔ مسیرهای متعامد است. توجه کنید که رابطهٔ (۱۵) معادلهٔ دستهٔ تمامی دوایری است که درمبدأ مختصات برمحور xها مماس‌اند (به منحنیهای نقطه‌چین شکل۳ مراجعه شود).

درفصل ۲ تعدادی از شیوه‌های کاملتر حل معادلات مرتبهٔ اول را بررسی می کنیم. از آنجایی که توجه فعلی ما بیشتر به‌کاربردها مبذول می‌شود تا به‌روشهای صوری، تمامی‌مسائل داده شده دراین فصل به‌وسیلهٔ روش‌جدا کردن متغیرها، یعنی به‌همان طریقی که دربالا ملاحظه کردیم، حل می‌شوند.

تمرین

۱ــ هریك از دسته منحنیهای زیر را رسم کنید، مسیرهای متعامد مربوطه را بیابید و آنها را نیز به‌شکل اضافه کنید:

الف) $xy=c$ ج) $r=c(1+\cos\theta)$

ب) $y=cx^2$ د) $y=ce^x$

۲ــ دسته سهمیهای $y^2=4c(x+c)$ را که محور آنها، محور xها و کانون آنهـا ، مبدأ مختصات است رسم کنید و معادلهٔ دیفرانسیل این دسته منحنی را بیابید. نشان دهیدکـه این معادلهٔ دیفرانسیل وقتی که dy/dx با $-dx/dy$ جایگزین شود تغییر نمی‌کند. از این موضوع چه‌نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۳ــ منحنیهایی را بیابیدکه درهریك از شرایط هندسی زیر صدق کنند:

الف) قسمتی‌ازمماس برمنحنی که به محورهای مختصات محدود شده است، توسط نقطهٔ تماس به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

ب) طول تصویر قسمتی از خط عمود برمنحنی واقع بین نقطهٔ (x , y) و محورxها ، برروی محور xها برابر با واحد باشد.

ج) طول تصویر قسمتی از خط مماس برمنحنی واقع بین نقطهٔ (x , y) و محورxهـا، برروی محور xها برابر باواحد باشد.

د) زاویهٔ قطبی θ و زاویـهٔ بین شعاع حامل و خط مماس برمنحنی (زاویهٔ ψ) بـرابر باشند یعنی، $\psi=\theta$.

ه) زاویهٔ ψ بین شعاع ومماس، ثابت باشد.

۴ــ یك منحنی از مبدأ درصفحهٔ xy شروع می‌شود و در ربع اول صفحهٔ مختصات گسترش می‌یابد. مساحت سطح زیر منحنی از نقطهٔ $(0 , 0)$ تا نقطهٔ (x , y) یك سوم مساحت سطح مربع مستطیلی است که دو نقطهٔ یاد شده دو رأس متقابل آن هستند. معادلهٔ ایـن منحنی را بیابید.

۴. رشد، تلاشی و واکنشهای شیمیایی

اگر در مولکولی این گرایش وجود داشته باشد که خود به‌خود به مولکولهای کوچکتری تجزیه شود وآهنگ این تلاشی (تجزیه) از حضور مواد دیگر تأثیر نپذیرد، طبیعی است که

انتظار داشته باشیم تعداد این نوع مولکولها که در واحد زمان متلاشی می‌شوند متناسب با مقدار کل مولکولهای موجود باشد. این‌گونه واکنشهای شیمیایی را واکنشهای مرتبهٔ اول می‌نامند.

به‌عنوان مثال فرض کنید که درآغاز کار x_0 گرم از ماده موجود باشد و دریك واکنش مرتبهٔاول متلاشی‌شود. اگر در زمان بعدی t ، جرم ماده x گرم باشد.آنگاه اصل فوق‌الذکر معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به‌دست می‌دهد.

$$-\frac{dx}{dt}=kx \quad , \quad k>0 \qquad (1)$$

[از آنجایی که dx/dt آهنگ رشد x می‌باشد، $-dx/dt$ آهنگ تلاشی است و رابطهٔ (۱) چنین بیان می‌کند که آهنگ تلاشی x متناسب با x است.] چنانچه متغیرهای رابطهٔ (۱) را جداکنیم، حاصل چنین می‌شود:

$$\frac{dx}{x}=-kdt$$

که بعداز انتگرال گیری به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\log x=-kt+c$$

اعمال شرط اولیهٔ

$$t=0 \text{ وقتی } x=x_0 \qquad (2)$$

در رابطهٔ اخیر نتیجه می‌دهد $c=\log x_0$ ، پس

$$\log x=-kt+\log x_0 \ , \ \log(x/x_0)=-kt \ , \ x/x_0=e^{-kt} \ ,$$

و

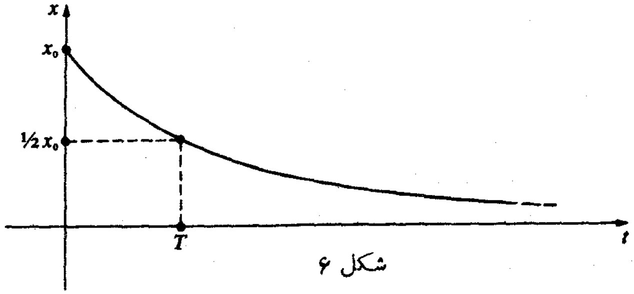
$$x=x_0e^{-kt} \qquad (3)$$

بنابراین این تابع جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۱) است که درشرط اولیهٔ (۲) صدق می‌کند. نمودار تابع (۳) درشکل (۶) رسم شده است. ثـابت مثبت k ، ثـابت آهنگ تغییر نامیده می‌شود، زیرا مقدار آن نشان‌دهندهٔ آهنگ پیشرفت این واکنش است.

تعداد خیلی کمی از واکنشهای شیمیایی مـرتبهٔ اول شناخته شده‌انـد کـه مهمترین آنها تلاشی رادیو اکتیو است.

مناسب است کـه آهنگ تلاشی یك عنصر رادیـواکتیو را بـرحسب نیم عمرش بیان کنیم، که عبارت است از زمان لازم بـرای آنکه مقدار معینی از عنصر مـوردنظر به‌نصف تقلیل یابد. اگر درفرمول(۳) $x_0/2$ را به‌جای x بگذاریم، معادلهٔ زیر را به‌دست خواهیم آورد

$$\frac{x_0}{2}=x_0e^{-kt}$$



شکل ۶

که درآن T نیم‌عمر عنصر می‌باشد، بنابراین

$$kT = \log ۲$$

بامعلوم بودن یکی ازمقادیر k یا T (ازطریق مشاهده یا تجربه)، به‌کمک رابطهٔ بالا، می‌توان دیگری را تعیین کرد.

این ایده‌ها اساس ابزار علمی نسبتاً جدیدی هستند که در زمین‌شناسی و باستان‌شناسی از اهمیت خاصی برخوردار است. اصولا ازعناصر رادیواکتیوی که در طبیعت یافت می‌شوند (با نیم‌عمر شناخته‌شده) می‌توان برای تعیین تاریخ وقایعی که از چندهزار تا چندمیلیاردسال قبل اتفاق افتاده است استفاده کرد. مثلا ایزوتوپ معمولی اورانیوم با نیم‌عمر ۴٫۵ میلیارد سال، طی چندمرحله به‌هلیوم ویك ایزوتوپ سرب متلاشی می‌شود. وقتی که یك صخرهٔ شامل اورانیوم به حالت گداخته باشد، نظیر گدازه‌ای که از دهانهٔ کوه آتشفشان بیرون می‌ریزد، سرب حاصله از این روندتلاشی، براثر جریانهای موجود در گدازه پراکنده می‌شود، اما پس‌از آن که صخره به‌صورت جامد درآمد، سرب درجای‌خود سخت می‌شود و در کنار اورانیوم مادر (اولیه) به‌طور پیوسته انباشته می‌گردد. تجزیهٔ قطعه‌ای ازگرانیت می‌تواند نسبت سرب به اورانیوم را تعیین کند و این نسبت، تخمین مدت زمان سپری شده از لحظهٔ بحرانی (که گرانیت به صورت بلور درآمده است) را امکان‌پذیر می‌سازد. برای تعیین عمرچندین‌روش که درآنها تلاشی توریم وایزوتوپهای‌اورانیوم به ایزوتوپهای مختلف‌سرب، به‌کارمی‌روندمتداول‌است. روش‌دیگرمبتنی برتلاشی پتاسیم به‌آرگون، بانیم عمر۱٫۳ میلیارد سال است، اما روش‌دیگری که برای تعیین عمر قدیمی‌ترین صخره‌ها ارجحیت دارد، روشی است که مبتنی برتلاشی روبیدیوم به‌استرانسیوم، بانیم عمر ۵۰میلیارد سال است. این بررسیها پیچیده‌اند و نسبت به‌انواع بسیاری از خطاها حساس هستند ولیکن اغلب می‌توان ازیکی برای تحقیق درستی نتیجهٔ حاصل از دیگری استفاده نمود و به‌کمک آنها می‌توان تاریخهای قابل‌اطمینانی برای بسیاری از حوادث تاریخ زمین‌شناسی که باتشکیل صخره‌های آذرین مرتبطند، بدست آورد. صخره‌های بادهها میلیون سال عمر، کاملا جوان هستند. حوزهٔ عمر صدها میلیون‌سال امری عادی است و کهنسالترین صخره‌هایی که تابه‌حال کشف شده‌اند عمرشان به‌بیش از ۳میلیاردسال می‌رسد. البته این حدپایینی برای‌عمر پوستهٔ‌زمین وبنابراین برای خود زمین‌است. براساس بررسیهای دیگری که از انواع گوناگون اطلاعات‌نجومی، تعیین‌عمر کانیهای موجود درسنگهای آسمانی ونظیرآنها استفاده می‌کند، عمراحتمالی زمین

حدود ۴٫۵ میلیارد سال برآورد شده است[1].

عناصر رادیواکتیو فوق‌الذکر آن‌چنان به‌کندی متلاشی می‌شوند که روشهای تعیین عمر مبتنی برآنها برای تعیین زمان حوادثی که در زمانی نسبتاً جدید اتفاق افتاده است، مناسب نیستند. این شکاف با کشف رادیوکربن توسط ویلارد لیبی[2] در اواخر دهۀ ۱۹۴۰ پر شد. رادیوکربن یك ایزوتوپ رادیواکتیو کربن با نیم‌عمر حدود ۵۶۰۰ سال است. در سال ۱۹۵۰، لیبی و همکارانش تکنیك تاریخ‌گذاری رادیوکربن را تکمیل کردند. این تکنیك تاریخ‌گذاری، ساعتهای زمین‌شناسی کند فوق‌الذکر را تکمیل کرد و امکان تعیین زمان‌حوادث مراحل جدیدتر دوران یخبندان وبعضی حرکتها و فعالیتهای بشر ماقبل‌تاریخ را فراهم آورد. سهم این‌روش در زمین‌شناسی و باستان‌شناسی پلیستوسن (عصرچهارم زمین‌شناسی) قابل توجه بوده است.

به‌طور خلاصه، حقایق و اصول مربوط به‌این‌موضوع، به‌قرار زیرند. رادیوکربن تحت‌تأثیرعمل نوترونهای اشعۀ کیهانی بر ازت، درلایه‌های بالایی‌جو تولید می‌شود. این رادیوکربن به‌دی‌اکسیدکربن اکسیده می‌شود. این‌دی‌اکسیدکربن به‌نوبۀ‌خود به‌وسیلۀ باد، با دی اکسیدکربن غیر رادیواکتیو موجود مخلوط می‌شود. از آنجا که رادیوکربن پیوسته ایجاد می‌شود و به طور دائم نیز به‌ازت تجزیه می‌شود، نسبت‌آن به‌کربن معمولی درجو، دیرزمانی است که به‌حالت تعادل رسیده است. همگی نباتات هوازی و همچنین حیواناتی که ازاین‌گیاهان‌تغذیه می‌کنند، این‌قسم رادیوکربن را به‌بافتهای‌خود وارد می‌کنند. مادامی که یك گیاه یاحیوان زنده است، نسبت این رادیوکربن ثابت باقی می‌ماند، لیکن وقتی‌آن گیاه یاحیوان می‌میرد، از جذب رادیوکربن جدید باز می‌ایستد، در حالی‌که رادیوکربن موجود در هنگام مرگ، روند پایدار تلاشی را ادامه می‌دهد. بنابراین، اگر یك‌قطعه چوب سالخورده نیمی از رادیواکتیویتۀ یك‌درخت زنده‌را دارا باشد، عمرش ۵۶۰۰ سال و اگر فقط یك‌چهارم‌آن را دارا باشد، عمرش ۱۱۲۰۰ سال است. این اصل روشی برای تاریخ‌گذاری هرجسم قدیمی که منشأ آلی داشته باشد، مثل چوب، زغال‌چوب، الیاف گیاهی، گوشت، پوست، استخوان یاشاخ، به‌دست می‌دهد. اعتبار این‌روش با به‌کاربردن‌آن درمورد مغز چوب درختان «غول» کالیفورنیا که باتوجه به دوایر رشدشان، عمری بین ۳۰۰۰ تا ۴۰۰۰ سال‌دارند ودرمورد وسایل قبورمصری که عمرشان مستقلاًشناخته شده، تحقیق گردیده است. دراین زمینه، اشکالاتی عملی وجود دارد، ولیکن این روش‌به‌شرط‌آنکه فاصلۀ زمانی موردنظر زیاد نباشد (کمتر از ۵۰۰۰۰سال)، از دقت قابل‌ملاحظه‌ای برخوردار است.

تاریخ‌گذاری به‌طریق رادیوکربن در مورد هزاران نمونه به‌کار بسته شده است و دهها آزمایشگاه این‌نوع کارهارا انجام می‌دهند. از جالب‌ترین مواردتخمین عمر، چندنمونۀ زیر را می‌توان نام برد: لفاف کتانی‌کتاب اشعیای‌نبی از طومارهای بحرالمیت که اخیراً

---

۱. برای بحث کامل پیرامون این موضوع و نیز بسیاری روشهای دیگر و نتایج حاصل از علم زمین‌شناسی رجوع کنید به

F.E. Zeuner, «Dating the Past.» 4th ed. Methuen, London, 1958.

2. Willard Libby

درغاری درفلسطین یافت شده و تصور شده است که مربوط به‌قرن اول یا دوم قبل از میلاد مسیح باشد، ۲۰۰±۱۹۱۷ سال؛ زغال یافته شده در غار لاسکو[1] درجنوب فرانسه، که دارای نقاشیهای قابل توجهی از دوران ماقبل تاریخ می باشد، ۹۰۰±۱۵۵۱۶ سال؛ زغال مربوط به‌آثار پیش از تاریخ در استون هنج[2] در جنوب انگلستان، ۲۷۵±۳۷۹۸ سال، زغال متعلق به یك درخت سوخته شده در زمان انفجار آتشفشانی که دریاچهٔ کریتر[3] را در اورگون[4] به‌وجود آورد، ۲۵۰±۶۴۵۳ سال؛ زیستگاههای انسان باستان درسراسر نیمکرهٔ غربی با استفاده از قطعات زغال چوب، صندلهای الیافی، خرده‌های استخوان سوخته شدهٔ نوعی گاومیش و نظایر اینها، تاریخ‌گذاری شده است. نتایج حاصله حاکی از آن است که انسان درحدود دوران آخرین عصر یخبندان یعنی حدود ۱۱۵۰۰ سال قبل به‌دنیای جدید پانهاد. در آن زمان سطح آب اقیانوسها اساساً پایین‌تر از سطح کنونی بود و بشر آن زمان می توانست مسیر سیبری به‌آلاسکا را از طریق تنگهٔ برینگ[5]، پیاده طی کند.[6]

شاید به نظر برسد که این ایده‌ها ازموضوع معادلات دیفرانسیل نسبتاً دورهستند. ولی عملا متکی برپایهٔ ریاضی عرضه‌شده توسط معادلهٔ (۱) وجواب آن که توسط فرمول (۳) داده شده‌است، می باشند. درمسائل زیر از خواننده خواهیم خواست که شیوه‌های مشابهی را در سؤالات مطروحه در شیمی، زیست‌شناسی و فیزیك به‌کار برد.

تمرین

۱ــ فرض کنید که دومادهٔ شیمیایی به‌صورت محلول بایکدیگر واکنش انجام می‌دهند تا ترکیبی را بسازند. اگر واکنش به‌وسیلهٔ برخورد واندرکنشهای مولکولهای این‌دوماده انجام پذیرد، انتظارمی‌رود که نرخ تشکیل ترکیب، متناسب باتعداد برخوردها درواحد زمان‌باشد، که این به‌نوبهٔ‌خود بامقادیرمواد تبدیل‌نشده متناسب است. هرواکنش‌شیمیایی که به‌این صورت انجام‌شود به‌واکنش مرتبهٔ‌دوم موسوم است وازاین قانون واکنش‌اغلب به‌نام قانون اثرجرم یاد می‌شود. واکنش‌مرتبهٔ دومی را درنظر بگیرید که درآن x گرم از ازترکیب شامل ax گرم ازمادهٔ‌اول و bx گرم ازمادهٔ دوم‌باشد به‌طوری که $a+b=1$. چنانچه در ابتدای‌آزمایش aA گرم ازمادهٔ‌اول و bB گرم ازمادهٔ دوم موجود باشد و در $t=0$ داشته‌باشیم $x=0$، مطلوب است تعیین x به‌صورت تابعی از t.

۲ــ فرض کنید که در زمان $t=0$ تعداد x_0 باکتری دریك‌محلول غذایی گذاشته شده باشند

---

1. Lascaux 2. Stonehenge 3. Crater 4. Oregon
5. Bering Straits

۶. لیبی جایزهٔ نوبل سال ۱۹۶۰ را در شیمی به خاطر کاری‌که در بالا شرح دادیم از آن خود ساخت. شرح خود او ازاین روش همراه با دشواریها ونتایج آن را می‌توان درکتاب وی به نام «Radiocarbon Dating», 2nd. ed. University of Chicago Press, 1955» یافت. همچنین به‌کتاب
G.C. Baldwin, «America's Buried Past» Putnam, New York, 1962
رجوع کنید.

و x تعداد باکتریها درزمان t باشد. چنانچه غذا ومحیط زیست نامحدود باشد ودر نتیجه، تعداد باکتریها درهر لحظه باآهنگی متناسب با تعداد باکتریها در آن لحظه، افزایش یابد، x را به‌صورت تابعی از t به‌دست آورید.

۳ـ اگر درمسئلهٔ ۲ ، محیط‌زیست محدود باشد و موادغذایی باکتریها باآهنگ ثابتی تأمین شود، آنگاه رقابتی برسر تأمین‌غذا ومحیط‌زیست به‌میان‌خواهدآمد، به‌طوری‌که سرانجام تعداد باکتریها درسطح ثابت x_1 تثبیت‌خواهدشد. به‌فرض آنکه تحت‌این‌شرایط آهنگ‌رشد تعداد باکتریهاهم با x وهم با $x_1 - x$ متناسب باشد، xرا به‌صورت تابعی از t بیابید.

۴ـ فرض‌کنید که فشار p هوا در ارتفاع h از سطح دریا، متناسب باجرم ستون هوای بالای واحد سطح افقی درآن ارتفاع باشد ونیز این‌که حاصلضرب حجم درفشار برای جرم معینی از هوا در تمام ارتفاعات، ثابت بماند. اگر درسطح دریا $p = p_0$ باشد، p را به‌صورت تابعی از h به‌دست آورید.

۵ـ فرض‌کنید که آهنگ سردشدن یك‌جسم‌داغ، بااختلاف دمای بین‌آن‌جسم و محیط‌اطرافش متناسب باشد. (قانون‌سردشدن نیوتن)[1] جسمی تادمای $110°C$ گرم می‌شود وسپس در هوای $10°C$ قرار می گیرد. پس‌از یك‌ساعت دمای‌آن‌به $60°C$ می‌رسد. چه‌مدت‌دیگر برای سردشدن جسم تادمای $30°C$ لازم است؟

۶ـ مطابق «قانون جذب‌لامبرت» ، درصدنور تابشی جذب‌شده به‌وسیلهٔ لایهٔ نازکی از مادهٔ نیمه‌شفاف، متناسب باضخامت لایه است.[2] اگر نورخورشید باتابش‌قائم برآب‌اقیانوس، درعمق ۳متری به‌یك‌دوم شدت اولیه‌اش کاهش یابد، درچه‌عمقی به‌یك‌شانزدهم شدت اولیه‌اش کاهش خواهد یافت؟ این مسئله را مستقیماً، وهمچنین باتشکیل وحل‌یك‌معادلهٔ دیفرانسیل حل کنید.

۵. سقوط اجسام ودیگر مسائل مربوط به‌آهنگ تغییرات

دراین بخش، مسئلهٔ دینامیکی تعیین حرکت یك‌ذره را روی یك مسیر مفروض و تحت اثر نیروهایی مفروض بررسی می کنیم. در اینجا تنها دو حالت ساده‌را مدنظر قرار می‌دهیم: یکی مسیرقائم که در آن، ذره یا آزادانه تحت‌تأثیر نیروی ثقل تنها، ویا با به‌حساب آوردن نیروی‌مقاومت هوا سقوط می کند؛ و دیگری مسیردایره‌ای که نمونه‌اش حرکت گلولهٔ یك‌آونگ است.

سقوط‌آزاد. مسئلهٔ سقوط‌آزادجسم را دربخش ۱ مورد بحث قراردادیم و به معادلهٔ

---

۱. نیوتن خود این قاعده را برای تخمین دمای یك‌گلولهٔ آهنی سرخ داغ به‌کار برد. در آن زمان اطلاعات موجود درمورد قوانین انتقال حرارت‌آن قدرکم بود، که نتیجه‌گیری او تقریب خامی بیش نبود، اما بیشك بهتر از هیچ بود.

۲. یوهان‌هاینریش‌لامبرت «Johann Heinrich Lambert» منجم، ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی‌ـسویسی و مردی اهل علم بود. او اساساً خودآموخته بود و آثاری دربارهٔ مدارهای ستاره‌های دنباله دار، نظریهٔ نور و ساختن نقشه‌ها انتشار داد. روش تصویر هم مساحت لامبرت را تمامی نقشه‌کشان نجومی می‌شناسند. در بین ریاضیدانان از او به‌عنوان اولین کسی‌که گنگ بودن π را اثبات نمود، یاد می‌شود.

دیفرانسیل زیر دست یافتیم:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g \tag{1}$$

که درآن، y ارتفاع جسم از یك مکان ثابت است. انتگرال گیری از طرفین رابطهٔ (۱)، معادلهٔ سرعت را به‌دست می‌دهد

$$v = \frac{dy}{dt} = gt + c_1 \tag{2}$$

چون ثابت c_1، بوضوح، مقدار v درلحظهٔ $t = 0$ است، لذا c_1 سرعت اولیه v_0 است و رابطهٔ (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$v = \frac{dy}{dt} = gt + v_0 \tag{3}$$

حاصل انتگرال گیری ازاین رابطه چنین می‌شود:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + c_2$$

ثابت c_2 مقدار y در لحظهٔ $t = 0$ و یا موضع اولیهٔ y_0 است. بنابراین در نهایت چنین به‌دست می‌آوریم

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \tag{4}$$

که جواب عمومی‌معادلهٔ (۱) می‌باشد. اگرجسم سقوط را ازحال سکون و در نقطهٔ $y = 0$ شروع کرده باشد، در نتیجه $v_0 = y_0 = 0$ است و روابط (۳) و (۴) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$v = gt \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{2} g t^2$$

حذف t بین این دو رابطه معادلهٔ مفید زیر را به‌دست می‌دهد:

$$v = \sqrt{2gy} \tag{5}$$

این معادله سرعت‌را برحسب‌مسافت سقوط بیان‌می‌کند. از اصل پایستگی انرژی نیزمی‌توان به نتیجهٔ مذکور دست یافت. اصل پایستگی انرژی می‌گوید:

مقدار ثابت = انرژی پتانسیل + انرژی جنبشی

چون در $y = 0$ جسم از حال سکون سقوط می‌کند، این امر که انرژی جنبشی کسب شده برابر با انرژی پتانسیل از دست رفته‌است، نتیجه می‌دهد که

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

وازآن‌رابطهٔ (۵) مستقیماً به دست می‌آید.

سقوط تأخیری. اگرفرض‌کنیم که هوا برجسم سقوط‌کننده نیروی‌مقاومی‌متناسب با سرعت‌آن‌وارد می‌کند، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت چنین‌خواهد شد:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - c\frac{dy}{dt} \tag{۶}$$

که درآن $c = k/m$ [معادلهٔ ۱-(۳) را ببینید]. با گذاشتن v به جای dy/dt ، رابطهٔ اخیر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dv}{dt} = g - cv \tag{۷}$$

متغیرهای این معادله را جدا می‌کنیم وانتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{g - cv} = dt$$

و

$$-\frac{1}{c}\log(g - cv) = t + c_1$$

لذا

$$g - cv = c_2 e^{-ct}$$

از شرط اولیهٔ $v = 0$ درلحظهٔ $t = 0$ ، نتیجه می‌شود $c_2 = g$ ، پس

$$v = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}) \tag{۸}$$

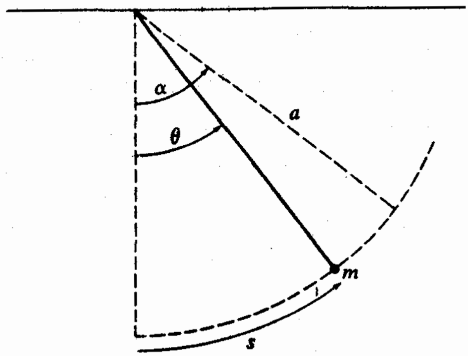
ازآنجاکه c مثبت‌است، وقتی $t \to \infty$ ، داریم $v \to g/c$. این مقدار حدی را سرعت‌نهایی می‌نامند. اگر بخواهیم، می‌توانیم در رابطهٔ (۸) به‌جای v ، dy/dt بگذاریم و دوباره انتگرال‌گیری‌کنیم و y را به‌صورت تابعی از t بیابیم.

حرکت آونگ. آونگی را درنظرمی‌گیریم که شامل گلوله‌ای به جرم m ، متصل به انتهای میله‌ای به طول a وجرم ناچیز است. اگرگلوله چنان به‌یك طرف‌کشیده شودکه با امتدادقائم‌زاویهٔ α بسازد وسپس‌رهاشود (شکل۷)، طبق‌اصل‌پایستگی انرژی‌می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(a\cos\theta - a\cos\alpha) \tag{۹}$$

از آنجا که $s=a\theta$ و $v=ds/dt=a(d\theta/dt)$، این رابطه چنین می‌شود:

$$\frac{1}{2}a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=ga(\cos\theta-\cos\alpha), \tag{10}$$



شکل ۷

حال رابطهٔ اخیر را، نسبت به t حل می‌کنیم، با توجه به اینکه برای مقادیر کوچك t، θ با افزایش t کاهش می‌یابد

$$dt=-\sqrt{\frac{a}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

اگر T دورهٔ تناوب، یعنی مدت زمان لازم برای یك نوسان‌کامل باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{T}{4}=-\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_{\alpha}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

یا

$$T=4\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}} \tag{11}$$

مقدار T دراین فرمول به α بستگی دارد و به‌همین دلیل است که آهنگ نمایش زمـان در ساعتهای آونگی بسته به این که گلولهٔ آونگ زاویهٔ‌کوچکتر یا بزرگتری را بپیماید، تغییر می‌کند. این‌فرمول‌دورهٔ تناوب‌را می‌توان‌به‌صورت‌مناسب‌تری‌مطابق‌زیر بیان‌نمود. ازآنجا که

$$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

و

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

داریم

$$T=2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(\theta/2)}}$$

$$=2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2(\theta/2)}}\ ,\ k=\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (12)$$

حال با نوشتن $\sin(\theta/2)=k\sin\phi$، متغیر را از θ به ϕ تبدیل می‌کنیم، به طوری که وقتی θ از ۰ تا α افزایش می‌یابد، ϕ از ۰ تا $\pi/2$ افزایش یابد و داریم:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=k\cos\phi\,d\phi$$

یا

$$d\theta=\frac{2k\cos\phi\,d\phi}{\cos(\theta/2)}=\frac{2\sqrt{k^2-\sin^2(\theta/2)}\,d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

این رابطه ما را قادر می‌سازد که رابطهٔ (۱۲) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$T=4\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=4\sqrt{\frac{a}{g}}F(k,\pi/2) \qquad (13)$$

که در آن

$$F(k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

تابعی است از k و ϕ و انتگرال بیضوی از نوع اول[1] نامیده می‌شود. انتگرال بیضوی از نوع دوم،

$$E(k,\phi)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi,$$

در رابطه با مسئلهٔ یافتن محیط بیضی (مسئلهٔ ۵ را ببینید) ظاهر می‌شود. این انتگرالهای بیضوی را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی محاسبه نمود. چون این انتگرالها به وفور در کاربردهای مهندسی ظاهرمی‌شوند، غالباً مقادیرشان به عنوان توابع عددی از k و ϕ، در جدولهای ریاضی داده می‌شود.

بحث درمورد مسئلهٔ آونگ تا اینجا روی معادلهٔ مرتبهٔ اول (۱۰) متمرکز بوده است. برای مقاصد خاصی مناسب‌تر است که معادلهٔ مرتبهٔ دومی را اختیار کنیم که از مشتق-

---

۱. مرسوم است‌که درمورد انتگرالهای بیضوی برخلاف روش معمول، حد بالایی ومتغیرظاهری زیر انتگرال را با یك حرف نشان می‌دهند.

گیری (۱۰) نسبت به t حاصل می‌شود:

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta \qquad (14)$$

حال اگر به‌خاطر آوریم که برای مقادیر کوچك θ عبارت $\sin\theta$ تقریباً برابر θ است، از رابطهٔ (۱۴) معادلهٔ تقریبی زیر حاصل می‌شود

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{a}\theta=0 \qquad (15)$$

بعداً خواهیم دید که جواب عمومی معادلهٔ مرتبهٔ دوم مهم زیر

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$$

عبارتست از

$$y=c_1\sin kx+c_2\cos kx$$

بنابراین، از رابطهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\theta=c_1\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t+c_2\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \qquad (16)$$

شرط اولیهٔ $\theta=\alpha$ و $d\theta/dt=0$ در $t=0$ نتیجه می‌دهد که $c_1=0$ و $c_2=\alpha$ و از آنجا رابطهٔ (۱۶) چنین خواهد شد

$$\theta=\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \qquad (17)$$

دورهٔ تناوب این جواب تقریبی معادلهٔ (۱۴)، برابر $2\pi\sqrt{a/g}$ می‌باشد. جالب توجه‌است که این مقدار دقیقاً برابر بامقدار T حاصل از رابطهٔ (۱۳) برای $k=0$ است، که وقتی آونگ تحت زوایای بسیار کوچکی نوسان کند، تقریباً درست است.

تمرین

۱ــ اگرمقاومت هوا نیروی کندکننده‌ای متناسب با مجذور سرعت برجسمی درحال سقوط به‌جرم m وارد کند، رابطهٔ (۷) به‌صورت زیردرخواهد آمد:

$$\frac{dv}{dt}=g-cv^2$$

که درآن $c=k/m$. اگر درلحظهٔ $t=0$ ، $v=0$، v را به‌صورت تابعی از t بیابید. سرعت‌نهایی دراین حالت چقدراست؟

۲ـ یك اژدر، درلحظه‌ای که سوختش به اتمام می‌رسد، با تندی ۱۰۰ کیلومتر درساعت در حال حرکت‌است. چنانچه نیروی مقاومت‌آب‌متناسب با تندی‌اژدر باشد و اگرپس ازطی مسافت‌یك‌کیلومترونیم، تندی حرکت اژدر به ۵۰ کیلومتر درساعت‌کاهش‌یابد، اژدر چه مسافتی را پس ازاتمام سوخت طی خواهدکرد؟[۱]

۳ـ نیروی ثقل وارد برجسمی به‌جرم m درسطح زمین برابر با mg است. ولـی، در فضا، بنابه قانون گرانش نیوتن این نیرو با عکس‌مجذور فاصلهٔ جسم تا مرکز زمین متناسب است. اگر قرارباشد خمپاره‌ای‌که ازسطح زمین، به‌طرف بالا شلیك شده است، به طور نامحدود به‌حرکت خودادامه‌دهد، نشان‌دهیدکه سرعت‌اولیهٔ خمپاره باید حداقل برابربا $\sqrt{2gR}$ باشدکه در آن، R شعاع کـرهٔ زمین (۶۴۰۰کیلومتر) است. این سرعت فرار تقریباً ۱۱ کیلومتر درثانیه و یا حدود ۴۰۰۰۰ کیلومتر درساعت می‌باشد.
(راهنمایی: اگرxفاصلهٔ خمپاره‌تامرکزکرهٔ زمین‌و $v=dx/dt$ سرعت‌آن‌باشد،آنگاه

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}\right.$$

۴ـ در درون زمین، نیروی ثقل‌متناسب بافاصله تامرکزاست. اگر سوراخی ازیك قطب‌زمین به قطب‌دیگرآن حفر شود وسنگی دراین سوراخ رها شود، باچه سرعتی به مرکز زمین خواهد رسید؟

۵ـ نشان دهید که محیط بیضی $x=a\cos\theta$, و $y=b\sin\theta$ ، به فرض $a<b$ ، برابـر است با $4bE(e\,،\,\pi/2)$ که درآن، e خروج از مرکز بیضی است.

۶ـ نشان‌دهیدکه طول‌یك‌کمان ازمنحنی $y=\sin x$ برابر $2\sqrt{2}E(\sqrt{2}/2\,،\,\pi/2)$ است.

۷ـ نشان‌دهیدکه‌طول کل‌منحنی‌پروانه به معادلهٔ $r^2=a^2\cos 2\theta$ برابربا $4aF(\sqrt{2}\,،\,\pi/4)$ می‌باشد.

۶. منحنی کوتاهترین زمان.فرما و برنولی‌ها

تصورکنیدکه نقطهٔ A به وسیله سیم مستقیمی بـه نقطهٔ پایینتر B ، در شکل ۸، متصل باشد و مهره‌ای‌بتواند بدون اصطکاك از A تا B روی‌سیم‌بلغزد. همچنین، می‌توانیم‌حالتی را درنظر بگیریم که در آن سیم به صورت قوسی از دایره درآمده باشد، به طوری‌که حرکت مهره، همانند گلولهٔ آونگ درحال پایین رفتن باشد. درکدام مسیر، مهره‌کمترین زمان را بـرای رسیدن از A به B لازم دارد، درامتداد مسیرمستقیم یا درامتداد مسیر دایره‌ای؟ گالیله براین اعتقاد بودکه مهره در امتداد مسیر دایره‌ای سریعتر پایین خواهدآمد واحتمالا سایـرین نیز اغلب با او همعقیده بودند. سالها بعد، در سال ۱۶۹۶ ، یوهان برنولی[۲] مسئله‌ای عمومیتر

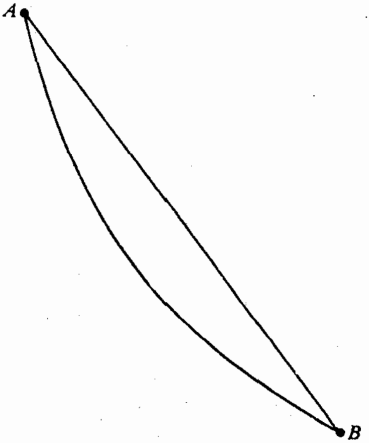
---

۱. دربررسی مسائل دینامیکی با استفاده ازبردارها ، کلمات سرعت و تندی از یکدیگرکاملا متمایز هستند. اما در حالتهای نسبتاً ساده می‌توانیم (و مرسوم است‌که) این دو را کـم و بیش معادل یکدیگر در نظربگیریم.

2. Johann Bernoulli

مطرح نمود. او سیمی را درنظر گرفت که به شکل یك منحنی دلخواه خمیده شده بود و این سؤال را مطرح کرد که در بین بینهایت منحنی ممکن، روی کدام یك مهره درکوتاهترین زمان پایین خواهد آمد؟ این منحنی، موسوم به منحنی کوتاهترین زمان[1] است. هدف این بخش، درك جواب شگفت‌انگیز برنولی برای این مسئلهٔ زیباست.

مطلب را با بررسی مسئله‌ای از مبحث نور که به‌این موضوع نامربوط به‌نظر می‌رسد شروع می کنیم. شکل ۹ (الف) حالتی را نشان می‌دهد که در آن پرتوی نورانی با سرعت v_1 از A به P می‌رود و سپس به محیطی غلیظ‌تر وارد می‌شود وبا سرعت کمتر v_2 از P به B می‌رود.



شکل ۸

زمان کل لازم برای رفتن از A به B، برحسب حروف به‌کار رفته در شکل برابر است با :

$$T=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

اگر فرض کنیم که این پرتو نورانی قادر است برای رفتن از A به B مسیری را اختیار کند که زمان T کمترین‌شود، درآن صورت $dT/dx=0$ و به‌کمك روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

و یا

---

۱. brachistochrone، که ازدوکلمهٔ یونانی brachistos به‌معنای‌کوتاهترین و chronos به معنای زمان تشکیل شده است.

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

این قانون شکست اسنل[1] است که ابتدا به طور تجربی و به صورت ساده‌تر $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2=$(ثابت) کشف شد. این فرض را که نور برای رفتن از نقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر مسیری را می‌پیماید که به‌حداقل زمان نیاز باشد، اصل حداقل زمان‌فرما می‌نامند. این اصل نه‌تنها اساس معقولی برای قانون اسنل به‌دست می‌دهد بلکه می‌توان آن را برای‌یافتن مسیر پرتوی نورانی که از محیطی با چگالی متغیر می‌گذرد نیز به‌کار برد؛ در این حالت عموماً نور به‌جای خط مستقیم، در امتداد منحنی گذر خواهدکرد. درشکل ۹ (ب) یك‌محیط نوری لایه لایه داریم. در هریك از لایه‌ها سرعت نور ثابت است، لیکن سرعت از هرلایه به‌لایهٔ زیرینش‌کاهش می‌یابد. پرتونورانی ضمن عبور ازلایه‌ای به لایه دیگر، بیشتر و بیشتر به طرف امتداد قائم شکسته می‌شود واگرقانون اسنل درمورد مرزهای بین لایه‌ها به‌کاربرده شود، نتیجه می‌شود که :

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}=\frac{\sin\alpha_3}{v_3}=\frac{\sin\alpha_4}{v_4}$$

حال اگر این لایه‌ها نازکتر و در نتیجه تعدادشان بیشترگردد، در حالت حدی سرعت نور با پایین آمدن پرتو، به طور پیوسته کاهش می‌یابد و به این نتیجه می‌رسیم که

$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{مقدارثابت}$$

این‌حالت درشکل ۹ (ج) نشان داده شده‌است وتقریباً همان حالتی است‌که برای‌پرتویی‌از نورخورشید که برزمین‌می‌تابد پیش‌می‌آید، بدین‌ترتیب‌که هنگام پایین‌آمدن درجو، سرعتش با افزایش تراکم محیط‌کاهش می‌یابد.

حال به مسئله برنولی برمی‌گردیم و دستگاه مختصاتی مانند شکل ۱۰ را در نظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم‌که مهره (مانند پرتو نور) می‌تواند مسیری برای فرود انتخاب کندکه لغزیدنش از A به B درکمترین زمان ممکن صورت گیرد. از این بحث نتیجه می‌شودکه

$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{مقدارثابت} \tag{1}$$

بنابراصل‌پایستگی‌انرژی، سرعت مهره درارتفاعی‌مفروض، منحصراً باکاهش‌انرژی‌پتانسیلش در رسیدن به آن ارتفاع معین می‌شود و به‌هیچ وجه به مسیری‌که مهره برای رسیدن به‌سطح

---

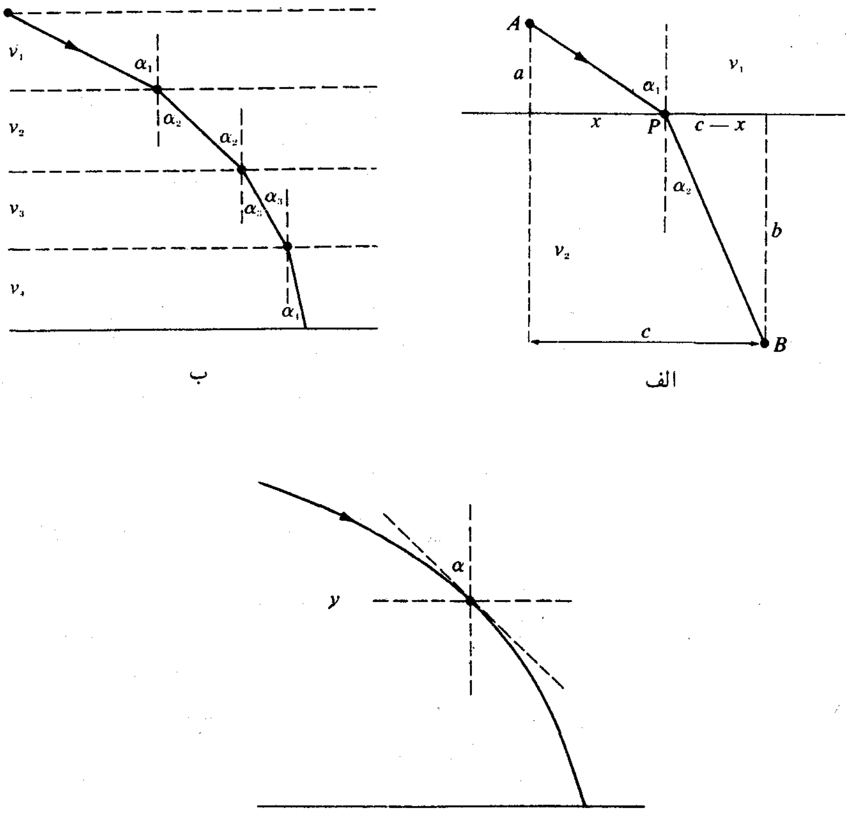
۱. ویلبرورد اسنل Willebrord Snell (۱۵۹۱–۱۶۲۶) منجم و ریاضیدان هلندی بود. درسن ۲۲ سالگی به‌عنوان استاد ریاضی‌درلیدن جانشین پدرش شد. شهرتش بیشتر به‌خاطرکشف قانون شکست نور درسال ۱۶۲۱ است‌که نقش مهمی در پیدایش حساب دیفرانسیل وانتگرال و نظریه موجی نور ایفاکرد.

مزبور طی می‌کند مربوط نیست. ازاین مطلب، همانند بخش قبل ، نتیجه می‌شود که

$$v=\sqrt{۲gy} \qquad (۲)$$

با توجه به شکل هندسی مسئله می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{۱}{\sec\beta}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^{۲}\beta}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+(y')^{۲}}} \qquad (۳)$$

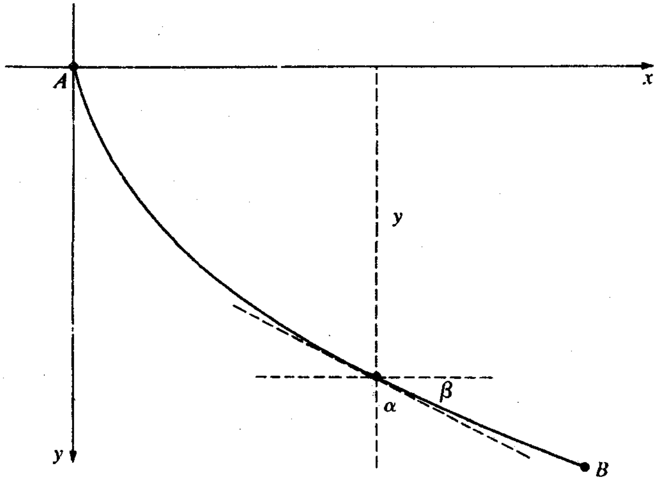


شکل ۹

با ترکیب روابط (۱) و (۲) و (۳) که از نورشناسی، مکانیك، و حساب دیفرانسیل و انتگرال گرفته شده‌اند، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y[۱+(y')^{۲}]=c \qquad (۴)$$

که معادله دیفرانسیل منحنی کوتاهترین زمان محسوب می‌شود.



شکل ۱۰

حال بحث‌خودرا کامل می‌کنیم و باحل معادلهٔ (۴) ، می‌بینیم که منحنی کوتاهترین‌زمان واقعاً چیست. اگر به جای y' عبارت dy/dx را قراردهیم و متغیرها را از هم جدا کنیم، رابطه (۴) به صورت زیــردرمی‌آید :

$$dx=\left(\frac{y}{c-y}\right)^{1/2}dy$$

حال، متغیر جدید ϕ را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم :

$$\left(\frac{y}{c-y}\right)^{1/2}=\tan\phi \qquad (5)$$

به طوری که $y=c\sin^2\phi$ ، $dy=2c\sin\phi\cos\phi\, d\phi$ ، و

$$dx=\tan\phi\, dy=2c\sin^2\phi\, d\phi=c(1-\cos 2\phi)d\phi \; .$$

حال از طرفین این رابطه انتگرال می‌گیریم، نتیجه می‌شود

$$x=\frac{c}{2}(2\phi-\sin 2\phi)+c_1$$

منحنی بــاید از مبدأ مختصات بگــذرد ، لذا به‌کمك رابطهٔ (۵) ، وقتی $\phi=0$ ، داریم $x=y=0$ و درنتیجه $c_1=0$. بنابراین

$$x=\frac{c}{2}(2\phi-\sin 2\phi) \qquad (6)$$

و

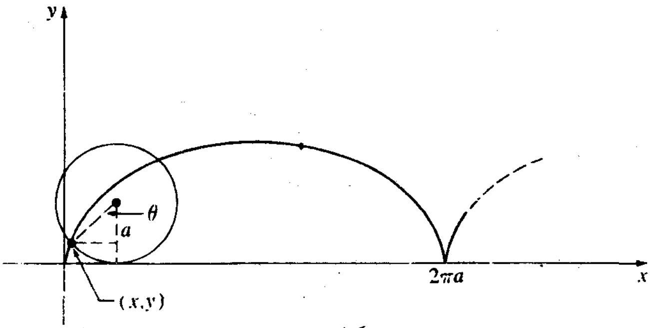
$$y=c\sin^{2}\phi=\frac{c}{2}(1-\cos 2\phi) \tag{7}$$

حال اگرمقادیر $a=c/2$ و $\theta=2\phi$ را در روابط (۶) و (۷) قراردهیم، خواهیم‌داشت:

$$x=a(\theta-\sin\theta) \quad \text{و} \quad y=a(1-\cos\theta) \tag{8}$$

این‌روابط، معادلات پارامتری متعارف منحنی چرخزاد (شکل ۱۱) هستند، که وقتی* دایره‌ای به‌شعاع a ، برمحور x می‌غلتد، نقطه‌ای از محیط دایره، این منحنی را بـه‌وجود می‌آورد. توجه‌می کنیم که مقدار واحدی از a وجود داردکه اولین کمان این‌چرخزاد را وادار به‌عبور از B در شکل ۱۰ می‌کند؛ زیرا اگـر a بتواند از صفر تا بینهایت بـزرگ شود، کمان بزرگتر و بزرگتر می‌شود وسراسر ربع اول صفحه رامی‌پوشاند. واضح است‌که با انتخاب مقدار مناسب برای a ، کمان از نقطهٔ B خواهد گذشت.

شاید خواننده، در حساب دیفـرانسیل و انتگرال مقدماتـی ، با برخی ازخواص هندسی منحنی چرخزاد آشنا شده باشد. مثلا ، طول یک‌کمان چرخزاد، ۴ برابر قطر دایرهٔ مولد ومساحت سطح زیرکمان آن، ۳ برابرمساحت دایرهٔ مزبور است. این منحنی جالب، خواص قابل توجه دیگری، هم ازلحاظ هندسی وهم از جنبهٔ فیزیکی، داردکه برخی ازآنها درمسائل زیر توصیف می‌شوند.



شکل ۱۱

امیدواریم که این‌بحث ضروری درجزئیات، جنبه‌های فکری چشمگیر راه‌حل برنولی برای مسئله‌اش را ازنظر دورنکرده باشد، چـرا کـه راه‌حل مزبور، ازجنبهٔ هنری والایـی برخوردار است. مسئلهٔ منحنی کوتاهترین زمان‌گذشته ازاینکه فی‌نفسه جالب است، بیشتراز این‌نظر اهمیت داردکه منشأ تاریخی حساب تغییرات بـوده است. حساب‌تغییرات شاخـه‌ای نیرومند ازآنالیزاست‌که درزمان‌حاضر عمیقاً به‌درون سادگیهای پنهان‌درقلب جهان فیزیکی نفوذ کرده است. دربارهٔ این‌موضوع درفصل ۹ بحث خواهیم‌کرد، وبـرای یافتن معادلاتی نظیر (۴) که در انواع گسترده‌ای از مسائل مشابه کاربرد دارد، روشی کلی ارائه‌خـواهیم کرد.

یادداشتی دربارهٔ فرما. پیردوفرما[1] (۱۶۶۵–۱۶۰۱) بزرگترین ریاضیدان قرن هفدهم بود، لیکن عدم علاقهٔ وی به انتشار کشفیاتش، تأثیر کار اورا محدود می‌کرد. قسمت‌عمدهٔ کشفیات‌فرما ازنامه‌هایی که او به‌دوستان‌خودنوشته ویادداشتهایی که در حاشیهٔ کتابهایش کرده است، به دست آمده‌اند. شغل او قضاوت و مشاورت پارلمانی شاه در حاکم‌نشین تولوز فرانسه بود. با این حال، کار ذوقی و علاقهٔ شخصی‌اش ریاضیات بود. درسال ۱۶۲۹ هندسهٔ تحلیلی را ابداع نمود ولی چون‌در سال ۱۶۳۷ دکارت نظرات مشابه خودرا دراین‌زمینه سریعاً به‌چاپ رساند، قسمت اعظم افتخار نصیب دکارت‌شد. در این زمان–سیزده‌سال قبل از تولد نیوتن–فرما همچنین روشی برای ترسیم مماس برمنحنیها و یافتن ماکزیمم و می‌نیمم کشف نمود که مقدمات حساب دیفرانسیل‌را تشکیل می‌داد. نیوتن، در نامه‌ای که در سال ۱۹۳۴ یافت‌شد، اعتراف کرده است که بعضی از نظرات اولیهٔ خودرا در این زمینه مستقیماً ازفرما اخذ کرده است. فرما به‌اتفاق پاسکال طی یك سری‌نامه که در سال ۱۶۵۴ نوشته شد، مفاهیم بنیادی نظریهٔ احتمال را به‌وجود آورد. کشف اصل حداقل‌زمان وارتباط این‌اصل باشکست نور، درسال ۱۶۵۷ توسط فرما، نخستین گامی بود که درجهت یك‌نظریهٔ منسجم نورشناسی برداشته شد. ولی، نبوغ فرما درنظریه اعداد به برجسته‌ترین وجهی جلوه گرشد؛ زیرا جای‌تردید است که بصیرت‌او درخواص اعداد صحیح و مثبت، آشنا ولی اسرارآمیز، تاکنون همتایی داشته باشد. ما تعدادی از کشفیات‌بسیار وی دراین زمینه را متذکرمی‌شویم.

۱. قضیهٔ دومجذوری فرما: هرعدد اول به صورت $4n+1$ را می‌توان به‌یك طریق و تنها به‌یك‌طریق، به‌صورت مجموع دومجذور نوشت.

۲. قضیهٔ فرما: چنانچه p عددی اول و n عددی صحیح و مثبت باشد، آنگاه p عدد n^p-n را می‌شمارد.

۳. قضیهٔ آخر فرما: اگر $n>2$، اعداد صحیح ومثبت x، y، z وجود ندارند که در معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ صدق کنند.

اوقضیهٔ‌اخیررا دررابطهٔ بامطلبی‌راجع به‌اینکه‌معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ جوابهای صحیح زیادی دارد، در حاشیهٔ یکی از کتابهایش نوشت، سپس این نکتهٔ وسوسه‌انگیز را افزود، «اثبات واقعاً شگفت‌انگیزی برای این مدعا یافته‌ام که در حاشیهٔ این‌کتاب نمی‌گنجد». متأسفانه تاکنون هیچکس دیگراثباتی برای آن نیافته است و قضیهٔ‌آخر فرما تابه‌امروز به‌عنوان یکی از عاجز کننده‌ترین مسائل حل‌نشدهٔ ریاضی باقی مانده است. یافتن اثباتی برای این‌قضیه، جاودانگی‌آنی به‌یابنده اعطا خواهدکرد ولیکن باید به‌دانشجوی جاه‌طلب هشدار داد که صدهاسال است که ریاضیدانان توانادراین زمینه سعی بیهوده به‌خرج داده‌اند.

یادداشتی دربارهٔ‌خانوادهٔ برنولی. اکثر مردم واقفند که یوهان سباستین باخ یکی ازبزرگترین آهنگ‌سازان تمام دورانها بود. ولی کمتر کسی بخوبی آگاه

1. Pierre de Fermat

است که خانوادهٔ پرثمر باخ دراین‌زمینه ازآنچنان نبوغ پایداری برخوردار بود که ازقرن شانزدهم تاقرن نوزدهم دهها نفر ازخانوادهٔباخ موسیقیدانان برجسته‌ای شدند. در واقع، بخشهایی در آلمان وجود داشت که در آنها کلمهٔ باخ بتنهایی به معنای موسیقیدان بود. نقش‌خانوادهٔ باخ درموسیقی را، برنولی‌ها در ریاضیات و علوم ایفا کردند. این خانوادهٔ برجستهٔ سویسی طی سه نسل‌هشت‌ریاضیدان تحویل جامعه داد که سه‌تای‌آنها فوق‌العاده بودند. اینهانیز به‌نوبهٔ خود بازماندگانی داشتند که در بسیاری از زمینه‌های علمی ممتاز بودند.

یاکوب برنولی[1] (۱۶۵۴–۱۷۰۵) به اصرار پدرش به مطالعهٔ الهیات پرداخت ولی‌دراولین‌فرصت به‌خاطرعشقش به‌علوم، آن‌را رهاساخت. حساب دیفرانسیل و انتگرال جدید نیوتن ولایب‌نیتس را نزد خود فراگرفت و از سال ۱۶۸۷ تاهنگام وفاتش در دانشگاه بازل[2] استاد ریاضی بود. آثاری درمورد سری‌های بینهایت دارد. منحنی‌های‌ویژهٔ بسیاری‌را مطالعه نمود، مختصات قطبی‌را ابداع کرد واعداد برنولی را که در بسط سری‌نمایی تابع $\tan x$ ظاهر می‌شوند، معرفی کرد. وی درکتاب خود تحت‌عنوان فن‌حدس زدن[3] اصل‌اساسی نظریهٔ احتمالات‌معروف به‌قضیهٔ برنولی یا قانون اعداد بزرگ‌را بیان‌کرد. این قانون بدین‌قرار است: اگر احتمال یك حادثهٔ معین p باشد و اگر n تجربهٔ مستقل با k بار موفقیت صورت گرفته باشد، آنگاه وقتی $n \to \infty$، $k/n \to p$. دروهلهٔ اول به‌نظر می‌رسد که این‌قضیه بدیهی است لیکن دردرون این‌بیان انبوههٔ درهم‌پیچیدهٔ مسائل فلسفی (وریاضی) نهفته است که منبع مباحثه‌ای است که از زمان برنولی تابه‌امروز ادامه داشته است.

برادر جوانتر یاکوب یعنی یوهان برنولی (۱۶۷۷–۱۷۴۸) نیز مانند برادرش زندگی‌خودرا، بغلط بامطالعهٔ پزشکی، آغازکرد و درسال ۱۶۹۴ بانوشتن مقاله‌ای درباره انقباض ماهیچه موفق به اخذ دکترا از دانشگاه بازل‌گردید. با این حال اونیز شیفتهٔ حساب‌دیفرانسیل و انتگرال شد وخیلی‌سریع دراین رشته صاحب‌نظر گردید و آن را دربسیاری مسائل هندسه، معادلات دیفرانسیل ومکانیك به‌کار بست. درسال ۱۶۹۵ به‌سمت استادی ریاضیات و فیزیك دانشگاه‌گرونینگن هلند گمارده شد وپس از مرگ یاکوب، به‌جای برادرش استاد دانشگاه بازل‌شد. گاهی برادران برنولی روی یك‌مسئله کار می‌کردند که این وضع به لحاظ طبایع حسود و زودرنج آنها برایشان ناخوشایند بود. گهگاه اختلاف عقیده بین آنها تاسرحد یك‌کینه‌توزی تلخ همراه با ناسزاگویی در ملأعام اوج می‌گرفت، نظیر آنچه که در مورد مسئله منحنی‌کوتاهترین‌زمان اتفاق افتاد. درسال۱۶۹۶ یوهان‌مسئله‌ای‌را برای زورآزمایی فکری به ریاضیدانان اروپا ارائه‌کرد. این مسئله توجه فراوانی برانگیخت. نیوتن، لایب‌نیتس و همچنین برنولی‌ها آن را حل کردند. راه حلی که یوهان ارائه داد (که آن را قبلا دیدیم) ظریفتر بود. حال آنکه راه حل یاکوب ــ گرچه نسبتاً خام ودشوار، ولی ــ کلی‌تر بود. این‌وضعیت موجب آغاز نزاع تندی گردید

1. Jakob Bernoulli 2. Basel 3. Ars Conjectandi

که چندین سال ادامه یافت و غالباً به‌ناسزا گویی شدیدی می کشید که بیشتر درخور نزاعهای خیابانی بود تا بحثهای علمی. ظاهراً دراین‌بین یوهان فتنه‌جوتر از دیگری بوده است؛ زیرا مدتی بعد، او در حالتی که براثر شدت حسادت ازجا دررفته بود، پسر خـود را به‌دلیل اینکه از فرهنگستان فرانسه جایزه‌ای را که خودش بدان چشم طمع داشت دریافت نموده بود، از خـانه بیرون انداخت.

این پسر، کـه دانیل برنولی (۱۷۰۰–۱۷۸۲) نـام داشت مانند پـدرش به تحصیل‌پزشکی پرداخت و بانوشتن رساله‌ای دربارهٔ عملکرد ریه‌ها بـه اخذ درجه‌ای نایل‌آمد. اونیز مـانند پدرش‌بزودی راه‌را به‌روی ذوق و استعداد فطریش گشود و در سن پترزبورگ استاد ریاضیات‌شد. درسال ۱۷۷۳ بـه‌بازل بازگشت و متوالیاً استاد گیاه‌شناسی، کـالبدشناسی، و فیزیـك گردید. ازفرهنگستان فرانسه ده‌جایزه، ازجمله همان که پدرش را به‌خشم انداخت، دریافت نمود و در طول سالها، آثـار بسیاری درفیزیك، احتمالات، حساب دیفرانسیل وانتگـرال، و معادلات دیفرانسیل منتشرکرد. وی درکتاب مشهورش تحت عنوان هیدرودینامیك بـه بحث پیرامون مکانیك سیالات پرداخت و نخستین‌بررسی را درمـورد نظریهٔ جنبشی گازها ارائه نمود. ازنظربسیاری افراد او اولین دانشمند فیزیك ریاضی‌واقعی بوده است.

تمرین

۱ـ سیمی راکه به‌شکل چرخزاد (۸) خم‌شده‌است‌درنظر بگیرید وآن را مانند شکل (۱۰) وارونه کنید. اگرمهره‌ای ازمبدأ مختصات رها شود وبدون‌اصطکاك برروی‌سیم وبه‌طرف پایین بلغزد، نشان دهید که مهره درمدت زمان $\pi\sqrt{a/g}$ به‌نقطهٔ زیـرین $(\pi a ، 2a)$ می‌رسد.

۲ـ نشان‌دهید که $\pi\sqrt{a/g}$ مسئلهٔ (۱) هم چنین مدت‌زمانی است که‌مهره ازهرنقطهٔ‌دیگرمنحنی به‌نقطهٔ زیرین منحنی می‌لغزد، به‌طوری که مهره درمدت زمانهای مساوی به‌نقطهٔ زیرین می‌رسد واین زمان به‌محل رهاشدن مهره بستگی‌ندارد. این‌خاصیت به‌خاصیت‌همزمـانی (توتوکرون) چرخزاد موسوم است (در زبان یونانی توتو به‌معنای همان و کـرونوس به‌معنای‌زمان است).

تمرینهای گوناگون فصل اول

۱ـ یك‌روزصبح، برف‌شروع به‌باریدن‌کرد و این بارندگی درطول روزیکسره ادامه یافت. درساعت دوازده‌ظهر یك‌برف‌پاك کن، بـاآهنگ ثابتی از لحاظ‌حجم برف پاك شده در ساعت، شروع به‌تمیزکردن جاده کرد. برف پاك کن تاساعت ۲ بعدازظهـر ۲ کیلومتر از جاده را تمیز کرد و یك کیلومتر دیگر را تاساعت ۴ بعدازظهر تمیز کرد. درچه‌ساعتی برف‌شروع به‌باریدن نموده است؟

۲ـ شعاع یك‌گلولهٔ نفتالین که درابتدا ۱/۲ سانتیمتراست، پس‌از یك‌ماه به ۱/۴ سانتیمتر می‌رسد. به‌فرض‌آنکه گلولهٔ نفتالین باآهنگی متناسب با سطحش تبخیرشود، شعاع آن‌را

به‌صورت تابعی از زمان بیابید. پس از چندماه دیگر گلوله بکلی تبخیر می‌شود؟

۳ـ تانکی محتوی ۴۰۰ لیتر آب خالص است. از لحظهٔ $t=0$، آب شوری که درهر لیتر آن ۱۰۰ گرم نمك وجوددارد باآهنگ چهار لیتر در دقیقه، به‌داخل تانك جاری می‌شود و مخلوط حاصله (که بابهم‌زدن یکنواخت نگاهداشته می‌شود) باهمان آهنگ به‌خارج جریان می‌یابد. چه‌موقعی ۲۵ کیلوگرم نمك‌حل‌شده در تانك وجود خواهد داشت؟

۴ـ تانك بزرگی محتوی ۴۰۰ لیتر آب شور است که ۱۰۰ کیلوگرم نمك در آن حل‌شده است. از لحظهٔ $t=0$، آب‌خالص، باآهنگ ۱۲ لیتر دردقیقه، به‌درون تانك می‌ریزد ومخلوط (که با بهم‌زدن یکنواخت نگاهداشته می‌شود)، باآهنگ ۸ لیتر در دقیقه، به‌خارج جاری می‌شود. چقدر طول می‌کشد تامقدار نمك موجود در تانك به ۵ کیلوگرم تقلیل یابد.

۵ـ یك توپ راگبی صاف، دوکی شکل به طول ۳۰ سانتیمتر و قطر ۱۵ سانتیمتر در هوای آزاد در معرض ریزش باران قرار دارد. آب درچه مسیرهایی از روی توپ به‌پایین جاری می‌شود؟

۶ـ اگر c ثابتی مثبت و a پارامتری مثبت باشد، آنگاه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

معادلهٔ دستهٔ تمام بیضی‌ها $(a>c)$ و هذلولی‌ها $(a<c)$ باکانونهای واقع در نقاط $(\pm c, 0)$ است. نشان‌دهید که این‌دسته مقاطع مخروطی‌هم‌کانون، «برخود عمود» است (مسئلهٔ ۳ـ۲ را ببینید).

۷ـ مطابق‌قانون توریچلی[1] سرعت خروج آب ازسوراخی واقع در کف یك‌مخزن آب روباز، برابر باسرعتی است که آب درصورت سقوط‌آزاد از سطح‌آب تاسوراخ به‌دست می‌آورد. ظرفی به‌شکل نیمکره به‌شعاع R درابتدا پرازآب است و درلحظهٔ $t=0$ ته‌ظرف به‌شکل‌دایرهٔ کوچکی به‌شعاع r سوراخ می‌شود. چه‌مدت زمان طول‌می‌کشد تاظرف خالی شود؟

۸ـ ساعت‌آبی قدیمی، ظرفی بود که آب می‌توانست از سوراخ کوچکی درته‌آن، خارج گردد. از این‌ساعت اغلب دردادگاههای یونانی ورومی جهت تعیین زمان سخنرانیهای وکلا و جلوگیری از سخنرانی بیش ازحد استفاده می‌شد. در صورتی که بخواهیم سطح آب باآهنگ ثابتی پایین آید، شکل ساعت آبی را مشخص کنید.

۹ـ درته هریك از دومخزن روباز، سوراخی کوچك و یکسان ایجاد شده است، آب‌این دو

---

۱. اوانجلیستا توریچلی Evangelista Torricelli (۱۶۰۸ـ۱۶۴۷) فیزیکدان و ریاضیدان ایتالیایی و یکی از مریدان و منشی‌گالیله بود. علاوه بربیان اصلی‌که در بالا ازآن یاد شد، نخستین نظرات صحیح در مورد فشار جوی و ماهیت خلأها را که از نظرگالیله پنهان مانده بود، مطرح ساخت و بارومتر را به عنوان کاربردی از نظریه‌های خود اختراع‌کرد. به
James B. Conant. «Science and Common Sense,» pp. 63–71, Yale University Press, New Haven, Conn., 1951
مراجعه کنید.

مخزن دریك‌زمان‌تخلیه می‌شود. یکی از دومخزن استوانه‌ای‌است بامحور قائم ودیگری مخروطی است که رأس‌آن درپایین است. اگر قاعده‌های این‌دومخزن برابر وارتفاع استوانه h باشد، ارتفاع مخروط چقدر است؟

۱۰ـ یك‌قوطی استوانه‌ای که قسمتی ازآن باآب پرشده است، باسرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور خود دوران می‌کند. نشان دهید که سطح آب به‌شکل یك سهمی دوار درمی‌آید(راهنمایی: نیروی‌جذب به‌مرکز واردبرذره‌ای ازآب به‌جرم m که درسطح آزاد واقع است برابر با $mx\omega^2$ است که درآن x فاصلهٔ ذره تامحور دوران است واین نیرو برآیند نیروی روبه‌پایین ثقل mg ونیروی عکس‌العمل قائم R ناشی از واکنش سایر ذرات‌آب مجاور ذرهٔ مزبوراست.)

۱۱ـ مهره‌ای‌را دربالاترین نقطهٔ یك‌دایره که درصفحهٔ قائم قرار گرفته است درنظربگیرید. فرض کنید که این نقطه‌به‌هریك‌ازنقاط پایینتر دایره توسط یك‌سیم مستقیم متصل شده باشد. اگر مهره برروی سیم‌بدون اصطکاك بلغزد، نشان‌دهید که مدت‌زمان لازم‌برای رسیدن مهره به‌دایره ثابت است وبه‌موقعیت نقطهٔ پایینتر بستگی ندارد.

۱۲ـ نیم‌متر از زنجیری به‌طول ۲متر، ازمیز آویزان‌شده است. زنجیربدون‌اصطکاك شروع به‌لغزیدن می‌کند. مدت‌زمانی را بیابید که طول می‌کشد تازنجیر ازمیز بیفتد.

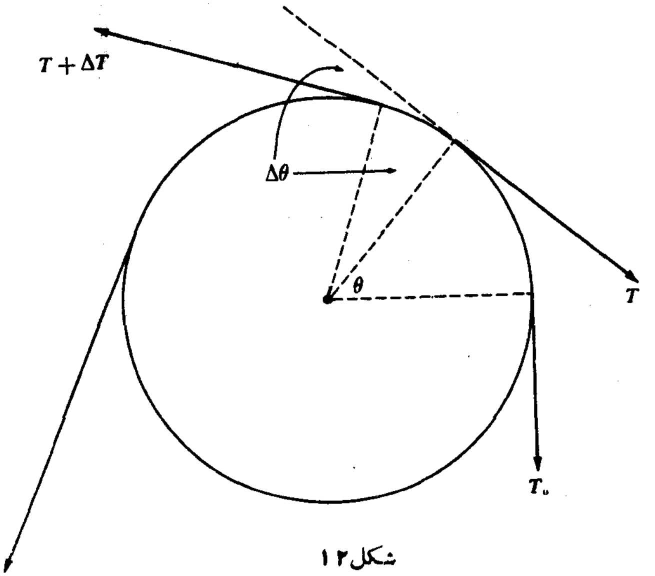
۱۳ـ تجربه می‌گوید که اگر شخصی یك‌سر طنابی را که به‌دور یك‌تیرچوبی پیچیده شده است بگیرد، می‌تواند بانیروی کوچکی دربرابر نیروی بسیار بزرگتری که به‌انتهای دیگر وارد می‌شود مقاومت کند. به‌طورکمی، به‌سادگی می‌توان دید که اگر T و $T+\Delta T$ نیروهای‌کشش طناب برای زوایای θ و $\theta+\Delta\theta$ در شکل ۱۲ باشند، در آن‌صورت نیروی قائمی تقریباً برابر با $T\Delta\theta$ به‌وسیلهٔ طناب در ناحیه‌ای بین θ و $\theta+\Delta\theta$ برتیر وارد می‌شود. ازاین مطلب چنین برمی‌آیدکه اگر μ ضریب اصطکاك بین‌طناب و تیر باشد، آنگاه ΔT تقریباً برابربا $\mu T\Delta\theta$ خواهد بود. ازاین موضوع استفاده کنیدو معادلهٔ دیفرانسیل رابط بین T و θ را به‌دست آورید. برای یافتن T به صورت تابعی از θ و μ ، و نیروی T_0 وارده به وسیلهٔ شخص،این معادله را حل کنید.

۱۴ـ بار L به‌وسیلهٔ یك‌ستون مخروطی مدور نگهداری می‌شود. چگالی مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ ستون a می‌باشد. اگر شعاع مقطع فوقانی ستون r_0 باشد، شعاع r را در فاصلهٔ x از مقطع بالا به‌دست آورید، درصورتی که مساحت هرمقطع افقی متناسب باکل بارهای واردشده برآن باشد.

۱۵ـ رئیس‌جمهور و نخست‌وزیر قهوه سفارش می‌دهند و در یك‌زمان فنجانهای قهوه با دماهای یکسان دریافت می‌دارند. رئیس‌جمهور بلافاصله مقدارکمی کرم‌خنك به‌قهوهٔ خود می‌افزاید ولیکن تاده‌دقیقه بعد، قهوه را نمی‌نوشد. نخست‌وزیر پس‌از دریافت قهوه ۱۰ دقیقه صبر می‌کند و سپس همان‌مقدار کرم خنك به‌قهوهٔ خود می‌افزاید و شروع به نوشیدن آن می‌کند. چه‌کسی قهوهٔ داغتر می‌نوشد؟

۱۶ـ یك ناوشکن، در مه غلیظ، به‌دنبال شکار یك زیردریایی است. در یك لحظه مه بالا

می‌رود و زیردریایی درسطح آب، درفاصلهٔ ۵ کیلومتری آشکارمی‌شود ومه فوراً پایین می‌آید. سرعت ناوشکن دوبرابرسرعت زیردریایی است. واضح است‌که زیردریایی فوراً درآب فرومی‌رود و باتمام سرعت در امتداد مستقیم و نـامشخص دور مـی‌شود. نـاوشکن چه‌مسیری را بـاید تعقیب‌کند تامطمئن‌گردد که مستقیماً ازروی زیـردریایی می‌گذرد؟ راهنمایی: یك‌دستگاه مختصات قطبی رسم‌کنید و مبدأ آن‌را نقطه‌ای اختیار



شکل ۱۲

کنید که درآن زیردریایی مشاهده شده است.

۱۷ـ چهارحشره درگوشه‌های یك‌میزمربعی به‌ضلع a می‌نشینند. دریك‌لحظه همهٔ آنها بایك سرعت‌شروع بحرکت می‌کنند و هرکدام بطوردائم بطرف‌حشره دست‌راست خود می‌رود.چنانچه یك‌دستگاه‌مختصات قطبی برروی‌میز ترسیم گردد که مبدأآن درمرکز میز و محور قطبی‌آن در امتداد یك‌قطر میز باشد، مسیری را که حشره واقع‌برمحور قطبی‌می‌پیماید وکل‌مسافتی‌راکه این‌حشره تارسیدن‌تمام حشرات بهم طی‌می‌کند بیابید.

۲

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

۷. معادلات همگن

درحالت کلی، حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول بسیار مشکل است. حتی معادلهٔ بظاهرسادهٔ

$$\frac{dy}{dx}=f(x , y)$$

را درحالت کلی نمی‌توان حل کرد، به‌این مفهوم که هیچ فرمولی که جواب را برای کلیهٔ حالات به‌دست دهد موجود نیست. ازطرف دیگر برخی انواع متعارف از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول وجود دارند که راه‌حلهای عادی آنها در دسترس است. دراین فصل مختصراً تعداد کمی از انواعی راکه موارد استعمال متعدد دارند، بررسی می‌کنیم. ازآنجاکه هدف اصلی ما کسب مهارت عملی است، سؤالات مربوط به پیوستگی، مشتق‌پذیری وصفرشدن احتمالی مخرج کسرها وغیره راکلا مسکوت خواهیم گذاشت. بعداً هنگامی که برخی زمینه‌های لازم به‌وجودآمد، مسائلی که ماهیت ریاضی محض دارند، مورد بحث قرار می‌گیرند.

ساده‌ترین معادله از انواع متعارف، معادله‌ای است که درآن متغیرها جدا شدنی هستند:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}$$

برای حل این معادله کافی است معادله را به‌شکل $h(y)dy=g(x)dx$ بنویسیم و انتگرال بگیریم:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

مثالهای متعددی ازاین روش را درفصل قبل دیده‌ایم.

معادلهٔ همگن کمی پیچیده‌تر از این حالت است. تابع $f(x, y)$ را همگن از درجهٔ n گوییم هرگاه رابطهٔ

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

برای کلیهٔ مقادیر x ، y ، t که درآن x ، y و t به‌نحوی مناسب محدود شده‌اند، برقرار باشد. مثلا $x^2 + xy$ ، $\sqrt{x^2+y^2}$ ، و $\sin(x/y)$ توابعی‌همگن از درجات ۲ ، ۱ و ۰ هستند. معادلهٔ دیفرانسیل

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

را همگن گوییم هرگاه M و N توابعی همگن و همدرجه باشند. این معادله را می‌توان به‌شکل

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

نوشت که درآن $f(x, y) = -M(x, y)/N(x, y)$ بوضوح همگن و از درجهٔ صفر است. چگونگی حل معادلهٔ (۱) براین امر استوار است که با جایگزینی $z = y/x$ معادلهٔ فوق به معادله‌ای با متغیرهای جدا شدنی تبدیل می‌شود. برای مشاهدهٔ مطلب توجه‌می‌کنیم که رابطهٔ

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$$

به‌ما امکان می‌دهدکه با جایگزینی $t = 1/x$ رابطهٔ زیر را به‌دست‌آوریم

$$f(x, y) = f(1, y/x) = f(1, z)$$

سپس ازآنجاکه $y = zx$ و

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \qquad (2)$$

معادلهٔ (۱) به

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(1, z)$$

تبدیل می‌شود و متغیرها جدا شدنی هستند:

$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}$$

اکنون با انتگرال‌گیری وسپس تبدیل z به y/x حل معادله راکامل می‌کنیم.

مثال ۱. معادلهٔ $(x+y)dx-(x-y)dy=0$ را حل کنید.
کار را با نوشتن معادله به‌شکلی که دربالا پیشنهاد شد، شروع می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

باتوجه به‌اینکه تابع سمت‌راست بوضوح‌همگن از درجهٔ صفراست‌آن‌را می‌توان به‌صورت تابعی صرفاً از $z=y/x$ بیان کرد. این کار بسادگی با تقسیم صورت ومخرج کسر بر x انجام می‌شود:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y/x}{1-y/x}=\frac{1+z}{1-z}$$

سپس با استفاده از رابطهٔ (۲) متغیرها را جدا می‌کنیم و معادلهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{(1-z)dz}{1+z^2}=\frac{dx}{x}$$

با انتگرال گیری از این رابطه، خواهیم داشت

$$\tan^{-1} z-\frac{1}{2}\log(1+z^2)=\log x+c$$

با گذاشتن y/x به‌جای z ، رابطهٔ

$$\tan^{-1}\frac{y}{x}=\log\sqrt{x^2+y^2}+c$$

را به‌عنوان جواب مطلوب به‌دست می‌آوریم.

تمرین

۱ــ نشان دهیدکه معادلات زیر همگن هستند، وآنها را حل کنید.

الف) $(x^2-2y^2)dx+xydy=0$

ب) $x^2y'-3xy-2y^2=0$

ج) $x^2y'=3(x^2+y^2)\tan^{-1}\frac{y}{x}+xy$

د) $x\sin\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=y\sin\frac{y}{x}+x$

ه) $xy'=y+2xe^{-y/x}$

۲ــ بابه‌کاربردن مختصات‌دکارتی، مسیرهای متعامد دسته تمام دوایری‌راکه درمبدأ مختصات

برمحور yها مماس هستند به‌دست آورید.

۳ـ نشان دهید که با جایگزینی $z=ax+by+c$ ، معادلهٔ $y'=f(ax+by+c)$ به معادله‌ای با متغیرهای جدا شدنی تبدیل می‌شود، و این روش را برای حل معادلات زیر به کار گیرید:

الف) $y'=(x+y)^{۲}$

ب) $y'=\sin^{۲}(x-y+۱)$

۴ـ الف) هرگاه $ae\neq bd$، نشان دهید مقادیر ثابت k و h را می‌توان طوری انتخاب کرد که باجایگذاری $x=z-h$ ، $y=w-k$ معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$$

به‌معادلهٔ همگن تبدیل شود.

ب) اگر $ae=bd$ ، جایگذاری مناسبی چنان پیدا کنید که توسط‌آن معادلهٔ (الف) به معادلهٔ بامتغیرهای‌جدا شدنی تبدیل شود.

۵ـ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+۴}{x-y-۶}$$

ب) $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+۴}{x+y-۶}$$

۸. معادلات کامل

اگر دسته منحنی $f(x , y)=c$ داده شده باشد، معادلهٔ دیفرانسیل آن‌را می‌توان به‌شکل $df=۰$ ویا

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=۰$$

نوشت. مثلامعادلهٔدیفرانسیل‌دسته‌منحنی $x^{۲}y^{۳}=c$ به‌صورت $۲xy^{۳}dx+۳x^{۲}y^{۲}dy=۰$ است. حال، وضعیت عکس را درنظر می گیریم وبحث را با معادلهٔ زیر شروع می کنیم:

$$M(x , y)dx+N(x , y)dy=۰ \qquad (۱)$$

هرگاه تابع $f(x , y)$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N \qquad (۲)$$

(۱) را می‌توان به شکل

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \quad \text{یا} \quad df=0$$

نوشت که جواب عمومی آن عبارت‌است‌از

$$f(x , y)=c$$

درچنین حالتی عبارت $Mdx+Ndy$ را دیفرانسیل کامل و معادلهٔ (۱) را معادلهٔ دیفرانسیل کامل گوییم.

گاهی اوقات می‌توان صرفاً باجستجو، کامل بودن معادله را تحقیق کرد و تابع f را یافت. مثلا دیده می‌شود که سمت چپ معادلات

$$y\,dx+x\,dy=0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

بترتیب دیفرانسیل x/y و xy هستند، لذا جواب‌عمومی این‌معادلات بترتیب $x/y=c$ و $xy=c$ هستند. ولی واضح است که جز در حالات بسیار ساده، حل معادله با «تشخیص نظری» عملی نیست. آنچه لازم‌است، آزمونی برای تحقیق کامل بودن معادله و روشی برای به‌دست‌آوردن تابع f است. در زیر، این آزمون و روش را ارائه می‌دهیم.

فرض کنید معادلهٔ (۱) کامل است بنابراین تابعی مانند f وجود دارد که درمعادلهٔ (۲) صدق می‌کند. از حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی می‌دانیم که مشتقات جزئی‌مرتبهٔ دوم آمیختهٔ تابع f باهم برابرند:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \tag{۳}$$

از این رابطه[1] داریم

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{۴}$$

بنابراین، رابطهٔ (۴) شرط لازم برای‌کامل بودن معادلهٔ (۱) است. ثابت می‌کنیم که این شرط کافی نیزهست، به‌این‌نحو که نشان‌می‌دهیم اگر(۴) برقرارباشد، تابع f را که در(۲) صدق کند می‌توان یافت. با انتگرال گیری از اولین معادلهٔ (۲) نسبت به x شروع می‌کنیم

---

۱ . خواننده باید بداند که برابری(۳) هنگامی درست است‌که هردوطرف این معادله، موجود و پیوسته باشند، واین شرایط تقریباً برای همهٔ توابعی که درعمل ممکن است ظاهر شوند، صادق است. پیش‌فرض ما درتمامی این فصل این است که همهٔ توابع مورد بحث شرایط پیوستگی و مشتق‌پذیری را به‌حدکافی برای تضمین صحت عملیاتی که روی آنها انجام می‌شود دارا هستند. (اولین پاراگراف بخش ۷ را ببینید).

$$f = \int M\,dx + g(y) \tag{۵}$$

«ثابت انتگرال» که در رابطهٔ فوق ظاهر می‌شود، تابعی دلخواه از y است، چرا که باید با مشتق‌گیری نسبت به x صفر شود. این امر مسئلهٔ ما را به‌یافتن تابعی مثل $g(y)$ منجر می‌کند، با این خاصیت که تابع بیان شده توسط (۵) باید دومین معادلهٔ (۲) را نیز ارضا کند. بامشتق‌گیری از رابطهٔ (۵) نسبت به y و مساوی قرار دادن آن با N، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx + g'(y) = N$$

لذا

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx$$

از این رابطه نتیجه می‌شود

$$g(y) = \int\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right)dy \tag{۶}$$

مشروط به‌اینکه تابع زیر انتگرال صرفاً تابعی از y باشد. این درصورتی است که مشتق تابع زیر انتگرال نسبت به x مساوی صفر باشد؛ و ازآنجاکه مشتق موردنظر عبارت است‌از:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M\,dx\\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M\,dx\\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\end{aligned}$$

با رجوع به‌فرض (۴) استدلال کامل می‌شود.

خلاصه اینکه ما قضیهٔ زیر را ثابت نموده‌ایم: معادلهٔ (۱) کامل است اگر و فقط اگر $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$؛ و دراین‌صورت، جواب عمومی آن، $f(x, y) = c$ است، که درآن تابع f توسط (۵) و (۶) معین می‌شود. دراینجا باید بر دونکته تأکید کنیم: جواب‌عمومی معادلهٔ(۱) معادلهٔ $f(x, y) = c$ است، نه‌تابع f و روش یافتن f که در روابط (۵) و (۶) ارائه شده است باید فراگرفته شود، ونه خود فرمولها.

مثال ۱. معادلهٔ $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$ را ازنظر کامل بودن بیازمایید، و

درصورت کامل بودن آن‌را حل کنید.

در این‌جا داریم

$$M = e^y \quad \text{و} \quad N = xe^y + ۲y$$

بنابراین

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \quad \text{و} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y$$

لذا شرط (۴) ارضا می‌شود و معادلهٔ مورد بحث کامل است. این شرط مبین آن‌است که تابع f وجود دارد به‌قسمی که:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + ۲y$$

باانتگرال گیری از اولین معادله نسبت به x خواهیم داشت

$$f = \int e^y dx + g(y) = xe^y + g(y)$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + g'(y)$$

ازآنجا که این مشتق جزئی همچنین باید با $xe^y + ۲y$ برابر باشد، خواهیم داشت $g'(y) = ۲y$ ، درنتیجه $g(y) = y^۲$ و $f = xe^y + y^۲$. حال فقط کافی است توجه کنیم که $xe^y + y^۲ = c$ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل‌موردنظر است.

تمرین

تعیین کنید کدامیک از معادلات زیر کامل است وآنهایی راکه کامل هستند، حل کنید.

۱- $\left(x + \frac{۲}{y}\right) dy + y\, dx = ۰$

۲- $(\sin x \tan y + ۱) dx + \cos x \sec^۲ y\, dy = ۰$

۳- $(y - x^۳)\, dx + (x + y^۳)\, dy = ۰$

۴- $(۲y^۲ - ۴x + ۵)\, dx = (۴ - ۲y + ۴xy)\, dy$

۵- $(y + y \cos xy)\, dx + (x + x \cos xy)\, dy = ۰$

۶- $\cos x \cos^۲ y\, dx + ۲ \sin x \sin y \cos y\, dy = ۰$

۷- $(\sin x \sin y - xe^y)\, dy = (e^y + \cos x \cos y)\, dx$

۸− $$-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\,dx+\frac{x}{y^{2}}\sin\frac{x}{y}\,dy=0$$

۹− $$(1+y)\,dx+(1-x)\,dy=0$$

۱۰− $$(2xy^{3}+y\cos x)\,dx+(3x^{2}y^{2}+\sin x)\,dy=0$$

۱۱− $$dx=\frac{y}{1-x^{2}y^{2}}\,dx+\frac{x}{1-x^{2}y^{2}}\,dy$$

۹. عامل انتگرال‌ساز

احتمالا خواننده توجه کرده است که معادلات دیفرانسیل کامل نسبتاً نادر هستند، چراکه کامل بودن معادله، مستلزم تعادل‌دقیقی درشکل معادله است و با مختصر تغییری در این شکل، تعادل منتفی خواهد شد. امکان دارد خواننده باعلم به‌این‌امر، در ارزشمندی بحث درمورد معادلهٔ کامل تردید کند. دراین بخش کوشش می‌کنیم که پاسخگوی این تردیدها باشیم.

بسادگی مشاهده می‌شود که معادلهٔ

$$y\,dx+(x^{2}y-x)\,dy=0 \tag{1}$$

کامل نیست، چراکه $\partial M/\partial y=1$ و $\partial N/\partial x=2xy-1$. اما، هرگاه طرفین معادله را در $1/x^{2}$ ضرب کنیم، معادله به‌صورت

$$\frac{y}{x^{2}}\,dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0$$

درمی‌آید که معادله‌ای کامل است. تا چه‌حد می‌توان معادلات غیرکامل دیگر را با روش فوق کامل نمود؟ به‌عبارت دیگر، هرگاه معادلهٔ

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \tag{2}$$

کامل نباشد، تحت چه‌شرایطی، تابع $\mu(x,y)$ بااین شرط که معادلهٔ

$$\mu(M\,dx+N\,dy)=0$$

کامل باشد، وجود دارد؟ هرتابع μ که این‌چنین عمل کند، عامل انتگرال ساز (۲) خوانده می‌شود. بنابراین $1/x^{2}$ عامل انتگرال‌ساز (۱) است. ثابت می‌کنیم هرگاه (۲) دارای‌یک جواب عمومی باشد، دارای عامل انتگرال‌ساز نیز خواهد بود.

فرض کنید که معادلهٔ(۲) دارای یک جواب عمومی به‌صورت

$$f(x,y)=c$$

باشد، بامشتق‌گیری c را حذف می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy=0 \tag{3}$$

از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

بنابراین

$$\frac{\partial f/\partial x}{M}=\frac{\partial f/\partial y}{N} \tag{۴}$$

هرگاه نسبت مشترك (۴) را با $\mu(x\ ,\ y)$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mu M \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\mu N$$

باضرب کردن معادلهٔ (۲) در μ ، معادله به‌صورت

$$\mu M\ dx+\mu N\ dy=0$$

یا

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

تبدیل‌می‌شودکه معادله‌ای کامل است. این استدلال نشان می‌دهدکه درصورتی که معادلهٔ(۲) جواب داشته باشد، آنگاه معادله حداقل دارای یك عامل انتگرال‌ساز μ است. عملا معادلهٔ مذکور دارای بینهایت عامل انتگرال‌ساز است؛ زیرا هرگاه $F(f)$ تابعی دلخواه از f باشد، آنگاه

$$\mu F(f)(M\ dx+N\ dy)=F(f)\ df=d\left[\int F(f)df\right]$$

بنابراین $\mu F(f)$ نیز عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ(۲) خواهد بود.

بحث ما تااینجا هنوز به‌مسئلهٔ عملی یافتن عامل انتگرال‌ساز نرسیده است. در حالت کلی، این امر کاملاً مشکل است. اما حالاتی چند موجودند که برای‌آنها روشهای صوری وجود دارد. برای نشان دادن اینکه چگونه این‌روشها به‌کار می‌آیند، فرض می کنیم μ عامل انتگرال‌ساز (۲) باشد:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

با بسط این رابطه خواهیم داشت

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\ \frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\ \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

یا

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \tag{۵}$$

به‌نظر می‌رسد که مسئلهٔ حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی(۲) را به مسئلهٔ بمراتب مشکلتر حل معادلهٔ با مشتقات جزئی (۵) تبدیل کرده‌ایم، از سوی دیگر هیچ احتیاجی به‌جواب عمومی (۵) نداریم، چراکه‌هرجواب خاص‌برای مقصود ماکفایت می‌کند. وازاین نظر، معادلهٔ(۵) بیش‌ازآنچه به‌نظرمی‌رسد مفید است. مثلافرض‌کنید (۲) دارای‌عامل انتگرال‌سازی مانند μ باشدکه صرفاً تابع x است. دراین‌حالت $\partial\mu/\partial x=d\mu/dx$ و $\partial\mu/\partial y=0$، بنابراین (۵) را می‌توان به‌صورت

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N} \tag{۶}$$

نوشت. ازآنجاکه سمت چپ صرفاً تابعی از x است، سمت راست نیز چنین خواهد بود. چنانچه بنویسیم

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}=g(x)$$

رابطهٔ (۶) به‌صورت

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=g(x)$$

یا

$$\frac{d(\log\mu)}{dx}=g(x)$$

تبدیل می‌شود. لذا

$$\log\mu=\int g(x)dx$$

و

$$\mu=e^{\int g(x)dx} \tag{۷}$$

این استدلال مسلماً برگشت‌پذیر است: هرگاه عبارت سمت راست رابطهٔ (۶) صرفاً تابعی از x، مثلاً $g(x)$، باشد، دراین‌صورت رابطهٔ (۷) تابعی مانند μ را خواهد دادکه صرفاً تابعی از x است و در رابطهٔ (۵) صدق می‌کند وبنابراین عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ (۲) است.

مثال ۱. درمورد معادلهٔ (۱) داریم

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}=\frac{1-(2xy-1)}{x^2y-x}=\frac{-2(xy-1)}{x(xy-1)}=-\frac{2}{x}$$

که صرفاً تابعی از x است. بنابراین، همانطورکه قبلا دیدیم

$$\mu=e^{\int-(2/x)dx}=e^{-2\log x}=x^{-2}$$

عامل انتگرال‌ساز (۱) است.

استدلالی مشابه روش زیر را برای حالتی‌که معادلهٔ (۲) عامل انتگرال‌سازی صرفاً وابسته به y دارد، به‌دست می‌دهد: هرگاه عبارت

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{-M} \tag{8}$$

تابعی تنها از y مانند $h(y)$ باشد، دراین‌صورت

$$\mu=e^{\int h(y)dy} \tag{9}$$

نیز صرفاً تابعی از y است‌که درمعادلهٔ (۵) صدق می‌کند و درنتیجه عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ (۲) خواهد بود.

تکنیك مفید دیگری نیز برای تبدیل معادلات غیرکامل ساده به معادلات کامل وجود دارد. برای تشریح آن، دوباره معادلهٔ دیفرانسیل(۱) را درنظر می‌گیریم وآن را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم

$$x^2y\,dy-(x\,dy-y\,dx)=0 \tag{10}$$

عبارت داخل پرانتز خواننده را به‌یاد دیفرانسیل y/x

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2} \tag{11}$$

می‌اندازد و تقسیم طرفین رابطهٔ (۱۰) بر x^2 مطرح می‌شود. این‌کار، معادله را به $y\,dy-d(y/x)=0$ تبدیل می‌کند، لذا جواب عمومی آن آشکارا به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{2}y^2-\frac{y}{x}=c$$

باتوجه به ترکیب $x\,dy-y\,dx$ و استفاده از (۱۱)، عملا به عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ دیفرانسیل (۱) دست یافته‌ایم. در زیر چند فرمول دیفرانسیل دیگر داده شده‌اندکه اغلب درشرایط مشابهی مفید واقع می‌شوند

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2} \tag{12}$$

$$d(xy)=x\,dy+y\,dx \tag{13}$$

$$d(x^{۲}+y^{۲})=۲(x\,dx+y\,dy) \qquad (۱۴)$$

$$d\left(\tan^{-۱}\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^{۲}+y^{۲}} \qquad (۱۵)$$

$$d\left(\log\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{xy} \qquad (۱۶)$$

از روابط فوق مشاهده می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل بسیارساده $y\,dx-x\,dy=۰$ دارای عوامل انتگرال‌سازی به‌صورت $۱/x^{۲}$ ، $۱/y^{۲}$، $۱/(x^{۲}+y^{۲})$ ، و $۱/xy$ است و بنابراین از راههای گوناگون قابل حل است.

مثال ۲. شکل آینهٔ مقعری راچنان تعیین کنید که نوری که ازمنبع واقع درمبدأ مختصات بر آن می‌تابد، به‌صورت ستونی از پرتوها، به‌موازات محور xها منعکس گردد.

آیینه به‌شکل سطح دواری خواهد بود که از دوران منحنی APB (شکل ۱۳) حول محور xها به‌وجود می‌آید. بنا بر قانون انعکاس $\alpha=\beta$. با بررسی هندسی شکل خواهیم داشت، $\phi=\beta$ و $\theta=\alpha+\phi=۲\beta$. چون $\tan\theta=y/x$ و

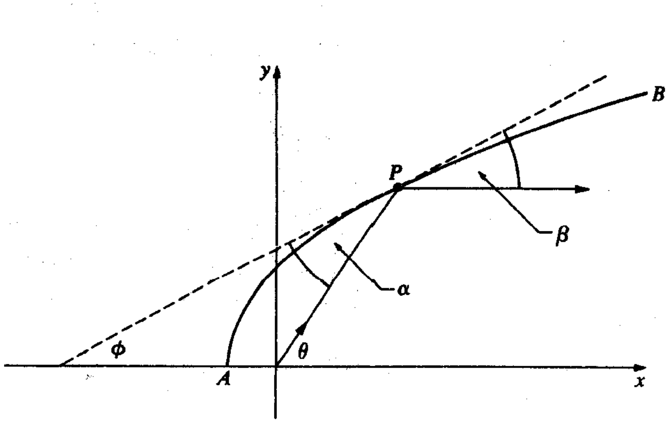
$$\tan\theta=\tan ۲\beta=\frac{۲\tan\beta}{۱-\tan^{۲}\beta}$$

داریم

$$\frac{y}{x}=\frac{۲dy/dx}{۱-(dy/dx)^{۲}}$$

باحل این‌معادلهٔ درجهٔ دوم نسبت به dy/dx خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x\pm\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{y}$$



شکل ۱۳

یا

$$x\,dx+y\,dy=\pm\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\,dx$$

بااستفاده از (۱۴)، می‌توان نوشت

$$\pm\frac{d(x^{۲}+y^{۲})}{۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}=dx$$

بنابراین

$$\pm\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=x+c$$

که پس‌از ساده‌کردن چنین می‌شود:

$$y^{۲}=۲cx+c^{۲}.$$

این معادله دستهٔ تمام سهمی‌هایی است‌که کانون‌شان مبدأ مختصات و محور تقارن‌شان محور xهاست. معمولا درحساب دیفرانسیل وانتگرال ثابت‌می‌شود‌که همهٔ سهمی‌ها خاصیتی‌مشهور به خاصیت‌کانونی دارند. نتیجهٔ مثال فوق این است‌که سهمی‌ها تنها منحنیهایی هستند، که این خاصیت را دارند.

تمرین

۱ـ نشان دهید هرگاه $(\partial M/\partial y-\partial N/\partial x)/(Ny-Mx)$ تابعی از $z=xy$ ، مانند $g(z)$ باشد، دراین‌صورت

$$\mu=e^{\int g(z)dz}$$

یك عامل انتگرال‌ساز (۲) است.

۲ـ هریك از معادلات زیر را با به‌دست‌آوردن یك عامل انتگرال‌ساز، حل‌کنید:

الف) $(۳x^{۲}-y^{۲})\,dy-۲xy\,dx=۰$

ب) $(xy-۱)\,dx+(x^{۲}-xy)\,dy=۰$

ج) $x\,dy+y\,dx+۳x^{۳}y^{۴}dy=۰$

۳ـ تحت چه‌شرایطی معادلهٔ (۲) عامل انتگرال‌سازی که تابع $z=x+y$ باشد، دارد؟

۴ـ هریك از معادلات زیر را حل‌کنید:

الف) $x\,dy-y\,dx=(۱+y^{۲})\,dy$

ب) $y\,dx-x\,dy=xy^{۳}dy$

ج) $x\,dy=(x^{۵}+x^{۳}y^{۲}+y)\,dx$

د) $(y+x)\,dy=(y-x)\,dx$

ه) $$x\,dy=(y+x^{2}+9y^{2})\,dx$$

۱۰. معادلات خطی

مهمترین نوع معادلات دیفرانسیل، معادلات خطی هستندکه درآنها مشتق بالاترین مرتبه، تابعی خطی از مشتقات مراتب پایینتر است. بنابراین، شکل کلی معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول به‌صورت زیر است

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$$

وشکل عمومی معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم عبارت‌است‌از

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y+r(x)$$

وبه‌همین‌ترتیب‌می‌توان ادامه داد. روشن است‌که ضرایب موجود درسمت‌راست این‌عبارات یعنی $p(x)$ ، $q(x)$ ، $r(x)$ وغیره صرفاً توابعی از x هستند.

هدف ما درحال‌حاضر، بررسی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول است‌که آن را به‌شکل متعارف زیر می‌نویسیم

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

ساده‌ترین روش حل این معادله، با مشاهدهٔ رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dx}(e^{\int P dx}y)=e^{\int P dx}\frac{dy}{dx}+yPe^{\int P dx}=e^{\int P dx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right) \tag{2}$$

برطبق این رابطه، چنانچه طرفین معادلهٔ (۱) را در $e^{\int P dx}$ ضرب کنیم، معادله به‌صورت

$$\frac{d}{dx}(e^{\int p dx}y)=Qe^{\int P dx} \tag{3}$$

درمی‌آید و باانتگرال‌گیری ازآن، رابطهٔ زیرحاصل می‌شود

$$e^{\int P dx}y=\int Qe^{\int P dx}\,dx+c$$

بنابراین

$$y=e^{-\int P dx}\left(\int Qe^{\int P dx}dx+c\right) \tag{4}$$

جواب عمومی معادلهٔ (۱) است.

مثال. معادلهٔ $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=3x$ راحل کنید.

واضح است که این معادله خطی و درآن $P(x)=1/x$ است، لذا داریم

$$\int p dx=\int\frac{dx}{x}=\log x \quad و \quad e^{\int P dx}=e^{\log x}=x$$

باضرب طرفین معادله در x و یادآوری رابطهٔ (۳) خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}(xy)=3x^2$$

بنابراین

$$xy=x^3+c \quad یا \quad y=x^2+cx^{-1}$$

آنچنانکه شیوهٔ حل معادلهٔ بالا نشان می‌دهد، نبایستی سعی کنیم فرمول پیچیدهٔ(۴) را یاد بگیریم و به‌نحوی مکانیکی آن‌را در داخل معادلات خطی به‌کار بندیم. بلکه، بسیار بهتر است روش به‌دست‌آوردن فرمول (۴) را به‌خاطر آوریم وآن‌را به‌کار بریم: طرفین را در $e^{\int P dx}$ ضرب‌کنید و انتگرال بگیرید. نکتهٔ منفی دراین مبحث این است که به‌نظر می‌رسد همه‌چیز بستگی به‌حقیقت بیان شده در (۲) دارد. به‌سخن دیگر، به‌نظر می‌رسد که عامل انتگرال‌ساز، $e^{\int P dx}$، به طور مرموزی از آسمان نازل شده است. درتمرین ۱ زیر، از خواننده خواسته شده است که با روشهای بخش ۹ عامل انتگرال‌ساز را خود به دست آورد.

تمرین

۱ــ معادلهٔ (۱) رابه شکل $Mdx+Ndy=0$ بنویسید و با به‌کارگیری مطالب بخش۹ نشان‌دهید که این معادله عامل‌انتگرال‌سازی‌مانندμ داردکه صرفاً تابعی ازx است. μ را بیابید وباحل معادلهٔ‌کامل $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ ، رابطهٔ (۴) را به‌دست آورید.

۲ــ هریك از معادلات خطی زیر را حل کنید:

الف) $x\frac{dy}{dx}-3y=x^4$

ب) $y'+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$

ج) $(1+x^2)\,dy+2xy\,dx=\cot x\,dx$

د) $y'+y=2xe^{-x}+x^2$

هـ) $y'+y\cot x=2x\csc x$

و) $(2y-x^3)dx=xdy$

۳ـ معادلهٔ $dy/dx+P(x)y=Q(x)y^n$ که به معادلهٔ برنولی شهرت دارد، درحالات $n=0$ یا $n=1$ خطی است. نشان دهید این معادله برای سایر مقادیر n نیز با تغییر متغیر $z=y^{1-n}$ قابل تبدیل به معادلهٔ خطی است، سپس با به‌کار گرفتن این روش، معادلات زیر را حل کنید

الف) $xy'+y=x^4y^3$

ب) $xy^2y'+y^3=x\cos x$

۴ـ نماد متداول dy/dx معمولا وقتی به‌کار گرفته می‌شود که y متغیر وابسته و x متغیرمستقل باشد. درتلاش برای حل معادله دیفرانسیل، گاهی اوقات گذاشتن x به‌جای y و y به‌جای x و کارکردن بامعادله حاصل مفید است. این روش را درمعادلات زیر به‌کار گیرید:

الف) $(e^y-2xy)y'=y^2$

ب) $y-xy'=y'y^2e^y$

۵ـ مسیرهای متعامد دستهٔ منحنی $y=x+ce^{-x}$ را به‌دست‌آورید.

۶ـ باتوجه به‌رابطهٔ (۴) می‌دانیم که جواب عمومی معادلهٔ خطی‌مرتبهٔ اول، یك‌دسته منحنی به‌شکل زیر است

$$y=cf(x)+g(x)$$

بعکس، نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل هردستهٔ منحنی به‌شکل بالا، خطی است.

۱۱. کاهش مرتبه

همچنانکه دیده‌ایم، شکل عمومی‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$F(x,y,y',y'')=0$$

است. دراین‌بخش، دونوع‌خاص ازمعادلات مرتبهٔ دوم رابررسی می‌کنیم که باروش‌معادلات مرتبهٔ اول قابل حل هستند.

متغیر وابسته ظاهر نمی‌شود. هرگاه معادله فاقد y باشد، آن‌را می‌توان به‌شکل زیر نوشت.

$$f(x,y',y'')=0 \qquad (1)$$

دراین حالت، متغیر وابسته جدید p را به‌کار می‌بریم ومی‌نویسیم

$$y'=p \quad \text{و} \quad y''=\frac{dp}{dx} \qquad (2)$$

این جایگذاری، معادلهٔ (۱) را به‌معادلهٔ مرتبهٔ اول

$$f\left(x , p , \frac{dp}{dx}\right)=0 \qquad (۳)$$

تبدیل می کند.

چنانچه بتوانیم جوابی برای‌معادلهٔ (۳) بیابیم، می‌توانیم به‌جای p دراین‌جواب، dy/dx بگذاریم و به‌حل نتیجهٔ آن بپردازیم. این روش، حل معادلهٔ مرتبهٔ دوم (۱) را به‌حل متوالی دومعادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل می کند.

مثال ۱. معادلهٔ $xy''-y'=3x^2$ را حل کنید.

متغیر وابسته یعنی y درمعادلهٔ فوق موجود نیست، بنابراین با توجه به (۲)، این معادله به‌شکل

$$x\frac{dp}{dx}-p=3x^2$$

یا

$$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=3x$$

تبدیل می‌شود، که معادله‌ای خطی است. این معادله را با روش بخش ۱۰ حل می کنیم،

$$p=\frac{dy}{dx}=3x^2+c_1x$$

بنابراین

$$y=x^3+\frac{1}{2}c_1x^2+c_2$$

جواب مطلوب است.

متغیر مستقل ظاهر نمی‌شود. هر گاه x صریحاً ظاهر نشود معادلهٔ مرتبهٔ دوم می‌تواند به‌شکل زیر نوشته شود

$$g(y , y' , y'')=0 \qquad (۴)$$

دراینجا نیز مانند حالت قبل، متغیر وابستهٔ جدید p را به‌کار می‌بریم، ولی این‌بار y'' را برحسب مشتق p نسبت به y بیان می کنیم

$$y'=p \quad \text{و} \quad y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy} \qquad (۵)$$

بدین‌ترتیب می‌توانیم (۴) را به‌شکل

$$g\left(y, p, p\frac{dp}{dx}\right)=0 \qquad (6)$$

بنویسیم وازاین‌جا به‌بعد مثل حالت قبل پیش رویم وباحل متوالی دومعادلهٔ دیفرانسیل‌مرتبهٔ اول، معادله را حل کنیم.

مثال ۲. معادلهٔ $y''+k^2y=0$ را حل کنید.

به‌کمك (۵)، این معادله را به‌صورت

$$p\frac{dp}{dy}+k^2y=0 \quad \text{یا} \quad p\,dp+k^2y\,dy=0$$

می‌نویسیم. از این معادله انتگرال می‌گیریم

$$p^2+k^2y^2=k^2a^2$$

بنابراین

$$p=\frac{dy}{dx}=\pm k\sqrt{a^2-y^2}$$

یا

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\pm k\,dx$$

انتگرال‌گیری مجدد، رابطهٔ زیر را خواهد داد

$$\sin^{-1}\frac{y}{a}=\pm kx+b$$

بنابراین

$$y=a\sin(\pm kx+b) \quad \text{یا} \quad y=A\sin(kx+B)$$

این جواب عمومی معادله را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$y=c_1\sin kx+c_2\cos kx \qquad (7)$$

که از بسط $\sin(kx+B)$ و تغییر شکل ثابتها به‌دست می‌آید.

معادله‌ای که در مثال ۲ حل شد، درکاربردها اکثراً ظاهر می‌شود (بخش ۵ را ببینید). این معادله خطی است، و جواب آن، (۷)، درفصل بعد، نظریهٔ عمومی معادلات خطی مرتبهٔ دوم جای داده خواهد شد.

تمرین

۱ــ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $yy''+(y')^2=0$

ب) $xy''=y'+(y')^3$

ج) $y''-k^2y=0$

د) $x^2y''=2xy'+(y')^2$

۲ـ جواب‌خصوصی معادلات‌دیفرانسیل زیر را که درشرایط داده‌شده صدق می کند، به‌دست آورید:

الف) $(x^2+2y')y''+2xy'=0$ ؛ $y=1$ ، $y'=0$ وقتی که $x=0$

ب) $yy''=y^2y'+(y')^2$ ؛ $y=-\frac{1}{2}$ ، $y'=1$ وقتی که $x=0$

۳ـ معادلهٔ $y''=1+(y')^2$ را با هر دو روش ذکر شده دراین بخش حل کنید، و نتایج را بایکدیگر وفق دهید.

۴ـ سیمی به‌شکل چرخزادی خم شده است که معادلات پارامتری آن $x=a(\theta-\sin\theta)$ و $y=a(1-\cos\theta)$ است وطبق شکل ۱۰ وارونه قرار گرفته است. هرگاه مهرهٔ کوچکی روی سیم رها شود و بدون اصطکاك و تنها دراثر نیروی ثقل بلغزد، نشان‌دهید سرعت آن، v درمعادلهٔ

$$4av^2=g(s_0^2-s^2)$$

صدق می کند که درآن s_0 و s طول دوقوس ازمنحنی هستندکه به پایینترین نقطهٔ منحنی منتهی‌می‌شوند وانتهای دیگرشان‌به‌ترتیب‌نقطهٔ شروع‌حرکت مهره ومکان مهره درهرزمان بعداز شروع حرکت است. بامشتق‌گیری از رابطهٔ فوق، معادلهٔ زیرحاصل می‌شود

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{4a}s=0$$

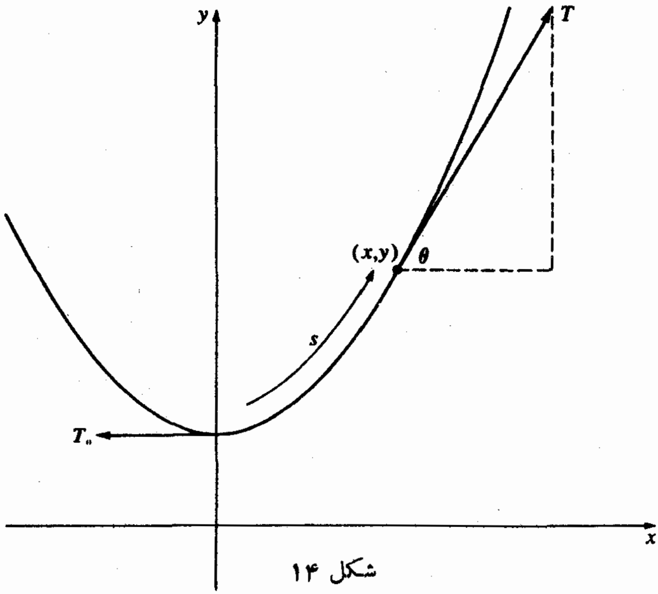
از این‌جا s را به‌صورت تابعی از t به‌دست آورید و زمان تناوب حرکت را تعیین کنید. توجه کنیدکه این‌نتایج خاصیت همزمانی چرخزاد را، که در مسئلهٔ ۶ـ۲ مورد بحث قرار گرفت، ثابت می کند.

۱۲. زنجیر آویخته. منحنیهای تعقیب

اکنون به‌بحث درمورد چندین کاربرد می‌پردازیم کـه معادلات دیفرانسیل حاصل ازآنها با روشهای این فصل قابل حل هستند.

مثال ۱. شکل یك‌زنجیر قابل‌انعطاف راکه در دونقطه محکم شده و دراثر وزن خود آویزان است، به‌دست آورید.

فرض‌می کنیم محور yها از پایین‌ترین نقطهٔ زنجیرعبورکند (شکل۱۴) و نیز s طول قوس منحنی ازپایین‌ترین نقطه تانقطهٔ (x, y) باشد، و فرض می کنیم $w(s)$ وزن‌مخصوص



شکل ۱۴

طولی زنجیر باشد. معادلهٔ منحنی را باتوجه به‌این امر به‌دست می‌آوریم کـه قطعهٔ زنجیر واقع بین $(x ، y)$ و پایین‌ترین نقطه، تحت‌تأثیر سه نیرو درحال تعادل است: کشش افقی $T_\circ$ درپایین‌ترین نقطه، کشش متغیر T در $(x ، y)$ که به‌دلیل انعطاف‌پذیری زنجیر، برآن مماس است و بالاخره نیروی وزن این قطعه‌که روبه‌پایین می‌باشد. مولفهٔ افقی T را با $T_\circ$ و مؤلفهٔ عمودی T را باوزن زنجیر برابر می گیریم

$$T\cos\theta = T_\circ \quad ، \quad T\sin\theta = \int_\circ^s w(s)\,ds$$

از اولین معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که

$$T\sin\theta = T_\circ \tan\theta = T_\circ \frac{dy}{dx}$$

بنابراین

$$T_\circ y' = \int_\circ^s w(s)\,ds$$

دراینجا بامشتق‌گیری نسبت به x ، انتگرال حذف می‌شود:

$$T_\circ y'' = \frac{d}{dx}\int_\circ^s w(s)\,ds = \frac{d}{ds}\int_\circ^s w(s)\,ds\frac{ds}{dx} = w(s)\sqrt{۱+(y')^۲}$$

بنابراین

$$T_\circ y'' = w(s)\sqrt{۱+(y')^۲} \qquad (۱)$$

معادلهٔ دیفرانسیل منحنی موردنظر است، و خود منحنی باحل این معادله به‌دست می‌آید. برای ادامهٔ حل مسئله باید اطلاع مشخصی درمورد تابع $w(s)$ داشته باشیم. معادلهٔ (۱) را درحالتی که $w(s)$ ثابت و برابر $w_\circ$ است حل می‌کنیم:

$$y''=a\sqrt{1+(y')^2} \quad , \quad a=\frac{w_\circ}{T_\circ} \tag{۲}$$

مطابق‌روش‌مذکور دربخش ۱۱، باجایگذاری $y'=p$ و $y''=dp/dx$ معادلهٔ(۲) به‌معادلهٔ

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=a\,dx \tag{۳}$$

تبدیل‌می‌شود. اکنون از رابطهٔ(۳) انتگرال می‌گیریم وبااستفاده ازاینکه برای $x=0$، p مساوی با صفر است معادلهٔ زیر حاصل می‌گردد

$$\log(p+\sqrt{1+p^2})=ax$$

معادلهٔ فوق رابرحسب p حل‌می‌کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})$$

هرگاه محور xها را درارتفاع مناسبی قرار دهیم، به‌نحوی‌که در $x=0$ داشته باشیم $y=1/a$، تابع

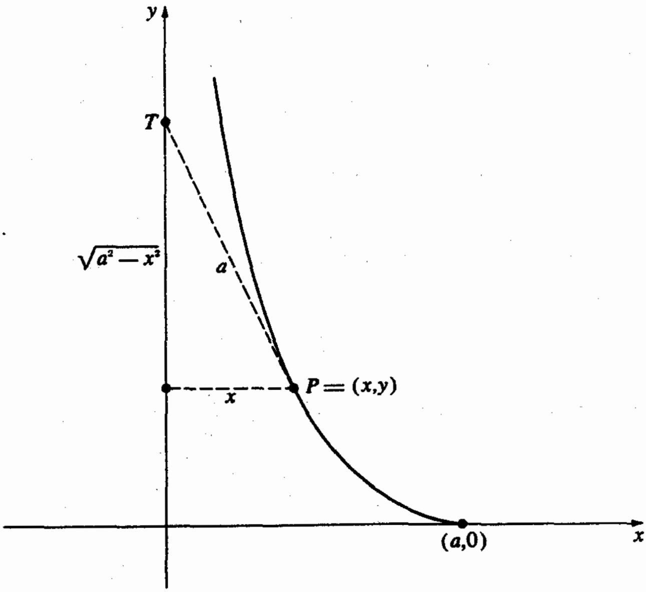
$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})=\frac{1}{a}\cosh ax$$

به‌دست‌می‌آید که منحنی آن‌شکل زنجیریکنواختی‌است که تحت‌تأثیروزنش‌آویخته شده‌است. این منحنی، زنجیری نامیده می‌شود. زنجیری‌ها درمسائل جالب دیگری نیز ظاهر می‌شوند. مثلا درفصل ۹ نشان خواهیم داد که اگرکمان واصل دونقطهٔ مفروض و واقع دربالای‌محور xها حول این محور دوران کند، آنگاه مساحت سطح حاصل از این دوران می‌نیمم‌است، هرگاه این‌کمان بخشی ازیك منحنی زنجیری باشد.

مثال ۲. نقطه P درصفحهٔ xy بانخ PT به‌طول a به‌آرامی کشیده‌می‌شود. هرگاه T ازمبدأ مختصات شروع به حرکت کند ودرجهت مثبت‌محور yها حرکت نماید، وچنانچه P ازنقطهٔ $(a,0)$ شروع به‌حرکت‌کند، مسیر p به چه صورت خواهد بود؟ این منحنی کشاننده نامیده می‌شود.

از شکل ۱۵ به‌آسانی دیده می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل مسیر عبارت‌است‌از:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$



شکل ۱۵

با جدا کردن متغیرها و انتگرال گیری و استفاده از این موضوع که در $x=a$ داریم $y=0$، نتیجه می‌شود که

$$y=a\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2}$$

معادلهٔ کشاننده است. این منحنی دارای اهمیت قابل ملاحظه‌ای است، زیرا سطح حاصل از دوران این منحنی حول محور yها، مدلی برای هندسهٔ غیر اقلیدسی از نوع لباچفسکی است.

مثال ۳. خرگوشی از مبدأ مختصات در جهت مثبت محور yها و با تندی a شروع به دویدن می‌کند. همزمان با آن سگی از نقطهٔ $(c ، ۰)$ با تندی b به تعقیب او می‌پردازد. مسیر سگ را تعیین کنید.

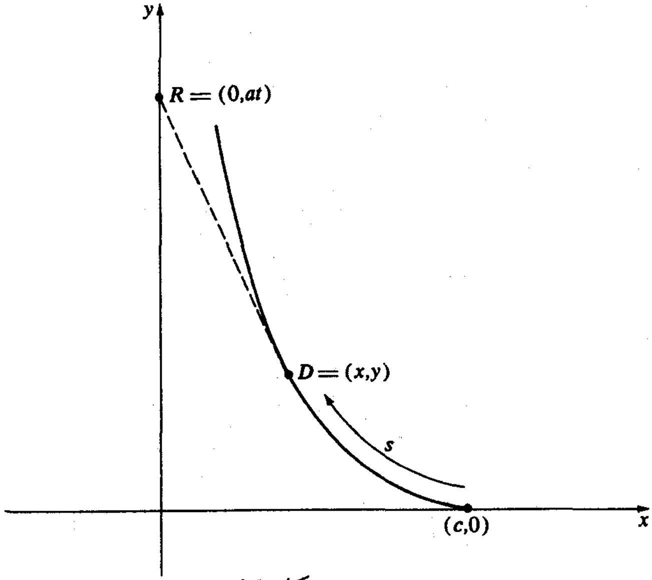
t ثانیه بعد از شروع حرکت هردو، خرگوش به نقطهٔ $R=(۰ ، at)$ و سگ به نقطهٔ $D=(x ، y)$ می‌رسند (شکل ۱۶). چون خط DR برمسیر مماس است، خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-at}{x} \quad \text{یا} \quad xy'-y=-at \tag{۴}$$

برای حذف t ، ابتدا از (۴) نسبت به x مشتق می گیریم

$$xy''=-a\frac{dt}{dx} \tag{۵}$$

از آنجا که $ds/dt=b$ ، داریم



شکل ۱۶

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{ds}\,\frac{ds}{dx}=-\frac{۱}{b}\sqrt{۱+(y')^{۲}}\,. \qquad (۶)$$

در (۶) علامت منفی به‌این علت ظاهــر شده است که با کاهش x مقدار s افزایش می‌یابد. هرگاه (۵) و (۶) را ترکیب کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل مسیر به‌دست می‌آید:

$$xy''=k\sqrt{۱+(y')^{۲}} \quad , \quad k=\frac{a}{b} \qquad (۷)$$

جایگزینی $y'=p$ و $y''=dp/dx$ معادلهٔ (۷) را به

$$\frac{dp}{\sqrt{۱+p^{۲}}}=k\frac{dx}{x}$$

تبدیل می‌کند که با انتگرال‌گیری و به‌کار بردن این شرط اولیه که در $x=c$ مقدار p برابر صفر است، خواهیم داشت

$$\log\left(p+\sqrt{۱+p^{۲}}\right)=\log\left(\frac{x}{c}\right)^{k}$$

این معادله را برحسب p بآسانی می‌توان حل کرد و مقدار حاصل برای p برابراست با

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{k}-\left(\frac{c}{x}\right)^{k}\right]$$

برای ادامهٔ حل و یافتن y به‌صورت تابعی از x، باید اطلاعات بیشتری درمورد k داشته باشیم. درمسئلهٔ ۸، از خواننده می‌خواهیم که برخی از امکانات را بررسی کند.

مثال ۴. محور yها و خط $x=c$ دوساحل رودخانه‌ای‌هستند، که‌جریان‌آب در آن دارای تندی ثابت a درجهت‌منفی محور yهاست. یک‌قایق در نقطهٔ $(c ، ۰)$ وارد رودخانه می‌شود و با تندی ثابت b نسبت به آب، مستقیماً به‌سوی مبدأ حرکت می کند، مسیر قایق چیست؟

مؤلفه‌های سرعت قایق (شکل ۱۷) عبارت‌اند از

$$\frac{dx}{dt}=-b\cos\theta \quad و \quad \frac{dy}{dt}=-a+b\sin\theta ،$$

بنابراین

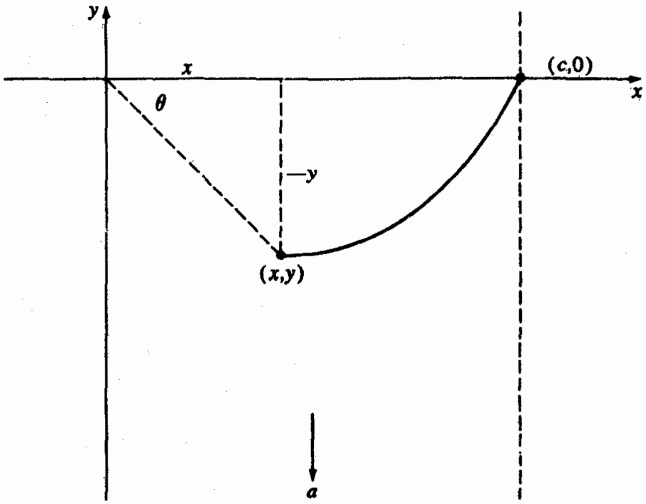
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-a+b\sin\theta}{-b\cos\theta}=\frac{-a+b(-y/\sqrt{x^2+y^2})}{-b(x/\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$=\frac{a\sqrt{x^2+y^2}+by}{bx}$$

این معادله همگن است، وجواب آن‌که باروش بخش ۷ به‌دست می‌آید، عبارت‌است‌از

$$c^k(y+\sqrt{x^2+y^2})=x^{k+1}$$

که در آن $k=a/b$. واضح است که سرنوشت قایق بستگی به رابطهٔ b با a دارد. در تمرین ۹ ازخواننده، خواسته شده است معلوم کند که تحت چه‌شرایطی قایق به‌ساحل می‌رسد.



شکل ۱۷

تمرین

۱ـ درمثال ۱ ، نشان دهیدکه کشش T درهر نقطهٔ دلخواه $(x \text{ ، } y)$ از زنجیر ، برابر $w_{\circ}y$ است.

۲ـ هرگاه زنجیر مثال ۱ ، تحت‌تأثیر باری با وزن مخصوص افقی $L(x)$ باشد، چه‌معادلهٔ دیفرانسیلی به‌جای (۱) باید به‌کار گرفته شود؟

۳ـ شکل یك‌کابل راکه وزن مخصوص‌آن صرف‌نظر کردنی است [یعنی $w(s)=\circ$] و وزن پلی با وزن مخصوص افقی ثابت $L(x)=L_{\circ}$ را تحمل می‌کند، تعیین کنید.

۴ـ هرگاه طول هرقطعهٔ کوچك ازیك‌کابل کشسان با وزن مخصوص یکنواخت، متناسب با کشش کابل درآن قطعه باشد، نشان‌دهیدکه اگر کابل مزبور دراثر وزن خود آویخته شود، به‌شکل سهمی درخواهد آمد.

۵ـ پرده‌ای از میله‌هایی باریك ساخته شده است‌که به سیمی با وزن ناچیز آویزانند. اگر میله‌ها نزدیك بهم و درفاصله‌های افقی مساوی باشند ولبهٔ پایینی پرده افقی فرض شود، شکل سیم را تعیین کنید.

۶ـ کدام منحنی واقع دربالای محور xها این خاصیت را داردکه‌طول قوس‌بین هردو نقطه روی منحنی، متناسب با سطح زیر آن قوس است؟

۷ـ نشان دهیدکه کشانندهٔ مثال ۲ بردسته دوایری با شعاع a و مرکز واقع بر محور yها عمود است.

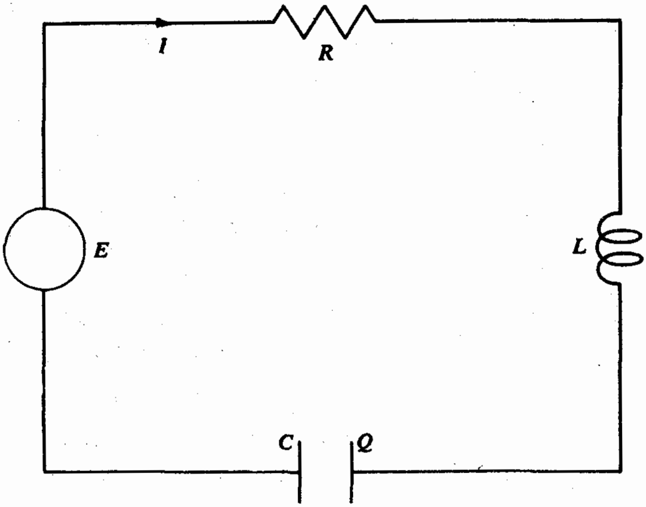
۸ـ الف) درمثال ۳ ، فرض کنیدکه $a<b$ (بنابراین $k<1$) و y را به‌صورت تابعی‌از x به‌دست آورید. وقتی سگ به خرگوش می‌رسد، خرگوش چه مسافتی طی‌کرده است؟
ب) فرض کنید $a=b$ و y را به‌شکل‌تابعی از x تعیین‌کنید. سگ تا چه‌حد به‌خرگوش نزدیك می‌شود؟

۹ـ درمثال ۴ ، معادلهٔ مسیر را برحسب y حل‌کنید وشرایطی برای a و b تعیین‌کنیدکه قایق بتواند به‌ساحل مقابل برسد. قایق درکجا به‌ساحل می‌رسد؟

۱۴. مدارهای سادهٔ الکتریکی

دراین قسمت، آن دسته ازمعادلات دیفرانسیل خطی را بررسی می‌کنیم‌که جریان الکتریسیته را درمدار الکتریکی ساده‌ای‌که درشکل ۱۸ نشان داده شده است، تعیین می‌کنند. این‌مدار شامل چهارعنصر الکتریکی‌است‌که عملکرد هریك از آنها بآسانی و بدون نیاز به‌معلومات خاصی درمورد الکتریسیته قابل درك است.

الف. منبع نیروی محرکهٔ الکتریکی E (باتری یامولد برق) که بار الکتریکی را هدایت و جریان الکتریکی I را تولید می‌کند. نیروی محرکهٔ الکتریکی E بسته به ماهیت منبع می‌تواند ثابت یا تابعی از زمان باشد.



شکل ۱۸

ب. مقاومت الکتریکی R که با ایجاد افتی برابر با $E_R = RI$ در نیروی محرکهٔ الکتریکی درمقابل جریان مقاومت می‌کند. معادلهٔ

$$E_R = RI$$

قانون اهم[1] نامیده می‌شود.

ج. خودالقا با ضریب خودالقایی L ، که به‌وسیلهٔ ایجاد افتی در E به اندازهٔ

$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

با هر تغییری درجریان الکتریکی مخالفت می‌کند.

د. خازن با ظرفیت C که بار الکتریکی Q را درخود ذخیره می‌کند. بار ذخیره شده در خازن با ورود بار اضافی مقابله می‌کند، و افتی که بدین ترتیب در مقدار E حاصل می‌شود عبارت است‌از:

$$E_C = \frac{1}{C}Q$$

---

۱. گئورگ زیمون اهم Georg Simon Ohm (۱۷۸۷–۱۸۵۴) فیزیکدان آلمانی که تنها خدمت مهم او به علم، کشف قانون فوق‌الذکر است. هنگامی‌که وی در سال ۱۸۲۷ این‌کشف را اعلام کرد ، چون بیش از حد قابل قبول، ساده بود، مورد قبول واقع نشد، به همین سبب او را غیرقابل اعتماد دانستند و آنچنان با وی بدرفتاری شدکه از استادی دانشگاه کولن استعفاکرد و قبل از اثبات صحت نظرش سالها در عزلت و فقر بسربرد. یکی از شاگردان وی در کولن پتردیریکله بود، که بعدها یکی از برجسته‌ترین ریاضی دانان قرن نوزدهم‌گردید.

بعلاوه، چون شدت جریان، آهنگ سیلان بار الکتریکی، وبنا براین آهنگ تغییر بار ذخیره شده درخازن را نشان می‌دهد، داریم

$$I=\frac{dQ}{dt}$$

این عناصر مدار با یکدیگر برطبق قانون کیر شهوف[1] عمل می کنند، که براساس آن، جمع جبری نیروهای محرکهٔ الکتریکی درمدار بسته صفر است. بنا بر این اصل، داریم

$$E-E_R-E_L-E_C=0$$

یا

$$E-RI-L\frac{dI}{dt}-\frac{1}{C}Q=0$$

که آن را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=E \qquad (1)$$

بسته به شرایط، می‌توان I یا Q را متغیر وابسته فرض کرد. درحالت اول، با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۱) نسبت به t و قرار دادن I به‌جای dQ/dt ، می‌توان Q را حذف کرد:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt} \qquad (2)$$

درحالت دوم، تنها با قرار دادن dQ/dt به‌جای I داریم

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E \qquad (3)$$

این معادلات خطی مرتبهٔ دوم را بعداً به‌تفصیل بیشتر بررسی خواهیم کرد. دراین بخش مقصود ما اساساً بررسی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E \qquad (4)$$

است، که از معادلهٔ (۱) درحالتی که خازن درمدار نباشد، حاصل می گردد.

مثال ۱. معادلهٔ (۴) را درحالتی حل کنید که نیروی محرکهٔ الکتریکی ثابت E_0 در

---

۱. گوستاو روبرت کیرشهوف Gustav Robert Kirchhoff (۱۸۲۴–۱۸۸۷) دانشمند دیگر آلمانی است که هردانشجوی فیزیك مقدماتی با کارهایش درمورد مدارهای الکتریکی آشناست. وی همچنین اصول تجزیهٔ طیفی را پایه گذاری کرد و راه را برای موارد استعمال طیف‌نمایی در تعیین ترکیب شیمیایی ستاره‌ها هموار کرد.

$t = \circ$ به مدار اعمال می‌شود، و جریان اولیه درآن $I_\circ$ است.

برای $t \geqslant \circ$ ، معادلهٔ این مدار به‌شکل

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E_\circ$$

است. دراینجا متغیرها را می‌توان جدا کرد که درنتیجه رابطهٔ

$$\frac{dI}{E_\circ-RI}=\frac{1}{L}dt$$

به‌دست می‌آید. با انتگرال‌گیری و به‌کار بردن شرط اولیه $I=I_\circ$ در $t=\circ$ ، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\log(E_\circ-RI)=-\frac{R}{L}t+\log(E_\circ-RI_\circ)$$

بنابراین

$$I=\frac{E_\circ}{R}+\left(I_\circ-\frac{E_\circ}{R}\right)e^{-Rt/L}$$

توجه کنید که شدت جریان I شامل یك بخش حالت ماندگار $E_\circ/R$ و یك بخش گذرای $(I_\circ-E_\circ/R)e^{-Rt/L}$ است که با ازدیاد t به‌سمت صفر میل می کند. درنتیجه، قانون اهم $E_\circ=RI$ برای مقادیر بزرگ t تقریباً صادق است. هم‌چنین مشاهده می‌شود که هرگاه $I_\circ=\circ$ ، داریم

$$I=\frac{E_\circ}{R}(1-e^{-Rt/L})$$

و هرگاه $E_\circ=\circ$ ، داریم $I=I_\circ e^{-Rt/L}$.

تمرین

۱ـ معادلهٔ (۴) را درحالتی که شدت جریان اولیه $I_\circ$ ونیروی محرکهٔ الکتریکی E که در $t=\circ$ اعمال می‌شود برابر است با

الف) $E=E_\circ e^{-kt}$

ب) $E=E_\circ \sin\omega t$

حل کنید.

۲ـ مداری را درنظر بگیرید که توسط معادلهٔ (۴) توصیف شود ونشان دهید که:

الف) هرگاه شدت جریان ماکزیمم یا می‌نیمم باشد، قانون اهم صادق است.

ب) نیروی محرکه E در شدت جریان ماکزیمم، نزولی و در شدت جریان می‌نیمم، صعودی است.

تمرینهای گوناگون فصل دوم

در ۲۵ معادلهٔ دیفرانسیل زیر، نمونه‌هایی از تمام انواع معادلات مورد بحث در این فصل وجود دارد. آنهارا حل کنید.

۱- $yy''=(y')^{۲}$

۲- $(۱-xy)y'=y^{۲}$

۳- $(۲x+۳y+۱)\,dx+(۲y-۳x+۵)\,dy=۰$

۴- $xy'=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$

۵- $y^{۲}dx=(x^{۳}-xy)\,dy$

۶- $(x^{۲}y^{۳}+y)\,dx=(x^{۳}y^{۲}-x)\,dy$

۷- $yy''+(y')^{۲}-۲yy'=۰$

۸- $x\,dy+y\,dx=x\cos x\,dx$

۹- $xy\,dy=x^{۲}dy+y^{۲}dx$

۱۰- $(e^{x}-۳x^{۲}y^{۲})y'+ye^{x}=۲xy^{۳}$

۱۱- $y''+۲x(y')^{۲}=۰$

۱۲- $(x^{۲}+y)\,dx=x\,dy$

۱۳- $xy'+y=x^{۲}\cos x$

۱۴- $(۶x+۴y+۳)\,dx+(۳x+۲y+۲)\,dy=۰$

۱۵- $\cos(x+y)\,dx=x\sin(x+y)\,dx+x\sin(x+y)\,dy$

۱۶- $x^{۲}y''+xy'=۱$

۱۷- $(y^{۲}e^{xy}+\cos x)\,dx=(e^{xy}+xye^{xy})\,dy=۰$

۱۸- $y'\log(x-y)=۱+\log(x-y)$

۱۹- $y'+۲xy=e^{-x^{۲}}$

۲۰- $(y^{۲}-۳xy-۲x^{۲})\,dx=(x^{۲}-xy)\,dy$

۲۱- $(۱+x^{۲})y'+۲xy=۴x^{۳}$

۲۲- $e^{x}\sin y\,dx+e^{x}\cos y\,dy=y\sin xy\,dx+x\sin xy\,dy$

۲۳- $(۱+x^{۲})y''+xy'=۰$

۲۴- $(xe^y+y-x^2)\,dy=(2xy-e^y-x)\,dx$

۲۵- $e^x(1+x)\,dx=(xe^x-ye^y)\,dy$

۲۶- فرض کنید عنصر رادیواکتیو مفروض A در اثر تلاشی به عنصر رادیواکتیو دیگری به‌نام B تجزیه می‌شود و B نیز به‌نوبهٔ خود به‌عنصر C تجزیه می‌گردد. اگر مقدار A درابتدا x_0 فرض شود و اگر مقادیر A و B درلحظهٔ t، بترتیب، x و y باشند و k_1 و k_2 ثابتهای آهنگ این دو واکنش باشند، y را به صورت تابعی از t تعیین کنید.

۲۷- بشکه‌ای حاوی ۲۰۰ لیتر آب نمك است که ۱۲ کیلوگرم نمك درآن حل شده‌است. از لحظهٔ $t=0$ به بعد، آب با آهنگ ۸ لیتر در دقیقه به این بشکه وارد می‌شود، ومخلوط نیز باهمین‌آهنگ ازبشکه خارج می‌شود و به درون بشکهٔمشابهی که درابتدا حاوی ۲۰۰ لیتر آب خالص است می‌ریزد. تعیین‌کنید درچه زمانی بشکهٔ دوم حاوی بیشترین مقدار نمك است.

۲۸- یك تعمیم طبیعی معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول

$$y'=p(x)+q(x)y$$

معادلهٔ ریکاتی[1]

$$y'=p(x)+q(x)y+r(x)y^2$$

است. درحالت‌کلی، این‌معادلـه با روشهای مقدماتی قابل حل نیست. اما، هرگاه یك جواب خصوصی از معادله به‌صورت $y_1(x)$ در دست باشد، جواب عمومی به‌صورت

$$y(x)=y_1(x)+z(x)$$

---

۱. کنت‌یاکوپو فرانسسکوریکاتی Count Jacopo Francesco Riccati (۱۶۷۶-۱۷۵۴) دانشمندی ایتالیایی بود که در ریاضیات، فیزیك و فلسفه آثاری دارد. اورا باید ناشر اصلی افکارنیوتن درایتالیا بحساب آورد. زمانی ریاست‌آکادمی علوم سن پترزبورگ به‌وی پیشنهاد گردید، اما وی طبعاً زندگی راحت و بی دغدغهٔ اشرافی خود را درایتالیا به مسئولیتهای اداری در روسیه‌ترجیح‌داد. اگرچه‌وی درمحافل علمی‌زمان خود، بسیار مشهور بود، اما امروزه یاد او فقط ازطریق معادلهٔ دیفرانسیلی‌که به‌نام اوست در اذهان مانده است. وحتی این‌امر ازتصادفات تاریخ است،چراکه ریکاتی صرفاً حالاتی خاص ازاین معادله را بررسی‌کرد بدون اینکه جوابی برای آنها بیابد، وبسیاری از این حالات خاص بشکل موفقیت آمیزی توسط اعضای خانوادهٔ برنولی بررسی شدند. جزئیات این داستان پیچیده را می‌توان درکتاب
G.N. Watson «A Treatise on the Theory of Bessel Functions» 2d ed., pp. 1–3, Cambridge, London, 1944.
یافت. معادلهٔ خاص ریکاتی $y'+by^2=cx^m$ برحسب‌تعدادی‌متناهی‌جمله قابل‌حل‌است‌اگر و تنها اگر، توانm برابر با ۲- یا به شکل$-4k/(2k+1)$ به‌ازای‌عددصحیحk باشد(تمرین ۸-۳۵ راکه بعداً خواهدآمدنگاه‌کنید).

خواهد بود، که درآن $z(x)$ ، جواب عمومی معادلهٔ برنولی

$$z'-(q+2ry_1)z=rz^2$$

است. این مطلب را ثابت کنید و جواب عمومی معادلهٔ

$$y'=\frac{y}{x}+x^3y^2-x^5$$

را که یك جواب خصوصی آن $y_1(x)=x$ است، به‌دست آورید.

مسائل دینامیکی باجرم متغیر. درصفحات قبل، بسیاری از موارد استعمال قانون دوم نیوتن را به‌شکلی کــه دربخش اول ارائه شده بود:

$$F=ma$$

بررسی کردیم، که درآن F نیروی وارد به‌جسمی به‌جـرم m و باشتاب a است. اما بـایـد توجه داشت که این رابطه تنها برای حالتی کــه جرم ثابت است به‌کار مـی‌رود. در واقع قانون نیوتن تا اندازه‌ای کلی‌تر است. وچنین بیان مـی‌شود که هرگاه نیروی F بـرجسمی به‌جرم m وارد شود، اندازه حرکتی مانند mv ، (v سرعت جسم است) باآهنگی برابر با آن نیرو تولید می‌کند:

$$F=\frac{d}{dt}(mv)$$

این معادله درحالتی که m ثابت است به $F=ma$ تبدیل می‌شود. بـرای به‌کار بردن این شکل از قانون نیوتن درمورد جسم متحرك با جرم متغیر، لازم‌است اندازهٔ حرکت ناشی‌از نیروی F از اندازهٔ حرکت ناشی از الحاق جرم از یك منبع خارجی به‌جسم متمایز شود. بنابراین، هرگاه جـرمی بـا سرعت $v+w$ (که w سرعت نسبت بـه m است) وباآهنگ dm/dt به m افزوده شود، باید اثر F درافـزایش اندازه حرکت با $(v+w)\,dm/dt$ تکمیل گردد. پس

$$(v+w)\frac{dm}{dt}+F=\frac{d}{dt}(mv)$$

که به‌شکل زیر ساده می‌شود

$$w\frac{dm}{dt}+F=m\frac{dv}{dt}$$

توجه داریم که، بسته به‌اینکه جرم جسم درحال افزایش ویاکاهش باشد، dm/dt مثبت یا منفی است وبسته به‌حرکت نسبی جرم افـزوده شده یاکاسته شده ازآن، w مثبت یـا منفی

می‌باشد. این ایده‌ها درتمرینهای زیر مورد بحث و بررسی قرار می گیرند.

۲۹ـ موشکی با جرم بدنهٔ m_1 حامل مقداری سوخت با جرم اولیهٔ m_2 می‌باشد. موشك دراثر احتراق سوختش از سطح زمین به‌طور عمودی به‌طرف بالا پرتاب مـی‌شود و آهنگ‌احتراق سوخت‌آن مقداری ثابت است مانند a (به‌طوری که $dm/dt = -a$، که درآن m جرم کل متغیر مـوشك است). مواد سوخته شده با سرعت b نسبت بـه موشك از عقب آن خارج می‌شوند. هرگاه از تمامی نیروهای خارجی، بجز نیروی ثقل mg، صرف‌نظر کنیم (g را ثابت فرض‌می کنیم)، ارتفاع و سرعت موشك را در لحظهٔ اتمام سوخت تعیین کنید (سرعت اتمام سوخت و ارتفاع اتمام سوخت).

۳۰ـ یك قطرهٔ باران کروی، تحت‌تأثیر نیروی ثقل ازحالت سکون شروع به‌سقوط می کند. هرگاه قطرهٔ مزبور درحین حرکت، ذرات بخار را با آهنگی متناسب با سطح خود جذب کند (ذرات بخار ساکن فرض می‌شوند)، وشعاع اولیهٔ قطره صفر فـرض شود، ثابت‌کنید که قطره موردنظر باشتاب ثابت $g/4$ سقوط می کند.

۳۱ـ یك‌قطرهٔ باران کروی درمحیطی بارطوبت یکنواخت، از حالت سکون شروع به‌سقوط می کند. هرگاه‌قطره‌درحین‌حرکت‌ذرات رطوبت‌را، که درحالت سکون فرض‌می‌شوند، جذب کند وشعاع اولیهٔ آن صفر فرض شود، نشان‌دهید که قطرهٔ مزبور با شتاب ثابت $g/7$ سقوط می کند.

۳۲ـ نظریهٔ نسبیت‌خاص‌اینشتین بیان‌می کند که m جرم ذره‌ای که باسرعت v حرکت می کند برابر است با

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (*)$$

که درآن c سرعت نور و m_0 جرم سکون ذره است.

الف) هرگاه ذره درفضای تهی از حالت سکون خارج شود و تحت‌تأثیر میدان ثقل ثابتی برای مدتی‌طولانی درخلأ حرکت‌کند بااختیار $w = -v$، v رابه‌عنوان تابعی‌از زمان بیابید ونشان دهید که وقتی $t \to \infty$ آنگاه $v \to c$ [1].

ب) فرض کنید که $M = m - m_0$ افزایش‌جرم ذره باشد. هرگاه E افزایش‌متناظر انرژی آن، برابر باکار انجام شده نیروی F وارد بر ذره باشد به‌طوری که

$$E = \int_0^v F\,dx = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv)\,dx = \int_0^v v\,d(mv)$$

تحقیق کنید که

---

۱. انریکو فرمی پیشنهادکرده استکه هرگاه پدیده‌ای کـه در فوق توصیف شد، در مورد ذرات باردار غبار بین ستارگان، که در اثرمیدانهای مغناطیسی ستارگان شتابدار می‌شوند به‌کار رود، تاحدی می‌تواند منشأ پرتوهای کیهانی را توجیه‌کند.

$$E = Mc^{2} \qquad (**)$$

ج) رابطهٔ (*) را از رابطهٔ (**) به‌دست آورید.

پیوست الف. روشهای عددی

دراین فصل چندین تکنیك برای حل انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول به‌وسیلهٔ فرمول ارائه کرده‌ایم. متأسفانه، این‌روشها همواره درمورد معادلات ناشی‌ازمسائل‌عملی‌قابل اعمال نمی‌باشند. درچنین حالاتی چه می‌توان‌کرد؟ شاید خواننده با روش سیمسون، آشنا باشد که براساس آن می‌توان مقدار عددی هرانتگرال معین را با دقت دلخواه محاسبه کرد. این روش ارتباطی به‌یافتن فرمولی برای بیان انتگرال نامعین مربوطه ندارد. به‌همین ترتیب، روشهایی نیز برای یافتن جواب عددی تقریباً همهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول، وقتی شرط اولیه داده شده است، وجود دارد که جواب معادلات را باهر تقریب دلخواه به‌دست می‌دهد. از این روشها صرف‌نظر از اینکه معادله برحسب توابع مقدماتی قابل‌حل باشد یا نه،می‌توان‌استفاده کرد. بررسی‌ومطالعهٔ‌چنین‌روشهایی بخشی از آنالیز عددی راتشکیل می‌دهد،که شاخه‌ای از ریاضیات‌است‌وهدفش محاسبهٔ تقریبی‌جوابهای عددی مسائل‌ریاضی به‌صورت اعشاری است.

برای درك اینکه منظور از جواب عددی معادلهٔ دیفرانسیل چیست، مسئلهٔ سادهٔ مقدار اولیهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$y(0)=1 \ , \quad y'=y \qquad (1)$$

e^x جواب بدیهی این‌معادله است‌که برای اغلب مقاصد نظری‌کفایت‌می‌کند. اما درکاربرد عملی ممکن است دانستن مقدار عددی این جواب در $x = 0.5$ لازم باشد، و عدد اعشاری ۱٫۶۴۹ ، احتمالا از نماد $e^{0.5}$ مفیدتر است. برخلاف جواب نظری معادلهٔ (۱) که‌به‌وسیلهٔ e^x داده می‌شود، جواب عددی معادله به‌وسیلهٔ جدول مقادیر e^x ارائه می‌گردد.

دراین پیوست چندین روش محاسبهٔ جواب عددی تقریبی برای مسئلهٔ مقدار اولیه به‌صورت زیر را شرح می‌دهیم

$$y(x_0)=y_0 \ , \quad y'=f(x\,,\,y) \qquad (2)$$

فرض خواهیم‌کردکه این مسئله دارای جواب یگانه‌ای است‌که با $y(x)$ نشان داده‌می‌شود. این روشها عبارت‌از دستورالعمل‌هایی محاسباتی‌اندکه کاملا مستقل از این واقعیت‌هستندکه فرمولی برای بیان $y(x)$ موجود هست یا نه وصرفاً براساس اطلاعاتی که از (۲) حاصل می‌شوند قرار دارند. بنابراین، این روشهای عددی و دیگر روشهای مشابه آنها در حکم چارهٔ نهایی برای مسائل با شرایط اولیه‌ای است‌که یا جواب دقیق آنها قابل حصول‌نیست ویا جوابشان آن چنان مخلوط درهم‌وبرهمی از توابع ضمنی است‌که برای مقاصد عملی تقریباً غیرقابل‌استفاده است.

بگذارید ماهیت این روشهای عددی راکمی مشخص‌ترکنیم. تابع $y(x)$ را برای

همهٔ مقادیر x در یك فاصله تقریب نخواهیم زد، بلکه این عمل را تنها برای یك دنباله گسسته از نقاط که از x_0 شروع می‌شوند، انجام خواهیم داد، مثلا برای دنباله‌ای همچون

$$x_0 \ , \ x_1 = x_0 + h \ , \ x_2 = x_1 + h , \dots$$

که در آن h عدد مثبتی است. این بدان مفهوم است که می‌خواهیم مقدار تقریبی y_1 را برای مقدار دقیق $y(x_1)$ ، مقدار تقریبی y_2 را برای مقدار دقیق $y(x_2)$ ، الی آخر تعیین کنیم. هر روش عددی که تشریح می‌کنیم قاعده‌ای خواهد بود، که براساس آن y_{n+1} را می‌توان با استفاده از y_n محاسبه کرد. از آنجا که مقدار اولیهٔ $y(x_0) = y_0$ معلوم است (به‌طور دقیق)، هرگاه قاعدهٔ ذکر شده را برای $n = 0$ اعمال کنیم y_1 محاسبه می‌شود و با $n = 1$، y_2 به‌دست می‌آید، و الی آخر. هدف کلی ما این است که دربارهٔ هر روش اطلاعات مشروحی ارائه دهیم تا خواننده درصورت نیاز، خود قادر به اعمال آنها باشد[1].

برای روشن شدن مطلب، روشهای مورد بحث را درمورد مسئلهٔ ساده

$$y(0) = 1 \ , \ y' = x + y \qquad (3)$$

که معادلهٔ آزمایشی می‌نامیم، اعمال می‌کنیم. واضح است که معادلهٔ (۳) خطی است و جواب دقیق آن بآسانی تعیین می‌شود

$$y = 2e^x - x - 1 \ . \qquad (4)$$

معادلهٔ (۳) را به دو دلیل به عنوان مسئلهٔ آزمایشی انتخاب کرده‌ایم. اولا این معادله آنقدر ساده است که می‌توان درآن، روشهای عددی را بدون اینکه قدمهای اصلی درلابلای محاسبات محو گردند به‌کار گرفت. ثانیاً ، جواب دقیق (۴) به‌آسانی برای مقادیر مختلف x با استفاده ازجدول مقادیر e^x قابل محاسبه است. بنابراین وسیله‌ای دراختیار داریم که باآن می‌توان دقت جوابهای حاصل از روشهای عددی راسنجید.

روش اویلر. هرگاه از طرفین معادلهٔ دیفرانسیل (۲) از x_0 تا $x_1 = x_0 + h$ انتگرال بگیریم و شرط اولیهٔ $y(x_0) = y_0$ را اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x , y)\, dx$$

یا

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x , y)\, dx \qquad (5)$$

---

۱. برای بحث بیشتر وبررسی دقیقتر مسائل پیچیده خطا ودقت به‌کتابهای زیرمراجعه کنید:
J. B. Scarborough, «Numerical Mathematical Analysis» 5th ed., Johns Hopkins, Baltimore, 1962.

یا

W. Jennings, «First Course in Numerical Methods,» Macmillan, New York, 1964.

چون در رابطهٔ (۵) تابع مجهول $y=y(x)$ در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است بیشتر ازاین نمی‌توانیم پیش برویم مگرآنکه ابتدا بطریقی این انتگرال را تقریب بزنیم وهرنوع تقریب، روشی عددی برای حل (۲) به‌دست می‌دهد.

روش اویلر بسیار ساده ولی نسبتاً خالی از دقت است. بررسی این روش ازاین‌جهت ارزشمند است که راه را برای فهم روشهای دقیقتر و درعین‌حال پیچیده‌تر هموار می‌کند. منظور یافتن y_1، یعنی مقدار تقریبی $y(x_1)$ است، بااین فرض که تغییرات تابع‌زیرانتگرال $f(x, y)$ در (۵) درفاصلهٔ $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ آنقدر کم است که، با جایگزینی $f(x_0, y_0)$ یعنی مقدار تابع درنقطهٔ انتهای چپ فاصله به‌جای $f(x, y)$، تنها خطای کمی حاصل می‌شود:

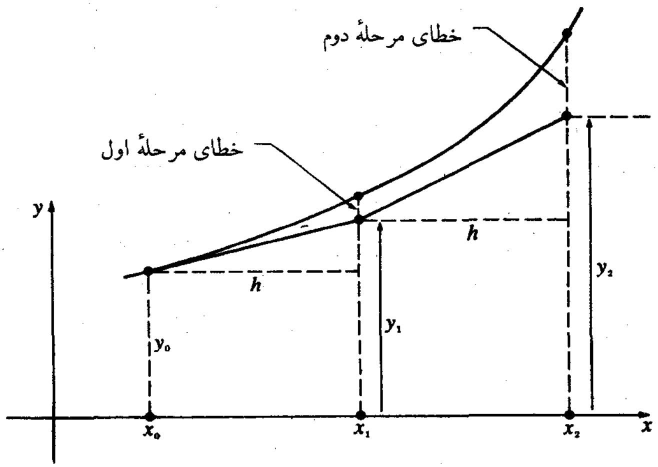
$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0, y_0)dx = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$$
$$= y_0 + hf(x_0, y_0) \qquad (۶)$$

اکنون می‌توان به‌همین روش y_2 را برحسب y_1 توسط رابطهٔ $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ محاسبه کرد، و درحالت عمومی خواهیم داشت

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (۷)$$

تعبیر هندسی این روابط درشکل ۱۹ مشخص شده است که درآن، منحنی هموار جواب‌دقیق (ولی‌مجهول) معادلهٔ (۲) است که توسط خط شکسته تقریب‌شده‌است. برای‌فهم‌شکل، توجه کنید که $f(x_0, y_0)$ شیب خط مماس برمنحنی جواب در نقطهٔ مبدأ (x_0, y_0) است.

برای‌روشن کردن روش‌اویلر آنرا درموردمسئلهٔ آزمایشی (۳)، به‌کارمی بریم. باانتخاب



شکل ۱۹

فواصل به‌طول ۰ر۲ $=h$، جواب‌را در نقاط ۰ر۲ ، ۰ر۴ ، ۰ر۶ ، ۰ر۸ ، ۱ر۰ $=x_n$ تقریب می‌زنیم. بهتراست محاسبات را به صورت جدول ۱ مرتب کنیم. دراولین سطر این جدول، شرط اولیهٔ ۱ $=y$ برای ۰ $=x$، مقدار شیب $y'=x+y=$ ۱ر۰۰ را تعیین می‌کند. چون ۰ر۲ $=h$ و $y_۱=y_۰+hf(x_۰ , y_۰)$ ، مقدار بعدی یعنی $y_۱$ برابر با ۱ر۲۰ $=$ (۱ر۰۰)۰ر۲ $+$ ۱ر۰۰ است.

جدول ۱

x_n	y_n	شیب $=x_n+y_n$	y_n+ ۰ر۲(شیب) $=y_{n+۱}$
۰ر۰	۱ر۰۰	۱ر۰۰	۱ر۰۰ + ۰ر۲(۱ر۰۰) = ۱ر۲۰
۰ر۲	۱ر۲۰	۱ر۴۰	۱ر۲۰ + ۰ر۲(۱ر۴۰) = ۱ر۴۸
۰ر۴	۱ر۴۸	۱ر۸۸	۱ر۴۸ + ۰ر۲(۱ر۸۸) = ۱ر۸۶
۰ر۶	۱ر۸۶	۲ر۴۶	۱ر۸۶ + ۰ر۲(۲ر۴۶) = ۲ر۳۵
۰ر۸	۲ر۳۵	۳ر۱۵	۲ر۳۵ + ۰ر۲(۳ر۱۵) = ۲ر۹۸
۱ر۰	۲ر۹۸		

سپس، این تقریب، به ستون مربوط به y_n در سطر دوم منتقل می‌شود و همین روند برای به‌دست آوردن $y_۲$ تکرار می‌شود و مقدار ۱ر۴۸ برای‌آن به‌دست می‌آید. دو رقم‌اعشاری را حفظ کرده‌ایم و مقدار تقریبی حاصل برای $y(۱)$ برابر با ۲ر۹۸ است. مقدار دقیق حاصل از رابطهٔ (۴)، برابر با ۳ر۴۳۶۵۶ است و بنابراین خطا حدود ۱۴ درصد است. هرگاه محاسبات مشابهی را برای ۰ر۱ $=h$ انجام دهیم، مقدار تقریبی حاصل برای $y(۱)$ برابر با ۳ر۱۸ خواهد بود، و مقدار خطا به حدود ۸ درصد کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توانیم دقت این روش را با انتخاب مقادیر کوچکتر h افزایش دهیم، ولی این عمل به قیمت محاسباتی بیشتر تمام می‌شود.

روش اویلر اصلاح‌شده. واضح‌است که خطاهای به‌این‌بزرگی (۱۴درصد و ۸ درصد) رضایت‌بخش نیستند. این خطاها را می‌توان با انتخاب مقادیر بسیارکوچکتر h به‌میزان‌قابل ملاحظه‌ای‌کاهش داد، اما راه بهتر، یافتن‌روشهای دقیقتر است. مثلا باگذاشتن مقدارمتوسط مقادیر f درنقاط انتهایی چپ وراست فاصله، یعنی $[f(x_۰ , y_۰)+f(x_۱ , y(x_۱))]/۲$ به جای تابع زیر انتگرال، می‌توانیم انتظار بهبود نتیجه را داشته باشیم. این درحقیقت‌استفاده از روش ذوزنقه در تقریب انتگرال معین (۵) است، و به جای (۶) خواهیم داشت:

$$y_۱=y_۰+\frac{h}{۲}[f(x_۰ , y_۰)+f(x_۱ , y(x_۱))] \qquad (۸)$$

اشکال(۸) دراین‌است که مقدار $y(x_۱)$ نامعلوم‌است. اما، اگر به‌جای $y(x_۱)$ ازمقدار تقریبی آن که توسط روش‌سادهٔ اویلر به‌دست‌می‌آیداستفاده کنیم‌و آن‌را با $z_۱=y_۰+hf(x_۰ , y_۰)$

نشان دهیم ، رابطهٔ (۸) به صورت قابل استفادهٔ زیر درخواهد آمد:

$$y_{۱}=y_{۰}+\frac{h}{۲}[f(x_{۰}،y_{۰})+f(x_{۱}،z_{۱})]$$

به طور کلی‌تر

$$y_{n+۱}=y_n+\frac{h}{۲}[f(x_n،y_n)+f(x_{n+۱}،z_{n+۱})] \qquad (۹)$$

که در آن

$$z_{n+۱}=y_n+hf(x_n،y_n) \qquad (۱۰)$$

درموردمسئلهٔ آزمایشی(۳) بافاصله‌های به‌طول $h=$ ۲ر۰ روابط فوق به‌صورت‌زیردرمی‌آیند

$$z_{n+۱}=y_n+۰ر۲(x_n+y_n) \cdot$$

و

$$y_{n+۱}=y_n+۰ر۱[(x_n+y_n)+(x_{n+۱}+z_{n+۱})] \cdot$$

محاسبات را با $n=$ ۰ آغاز می کنیم و مقادیر اولیهٔ $x_{۰}=$ ۰ر۰ و $y_{۰}=$ ۱ر۰۰۰ را به‌کار می گیریم (این‌بار سه رقم اعشار را حفظ می کنیم) ومی نویسیم

$$z_{۱}=۱ر۰۰۰+۰ر۲(۰ر۰+۱ر۰۰۰)=۱ر۲۰۰$$

و

$$y_{۱}=۱ر۰۰۰+۰ر۱[(۰ر۰+۱ر۰۰۰)+(۰ر۲+۱ر۲۰۰)]=۱ر۲۴۰$$

جدول۲مقادیرتقریبی جواب‌را برای‌نقاط $x_n=$ ۲ر۰، ۴ر۰، ۶ر۰ ، ۸ر۰ ، ۰ر۱ نشان‌می‌دهد که با ادامهٔ عملیات به دست‌می‌آیند. تقریب حاصل برای مقدار $y(۱)$ برابـر با ۴۰۶ر۳ است. لـذا خطای ایـن روش حـدود یك درصد است کـه نشان دهندهٔ یك بهبود واقعی است.

جدول ۲

x_n	y_n	$z_{n+۱}$	$y_{n+۱}$
۰ر۰	۱ر۰۰۰	۱ر۲۰۰	۱ر۲۴۰
۰ر۲	۱ر۲۴۰	۱ر۵۲۸	۱ر۵۷۷
۰ر۴	۱ر۵۷۷	۱ر۹۷۳	۲ر۰۳۲
۰ر۶	۲ر۰۳۲	۲ر۵۵۸	۲ر۶۳۱
۰ر۸	۲ر۶۳۱	۳ر۳۱۷	۳ر۴۰۶
۱ر۰	۳ر۴۰۶		

روش رونگه ـ کوتا[1]. این روش مؤثر قادر به ارائهٔ نتایجی دقیق است بدون اینکه لازم باشد h را چندان کوچك انتخاب کنیم که در آن محاسبات طولانی شوند. ما در اینجا شیوهٔ به دست آوردن این روش را شرح نخواهیم داد، و صرفاً نحوهٔ استفاده از آن را تشریح می‌کنیم[2]. برای یافتن y_{n+1} برحسب x_n و y_n ابتدا چهار مقدار زیررا به‌ترتیب به دست‌می‌آوریم.

$$m_1 = hf(x_n , y_n)$$

$$m_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}\right),$$

$$m_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}\right),$$

$$m_4 = hf(x_n + h , y_n + m_3).$$

حال مقدار y_{n+1} برابرخواهد بود با:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \tag{11}$$

کارآئی این‌روش از اینجا روشن می‌شودکه برای $n = 0$، روش فوق معادل به‌کارگیری قاعدهٔ سیمسون در تقریب انتگرال معین (۵) است البته به‌شرط آنکه تابع زیر انتگرال $f(x , y)$ تابعی صرفاً از x باشد[3].

اکنون رابطهٔ (۱۱) را برای تقریب $y(1)$ در مسئلهٔ آزمایشی (۳) به کار می گیریم. با $h = 1$ تنها یك مرحله لازم است، و داریم

$$m_1 = 1(0 + 1) = 1 ,$$

$$m_2 = 1(0 + 0.5 + 1 + 0.5) = 2 ,$$

$$m_3 = 1(0 + 0.5 + 1 + 1) = 2.5 ,$$

---

۱. کارل رونگه Carl Runge (۱۸۵۶ـ۱۹۲۷)، ازسال۱۹۰۴ تا ۱۹۲۵ استاد ریاضیات کار بسته در دانشگاه گوتینگن‌بود. او به‌خاطر کارهایش درزمینهٔ اثر زیمان وبخاطرکشف قضیه‌ای‌که پیش‌درآمد قضیهٔمعروف تو ـ زیگل ـ رات درمعادلات دیوفانتوسی‌بود، شهرت دارد. م. و. کوتا M. W. Kutta (۱۸۶۷ـ۱۹۴۴) دانشمند آلمانی دیگری در ریاضیات کار بسته بود که به‌خاطر سهمش در نظریهٔ کوتا ـ ژوکوفسکی (راجع به‌نیروی بالابر لایه هوا درآئرودینامیك) شهرت دارد.

۲. برای آشنایی با یکی از روشهای به‌دست آوردن آن، نگاه‌کنید به

W. Jennings, «First Course in Numerical Methods», pp. 143–147, Macmillan, New York, 1964.

۳. نگاه‌کنید به

Scarborough., pp. 357–358.

$$m_۴=۱(۰+۱+۱+۲٫۵)=۴٫۵ \text{ ،}$$

پس

$$y_۱=۱+\frac{۱}{۶}(۱+۴+۵+۴٫۵)=۳٫۴۱۷ \cdot$$

این تقریب حتی از تقریب روش اویلر اصلاح شده با $h=۰٫۲$ بهتـر است. در جدول ۳ نتایج مربوط به‌مسئلهٔ آزمایشی با $h=۰٫۲$ براساس روش‌رونگه ـ کوتا را نشان‌داده‌ایم. مشاهده می‌شود که مقدار تقریبی $y(۱)$ برابـر با ۳٫۴۳۶ است، که منطبق بـر مقدار دقیق $y(۱)$ تا سه رقم اعشار است.

متداول است که دراین مرحله نکاتی دربارهٔ استفاده ازکامپیوترهای رقمی سریع در به‌کارگرفتن این‌روشها گفته شود. اما نگارنده ترجیح‌می‌دهد که به‌پند آن تاریخ‌نگاربزرگ هنر توجه کند که گفت «نادان آنکه بیش ازآنچه دارد می‌بخشد.»

جدول ۳

x_n	y_n	$m_۱$	$m_۲$	$m_۳$	$m_۴$	$y_{n+۱}$
۰٫۰	۱٫۰۰۰	۰٫۲۰۰	۰٫۲۴۰	۰٫۲۴۴	۰٫۲۸۹	۱٫۲۴۳
۰٫۲	۱٫۲۴۳	۰٫۲۸۹	۰٫۳۳۷	۰٫۳۴۲	۰٫۳۹۷	۱٫۵۸۴
۰٫۴	۱٫۵۸۴	۰٫۳۹۷	۰٫۴۵۶	۰٫۴۶۲	۰٫۵۲۹	۲٫۰۴۴
۰٫۶	۲٫۰۴۴	۰٫۵۲۹	۰٫۶۰۲	۰٫۶۰۹	۰٫۶۹۱	۲٫۶۵۱
۰٫۸	۲٫۶۵۱	۰٫۶۹۰	۰٫۷۷۹	۰٫۷۸۸	۰٫۸۸۸	۳٫۴۳۶
۱٫۰	۳٫۴۳۶					

۳

معادلات خطی مرتبهٔ دوم

۱۴. مقدمه

درفصول قبل انــواع خاصی از معادلات دیفرانسیل را کــه برحسب تــوابع مقدماتی آشنا قابل حل هستند ، مطالعه نمودیم. روشهای تشریح‌شده احتیاج به تبحر قابل ملاحظه درفنون انتگرال‌گیری دارد وکاربردهای جالب وفراوان آنها رنگ وبوی عملی دارد. ولی‌متأسفانه باید پذیرفت که این قسمت از مطالب تا حدی شبیه کیسه‌ای پر از ترفندهای گوناگون شده است وکمتر ماهیت معادلات دیفرانسیل و حل آنها در حالت کلی را روشن می‌کند. دراین فصل یکدستهٔ مهم از معادلات را کــه دارای نظریــه‌ای غنی و پرکاربرد هستند مورد بحث قرار خواهیم داد. خواهیم دید که به‌کمك چند اصل ساده می‌توان به‌این نظریه ، ساختمانی منسجم و ارضاکننده داد.

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به صورت کلی

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$$

و یا به صورت ساده‌تر

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \qquad (1)$$

مــی‌باشند. همچنانکــه از ظــاهر علایــم بر می‌آیــد $P(x)$ ، $Q(x)$ ، و $R(x)$ تــوابعی فقط از x (یــا شاید مقادیــری ثابت) هستند. واضح است کــه بــا انتخاب ۱ بــه عنوان ضریب y'' درمعادله ، به هیچ وجه ازکلیت مسئله کاسته نمی‌شود ، زیرا می‌توان این شکل‌را

همیشه با یك تقسیم به دست آورد. معادلات از ایـن نوع در فیزیك ، بخصوص در رابطه با ارتعاشات درمکانیك ودررابطه با نظریهٔ مدارهای الکتریکی،ازاهمیت زیادی برخوردارند. به علاوه، همانطورکه در فصول بعد خواهیم دید، ایده‌های زیباو عمیقی در ریاضیات‌محض ازمطالعهٔ این معادلات ناشی شده‌اند.

ازاین‌امرکه معادلات دیفرانسیل‌مرتبهٔ اول رامی‌توان به‌سادگی‌حل کرد، نباید برداشت اشتباهی‌نمود. درحالت‌کلی ، معادلهٔ (۱) را نمی‌توان به‌طورصریح برحسب‌توابع مقدماتی شناخته‌شده‌حل کرد، ویاحتی به‌مرحلهٔ انتگرال گیری رساند. برای‌دست‌یابی به‌جواب، معمولا لازم می‌شودکه به‌روندهای بی‌نهایتی ازاین یا آن نوع ،که معمولا سریهای بینهایت‌هستند، متوسل شد. بسیاری ازمعادلات خاص که‌کاربردهای بویژه مهمی‌دارند، مثل معادلات لژاندر وبسل کـه در بخش ۱ بدانها اشاره شد، مفصلا مطالعه شده‌اند ، و نظریهٔ مربوط به هر یك از این معادلات اغلب چنان پیچیده بوده است‌که‌گویی به تنهایی بخش‌کاملی از آنالیز را بنا می‌نهد. این مطالب را در فصول ۵ و ۶ مورد بحث قرار خواهیم داد.

دراین فصل بررسی مفصل‌ما درمورد روشهای‌واقعی حل معادلهٔ(۱) ، اغلب ، منحصر به حالت خاصی می‌شودکـه ضرایب $P(x)$ و $Q(x)$ ثابت باشند. همچنین باید تأکیدکنیم که اغلب ایده‌ها و روشهای مورد بحث را می‌توان بلافاصله و بدون هیچ تغییری در اصول بنیادی ، بلکه تنها با پیچیدگی بیشتر در جزئیات حاشیه‌ای ، به معادلات خطی مراتب‌بالاتر تعمیم داد. با محدودکردن توجه خود به معادلات مرتبهٔ دوم ، از حداکثر سادگی وسهولت بهره‌مند می‌شویم ، بدون آنکه ایده‌های اصلی را خدشه‌دار نموده باشیم ، و درعین حال ، بحث ما ، آنقدرکلیت خواهد داشت‌که تقریباً همهٔ معادلات خطی حائز بیشترین اهمیت در ریاضی و فیزیك را دربرگیرد.

از آنجاکه درحالت‌کلی نمی‌توان جواب صریحی از معادلهٔ (۱) را ، برای‌بررسی، به دست آورد. اولین‌وظیفه ما آن است‌که مطمئن شویم این‌معادله واقعاً دارای جوابی هست. قضیهٔ وجود و یگانگی زیر در فصل ۱۱ ثابت شده است.

قضیهٔ الف. فرض‌کنیدکه‌توابع $P(x)$ ، $Q(x)$، و $R(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ$[a,b]$ پیوسته‌باشند[1]. هرگاه $x_\circ$ نقطه‌ای متعلق به $[a , b]$ باشد ، وهرگاه $y_\circ$ ، $y'_\circ$ دوعدد دلخواه باشند ، آنگاه معادلهٔ (۱) دارای یك و تنها یك جواب $y(x)$ درآن فاصله است به‌طوریکه $y(x_\circ)=y_\circ$ و $y'(x_\circ)=y'_\circ$.

بنابراین‌تحت‌این‌شرایط، درهرنقطهٔ $x_\circ$ از $[a , b]$ مقادیر$y(x)$ و $y'(x)$رامی‌توان بدلخواه تعیین‌کرد و دراین صورت دقیقاً یك‌جواب (۱) روی $[a , b]$ وجود خواهدداشت که مقادیر تعیین شده درنقطهٔ مفروض را اختیارکند ؛ یا به زبان هندسی‌تر ، معادلهٔ (۱) در

---

۱. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که $a<b$ ، آنگاه نماد $[a , b]$ نشانگرفاصله‌ای است متشکل از همهٔ xهای حقیقی‌که در $a\leqslant x\leqslant b$ صدق می‌کنند. این فاصله را بسته گویند زیرا شامل نقاط انتهایی خود است. فاصله باز حاصل از حذف نقاط انتهایـی را با (a , b) نشان می‌دهند، وتوسط نامساویهای $a<x<b$ مشخص می‌شود.

فاصلهٔ $[a ، b]$ دارای جواب یگانه‌ای است که از نقطهٔ معین $(x_0 ، y_0)$ با ضریب زاویهٔ داده شدهٔ y'_0 می‌گذرد. در بحث‌های کلی در خلال بقیهٔ این فصل، همواره (بدون آنکه صریحاً ذکر کنیم) شرایط قضیهٔ الف را فرض شده در نظر خواهیم گرفت.

جملهٔ $R(x)$ در معادلهٔ (۱) را به این دلیل از بقیهٔ جملات مجزا کردیم و به طرف راست منتقل نمودیم که شامل متغیر وابستهٔ y یا هیچ کدام از مشتقات آن نمی‌باشد. اگر $R(x)$ متحد با صفر باشد، معادلهٔ (۱) به معادلهٔ همگن

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{۲}$$

تبدیل می‌گردد (این استفادهٔ سنتی از کلمهٔ همگن را نباید با کاربرد سنتی و کاملا متفاوت به‌کار رفته در بخش ۷، اشتباه کرد.) اگر $R(x)$ متحد با صفر نباشد، معادلهٔ (۱) را غیرهمگن گویند. جهت مطالعهٔ معادلهٔ غیرهمگن (۱) لازم است که معادلهٔ همگن (۲) را نیز که از جایگزینی صفر به جای $R(x)$ در معادلهٔ (۱) به دست می‌آید همراه آن بررسی کنیم. دلیل این امر را می‌توان بسادگی دریافت. فرض کنید بطریقی بفهمیم که $y_g(x ، c_1 ، c_2)$ جواب عمومی معادلهٔ (۲) است (چون معادله از مرتبهٔ دوم است انتظار داریم که جواب عمومی شامل دوعدد ثابت دلخواه باشد) وفرض کنید $y_p(x)$ جواب خصوصی معینی ازمعادلهٔ (۱) باشد. حال چنانچه $y(x)$ جوابی ازمعادلهٔ (۱) باشد، آنگاه یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $y(x)-y_p(x)$ یک جواب معادلهٔ (۲) است:

$$\begin{aligned}(y-y_p)''&+P(x)(y-y_p)'+Q(x)(y-y_p)\\ &=[y''+P(x)y'+Q(x)y]-[y''_p+P(x)y'_p+Q(x)y_p]\\ &=R(x)-R(x)=0\end{aligned} \tag{۳}$$

ازآنجاکه $y_g(x ، c_1 ، c_2)$ جواب‌عمومی معادلهٔ (۲) است، نتیجه می‌گیریم که با انتخاب دوعدد ثابت مناسب c_1 و c_2 می‌توان نوشت $y(x)-y_p(x)=y_g(x ، c_1 ، c_2)$، یا

$$y(x)=y_g(x ، c_1 ، c_2)+y_p(x)$$

این استدلال قضیهٔ زیر را ثابت می‌کند.

قضیهٔ ب. هرگاه y_g جواب عمومی معادلهٔ (۲) و y_p یک جواب خصوصی معادلهٔ (۱) باشد، آنگاه y_g+y_p جواب عمومی معادلهٔ (۱) خواهد بود.

در بخش ۱۹ خواهیم دید که بادانستن y_g، یک دستورالعمل صوری برای یافتن y_p وجود دارد. این مطلب نشان می‌دهد که مسئله اصلی در نظریهٔ معادلات خطی همان‌حل معادلهٔ همگن است. به همین دلیل، بیشتر توجه ما وقف بررسی ساختمان y_g و مطالعهٔ روشهای مختلف یافتن شکل صریح آن (که هیچ یک در تمام حالات کارآمد نیست) خواهد شد.

اولین نکته‌ای که باید دررابطه بامعادلهٔ همگن (۲) بدان توجه کنیم آن است که تابع $y(x)$ متحد باصفر ــ یعنی $y(x)=0$ برای همهٔ xها ــ همواره یک جواب است. این را جواب

صفر معادله می‌نامند ،که غالباً مورد توجه نیست. نکتهٔ اساسی مربوط به چگونگی ساختمان جواب معادلهٔ (۲) در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ج. هرگاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادلهٔ (۲) باشند ، آنگاه

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad (۴)$$

نیز ، به‌ازای هردو عدد ثابت اختیاری c_1 و c_2 ، جواب‌آن معادله خواهد بود.

اثبات. قضیهٔ فوق طی روابط زیر مستقیماً اثبات می‌شود

$$(c_1y_1+c_2y_2)''+P(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+Q(x)(c_1y_1+c_2y_2)$$
$$=(c_1y_1''+c_2y_2'')+P(x)(c_1y_1'+c_2y_2')+Q(x)(c_1y_1+c_2y_2)$$
$$=c_1[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1]+c_2[y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2]$$
$$=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0. \qquad (۵)$$

ضرایب‌اعداد c_1 و c_2 صفرند زیرا بنا به‌فرض ، y_1 و y_2 جوابهای(۲)هستند.

بنا به دلایلی مربوط به جبرمقدماتی بردارها، جواب (۴) را عموماً یك ترکیب خطی از جوابهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ می‌نامند. با استفاده از این اصطلاح قضیهٔ ج را می‌توان به صورتی دیگر بیان نمود:

هر ترکیب خطی از دو جواب معادله همگن (۲) نیز یك جواب آن است.

فرض کنیدکه به طریقی دوجواب معادلهٔ (۲) را یافته باشیم. آنگاه این قضیه جواب دیگری ازمعادله را به‌دست می‌دهدکه حاوی دوعدد ثابت دلخواه استوبنا براین‌ممکن‌است جواب عمومی معادلهٔ (۲) باشد. دراینجا یك مشکل وجود دارد: هرگاه یکی از جوابهای y_1 یا y_2 مضرب ثابتی از دیگری باشد ، مثلا $y_1=ky_2$ ، آنگاه داریم:

$$c_1y_1+c_2y_2=c_1ky_2+c_2y_2=(c_1k+c_2)y_2=cy_2$$

که تنها یك ثابت اساسی در آن وجود دارد. براین اساس ، منطقی است امیدوار باشیم‌که هرگاه هیچیك از جوابهای y_1 و y_2 مضربی از دیگری نباشد ، آنگاه

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۲) باشد. این مطلب را در بخش بعد به اثبات خواهیم رساند.

اکنون جا دارد متذکر شویم که بخش عظیمی از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل خطی متکی به خواص اساسی بیان شده در قضایای ب و ج است. ضمن دقت در محاسبات (۳) و (۵) ، می‌بینیم که این خواص خود ناشی از خطی بودن مشتق‌گیری است، یعنی اینکه رابطه

$$[\alpha f(x)+\beta g(x)]'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$$

برای‌هردو عددثابت‌دلخواهαوβ و هردو تابع‌مشتق‌پذیر دلخواه$f(x)$ و$g(x)$ درست‌است.

تمرین

۱ـ با تحقیق و بررسی، جواب عمومی معادلهٔ $y''=e^x$ را بیابید.

۲ـ برای هریك از معادلات زیر، یك جواب خصوصی پیدا کنید:

الف) $x^3y''+x^2y'+xy=1$

ب) $y''-2y'=6$

ج) $y''-2y=\sin x$

۳ـ با حذف اعداد ثابت c_1 و c_2، معادلهٔ دیفرانسیل هریك از دسته منحنی‌های زیر را بیابید:

الف) $y=c_1x+c_2x^2$

ب) $y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$

ج) $y=c_1\sin kx+c_2\cos kx$

۴ـ تحقیق کنید که $y=c_1x^{-1}+c_2x^5$ یك جواب معادلهٔ

$$x^2y''-3xy'-5y=0$$

است در هر فاصلهٔ $[a, b]$ که شامل صفر نباشد. اگر $x_0\neq 0$ و اگر y_0 و y'_0 دلخواه باشند، نشان دهید که c_1 و c_2 را به یك وتنها یك طریق می‌توان انتخاب کرد به طوری که $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$.

۵ـ نشان دهید که $y=x^2\sin x$ و $y=0$ هردو جواب معادلهٔ

$$x^2y''-4xy'+(x^2+6)y=0$$

هستند و هردو در شرایط $y(0)=0$ و $y'(0)=0$ صدق می‌کنند. آیا این با قضیهٔ الف تناقض‌دارد؟ اگر ندارد، چرا؟

۶ـ هرگاه یك جواب معادلهٔ (۲) در فاصلهٔ $[a, b]$، در هر نقطه از این فاصله برمحور x ها مماس باشد، آنگاه آن جواب بایدمتحد با صفرباشد. چرا؟

۷ـ اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادلهٔ (۲) درفاصلهٔ $[a, b]$ باشند و صفر مشترکی در این فاصله داشته باشند، نشان دهید که یکی ازاین جوابها مضرب ثابتی از دیگری است. [توجه کنید که نقطهٔ x_0 را صفر تابع $f(x)$ گویندهرگاه $f(x_0)=0$.]

۱۵. جواب عمومی معادلهٔ همگن

هرگاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشند و یکی از آنها مضرب ثابتی از دیگری باشد، می‌گویند آنها در $[a, b]$ وابستهٔ خطی هستند. در غیراین صورت، اگرهیچ یك مضرب ثابتی از دیگری نباشد، آنهارا مستقل خطی می‌نامند. باید

توجه داشت که اگر تابع $f(x)$ متحد با صفر باشد، آنگاه $f(x)$ و هر تابع $g(x)$، وابستهٔ خطی هستند، زیرا $f(x)=0\cdot g(x)$.

در این بخش، هدف اثبات قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ الف. هرگاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ همگن

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

در فاصلهٔ $[a , b]$ باشند، آنگاه

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{2}$$

جواب عمومی معادلهٔ (۱) در $[a , b]$ است بدین‌معنی‌که هرجواب معادلهٔ (۱) در این‌فاصله را می‌توان با انتخاب مناسب اعداد ثابت c_1 و c_2 از (۲) به‌دست آورد.

به کمك چند لم و ایده‌های کمکی اثبات را در چند مرحله ارائه خواهیم کرد.

فرض کنید که $y(x)$ یك جواب معادلهٔ (۱) درفاصلهٔ $[a , b]$ باشد. باید نشان دهیم که اعداد ثابت c_1 و c_2 را می‌توان چنان یافت که برای همهٔ x ها در $[a , b]$، رابطهٔ

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

برقرار باشد. بنابر قضیهٔ ۱۴-الف، هر جواب معادلهٔ (۱) در فاصلهٔ $[a , b]$ با مقدار آن و اندازهٔ مشتقش در یك نقطه کاملا مشخص می‌شود. در نتیجه، چون توابع $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ و $y(x)$ هردو جواب معادلهٔ (۱) در فاصلهٔ $[a , b]$ هستند، کافی است نشان دهیم که برای نقطه‌ای چون x_0 در فاصلهٔ $[a , b]$ می‌توان c_1 و c_2 را چنان یافت که روابط

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y(x_0)$$

و

$$c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y'(x_0)$$

برقرار باشند.

برای‌آنکه بتوان این‌دستگاه را برای‌مجهولهای c_1 و c_2 حل کرد، کافی‌است‌دترمینان

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}=y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

مقداری مخالف صفر داشته باشد. این امر ما را به بررسی تابعی از x به صورت

$$W(y_1 , y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'$$

که به رونسکیی[1] y_1 و y_2 مشهور است وتوجه خاص به اینکه آیا این تابع در x_0 صفر

---

۱. هوینه رونسکی Hoëné Wronski (۱۷۷۸—۱۸۵۳) یك لهستانی تهیدست با شخصیتی غریب بودکه بیشترعمرش را درفرانسه‌گذرانده. دترمینان رونسکیی‌که دربالا ذکرشد تنهاکاروی درزمینهٔ ریاضیات است. اوتنها ریاضیدان لهستانی قرن نوزدهم است‌که امروز نامش‌باقی مانده است و این امر بدین لحاظ که در قرن بیستم، لهستان چهره‌های برجسته‌ای عرضه کرده است، کمی تعجب‌آور است.

می‌شود، هدایت می‌کند. اولین لم، با اثبات بی اهمیت بودن موقعیت نقطهٔ $x_\circ$، مسئله را ساده می کند.

لم ۱. فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادلهٔ (۱) در فاصلهٔ $[a, b]$ باشند، آنگاه رونسکیی آنها، یعنی $W = W(y_1, y_2)$، در فاصلهٔ $[a, b]$، یا همواره صفر است ویا هرگز صفر نمی‌شود.

اثبات. نخست توجه می کنیم که

$$W' = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

سپس، چون y_1 و y_2 هردو جواب معادلهٔ (۱) هستند، داریم:

$$y_1'' + P y_1' + Q y_1 = 0$$

و

$$y_2'' + P y_2' + Q y_2 = 0$$

حال معادلـهٔ اول را در y_2 و دومی را در y_1 ضرب و سپس از هم کسر می کنیم، در نتیجه داریم

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

یا

$$\frac{dW}{dx} + PW = 0$$

جواب عمومی این معادلهٔ مرتبهٔ اول عبارت است از

$$W = ce^{-\int P dx}$$

و با توجه به اینکه قسمت نمایی هرگز صفر نمی‌شود، اثبات تکمیل است.

این لم، هدف کلی ما ازاثبات قضیه را به نشان دادن این مطلب، که رونسکیی هردو جواب مستقل‌خطی دلخواه برای معادلهٔ (۱) متحد باصفر نیست، تحویل می کند. این‌موضوع به میزانی فراتر ازحد مورد نیاز، در لم بعد ثابت شده است.

لم ۲. اگر توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادلهٔ (۱) در فاصلهٔ $[a, b]$ باشند، این دوتابع‌وابستهٔ خطی‌هستند، اگروتنها اگر رونسکیی‌آنهایعنی $W(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$ متحد با صفر باشد.

اثبات. مطلب را با این فرض که y_1 و y_2 وابستهٔ خطی‌اند آغاز می کنیم و از آن نتیجه می گیریم که $y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$. اگر یکی از جوابها در $[a, b]$ متحد با صفر باشد، نتیجهٔ فوق روشن است. بنابراین، بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم که هیچیك صفر نیستند؛ و با توجه به‌این نکته و وابستگی خطی آنها، نتیجه

می‌شود که، هر کدام مضرب ثابتی ازدیگری هستند. بنابراین یك‌عدد c وجود داردبه‌طوری که $y_2 = cy_1$ و در نتیجه $y_2' = cy_1'$. از حذف c بین این دو رابطه درمی‌یابیم که $y_1y_2' - y_2y_1' = 0$، و این نیمی از لم را ثابت می‌کند.

حال‌فرض می‌کنیم که رونسکیی متحد باصفر باشد و وابستگی خطی‌را ثابت می‌کنیم. هرگاه y_1 در فاصلهٔ $[a, b]$ متحد با صفر باشد، آنگاه (همان طورکه در آغاز این بخش اشاره‌کردیم) توابع وابستهٔ خطی هستند. بنابراین می‌توانیم فرض‌کنیم که y_1 متحد باصفر نیست، در این صورت از پیوستگی تابع y_1 نتیجه شودکه y_1 دریك زیر فاصلهٔ $[c, d]$ از $[a, b]$ هرگز صفر نمی‌شود. چون رونسکیی در $[a, b]$ متحد با صفراست، می‌توانیم آن را به y_1^2 تقسیم کنیم تا رابطهٔ

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = 0$$

در $[c, d]$ به دست آید. این رابطه را می‌توان به صورت $(y_2/y_1)' = 0$ نوشت وبا انتگرالگیری نتیجه می‌شود که، برای عدد ثابتی مانند k وکلیهٔ x های فاصلهٔ $[c, d]$ $y_2/y_1 = k$ یا $y_2(x) = ky_1(x)$. سرانجام چون مقادیر $y_2(x)$ و $ky_1(x)$ در فاصلهٔ $[c, d]$ برابرند، مشتقشان نیز دراین فاصله برابر خواهد بود، وبا توجه به قضیهٔ ۱۴-الف می‌توانیم برابری

$$y_2(x) = ky_1(x)$$

را برای همهٔ x های فاصلهٔ $[a, b]$ نتیجه بگیریم، واین خود اثبات راکامل می‌کند.

با این لم اثبات قضیهٔ الف‌کامل می‌شود.

معمولا، ساده‌ترین راه برای اثبات استقلال خطی دو جواب معادلهٔ (۱) در یك‌فاصله آن است که نشان دهیم، دراین‌فاصله نسبت این دو مقدارثابت‌نیست، و دراغلب حالات، این مطلب با تحقیق و بررسی روشن می‌گردد. ولی، دربعضی مواقع، براحتی می‌توان آزمون صوری موجود در لم ۲ را به‌کار گرفت: رونسکیی را محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مخالف صفراست. هردو روش درمثال زیر توصیف شده‌اند.

مثال ۱. نشان‌دهیدکه $y = c_1\sin x + c_2\cos x$ جواب‌عمومی‌معادلهٔ $y'' + y = 0$ در هرفاصله است، وجواب خصوصی را طوری بیابیدکه شرایط $y(0) = 2$ و $y'(0) = 3$ را ارضا کند.

این حقیقت را که $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \cos x$ جواب هستند به‌سادگی می‌توان‌از جایگزینی آنها در معادله نتیجه‌گرفت. استقلال خطی آنها در هرفاصله را می‌توان از اینجا نتیجه‌گرفت‌که $y_1/y_2 = \tan x$ ثابت نیست و یا از این مطلب‌که رونسکیی هرگز صفر نمی‌شود:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

چون توابع $P(x)=0$ و $Q(x)=1$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته‌انـد، از قضیهٔ الف نتیجه می‌شود که $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ جواب عمومی معادلـهٔ داده شده در فاصلهٔ $[a,b]$ است. علاوه‌براین، چون‌فاصلهٔ $[a,b]$ را می‌توان‌بدون‌آنکه شامل نقاط ناپیوستگی $P(x)$ یا $Q(x)$ گردد، تا بینهایت گسترش داد، این جواب عمومی برای کلیهٔ xها معتبراست. برای یافتن جواب خصوصی موردنظر، دستگاه

$$c_1\sin 0+c_2\cos 0=2$$

$$c_1\cos 0-c_2\sin 0=3$$

را حل می‌کنیم. حل ایـن دستگاه نتیجه می‌دهـد کـه $c_1=3$ و $c_2=2$، و بنابـراین $y=3\sin x+2\cos x$ جوابی خصوصی است که در شرایط داده شده صدق می‌کند.

مفاهیم وابستگی واستقلال خطی در پهنه‌ای وسیعتر از آنچه دراینجـا آمـده است، اهمیت دارند. همان‌طور کـه ممکن است خواننده تـاکنون دریافته باشد، شاخهٔ مهمی از ریاضیات معروف به جبرخطی چندان بیش ازبررسی مجرد این مفاهیم همراه باکاربردهای فراوان، نیست.

تمرین

درتمرینهای ۱ تا ۴، استقلال خطی را به‌کمك رونسکیی نشان دهید.

۱ـ نشان‌دهید که e^x و e^{-x} جوابهای مستقل‌خطی‌معادلهٔ $y''-y=0$ در هرفاصله‌ای‌هستند.

۲ـ نشان دهید که درهرفاصله‌ای که شامل صفرنباشد، $y=c_1x+c_2x^2$ جواب‌عمومی‌معادلهٔ

$$x^2y''-2xy'+2y=0$$

است و جوابی خصوصی را که در شرایط $y(1)=3$ و $y'(1)=5$ صدق کند، تعیین کنید.

۳ـ نشان دهید که $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ در هرفاصله‌ای جواب عمومی

$$y''-3y'+2y=0$$

می‌باشد وجوابی خصوصی را کـه در شرایط $y(0)=-1$ و $y'(0)=+1$ صدق می‌کند بیابید.

۴ـ ثابت‌کنید که $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$ جواب عمومی معادلهٔ

$$y''-4y'+4y=0$$

در هرفاصله‌ای‌است.

۵ـ دو تابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2|x|$ را در فاصلهٔ $[-1,1]$ در نظربگیرید:

الف) نشان دهید که رونسکیی آنها، $W(f,g)$، متحد باصفر است.

ب) نشان دهید که f و g وابسته خطی نیستند.

ج) آیا (الف) و (ب) در تناقض با لم ۲ هستند؟ اگر نیستند، چرا ؟

۶ـ واضح است کـه $\sin x$، $\cos x$ و $\sin x$، $\sin x - \cos x$ دو جفت متمایـز از جوابهای مستقل خطی معادلهٔ $y'' + y = 0$ هستند. بنابراین، اگـر y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادلهٔ همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

باشند، مشاهده می‌کنیم که y_1 و y_2 تـوسط این معادله به طور منحصر به فرد مشخص نمی‌شوند.

الف) نشان دهید که

$$P(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

و

$$Q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

بنابراین، معادله توسط هرجفت جواب مستقل خطی مفروض، به طور منحصر بفرد معین می‌گردد .

ب) به کمك (الف) معادلهٔ $y'' + y = 0$ را ازهریك از دوجفت جوابهای مستقل خطی فوق‌الذکر به‌دست آورید.

ج) به کمك (الف) معادلهٔ تمرین ۴ را از جفت جوابهای مستقل خطی e^{2x} و xe^{2x} به دست آورید.

۱۶. استفاده از یك جواب معلوم برای یافتن جوابی دیگر

همانطورکه ملاحظه کردید، هرگاه دوجواب مستقل خطی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ از معادلهٔ همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

را بدانیم بسادگی می‌توانیم جواب عمومی آن‌را بنویسیم. اما y_1 و y_2 را چگونه می‌توان یافت؟ متأسفانه هیچ‌گونه روش کلی برای این‌کار وجود ندارد. ولی، برای یافتن y_2 به کمك جواب معلوم y_1 روشی متعارف وجود دارد. این روش دارای اهمیت قابل‌ملاحظه‌ای است، زیرا در بسیاری ازحالات می‌توان یك جواب y_1 از معادله را به‌وسیلهٔ تحقیق و بررسی ویا ازراهی دیگر به دست آورد .

برای تشریح این روش، فرض می‌کنیم $y_1(x)$ جواب غیرصفر معلومی از معادلهٔ (۱) باشد، به‌طوری‌که برای هرعدد ثابت c، $cy_1(x)$ نیز جواب است. ایدهٔ اساسی آن‌است که به‌جای عدد ثابت c تابع مجهولی مانند $v(x)$ جایگزیـن و سپس سعی کنیم v راچنان بیابیم که $y_2 = vy_1$ جوابی برای‌معادلهٔ (۱) گردد. درابتداکارآیی این روش اصلاًمحسوس نیست ولی در عمل مفید واقع می‌شود. برای آنکه متوجه شویم چگونه ممکن است بفکـر

امتحان این روش افتیم، به‌خاطرمی‌آوریم که استقلال خطی دو جواب y_1 و y_2 مستلزم این است که نسبت y_2/y_1 تابعی‌غیرثابت از x، مانند v باشد، واگر بتوانیم v را بیابیم، درآن صورت چون y_1 را می‌دانیم، y_2 را پیدا می کنیم ومسئله حل می‌شود.

حال فرض می کنیم که $y_2=vy_1$ جواب معادلهٔ (۱) باشد، به‌طوری که

$$y_2''+Py_2'+Qy_2=0 \tag{۲}$$

و سعی می کنیم که تابع مجهول $v(x)$ را بیابیم. با جایگزینی تابع $y_2=vy_1$ وعبارات

$$y_2''=vy_1''+2v'y_1'+v''y_1 \quad \text{و} \quad y_2'=vy_1'+v'y_1$$

در معادلهٔ (۲) و مرتب کردن نتیجه، به‌دست می‌آوریم که

$$v(y_1''+Py_1'+Qy_1)+v''y_1+v'(2y_1'+Py_1)=0$$

ازآنجا که y_1 جواب معادلهٔ (۱) است، این رابطه به‌صورت

$$v''y_1+v'(2y_1'+Py_1)=0$$

و یا

$$\frac{v''}{v'}=-2\frac{y_1'}{y_1}-P$$

درمی‌آید. حال با یك انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود :

$$\log v'=-2\log y_1-\int P\,dx$$

بنابراین

$$v'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P\,dx}$$

و

$$v=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P\,dx}dx \tag{۳}$$

تنها چیزی‌که باقی‌می‌ماند، اثبات این‌ادعاست که y_1 و $y_2=vy_1$ که درآن v توسط (۳) داده شده است ، در واقع مستقل خطی هستند، واین مطلب در تمرین ۱ بـه‌عهدهٔ خواننده واگذار شده است.

مثال ۰۱ $y_1=x$ جوابی‌ازمعادلهٔ $x^2y''+xy'-y=0$ است که‌به‌دلیل‌سادگی‌اش، با تحقیق و بررسی یافته می‌شود. مطلوب است تعیین جواب عمومی این معادله.

ابتدا معادلهٔ داده شده را به‌صورت (۱) درمی‌آوریم:

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^{2}}y=0$$

چون $P(x)=1/x$ ، جواب دومی که مستقل خطی از اولی باشد به صورت $y_2=vy_1$ است، که در آن

$$v=\int\frac{1}{x^{2}}e^{-\int 1/x\,dx}\,dx=\int\frac{1}{x^{2}}e^{-\log x}\,dx=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}$$

وازآنجا $y_2=(-1/2)x^{-1}$ ، بنا براین جواب عمومی معادله، $y=c_1x+c_2x^{-1}$ است.

تمرین

۱- اگر y_1 یك جواب غیر صفر معادلهٔ (۱) باشد و $y_2=vy_1$ ، که در آن v مطابق فرمول (۳) داده شده است، جواب دوم یافته شده در متن باشد، بامحاسبه رونسکیی y_1 و y_2، نشان دهید که این دو جواب مستقل خطی‌اند.

۲- با استفاده از روش این بخش، جواب عمومی هریك ازمعادلات زیر را به کمك جواب دادهٔ شدهٔ y_1 به دست آورید:

الف) $y''+y=0 \quad , \quad y_1=\sin x$

ب) $y''-y=0 \quad , \quad y_1=e^{x}$

۳- معادلهٔ $xy''+3y'=0$ دارای جواب واضح $y_1=1$ است. جواب عمومی معادله را بیابید.

۴- نشان‌دهید که $y_1=x^{2}$ یك‌جواب‌معادلهٔ $x^{2}y''+xy'-4y=0$ است،وجواب‌عمومی معادله را بیابید.

۵- معادلهٔ $(1-x^{2})y''-2xy'+2y=0$ حالت خاصی از معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^{2})y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

به‌ازای $p=1$ است. روشن است که‌یك‌جواب آن $y_1=x$ است.جواب‌عمومی آن‌را بیابید.

۶- معادلهٔ $x^{2}y''+xy'+(x^{2}-1/4)y=0$ حالتی خاص‌از معادلهٔ بسل

$$x^{2}y''+xy'+(x^{2}-p^{2})y=0$$

به‌ازای $p=1/2$ است. تحقیق کنید که $y_1=x^{-1/2}\sin x$ درهرفاصله‌ای که‌تنهاشامل مقادیر مثبت x باشد، یك جواب معادله است، و جواب عمومی معادله را بیابید.

۷- با استفاده از این که $y_1=x$ یك جواب واضح هریك از معادلات زیر است جواب عمومی آنها را بیابید.

الف) $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0$

ب) $$x^2y''+2xy'-2y=0$$

۸– جواب عمومی‌معادلهٔ $y''-xf(x)y'+f(x)y=0$ را بیابید.

۹– تحقیق کنید که $y_1=e^x$ یك جواب معادلهٔ $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$ است و جواب عمومی آن را تعیین کنید.

۱۰– جواب عمومی معادلهٔ $y''-f(x)y'+[f(x)-1]y=0$ را پیدا کنید.

۱۷. معادلهٔ همگن با ضرایب ثابت

اکنون موقع آن است که بررسی کاملی از معادلهٔ $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ را در حالت خاصی که $P(x)$ و $Q(x)$ مقادیر ثابت p و q هستند، ارائه کنیم:

$$y''+py'+qy=0 \tag{1}$$

بحث را با این مطلب شروع می کنیم که مشتقات تابع نمائی e^{mx} همگی مضارب ثابتی از خودآن هستند. این امر ما را به ملاحظهٔ تابع

$$y=e^{mx} \tag{2}$$

با عدد ثابت مناسب m، به‌عنوان یك جواب احتمالی معادلهٔ (۱) راهنمایی می کند. چون $y'=me^{mx}$ و $y''=m^2e^{mx}$، از جایگزینی این عبارات در معادلهٔ (۱) خواهیم داشت

$$(m^2+pm+q)e^{mx}=0 \tag{3}$$

وچون e^{mx} هرگز صفر نمی‌شود، (۳) وقتی وفقط وقتی برقراراست‌که m در معادلهٔ‌کمکی

$$m^2+pm+q=0 \tag{4}$$

صدق کند. دوریشهٔ m_1 و m_2 این معادله، یعنی، مقادیری از m که به‌ازای آنها (۲)جواب معادلهٔ (۱) است، توسط فرمول‌معادلهٔ درجه دوم زیر بدست‌می‌آیند

$$m_1,\ m_2=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} \tag{5}$$

برای بحث و بررسی کامل این موضوع، سه حالت برای (۵) در نظر می گیریم.

ریشه‌ها حقیقی و متمایزند. روشن است که ریشه‌های m_1 و m_2 اعداد حقیقی و متمایزند اگر و تنها اگر $p^2-4q>0$. دراین حالت دو جواب

$$e^{m_1x} \text{ و } e^{m_2x}$$

برای معادلهٔ (۱) به دست می‌آید. چون نسبت

$$\frac{e^{m_1x}}{e^{m_2x}}=e^{(m_1-m_2)x}$$

ثابت نیست، این جوابها مستقل خطی هستند و

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x} \qquad (۶)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۱) است.

ریشه‌ها مختلط ومتمایزند[۱]. ریشه‌های m_1 و m_2 اعداد مختلط متمایزند اگر و تنها اگر $p^2-4q<0$. دراین حالت m_1 و m_2 را می‌توان به‌صورت $a \pm ib$ نوشت، که با توجه به فرمول اویلر

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad (۷)$$

دو جواب معادلهٔ (۱) عبارت می‌شوند از

$$e^{m_1x}=e^{(a+ib)x}=e^{ax}e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx) \qquad (۸)$$

و

$$e^{m_2x}=e^{(a-ib)x}=e^{ax}e^{-ibx}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx) \qquad (۹)$$

از آنجا که، جوابهای به صورت توابع حقیقی مورد نظر ماست، روابط (۸) و (۹) را یك بار با هم جمع و نتیجه را تقسیم بر ۲ و بار دیگر ازیکدیگر کسر و نتیجه‌را تقسیم بر $2i$ می‌کنیم، تا جوابهای

$$e^{ax}\cos bx \quad و \quad e^{ax}\sin bx \qquad (۱۰)$$

به دست آیند. این جوابها مستقل خطی‌اند، بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۱) در این حالت عبارت است از

$$y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx) \qquad (۱۱)$$

به‌این مطلب از زاویهٔ دیگری نیز می‌توان نظر کرد. اگر p و q در معادلهٔ (۱) اعدادحقیقی باشند، تابع با مقادیر مختلط $w(x)=u(x)+iv(x)$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند اگر و تنها اگر توابع $u(x)$ و $v(x)$ به تنهایی در معادلهٔ (۱) صدق کنند. نتیجتاً، هرجواب مختلط (۱) شامل دو جواب حقیقی است، و (۸) دو جواب (۱۰) را یکجا شامل می‌شود.

ریشه‌ها حقیقی و برابرند. روشن است که ریشه‌های m_1 و m_2 حقیقی و برابرند اگر و تنها اگر $p^2-4q=0$ در این حالت، تنها یك جواب $y=e^{mx}$ با $m=-p/2$ به دست می‌آوریم. ولی به کمك روش بخش قبل بسادگی می‌توان به جواب مستقل خطی دیگری دست یافت، زیرا چنانچه $y_1=e^{(-p/2)x}$، آنگاه

$$v=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}\,dx=\int\frac{1}{e^{-px}}e^{-px}dx=x$$

و لذا $y_2=vy_1=xe^{mx}$. در این حالت جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت می‌شود از

---

۱. فرض بر آن‌است‌که خواننده باجبرمقدماتی اعداد مختلط آشناست. فرمول اویلر(۷) بخشی متعارف از هر درس حساب دیفرانسیل وانتگرال است ویا باید باشد.

$$y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx} \tag{12}$$

مختصر آنکه، سه حالت ممکن است، وجواب عمومی معادلهٔ همگن با ضرایب ثابت بسته به چگونگی جوابهای m_1 و m_2 از معادلهٔ کمکی (۴)، توسط فرمولهای (۶)، (۱۱) و (۱۲) تعیین می گردند. روشن است که ماهیت کیفی این جواب عمومی توسط علامت و بزرگی نسبی مقادیر p و q به طور کامل معین می شود، وتغییر این مقادیر می توانند باعث تغییری اساسی درجواب عمومی گردد. این مطلب برای فیزیکدانانی که به جزئیات تحلیل دستگاههای مکانیکی ویامدارهای الکتریکی مشخص شده توسط (۱) می پردازند اهمیت دارد. برای مثال، اگر $p^2<4q$، نمودار جواب عبارت ازموجی است که دامنهٔ آن، بسته به اینکه p مثبت یا منفی باشد، به طور نمایی کم یا زیاد می شود. این مطلب ونظایر آن دستاوردهای واضحی از بحث فوق اند و در کتابهایی که به بررسی کاملتری از کاربردهای فیزیکی معادلات دیفرانسیل می پردازند، به طور جامع مورد بحث واقع شده اند.

ایده های این بخش قبل از همه مرهون اویلر است. شرح مختصر برخی ازدستاوردهای فراوان این نابغهٔ بزرگ علوم در پیوست الف آمده است.

تمرین

۱ــ جواب عمومی هر یك از معادلات زیر را بیابید:

الف) $y''+y'-6y=0$ ه) $y''-4y'+4y=0$

ب) $y''+2y'+y=0$ و) $y''-9y'+20y=0$

ج) $y''+8y=0$ ز) $2y''+2y'+3y=0$

د) $2y''-4y'+8y=0$

۲ــ نشان دهید که جواب عمومی معادلهٔ (۱)، وقتی $x\to\infty$، به سمت صفر میل می کند، اگر و تنها اگر p و q هردو مثبت باشند.

۳ــ بدون استفاده از فرمولهای یافته شده دراین بخش، نشان دهید که مشتق هرجواب معادلهٔ (۱) نیز یك جواب است.

۴ــ معادلهٔ

$$x^2y''+pxy'+qy=0$$

راکه درآن p و q ثابت اند، معادلهٔ همبعد اویلر[1] می نامند، نشان دهید که تغییرمتغیر مستقل $x=e^z$ آنرا بهمعادله ای باضرایب ثابت تبدیل می کند، وبه کمك این روش جواب عمومی هر یك از معادلات زیر را بیابید:

---

۱. این معادله را معادلهٔ همبعد کوشی نیز می نامند. پژوهشهای اویلر چنان وسیع بودکه عدهٔ زیادی از ریاضیدانان سعی برآن دارندکه با نامیدن معادلات، فرمولها، قضایا، ودیگر مطالب اویلر به اسم اولین کسیکه بعد از او به مطالعهٔ آن پرداخته است، ازاشتباه جلوگیری کنند.

الف) $x^{2}y''+3xy'+10y=0$

ب) $2x^{2}y''+10xy'+8y=0$

ج) $x^{2}y''+2xy'-12y=0$

۵ـ در تمرین ۴ ، با تغییر متغیر مستقل x به $z=\log x$، برخی معادلات همگن با ضرایب متغیر را به معادلات با ضرایب ثابت تبدیل کردیم. معادلهٔ همگن کلی

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (*)$$

و تغییر متغیر مستقل $z=z(x)$ را که درآن $z(x)$ تابع نامشخصی از x است ، در نظر بگیرید. نشان دهید که به این ترتیب می‌توان معادلهٔ (*) را به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کرد اگر و تنها اگر $(Q'+2PQ)/Q^{3/2}$ مقدار ثابتی باشد، که درآن صورت $z=\int\sqrt{Q(x)}\,dx$ نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد.

۱۸. روش ضرایب نامعین

در دو بخش قبل روشهای گوناگونی جهت یافتن جواب عمومی معادلهٔ همگن

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

ارائه نمودیم. همان طور که ملاحظه شد ، این روشها را تنها در تعداد معدودی حالت‌خاص می‌توان به‌کاربرد: وقتی که ضرایب $P(x)$ و $Q(x)$ ثابت باشند ؛ وهمچنین هنگامی که این ضرایب ثابت نباشند اما آنقدر ساده باشند که بتوانیم یك‌جواب غیرصفر را ، به‌روش تحقیق و بررسی بیابیم. خوشبختانه وسعت این دسته از معادلات چنان است که تعداد مهمی از کاربردها را در بر می‌گیرد. ولی ، باید توجه کرد که تعداد زیادی ازمعادلات همگنی که در ریاضی و فیزیك اهمیت دارند جزو این دسته از معادلات نیستند ، وآنها را تنها می‌توان با روش سریها که در فصل ۵ ارائه شده است حل کرد.

در این بخش و بخش بعد توجه خود را به حل معادلهٔ غیرهمگن

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \qquad (2)$$

درحالاتی که $y_g(x)$ جواب عمومی معادلهٔ همگن (۱) در دست است معطوف می‌کنیم. بنا بر قضیهٔ ۱۴ـب ، اگر $y_p(x)$، یك‌جواب خصوصی معادلهٔ (۲) باشد ، آنگاه ،

$$y(x)=y_g(x)+y_p(x)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۲) است. ولی چگونه می‌توان y_p را به دست آورد؟ این مسئله‌ای عملی است که اکنون مورد بررسی قرار می‌گیرد.

هنگامی که (۲) به صورت

$$y''+py'+qy=R(x) \qquad (3)$$

باشد ، برای یافتن y_p می‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد. دراین معادله p و q

ثابت‌اند و $R(x)$ تابعی نمایی، سینوسی، کسینوسی، کثیرالجمله‌ای، یا ترکیبی از اینهاست. بعنوان نمونه معادلهٔ

$$y''+py'+qy=e^{ax} \tag{۴}$$

را مطالعه‌می کنیم، ازآنجاکه مشتق‌گیری از تابع‌نمایی e^{ax} صرفاً خودآن تابع‌را باتغییری احتمالی در ضریب عددیش به دست می‌دهد، طبیعی است حدس بزنیم که تابعی به صورت

$$y_p=Ae^{ax} \tag{۵}$$

جواب‌خصوصی معادلهٔ (۴) باشد. دراینجا A ضریب نامعینی است‌که باید چنان تعیین گردد که (۵) عملا در معادلهٔ (۴) صدق کند. از جایگزینی (۵) در (۴) به دست می‌آوریم:

$$A(a^{۲}+pa+q)e^{ax}=e^{ax}$$

بنابراین

$$A=\frac{۱}{a^{۲}+pa+q} \tag{۶}$$

عبارت(۵) به‌ازای این‌مقدارA جواب معادلهٔ (۴) می گردد مگرموقعی‌که مخرج‌سمت راست رابطهٔ (۶) صفر شود. منشأ این مشکل را بسادگی می‌توان فهمید، چراکه این استثنا وقتی پیش می‌آیدکه a ریشهٔ معادلهٔ کمکی

$$m^{۲}+mp+q=۰ \tag{۷}$$

باشد، و می‌دانیم که دراین حالت عبارت (۵) طرف چپ (۴) را صفر می کند ونمی‌تواند در معادلهٔ (۴) ،که طرف راست آن صفر نیست، صدق کند.

در این حالت استثنایی، برای ادامهٔ این روش چه بایدکرد؟ در بخش قبل دیدیم که، وقتی معادلهٔ کمکی ریشهٔ مضاعف دارد، جواب مستقل خطی دیگر معادلهٔ همگن را می‌توان از ضرب ریشهٔ اول در x به‌دست آورد. با این راهنمایی، تابع

$$y_p=Axe^{ax} \tag{۸}$$

را برای آزمایش درنظرمی گیریم. با جایگزینی (۸) در (۴)، به دست می‌آید

$$A(a^{۲}+pa+q)xe^{ax}+A(۲a+p)e^{ax}=e^{ax}$$

اما با توجه به این فرض که a ریشهٔ معادلهٔ (۷) است، عبارت داخل پرانتز اول صفراست و لذا

$$A=\frac{۱}{۲a+p} \tag{۹}$$

این رابطه، ضریب قابل قبولی برای (۸) به‌دست می‌دهد مگر وقتی که $a=-p/۲$، یعنی، باستثنای وقتی‌که a ریشه مضاعف (۷) باشد. امید هست‌که روش موفق فوق دراین حالت نیزنتیجه دهد، لذا تابع

$$y_p = Ax^2 e^{ax} \tag{10}$$

را امتحان می‌کنیم. اگر رابطهٔ (۱۰) را در معادلهٔ (۴) جایگزین کنیم می‌بینیم که

$$A(a^2+pa+q)x^2e^{ax}+2A(2a+p)xe^{ax}+2Ae^{ax}=e^{ax}$$

حال چون فرض براین است که a ریشه مضاعف (۷) است، هردو عبارت داخل پرانتز صفر است و داریم

$$A=\frac{1}{2} \tag{11}$$

به‌طور خلاصه: اگر a ریشهٔ معادلهٔ کمکی (۷) نباشد، آنگاه (۴) یك جواب‌خصوصی به صورت Ae^{ax} دارد. اگر a ریشهٔ سادهٔ (۷) باشد، آنگاه (۴) هیچ جوابی به صورت Ae^{ax} ندارد ولی جوابی به صورت Axe^{ax} دارد و اگر a ریشهٔ مضاعف باشد، آنگاه (۴) هیچ جوابی به‌صورت Axe^{ax} ندارد ولی جوابی به‌شکل Ax^2e^{ax} دارد. در هریك از این حالات، فرمولی برای A داده شده است، ولی این تنها به منظور روشن ساختن منطق حاکم برکار است. در عمل ساده‌تر آن است که، A را ازجایگزینی مستقیم در معادلهٔ موردنظر به دست آوریم.

حالت مهم دیگری که می‌توان آن را به‌کمك روش ضرایب نامعین حل کرد وقتی است که طرف راست معادلهٔ (۴) عبارت $\sin bx$ باشد:

$$y''+py'+qy=\sin bx \tag{12}$$

از آنجا که مشتقات $\sin bx$ مضارب ثابتی از $\sin bx$ و $\cos bx$ هستند، تابع

$$y_p = A\sin bx + B\cos bx \tag{13}$$

را برای امتحان درنظرمی‌گیریم. حال ضرایب مجهول A و B را می‌توان از جایگزینی عبارت (۱۳) در معادلهٔ (۱۲) و برابر قراردادن ضرایب $\cos bx$ و $\sin bx$ در طرفین معادلهٔ حاصل به‌دست‌آورد. این مراحل وقتی‌که طرف راست معادلهٔ (۱۲) عبارت $\cos bx$ ویا ترکیبی خطی‌از $\sin bx$ و $\cos bx$، یعنی تابعی به‌صورت $\alpha\sin bx+\beta\cos bx$ باشد، نیز به‌کار می‌رود. مانند مورد قبل، اگر عبارت (۱۳) در معادلهٔ همگن متناظر (۱۲) صدق‌کند این روش دیگر کارآیی نخواهد داشت. در این مورد برای پیشبرد روش فوق می‌توان از

$$y_p = x(A\sin bx + B\cos bx) \tag{14}$$

به‌جای (۱۳) برای آزمایش استفاده کرد.

سرانجام، حالتی را درنظرمی‌گیریم که طرف راست معادلهٔ (۴) کثیرالجمله باشد:

$$y''+py'+qy=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \tag{15}$$

چون مشتق کثیرالجمله نیز کثیرالجمله است، به جستجوی یك جواب خصوصی به‌صورت

$$y_p = A_0+A_1x+\dots+A_nx^n \tag{16}$$

می‌پردازیم. اگر (۱۶) را در معادلهٔ (۱۵) بگذاریم، برای یافتن ضرایب مجهول A_0، A_1، ...، A_n کافی است ضرایب توانهای مشابه x در دوطرف معادله را باهم برابر قراردهیم. اگر احیاناً مقدار ثابت q صفر باشد، x^{n-1} جملهٔ با بزرگترین توان x در طرف چپ (۱۵) خواهد بود، بنابراین، دراین حالت تابع به‌صورت

$$y_p = x(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$$
$$= A_0 x + A_1 x^2 + \dots + A_n x^{n+1} \qquad (۱۷)$$

را برای امتحان اختیار خواهیم کرد. اگر p و q هردو صفرباشند، آنگاه (۱۵) را می‌توان یکباره با انتگرالگیری‌مستقیم حل کرد.

بحث فوق نشان می‌دهدکه شکل جواب خصوصی معادلهٔ (۳) را اغلب می‌توان از شکل $R(x)$، یعنی عبارت طرف راست معادله، استنباط نمود. عموماً این مطلب هنگامی صحیح‌است‌که تابع $R(x)$ دارای تعدادی متناهی مشتق اساساً متفاوت باشد. نحوهٔ کارآیی این روش را برای توابع نمایی، سینوسی وکسینوسی، وکثیرالجمله‌ای دیده‌ایم. در تمرین ۳ چگونگی کاربرد این روش را برای حالتی‌که $R(x)$ مجموع چنین توابعی باشدتوصیف خواهیم نمود. برای‌مواردی‌که $R(x)$ حاصلضرب این‌گونه توابع مقدماتی باشد، می‌توان روشهائی ارائه کردکه قدری پیچیده‌تر هستند، اما این حالت برای کاربردهای عملی عمدتاً غیرضروری است. خلاصه‌اینکه، اصل مطلب عبارت‌است ازحدس هشیارانهٔ عبارتی‌مشتمل‌بر تعدادکافی ضرایب نامعین، که بتوان آنها را منطبق با شرایط تنظیم کرد.

تمرین

۱ــ جواب عمومی هریك ازمعادلات زیر را بیابید:

الف) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$

ب) $y'' + 4y = 3\sin x$

ج) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

د) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$

ه) $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$

و) $y'' - 3y' + 2y = 14\sin 2x - 18\cos 2x$

ذ) $y'' + y = 2\cos x$

ح) $y'' - 2y' = 12x - 10$

۲ــ اگر k و b اعداد ثابت مثبتی باشند، جواب عمومی معادلهٔ

$$y'' + k^2 y = \sin bx$$

را بیابید.

۳- اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای معادلهٔ

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R_1(x)$$

و

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R_2(x)$$

باشند، نشان دهید که $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$ جواب معادلهٔ

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R_1(x)+R_2(x)$$

است. با استفاده از این اصل، جواب عمومی معادلهٔ

$$y''+4y=4\cos 2x+6\cos x+8x^2-4x$$

را بیابید.

۱۹. روش تغییر پارامترها

روشی که در بخش ۱۸ برای تعیین جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \tag{1}$$

شرح داده شد دارای دو محدودیت اساسی است: فقط وقتی می‌توان از آن استفاده کرد که $P(x)$ و $Q(x)$ ضرایب ثابتی باشند، وحتی دراین حالت نیز وقتی این روش کارآیی دارد که عبارت طرف راست، یعنی $R(x)$ بسیار ساده باشد. ولی، در چهارچوب این محدودیتها، روش فوق ساده‌ترین روش است.

حال به ارائهٔ روش قویتری می‌پردازیم که بدون توجه به‌ماهیت P، Q و R، و تنها به شرط آنکه جواب معادلهٔ همگن مربوطهٔ

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

معلوم باشد همواره قابل اجراست. فرض کنید که جواب عمومی معادلهٔ (۲)، یعنی

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{3}$$

رابه‌طریقی یافته باشیم. این‌روش شبیه‌روشی است که دربخش ۱۶ موردبحث واقع شد؛ یعنی، به‌جای مقادیر ثابت c_1 و c_2، توابع‌مجهول $v_1(x)$ و $v_2(x)$ را قرارمی‌دهیم، وسعی‌می‌کنیم v_1 و v_2 را چنان بیابیم که

$$y=v_1y_1+v_2y_2 \tag{4}$$

جواب معادلهٔ (۱) گردد[1]. برای یافتن دوتابع مجهول v_1 و v_2 لازم است که دومعادله‌شامل

---

۱. به همین دلیل این روش را تغییر پارامترها می‌نامیم، چه در اینجا اعداد ثابت c_1 و c_2 را متغیر درنظرمی‌گیریم.

این دو تابع داشته باشیم. یکی از این معادلات را از این‌که (۴) باید جواب (۱) باشد به دست می‌آوریم. بزودی روشن خواهد شد که دومین معادله چه باید باشد. ابتدا مشتق (۴) را به‌دست می‌آوریم و به‌قرار زیر مرتب می‌کنیم:

$$y'=(v_1y_1'+v_2y_2')+(v_1'y_1+v_2'y_2) \tag{۵}$$

با مشتق‌گیری مجدد، مشتقات مرتبهٔ دوم توابع مجهول v_1 و v_2 نیز ظاهر می‌شوند. با صفر گرفتن عبارت داخل پرانتز دوم می‌توان ازاین پیچیدگی احتراز کرد:

$$v_1'y_1+v_2'y_2=0 \tag{۶}$$

و ازآنجا

$$y'=v_1y_1'+v_2y_2' \tag{۷}$$

بنابراین

$$y''=v_1y_1''+v_1'y_1'+v_2y_2''+v_2'y_2' \tag{۸}$$

از جایگزینی (۴)، (۷)، و (۸) در (۱)، ومرتب کردن نتیجه، چنین به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &v_1(y_1''+Py_1'+Qy_1)+v_2(y_2''+Py_2'+Qy_2)\\ &\qquad+v_1'y_1'+v_2'y_2'=R(x) \end{aligned} \tag{۹}$$

از آنجاکه y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ (۲) می‌باشند، دو عبارات داخل پرانتز برابر با صفرند، و (۹) به‌صورت

$$v_1'y_1'+v_2'y_2'=R(x) \tag{۱۰}$$

ساده می‌شود. معادلات (۶) و (۱۰) دو معادله شامل دو مجهول v_1' و v_2'اند:

$$\begin{aligned} v_1'y_1+v_2'y_2&=0\\ v_1'y_1'+v_2'y_2'&=R(x) \end{aligned}$$

که آنها را می‌توان مستقیماً حل کرد و چنین به‌دست آورد:

$$v_1'=\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)} \quad \text{و} \quad v_2'=\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)} \tag{۱۱}$$

چون با توجه به استقلال خطی y_1 و y_2، رونسکیی در مخرج‌های v_1' و v_2' مخالف صفر است، این دو جواب معتبرند. برای یافتن v_1 و v_2 کافی است از روابط (۱۱) انتگرال بگیریم:

$$v_1=\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx \quad \text{و} \quad v_2=\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx \tag{۱۲}$$

حال می‌توانیم مطالب فوق را جمعبندی کنیم و عبارت

$$y=y_1\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx+y_2\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx \qquad (13)$$

را جواب خصوصی مطلوب برای معادلهٔ (۱) به‌شمار آوریم.

خواننده توجه خواهد کرد که این‌روش نارساییهایی مختص به‌خود دارد. بخصوص، ممکن است محاسبهٔ انتگرالهای (۱۲) مشکل و یا غیرممکن باشد. علاوه‌براین، حتی قبل از شروع به‌کار، باید جواب عمومی معادلهٔ همگن مربوطه، یعنی معادلهٔ (۲)، را بدانیم، ولی این اشکال بی‌اهمیت است زیرا اگرجواب عمومی (۲) را نداشته باشیم بعید است که به دنبال جواب خصوصی (۱) باشیم.

مثال ۱ . یك جواب خصوصی معادلهٔ $y''+y=\csc x$ را بیابید.

معادلهٔ همگن مربوطه، یعنی $y''+y=0$ دارای جواب عمومی

$$y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$$

است، بنابراین $y_1=\sin x$ ، $y_1'=\cos x$ ، $y_2=\cos x$ و $y_2'=-\sin x$. رونسکیی y_1 و y_2 عبارت است از

$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'=-\sin^2x-\cos^2x=-1$$

بنابراین از(۱۲) به‌دست می‌آوریم که

$$v_1=\int\frac{-\cos x\csc x}{-1}dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\log(\sin x)$$

و

$$v_2=\int\frac{\sin x\csc x}{-1}dx=-x$$

نتیجتاً

$$y=\sin x\log(\sin x)-x\cos x$$

جواب خصوصی مطلوب است.

تمرین

۱ــ ابتدا با تحقیق وبررسی و سپس با روش تغییر پارامترها ، یك جواب خصوصی معادلهٔ زیر را بیابید:

$$y''-2y'+y=2x$$

۲ــ ابتدا باروش ضرایب نامعین وسپس باروش تغییرپارامترها، یك جواب خصوصی‌معادلهٔ

$$y''-y'-6y=e^{-x}$$

را بیابید.

۳ـ مطلوب است تعیین یك جواب خصوصی هریك از معادلات زیر:

الف) $y''+۴y=\tan ۲x$

ب) $y''+۲y'+y=e^{-x}\log x$

ج) $y''-۲y'-۳y=۶۴xe^{-x}$

د) $y''+۲y'+۵y=e^{-x}\sec ۲x$

۴ـ مطلوب است تعیین جواب عمومی هریك از معادلات زیر:

الف) $(x^۲-۱)y''-۲xy'+۲y=(x^۲-۱)^۲$

ب) $(x^۲+x)y''+(۲-x^۲)y'-(۲+x)y=x(x+۱)^۲$

۲۰. ارتعاشات در دستگاههای مکانیکی

به طور کلی، ارتعاش وقتی رخ می‌دهد کـه تعادل یك دستگاه فیـزیکی در حال تعادل پایدار را برهم زنیم، زیرا آنگاه دستگاه تحت تأثیر نیروهایی واقع می‌شود که سعی دارند آن‌را به‌حال تعادل بازگردانند. دراین بخش‌خواهیم دید که چگونه بررسی‌چنین وضعیتهایی می‌تواند به معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}+p\frac{dx}{dt}+qx=R(t)$$

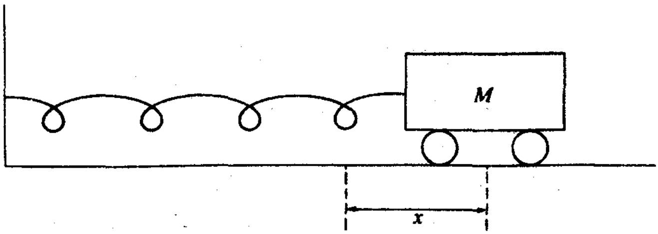
منجر گردد، و نیز خواهیم دید که چطور بررسی این معادلات می‌تواند شرایط فیزیکی را روشن کند.

ارتعاشات همساز سادهٔ نامیرا . به‌عنوان‌مثالی که‌آن‌را دنبال خواهیم کرد، یك گاری به جرم M را در نظرمی‌گیریم که به‌وسیله یك‌فنر به دیوار مجاور بسته شده باشد (شکل ۲۰). وقتی گاری در $x=۰$ به حال تعادل است، فنر هیچ نیرویی بر گاری وارد نمی‌کند. اگر گاری به‌اندازهٔ x جابجا شود، آنگاه فنر نیروی بازگرداننده‌ای برابر $F_s=-kx$ به‌آن وارد می‌کند. در اینجا مقدار عدد ثابت ومثبت k به سختی فنربستگی دارد. بنابرقانون دوم نیوتن در مورد حرکت، کل نیروی وارد برگاری برابر با حاصلضرب جرم گاری درشتاب آن است و لذا داریم

$$M\frac{d^۲x}{dt^۲}=F_s \tag{۱}$$

یا

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}+\frac{k}{M}x=۰ \tag{۲}$$



شکل ۲۰

با انتخاب $a=\sqrt{k/M}$ ، معادلهٔ حرکت را می‌توان به صورت

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+a^{2}x=0 \qquad (۳)$$

ساده کرد وجواب عمومی آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x=c_{1}\sin at+c_{2}\cos at \qquad (۴)$$

اگر گاری را تاموقعیت نقطهٔ $x=x_{0}$ بکشیم ودر لحظهٔ $t=0$ بدون سرعت اولیه رها کنیم، شرایط اولیه عبارت خواهند بود از

$$x=x_{0} \text{ و } v=\frac{dx}{dt}=0 \text{ ، } t=0 \text{ وقتی } \qquad (۵)$$

از آنجا به سادگی نتیجه می‌شود که $c_{1}=0$ و $c_{2}=x_{0}$ ، بنابراین (۴) به

$$x=x_{0}\cos at \qquad (۶)$$

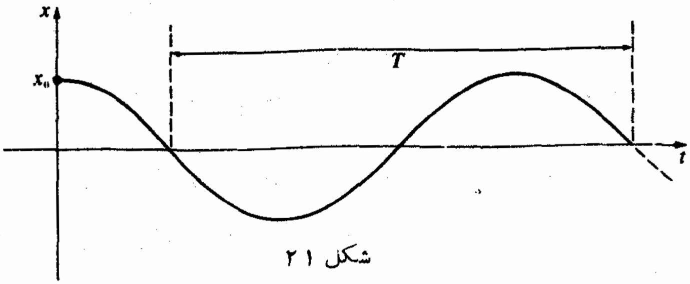
تبدیل می‌شود. منحنی نمایش (۶) در شکل ۲۱ رسم شده است. دامنهٔ این ارتعاش همساز ساده برابر با x_{0} است و چون دورهٔ تناوب T برابر با زمان لازم جهت یك ارتعاش کامل است، داریم $aT=2\pi$ و

$$T=\frac{2\pi}{a}=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \qquad (۷)$$

بسامد f برابر با تعداد ارتعاشهای کامل در واحد زمان است، بنابراین $fT=1$ و

$$f=\frac{1}{T}=\frac{a}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \qquad (۸)$$

از رابطهٔ (۸) روشن می‌شود که اگر سختی فنر افزایش یابد یا جرم گاری کاهش یابد، بسامد این ارتعاش افزایش خواهد یافت، واین مطلب به‌طور حسی نیز قابل پیش‌بینی است.



شکل ۲۱

ارتعاشات میرا . به‌عنوان مثالی‌دیگر در بررسی این‌مسئلهٔ فیزیکی، اثر اضافی نیروی میرایی چون F_d را در نظرمی گیریم. این نیرو می‌تواند مربوط به چسبندگی محیطی باشد (چون هوا، آب، روغن وغیره) که گاری در آن حرکت می کند. فرض می کنیم که این‌نیرو نیـز درجهت خلاف حرکت ومقدار آن متناسب باسرعت‌است‌یعنی $F_d=-c(dx/dt)$، دراینجا عدد ثابت ومثبت c به میزان مقاومت‌آن ماده بستگی‌دارد. تحت این شرایط، معادلهٔ (۱) به‌صورت

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=F_s+F_d \tag{۹}$$

و لذا

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{M}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{M}x=0 \tag{۱۰}$$

درمی‌آید، که آن‌را نیز برای راحتی، باانتخاب $b=c/2M$ و $a=\sqrt{k/M}$ به صورت

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+a^2x=0 \tag{۱۱}$$

می نویسیم. معادلهٔ کمکی مربوطه عبارت است از

$$m^2+2bm+a^2=0 \tag{۱۲}$$

که m_1 و m_2 ، ریشه‌های آن، برابرند با

$$m_1 ، m_2=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4a^2}}{2}=-b\pm\sqrt{b^2-a^2} \tag{۱۳}$$

البته نوع جواب عمومی (۱۱) توسط اعداد m_1 و m_2 مشخص می گردد. همان طور کـه می‌دانیم، باید سه حالت در نظر گرفت :

حالت الف. $b^2-a^2>0$ یا $b>a$. به‌بیان ساده این‌بدان‌معناست که نیروی‌اصطکاك

ناشی از چسبندگی در مقایسه باسختی فنر بزرگ است. درنتیجه m_1 و m_2 اعدادی منفی و متفاوت‌اند و بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۱۱) چنین می‌شود:

$$x = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \tag{۱۴}$$

که اگر با توجه به شرایط اولیهٔ (۵) اعداد c_1 و c_2 را محاسبه کنیم، (۱۴) به‌صورت

$$x = \frac{x_0}{m_1 - m_2}(m_1 e^{m_2 t} - m_2 e^{m_1 t}) \tag{۱۵}$$

درمی‌آید. نمودار این تابع در شکل ۲۲ رسم شده است. روشن است‌که دراینجا ارتعاشی رخ نمی‌دهد، وگاری صرفاً به‌حالت تعادلش بازمی‌گردد. این نوع حرکت را فوق میرا می‌نامند. حال فرض‌کنید‌که چسبندگی محیط کمتر و کمتر شود تا به‌شرط حالت بعدبرسیم.

حالت ب. $b^2 - a^2 = 0$ یا $b = a$. دراین‌حالت $m_1 = m_2 = -b = -a$ وجواب عمومی (۱۱) عبارت است از

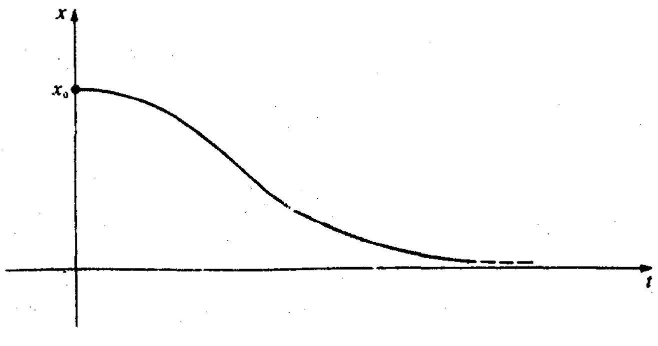
$$x = c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at} \tag{۱۶}$$

که با توجه به شرایط اولیهٔ (۵)، به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$x = x_0 e^{-at}(1 + at) \tag{۱۷}$$

نمودار این تابع شبیه است به نمودار تابع (۱۵)، وهنوز هیچ ارتعاشی نخواهیم داشت. هرحرکتی از این نوع را میرای بحرانی می‌نامند. حال هرگاه چسبندگی قدری‌کم شود، این‌کاهش هرچقدر ناچیز باشد، آنگاه حرکت ارتعاشی می‌شود، وآنرا تحت میرا می‌نامند، این حالت واقعاً جالبی است‌که ذیلا مورد بحث قرارمی‌دهیم.

حالت ج. $b^2 - a^2 < 0$ یا $b < a$. دراین‌حالت m_1 و m_2 دوعدد مختلط مزدوج به‌صورت $-b \pm i\alpha$ هستند، که‌درآن



شکل ۲۲

$$\alpha=\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}$$

و جواب عمومی معادلهٔ (۱۱) به‌صورت زیر است

$$x=e^{-bt}(c_{۱}\cos\alpha t+c_{۲}\sin\alpha t) \tag{۱۸}$$

اگر $c_{۱}$ و $c_{۲}$ را با توجه به‌شرایط اولیهٔ (۵) محاسبه کنیم، خواهیم داشت

$$x=\frac{x_{\circ}}{\alpha}e^{-bt}(\alpha\cos\alpha t+b\sin\alpha t) \tag{۱۹}$$

با انتخاب $\theta=\tan^{-۱}(b/\alpha)$ ، عبارت (۱۹) را می‌توان به‌صورت گویاتر

$$x=\frac{x_{\circ}\sqrt{\alpha^{۲}+b^{۲}}}{\alpha}e^{-bt}\cos(\alpha t-\theta) \tag{۲۰}$$

نوشت. همان‌طور که از شکل ۲۳ پیداست این تابع نوسانی است و دامنهٔ آن به‌طورنمایی کم می‌شود.

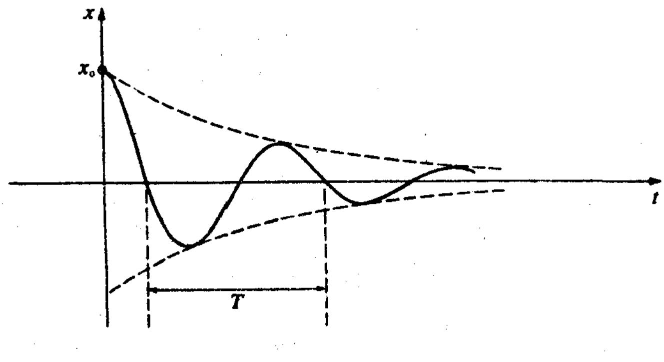
این تابع ، متناوب ــ به معنای صریح کلمه ــ نیست، ولی نمودارش موضع تعادل $x=\circ$ را در فواصل منظم قطع می‌کند. هرگاه «دورهٔ تناوب» آن ، یعنی T را زمان یك «نوسان» کامل بگیریم، آنگاه $\alpha T=۲\pi$ و

$$T=\frac{۲\pi}{\alpha}=\frac{۲\pi}{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}=\frac{۲\pi}{\sqrt{k/M-c^{۲}/۴M^{۲}}} \tag{۲۱}$$

همچنین «بسامد» آن برابر می‌شود با

$$f=\frac{۱}{T}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{M}-\frac{c^{۲}}{۴M^{۲}}} \tag{۲۲}$$

معمولا این‌عدد را بسامد طبیعی دستگاه می‌نامند. وقتی‌چسبندگی محیط ناچیز باشد، به‌طوری



شکل ۲۳

که بتوانیم $c=0$ بگیریم، روشن است که (۲۱) و (۲۲) تبدیل به (۷) و (۸) می‌شوند. علاوه براین، درمقایسهٔ (۸) با (۲۲) متوجه می‌شویم که مطابق انتظارمان بسامد ارتعاش در اثرمیرایی کاهش می‌یابد.

نوسانات واداشته. ازآنجاکه ارتعاشات فوق‌الذکر، تنها تحت تأثیرنیروهای درونی دستگاه تولید می‌شوند، ارتعاشات آزاد نامیده می‌شوند. حال مطالعهٔ خود را به حالتی که یك نیروی خارجی $F_e=f(t)$ نیز برگاری وارد شود ، گسترش می‌دهیم. چنین نیرویی می‌تواند از طرق گوناگون پدیدار گردد: مثلاً، از ارتعاشات دیواری که گاری توسط فنر به آن متصل شده است، یا از اثریك میدان مغناطیسی خارجی برگاری (اگر گاری از آهن باشد) . دراین حالت به‌جای معادلهٔ (۹) خواهیم داشت

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=F_s+F_d+F_e \qquad (۲۳)$$

بنابراین

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f(t) \qquad (۲۴)$$

مهمترین حالت وقتی‌است که نیروی خارجی وارده متناوب وبه‌صورت $f(t)=F_0\cos\omega t$ باشد که دراین‌صورت (۲۴) به‌صورت

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos\omega t \qquad (۲۵)$$

درمی‌آید. ماقبلا معادلهٔ همگن مربوطه ، یعنی معادلهٔ (۱۰) ، را حل‌کرده‌ایم، بنابراین‌برای یافتن جواب (۲۵) کافی‌است یك جواب خصوصی آن‌را بیابیم. با روش ضرایب نامعین بسادگی می‌توان این عمل را انجام داد. نتیجتاً عبارت $x=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ را به‌عنوان جواب آزمایشی اختیارمی کنیم وآن‌را درمعادلهٔ (۲۵) جایگزین می‌نماییم. دومعادلهٔ زیر برای یافتن A و B حاصل می‌شود

$$\omega cA+(k-\omega^2M)B=F_0$$
$$(k-\omega^2M)A-\omega cB=0$$

جواب این دستگاه عبارت است از

$$A=\frac{\omega cF_0}{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2} \quad \text{و} \quad B=\frac{(k-\omega^2M)\,F_0}{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}$$

بنابراین جواب خصوصی مورد نظر به‌صورت زیرخواهد بود:

$$x=\frac{F_0}{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}[\omega c\sin\omega t+(k-\omega^2M)\cos\omega t] \qquad (۲۶)$$

هر گاه $\phi = \tan^{-1}[\omega c/(k-\omega^2 M)]$ انتخاب‌شود، جواب(۲۶) را می‌توان به‌صورت مفیدتر

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega^2 M)^2+\omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi) \qquad (۲۷)$$

نوشت. حال اگر فرض کنیم باحالت تحت میرایی‌مواجه هستیم، جواب عمومی معادلهٔ(۲۵) برابر می‌شود با

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t) + \frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega^2 M)^2+\omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi) \qquad (۲۸)$$

جملهٔ اول، بوضوح ، گذرا است، یعنی وقتی $t \longrightarrow \infty$، مقدار آن به سمت صفر می گراید. در واقع، چه حرکت تحت میرا باشد و چه نباشد، مادامی‌که تا حدی میرایی وجود داشته باشد، این نتیجه نیز حقیقت خواهد داشت (به تمرین ۱۷ــ۲ رجوع کنید). لـذا با گذشت زمان این حرکت، سرشت جملهٔ دوم، یعنی قسمت حالت ماندگار را به‌خود می گیرد. بر این اساس جملهٔ گذرا را می‌توان نادیده گرفت و گفت کـه برای t های بـزرگ جواب معادلهٔ (۲۵) اساساً همان‌جواب خصوصی (۲۷)، است. بسامد این‌ارتعاش اجباری برابر با بسامد نیروی خارجی، یعنی $\omega/2\pi$ است، و دامنه آن با ضریب

$$\frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega^2 M)^2+\omega^2 c^2}} \qquad (۲۹)$$

برابر است.

نکات‌جالبی درعبارت دامنه نهفته‌است. زیرا این‌عبارت‌علاوه‌بر ω و F_0 به k ، c و M نیز وابسته است. به عنوان نمونه، اگر c خیلی کوچك و ω نزدیك به $\sqrt{k/M}$ باشد (به طوری‌که $k-\omega^2 M$ خیلی کوچك باشد)، یعنی حرکت به‌آهستگی میرا شود وبسامدنیروی خارجی، یعنی $\omega/2\pi$ نزدیك به بسامد طبیعی

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}-\frac{c^2}{4M^2}}$$

باشد، آنگاه دامنه خیلی بزرگ خواهد بـود . این پدیده مشهور به تشدید است. یك مثال کلاسیك در این مورد، ارتعاش اجباری پلی است‌کــه یك ستون نظامی با بسامدگام خیلی نزدیك به بسامد طبیعی پل، برآن رژه می‌روند.

سرانجام، به‌طور خلاصه به‌ذکر رابطهٔ بین‌مسئلهٔ مکانیکی فوق‌الذکرومسئلهٔ الکتریکی موردبحث‌در بخش۱۳ می‌پردازیم. درآن‌بخش‌نشان‌دادیم که هر گاه یك مدار الکتریکی‌ساده شامل یك مقاومت، یك القاگــر ویك خازن تحت تأثیر نیروی محرکهٔ الکتــریکی متناوب $E = E_0 \cos \omega t$ باشد، آنگاه Q ، مقدار بار خازن ، توسط معادلهٔ دیفرانسیل

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{c}Q=E_\circ \cos \omega t$$

داده می‌شود. این معادله شباهت چشمگیری به معادلهٔ (۲۵) دارد. بویژه، تناظرهای زیر جلب توجه می‌کنند:

جرم M ↔ القائی L

چسبندگی c ↔ مقاومت R

سختی‌فنر k ↔ معکوس ظرفیت $\frac{1}{C}$

تغییرمکان x ↔ بار خازن Q

این تشابه بین دستگاههای مکانیکی و الکتریکی، بیان ریاضی دو دستگاه را یکی می‌کند و ما را قادر می‌سازد تمام نتیجه‌ها را مستقیماً از اولی به دومی انتقال دهیم. بنابراین درمدار الکتریکی داده شده یك مقاومت بحرانی خواهیم داشت که برای مقاومتهای کمتر از آن رفتار آزاد مدار ارتعاشی است با بسامد طبیعی معین، نوسان واداشته حالت ماندگار بار Q، و پدیدهٔ تشدید را داریم که در شرایط مناسب اتفاق می‌افتد.

تمرین

۱ــ نوسان واداشته(۲۷) در حالت تحت میرا را درنظر بگیرید. مطلوب است تعیین بسامد نیروی خارجی به طوری که دامنهٔ (۲۹) ماکزیمم شود. آیاچنین بسامد نیروی خارجی لزوماً وجود دارد؟ این مقدار از بسامد نیروی خارجی را (اگر موجود باشد) بسامد تشدید می‌نامند. نشان دهید که این مقدار همواره از بسامد طبیعی کمتراست.

۲ــ ارتعاش‌آزاد تحت میرایی راکه توسط رابطهٔ (۲۰) توصیف شده است درنظر بگیرید. نشان دهید که x ماکزیمم مقدار خودرا به ازای مقادیر t برابر با ۰، T، $2T$، ...، اختیار می‌کند، که T «دورهٔ تناوب» مذکور در رابطهٔ (۲۱) است. هرگاه x_1 و x_2 دومقدار ماکزیمم متوالی x باشند، نشان دهید که $x_1/x_2=e^{bT}$. لگاریتم این‌مقدار، یعنی bT را کاهش لگاریتمی ارتعاش می‌نامند.

۳ــ جسم کروی شناوری به شعاع r را درنظربگیرید که نصف آن زیرآب باشد. اگرآن‌را کمی بیشتر درآب فروبریم، نیروی بازگرداننده‌ای برابر با وزن آب جابجا شده‌آن‌را به طرف بالا فشار می‌دهد، و اگر کره را در این حالت رها کنیم، روی آب بالا و پائین خواهد رفت. در صورتی که از اصطکاك آب صرف‌نظر شود، دورهٔ تناوب نوسان کره را به دست‌آورید.

۴ــ فرض‌کنید‌که بین دو نقطه از سطح زمین تونل مستقیمی احداث شده باشد، اگر دراین تونل راه آهنی کشیده شود، و ازنیروی اصطکاك صرفنظر کنیم، و قطاری که دریك‌انتهای

تونل قرارمی‌گیرد، تحت تأثیر نیروی وزن خود به حرکت درآید و در انتهای دیگر تونل متوقف شود ومجدداً برگردد، نشان دهید که زمان لازم برای رفت و برگشت قطار درکلیهٔ چنین تونلهایی یکسان است، و مقدار آن را تخمین بزنید.

۲۱. قانون گرانش نیوتن وحرکت سیارات

قانون عکس‌مجذور جاذبه دربسیاری از پدیده‌های طبیعی مانند مدارسیارات حول‌خورشید، حرکت ماهواره‌ها حول زمین، مسیرحرکت ذرات باردار در فیزیك اتمی و غیره ظاهر می‌شود، به‌طوری‌که هرتحصیل‌کردهٔ رشتهٔ علوم‌باید اطلاعاتی درمورد نتایج‌آن داشته‌باشد. هدف ما دراین‌بخش به‌دست آوردن قوانین‌کپلر در مورد حرکت سیارات از قانون‌گرانش عمومی نیوتن است . بدین منظور حرکت جسم کوچکی به جرم m (سیاره) را که تحت تأثیر نیروی جاذبهٔ یك جسم بزرگ ثابت به جرم M (خورشید) است، بررسی می‌کنیم .

برای بحث در مورد ذرهٔ متحرکی که نیروی وارد به‌آن همیشه در امتداد خط واصل بین ذره و نقطهٔ ثابتی است، معمولا آسانترین راه آن است‌که سرعت، شتاب، و نیرو را به مؤلفه‌هایی در امتداد آن خط و امتداد عمود برآن تجزیه‌کنیم. بنابراین جسم ثابت M را در مبدأ دستگاه مختصات قطبی (شکل ۲۴) فرض می‌کنیم و بردار شعاعی از مبدأ به ذره متحرك m را به‌صورت

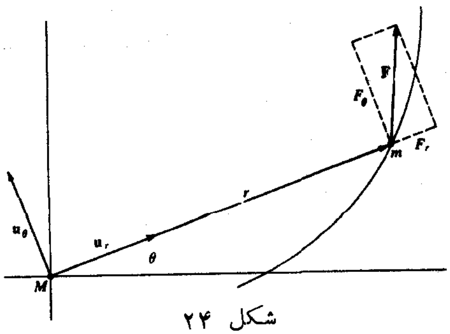
$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \qquad (1)$$

نشان می‌دهیم، در اینجا $\mathbf{u}_r$ بردار یکه در جهت $\mathbf{r}$ است[1]. روشن است‌که

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta \qquad (2)$$

و $\mathbf{u}_\theta$، بردار یکه عمود بر $\mathbf{u}_r$ ، درجهت ازدیاد θ ، برابر است با

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta \qquad (3)$$



شکل ۲۴

۱. در اینجا طبق معمول برای نمایش بردارها از حروف سیاه استفاده می‌کنیم.

روابط سادهٔ

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}=\mathbf{u}_\theta \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta}=-\mathbf{u}_r$$

که ازمشتق گیری (۲) و (۳) به‌دست می‌آیند، برای محاسبهٔ سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ ، ضروری هستند. با مشتق گیری مستقیم از (۱) خواهیم داشت:

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}+\mathbf{u}_r\frac{dr}{dt}=r\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}+\mathbf{u}_r\frac{dr}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta+\frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r \tag{۴}$$

و

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\left(r\frac{d^۲\theta}{dt^۲}+۲\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{u}_\theta+\left[\frac{d^۲r}{dt^۲}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^۲\right]\mathbf{u}_r \tag{۵}$$

هر گاه نیروی وارد بر m ، یعنی $\mathbf{F}$ را به‌صورت

$$\mathbf{F}=F_\theta\mathbf{u}_\theta+F_r\mathbf{u}_r \tag{۶}$$

بنویسیم ، به کمك (۵) و (۶) وقانون دوم حرکت نیوتن $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$ ، نتیجه می‌شود که

$$F_\theta=m\left(r\frac{d^۲\theta}{dt^۲}+۲\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) \quad \text{و} \quad m\left[\frac{d^۲r}{dt^۲}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^۲\right]=F_r \tag{۷}$$

این‌معادلات دیفرانسیل‌حرکت‌ذرهٔ m را، بدون‌توجه به‌ماهیت نیرو، توصیف می کنند. هدف بعدی ما آن است که با فرضهای خاصی درمورد مقدار و جهت نیروی $\mathbf{F}$ ، اطلاعاتی ازاین معادلات استخراج کنیم.

نیروهای مرکزی . $\mathbf{F}$ رانیروی مرکزی‌نامند،هرگاه فاقدمؤلفهٔ عمودبر $\mathbf{r}$ باشد، یعنی $F_\theta=۰$. با این‌فرض، اولین معادلهٔ (۷) به‌صورت

$$r\frac{d^۲\theta}{dt^۲}+۲\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=۰$$

نوشته می‌شود. حال اگرطرفین آن را در r ضرب کنیم به‌صورت

$$r^۲\frac{d^۲\theta}{dt^۲}+۲r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=۰$$

و یا

$$\frac{d}{dt}\left(r^۲\frac{d\theta}{dt}\right)=۰$$

در می‌آید. بنابراین

$$r^۲\frac{d\theta}{dt}=h \tag{۸}$$

که درآن h مقدار ثابتی است. فرض می کنیم که h مثبت باشد، یعنی جرم m درجهت خلاف

حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کند. هرگاه $A=A(t)$ برابر باشد با مساحت جارو شده توسط بردار $\mathbf{r}$ از یک وضعیت مرجع ثابت به طوری که $dA=r^{2}d\theta/2$، آنگاه (۸) حاکی از آن است که

$$dA=\frac{1}{2}\left(r^{2}\frac{d\theta}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}h\,dt \qquad (9)$$

هرگاه از طرفین (۹) از t_1 تا t_2 انتگرال بگیریم، چنین به‌دست می‌آوریم

$$A(t_2)-A(t_1)=\frac{1}{2}h(t_2-t_1) \qquad (10)$$

این رابطه قانون دوم کپلر را به‌دست می‌دهد: بردار شعاعی $\mathbf{r}$ از خورشید به سیاره درفواصل زمانی مساوی مساحتهای مساوی را جارو می کند.[1]

نیروهای گرانشی مرکزی. اکنون حالت خاصتری را در نظر می گیریم که اندازهٔ نیروی مرکزی مربوطه ــ بنا بر قانون گرانش نیوتن ــ متناسب است با حاصلضرب دوجرم و معکوس مجذور فاصلهٔ بین آنها :

$$F_r=-G\frac{Mm}{r^{2}} \qquad (11)$$

حرف G نمایشگر ثابت گرانشی است که یکی از ثابتهای عمومی طبیعت است. هرگاه (۱۱) را با انتخاب $k=GM$ به‌صورت مختصر وسادهٔ

$$F_r=-\frac{km}{r^{2}}$$

بنویسیم، آنگاه معادلهٔ دوم (۷) به‌صورت

$$\frac{d^{2}r}{dt^{2}}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{2}=-\frac{k}{r^{2}} \qquad (12)$$

نوشته می‌شود. چنانچه متغیر جدید $z=1/r$ را درنظر بگیریم و به‌جای t از θ به‌عنوان متغیر مستقل استفاده کنیم، معادله به‌صورتی آشنا تبدیل خواهد شد. برای انجام این تبدیل، ابتدا باید عبارات زیر را محاسبه کنیم.

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{z^{2}}\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z^{2}}\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{z^{2}}\frac{dz}{d\theta}\frac{h}{r^{2}}=-h\frac{dz}{d\theta}$$

---

۱. وقتی که تیکو براهه منجم دانمارکی درسال ۱۶۰۱ فوت کرد، برای دستیارش یوهانس کپلر (۱۵۷۱ــ۱۶۳۰) مقادیر زیادی از داده‌های خام مربوط به‌موقعیت سیارات در زمانهای مختلف به‌جای ماند. کپلر پس‌از مرگ او بیست سال روی این داده‌ها کارکرد تا سرانجام موفق شد سه قانون زیبا و سادهٔ خود را درمورد حرکت سیارات کشف‌کند، که مرحلهٔ اعتلای هزاران سال رصدهای محض نجومی بود.

و

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)=-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{d^2z}{d\theta^2}\frac{h}{r^2}=-h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}$$

هرگاه عبارت اخیر را در رابطهٔ (۱۲) قراردهیم، وبه‌جای r و $d\theta/dt$ بترتیب $1/z$ و hz^2 بگذاریم، خواهیم داشت

$$-h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}-\frac{1}{z}h^2z^4=-kz^2$$

یا

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}+z=\frac{k}{h^2} \tag{۱۳}$$

بسادگی می‌توان دیدکه جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$z=A\sin\theta+B\cos\theta+\frac{k}{h^2} \tag{۱۴}$$

برای سادگی، جهت محور قطبی را چنان تغییر می‌دهیم که وقتی $\theta=0$ ، r مینیمم گردد. (یعنی، m درکمترین‌فاصله ازمبدأ باشد.) این بدان معناست‌که z باید دراین جهت‌ماکزیمم باشد، بنابراین، در $\theta=0$ داریم

$$\frac{dz}{d\theta}=0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2z}{d\theta^2}<0$$

این شرایط نتیجه می‌دهند کـه $A=0$ و $B>0$. حـال اگر به جای z عبارت $1/r$ را بگذاریم، در آن صورت (۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$r=\frac{1}{k/h^2+B\cos\theta}=\frac{h^2/k}{1+(Bh^2/k)\cos\theta}$$

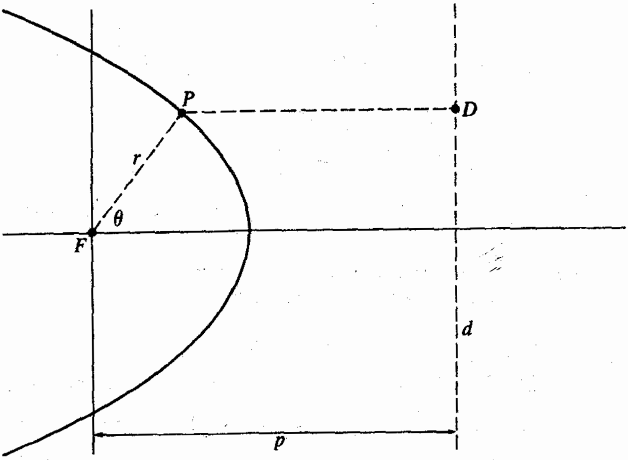
وچنانچه $e=Bh^2/k$ ، آنگاه معادلهٔ مدار به‌صورت

$$r=\frac{h^2/k}{1+e\cos\theta} \tag{۱۵}$$

درمی‌آیدکه در آن e مقدار ثابت مثبتی است.

حال یـادآور می‌شویم (شکل ۲۵) کـه مکان هندسی تعـریف شده تـوسط رابطهٔ $PF/PD=e$ یك مقطع مخروطی با کانون F ، خط هادی d ، وخروج از مرکز e است. وقتی این عبارت را برحسب r و θ بنویسیم، بسادگی دیده می‌شود که

$$r=\frac{pe}{1+e\cos\theta}$$



شکل ۲۵

معادلهٔ قطبی مقطع مخروطی است ، و بسته به اینکـه $e<1$ ، $e=1$ ، یا $e>1$ ، مقطع مخروطی، بیضی، سهمی، ویاهذلولی است. این نکات نشان می‌دهدکه مدار (۱۵) یك‌مقطع مخروطی با خروج از مرکز $e=Bh^2/k$ است، و چـون سیارات در دستگاه خـورشیدی باقی می‌مانند، وبنابراین روی یك مـدار بسته حرکت می‌کنند، پس قانون اول کپلر به‌این صورت به دست می‌آید: مدار هرسیاره یك بیضی است‌که خورشید در یکی از کانونهایش قراردارد.

معنای فیزیکی خروج از مرکز. از معادلهٔ (۴) نتیجه می‌شود که انرژی جنبشی m برابر است با

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \tag{۱۶}$$

انرژی پتانسیل دستگاه برابـر است با منهـای کار لازم جهت حرکت دادن m به بینهایت (جایی که انرژی پتانسیل صفر است)، بنابراین

$$-\int_r^\infty \frac{km}{r^2}\,dr=\frac{km}{r}\bigg|_r^\infty=-\frac{km}{r} \tag{۱۷}$$

هرگاه E انرژی‌کل دستگاه باشد‌که با توجه به اصل بقای انرژی مقداری ثابت است، از (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود‌که

$$\frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]-\frac{km}{r}=E \tag{۱۸}$$

در لحظهٔ $\theta=0$ ، (۱۵) و (۱۸) چنین به‌دست می‌دهند

$$r=\frac{h^2/k}{1+e} \quad \text{و} \quad \frac{mr^2}{2}\frac{h^2}{r^4}-\frac{km}{r}=E$$

چنانچه بین این دو رابطه r را حذف و e را محاسبه کنیم، درمی‌یابیم که

$$e=\sqrt{1+E\left(\frac{2h^2}{mk^2}\right)}$$

اینکار به ما امکان می‌دهد که معادلهٔ (۱۵) را برای مدار به‌صورت

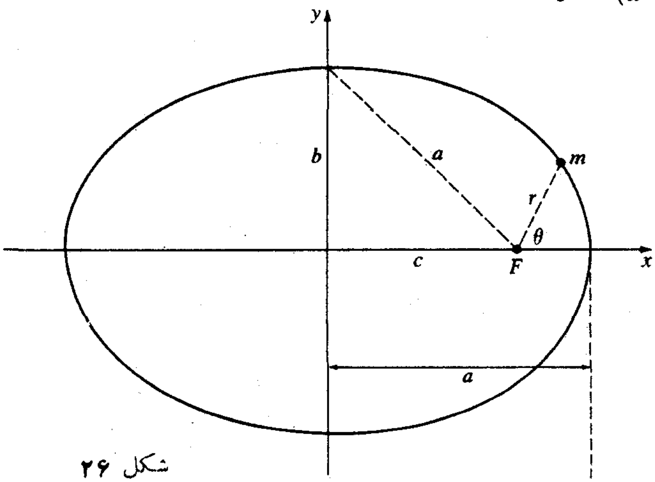
$$r=\frac{h^2/k}{1+\sqrt{1+E(2h^2/mk^2)}\cos\theta} \tag{19}$$

بنویسیم. با توجه به (۱۹) واضح است که مدار بیضی، سهمی و یا هذلولی است بسته به اینکه $E<0$ ، $E=0$ ، و یا $E>0$. بنابراین روشن است که کیفیت مدار m توسط E، یعنی انرژی کل آن، به طور کامل مشخص می گردد. بنابراین سیارات در منظومهٔ شمسی دارای انرژی منفی هستند و مسیرشان بیضی است، و اجسامی که با سرعت زیاد از منظومهٔ شمسی عبورمی کنند دارای انرژی‌مثبت‌اند و روی مسیرهای هذلولی شکل‌حرکت می کنند. جالب توجه است که چنانچه این امکان وجود می‌داشت که سیاره‌ای مانند زمین را از پشت با نیروی زیاد چنان فشار دهیم که سرعتش افزایش یابد و انرژی کل آن بیشتر از صفر گردد، آنگاه زمین وارد یك مدار هذلولی‌شکل می گردید و برای همیشه منظومهٔ شمسی را ترك می کرد.

دورهٔ تناوب دوران سیارات. حال توجه خود را به‌حالتی معطوف می کنیم که در آن مدار بیضی (شکل ۲۶) به معادلهٔ قطبی (۱۵) و به معادلهٔ دکارتی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

است. از هندسهٔ تحلیلی مقدماتی می‌دانیم که $e=c/a$ و $c^2=a^2-b^2$ ، بنابراین $e^2=(a^2-b^2)/a^2$ و



شکل ۲۶

$$b^{2}=a^{2}(1-e^{2}) \tag{۲۰}$$

a، مقدار متوسط فاصلهٔ m تا کانون F، نصف مجموع کمترین و بیشترین مقدار r است، بنابراین از (۱۵) و (۲۰) به دست می‌آوریم که

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{h^{2}/k}{1+e}+\frac{h^{2}/k}{1-e}\right)=\frac{h^{2}}{k(1-e^{2})}=\frac{h^{2}a^{2}}{kb^{2}}$$

و در نتیجه

$$b^{2}=\frac{h^{2}a}{k} \tag{۲۱}$$

هر گاه T دورهٔ تناوب m (یعنی، زمان لازم برای یك دوران کامل روی مدار) باشد، آنگاه چون‌مساحت بیضی برابر با πab است، از رابطهٔ (۱۰) نتیجه می‌شود که $\pi ab=hT/2$. با توجه به (۲۱) چنین نتیجه می‌شود

$$T^{2}=\frac{4\pi^{2}a^{2}b^{2}}{h^{2}}=\left(\frac{4\pi^{2}}{k}\right)a^{3} \tag{۲۲}$$

در بررسی حالت ایده‌آل فعلی، ثابت $k=GM$ به جرم مرکزی M بستگی دارد وبه‌جرم m وابسته نیست، بنابراین، رابطهٔ (۲۲) برای کلیهٔ سیارات منظومهٔ شمسی برقرار است و این خود قانون سوم کپلر است: مجذور دورهٔ تناوب گردش سیارات با مکعب فاصلهٔ متوسط آنها تا خورشید متناسب است.

البته ایدهٔ اصلی مطرح شده در این بخش متعلق به نیوتن است (پیوست ب). ولی، اثباتی که دراینجا آمده است کاملا متفاوت با بحث اولیهٔ اوست، زیرا او هیچگاه ازروشهای حساب دیفرانسیل وانتگرال به‌طور صریح استفاده نکرد.

تمرین

۱ــ نشان دهید که دو قانون اول کپلر به‌شکل معادلات (۸) و (۱۵) نتیجه می‌دهند که m با نیرویی متناسب با مجذور معکوس r به سوی مبدأ جذب می‌شود. این حقیقت، کشف بنیادی نیوتن بود، زیرا موجب شدکه نیوتن قانون گرانش خود را بنا نهد وبه‌بررسی نتایج آن بپردازد.

۲ــ نشان دهید که تندی v سیاره در هرنقطه از مدارش از رابطهٔ

$$v^{2}=k\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

به دست می‌آید.

۳ــ فرض کنید زمین منفجر و به قطعاتی متلاشی گردد که با تندی یکسان (نسبت به‌خورشید) در جهات مختلف و مدارهای مختص خود به حرکت درآیند. نشان دهید کلیهٔ قطعاتی

که روی خورشید نمی‌افتند یا از منظومهٔ شمسی فـرار نمی‌کنند دوباره در همان نقطه به‌همدیگرخواهند رسید.

پیوست‌الف . اویلر

لئونهارت اویلر (۱۷۰۷–۱۷۸۳) بـزرگترین دانشمند سویسی و یکی از سه ریـاضیدان برجستهٔ دوران نوین بود (دو نفر دیگر گاوس و ریمان بودند). در مقایسه بـا مؤلفین تمام رشته‌ها و در همهٔ اعصار اویلر شاید پرکارترین آنها بود. انتشار مجموعهٔ آثار او در سال ۱۹۱۱ آغاز شد، و تخمین زده‌اند که تکمیل نهایی این طرح به بیش‌از ۱۰۰ جلد کتاب بزرگ‌نیاز دارد. نوشته‌های او نمونه‌ای ازسادگی و روشنی‌است. اویلرهرگز به‌طورخلاصه و فشرده نمی‌نوشت، و همیشه ایده‌های فـراوان وپهنهٔ وسیع مطالب مـورد توجه خود را در نوشته‌هایش به‌طور آشکار منعکس می‌نمود. آراگو، فیزیکدان فرانسوی ، در سخنرانی خود راجع به استعداد بی‌نظیر اویلر، گفته است‌که «اویلر به همان راحتی‌که انسان نفس می‌کشد یاعقاب درباد پرواز می‌کند، بدون تلاش محسوس، محاسبه می‌کرد».باوجود آنکه اویلر در ۱۷ سال آخر عمرش ازکوری مطلق رنج می‌بـرد، به‌یاری حافظهٔ قـوی و تخیل پربارش و به‌کمك‌کسانی‌که گفته‌های او را یادداشت می‌کردند توانست به نوشتن‌کتابها و مقالاتش ادامه دهد و بازده فوق‌العادهٔ کار خود رانیز بیفزاید.

اویلر اهل بازل و در دانشگاه شاگـرد یوهان برنولی بـود ، ولـی بزودی از معلم خود پیشی‌گرفت. زندگی شغلی او در فرهنگستانهای علوم برلین و سن‌پترزبورگ گذشت. او مردی بافرهنگ وسیع بود، ودر زبانها وادبیات‌کلاسیك تبحر فراوانی داشت (اوحماسهٔ یونانی انئید سرودهٔ ویرژیل را حفظ بـود.) و به چندین زبـان زنده ، فیزیولوژی، طب ، گیاه‌شناسی، جغرافی ، و همهٔ زمینه‌های علوم فیزیك شناخته شده درآن زمان، مسلط بود. اما استعدادش در ماوراءالطبیعه ، و بحث وجدل ضعیف بود، و درمباحثهٔ شفاهی دربار فردریك کبیرکه بین تعداد زیادی ازافراد خوش طبع با ولتر صورت‌گرفت، مقام دوم راکسب‌کرد. زندگی خصوصیش آنقدرکـه از مـردی با ۱۳ فرزند انتظار مـی‌رود کم حادثه و آرام بود.

گرچه اویلر معلم‌نبود، تأثیرش‌روی معلمان‌ریاضی ازهرشخص دیگری عمیقتر بود. این تأثیرعمدتاً به‌خاطر سه مقالهٔ مهم‌اوبودکه ذیلا ذکر می‌شود؛ مدخل درآنالیز بینهایت کوچکها (۱۷۴۸)[1]، تأسیس‌حساب دیفرانسیل(۱۷۵۵)[2] وتأسیس‌حساب انتگرال(۱۷۶۸–۱۷۹۴)[3]. این ادعای قدیمی کـه ، کلیهٔ کتب درس‌حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتـی وپیشرفته‌ای کـه از سال ۱۷۴۸ به بعد چاپ شده است اساساً یاکپی کتاب اویلر ویـا کپی کپی کتاب

1. Introductio in Analysin Infinitorum
2. Institutiones Calculi Differentialis
3. Institutiones Calculi Integralis

اویلر است[1]، تاحدود زیادی واقعیت دارد. دراین کتب اکتشافات افراد قبل از او جمع آوری وتنظیم شده اند وسرشار از ایده‌های خود اویلرند. اوهندسهٔ تحلیلی مسطحه وفضائی راتکمیل کرد وتعمیم داد و چگونگی برخورد تحلیلی با مثلثات را مطرح ساخت، و بانی بررسیهای جدید در موردتوابع $\log x$ و e^x بوده است. وی نظریه‌ای سازگار ازلگاریتم اعداد منفی وموهومی ابداع نمود، وکشف کردکه $\log x$ دارای بینهایت مقدار است. آثار او موجب شدکه نمادهای e ، π ، و i بین همه ریاضیدانان رایج شود، و او بودکه آنها را در رابطهٔ شگفت‌انگیز $e^{i\pi}+۱=۰$ به هم مربوط نمود. ایـن حالت خاصی از فرمول مشهور وی به‌صورت $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ است که‌توابع نمایی و مثلثاتی را به‌هم پیوند می‌دهد. از جملهٔ دیگـر کارهای او در نشانه‌گذاریهای متعارف ریاضی $\sin x$ ، $\cos x$ ، استفاده از $f(x)$ به‌عنوان تابع به‌طور عام،واستفاده از $\sum$ برای‌جمع‌است[2]. او اولین وبزرگترین فرد متبحر درسری‌های بینهایت، حاصلضرب‌های بینهایت وکسرهای مسلسل بود، وکارهایش مملو از اکتشافات چشمگیر در ایـن زمینه‌هاست. او مسائل خـاص وعینی را برنظریه‌هـای کلی که امروزه متداول است ترجیح می‌داد، و بصیرت کـم نظیر،او با کشف روابط بین فـرمولهای بظاهر بی‌ارتباط ، راههای بسیاری بـه سوی مباحث جدیـد آنالیز گشود کـه بسط آنها را به‌عهدهٔ ریاضیدانان بعد از خود گذاشت[3].

او نظرات مهم فراوانی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل مطرح کـرد: روشهای مختلف تقلیل مرتبه،مفهوم عامل انتگرال‌ساز (که غالباً ضریب اویلر خوانده می‌شود)، قسمتهای‌اصلی نظریهٔ معادلات خطی مرتبهٔ دوم به‌طریق داده شده دراین فصل، جوابهای سری توانی، همه را مدیون اویلر هستیم[4]. علاوه براین، او اولین بحث‌منظم واصولی حساب‌تغییرها را (برپایهٔ معادلهٔ دیفرانسیل‌بنیادی خود راجع به‌منحنی‌مینیمم کننده) بیان کرد، انتگرالهای اویلری‌راکه توابع گاما و بتا را تعریف می‌کنند کشف نمود، و ثابت اویلر ، یعنی

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}-\log n\right)=۰٫۵۷۷۲\ \ldots$$

---

۱. مراجعه شود به مقالهٔ زیر
C. B. Boyer, The Foremost Textbook of Modern Times, *Am. Math. Monthly*, vol. 58, pp. 223–226. 1951.

2. F. Cajori, "A History of Mathematical Notations," Open Court, La Salle, Ill., 1929.

۳. به خواننده‌ای که می‌خواهد آشنایی دست اول با اندیشهٔ اویلر به دست آورد توصیه می‌کنیم که فصل‌ششم از جلد اول‌کتاب برجستهٔ ج. پولیا (G. Polya) ،تحت عنوان
Mathematics and Plausible Reasoning
راکه توسط موسسهٔ انتشارات دانشگاه پرینستون در ۱۹۵۴ چاپ شده است، مطالعه نماید.

۴. رجوع شود به یادداشتهای تـاریخی ای. ل. اینس (E.L.Ince) در صفحـات ۵۳۳–۵۳۶ کتابش به نام Ordinary Differential Equations, Dover, New York, 1956

راکه مهمترین عدد خاص ریاضی پس از π و e است، معرفی کرد[۱]. او قبل ازآنکه فوریه، بسل، و لاپلاس حتی متولد شده باشند، با سری فوریه کار کرد، در مطالعهٔ ارتعاشات غشای دایره شکل تحت کشش با توابع بسل مواجه شد، و از تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده کرد. منشأ توپولوژی (که یکی از نیروهای نافذ ریاضیات نوین است) در راه‌حل پیشنهادی او برای مسئلهٔ پل کونیگسبرگ و فرمول وی به‌صورت $V - E + F = ۲$، راجع به تعداد رئوس، اضلاع، و وجوه چند وجهی‌های ساده، نهفته است.

در نظریهٔ اعداد، اولین اثبات منتشر شدهٔ قضیهٔ فرما وقضیهٔ دو مجذوری فرما متعلق به اوست. (به بخش ۶ رجوع شود). او سپس، با معرفی تابع اویلر ϕ، قضیهٔ نخست فوق‌الذکر را که ازقضایای کلاسیك است تعمیم داد؛ اثبات قضیهٔ دوم به‌قیمت هفت‌سال تلاش متناوب وی تمام شد. علاوه براین، او ثابت کرد که هرعدد صحیح و مثبتی را می‌توان به‌صورت مجموع چهار مجذور نوشت، قانون عکس مجذورات را بررسی، ونظریه افرازها را ابداع کرد، که این خود با مسائلی ازقبیل تعیین تعداد راههای ممکن برای نوشتن یك عدد صحیح و مثبت مفروض به‌صورت مجموع مجذورات اعدادی صحیح و مثبت، مربوط می‌شود.

قسمتی ازجالب‌ترین کارهای اویلر به‌دنبالهٔ اعداد اول (یعنی اعدادصحیح و بزرگتر از یك‌مانند p که تنها مقسوم علیه‌های مثبتشان ۱ و p باشد) مربوط می‌گردد. استفادهٔ او از واگرایی سری همساز $۱ + ۱/۲ + ۱/۳ + \dots$ در اثبات قضیهٔ اقلیدس، که مدعی وجود بینهایت عدد اول است، چنان ساده و استادانه است که به‌خود اجازه می‌دهیم آن‌را دراینجا بیاوریم؛ فرض کنید که‌تنها N عدداول داشته باشیم که‌عبارت باشنداز $p_۱$، $p_۲$، ...، p_N. آنگاه هرعددصحیح بزرگتر ازیك‌چون n را می‌توان به‌صورت‌منحصر بفرد $n = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} \dots p_N^{a_N}$ تجزیه کرد. هرگاه a بزرگترین این توانها باشد، آنگاه

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{۱}{n} \leqslant \left(۱ + \frac{۱}{p_۱} + \frac{۱}{p_۱^۲} + \dots + \frac{۱}{p_۱^a}\right)$$
$$\left(۱ + \frac{۱}{p_۲} + \frac{۱}{p_۲^۲} + \dots + \frac{۱}{p_۲^a}\right) \dots \left(۱ + \frac{۱}{p_N} + \frac{۱}{p_N^۲} + \dots + \frac{۱}{p_N^a}\right)$$

این رابطه بسادگی از ضرب عوامل سمت راست به‌دست می‌آید. ولی فرمول سادهٔ $۱ + x + x^۲ + \dots = ۱/(۱ - x)$، که برای $|x| < ۱$ صادق است نشان می‌دهد که جملات این حاصلضرب، از اعداد

$$\frac{۱}{۱ - ۱/p_۱}, \frac{۱}{۱ - ۱/p_۲}, \dots, \frac{۱}{۱ - ۱/p_N}$$

کمترند، لذا نامساوی

---

۱. رجوع شود به مقالهٔ

Philip J. Davis, Leonhard Euler's Integral: A Historic Profile of the Gamma Function, *Am. Math. Monthly*, vol. 66, pp. 849-869, 1959.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}<\frac{p_1}{p_1-1}\,\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_N}{p_N-1}$$

برای هر n برقرار است. این نتیجه باواگرایی سری همساز متناقض است، ونشان می‌دهد که تعداد اعداد اول نمی‌تواند متناهی باشد. اویلر همچنین ثابت کرد که سری معکوس اعداد اول، یعنی سری

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\dots$$

واگراست، واتحاد شگفت‌انگیز

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-1/p^s}\ ,\quad s>1$$

را ، که درآن عبارت طرف راست، حاصلضرب اعداد $(1-p^{-s})^{-1}$ برای کلیهٔ اعداد اول p است، کشف کرد. ما در یادداشت خود راجع به ریمان، در پیوست ه از فصل ۵، بازهم به این اتحاد بازخواهیم گشت.

در زمان اویلر تمایزی بین ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی وجود نداشت و ازنظر او جهان فیزیکی زمینه‌ای مناسب برای روشهای آنالیز وی فراهم می‌آورد. اساس مکانیك کلاسیك توسط نیوتن نهاده شد، ولی طراح اصلی آن اویلر بود. او اولین کسی بود که ایدهٔ جرم نقطه‌ای یا ذره را طی مقاله‌ای در سال ۱۷۳۶ بصراحت مطرح ساخت ، وهمچنین اولین کسی بود که شتاب ذرهٔ متحرك روی منحنی رامطالعه کرد وعلامت بردار را درمورد شتاب وسرعت به کار گرفت. موفقیتهای پیاپی او درفیزیك ریاضی‌چنان زیاد، وتأثیر اوچنان فراگیربوده‌است که اکثراکتشافاتش را ابداً به‌او نسبت نداده‌اند وفیزیکدانها آنها را به عنوان بخشی از نظم طبیعی اشیا ، بدیهی پنداشته‌اند. با این حال معادلات حرکت اویلربرای دوران جسم‌صلب، معادلهٔ هیدرودینامیکی اویلر درمورد جریان سیال تراکم‌ناپذیر ایده‌آل، قانون اویلر درمورد خمش تیرهای کشسان، و بار بحرانی اویلر درنظریهٔ کمانش ستونها، همه درحال‌حاضر به‌نام اوخوانده می‌شود. درموارد متعددی رشتهٔ تفکرعلمی‌اش او را به ایده‌هایی هدایت می‌کرد که معاصرانش هنوز آمادگی پذیرش آنها را نداشتند. به‌عنوان مثال ، اویلر پدیدهٔ فشار تشعشعی را که برای نظریهٔ نوین پایداری ستاره‌ها حیاتی است، بیش‌ازیك‌قرن قبل‌ازآنکه ماکسول نظریهٔ‌آنرا طی تحقیقاتش درمورد الکترومغناطیس دوباره کشف کند، پیش‌بینی کرده بود.

اویلر، شکسپیر ریاضیات بود. کار اوجهانی است، سرشار ازجزئیات است وهیچ‌گاه به کنه آن نمی‌توان رسید.

پیوست ب . نیوتن

اکثر افراد با نام و شهرت جهانی آیزك نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) آشنا هستند ، زیرا او به عنوان کاشف قانون گرانش ، دو قرن و نیم پس از مرگش ، هنوز شهرت جهانی دارد. اما

مطلبی که کمتر بدان توجه می‌شود، حوزه بسیار وسیع دستاوردهای فراوان اوست که در واقع علوم فیزیکی نوین را پدید آورده است و درنتیجه تأثیر او درتعیین جهت زندگی متمدن عمیقتر از ترقی و سقوط ملتها بوده است. کسانی که حق قضاوت دارند متفقاً ، او را یکی از معدود اندیشمندان بشریت می‌دانند.

نیوتن در یک خانوادهٔ کشاورز در ده وولستورپ[1] انگلستان متولد شد. دربارهٔ سالهای اول زندگیش اطلاع زیادی در دست نیست، و زندگی دانشگاهی او در دورهٔ لیسانس درکمبریج بظاهرچندان ممتاز نبوده است. درسال ۱۶۶۵ میلادی شیوع طاعون باعث تعطیل دانشگاهها شد، و نیوتن به خانه‌اش در ده مراجعت نمود و تا سال ۱۶۶۷ میلادی درآنجا ماند. درطول این دوسال تنهایی روستایی ـ درسن بین بیست و دو تا بیست وچهارسالگی ـ نبوغ خلاقش به‌صورت دریایی از اکتشافات بی‌همتا درتاریخ فکر بشر نمودار شد: سری دوجمله‌ای برای توانهای منفی وکسری؛ حساب دیفرانسیل و انتگرال؛ گرانش عمومی به‌عنوان کلید توضیح سازوکار (مکانیسم)منظومهٔ شمسی؛ و تجزیهٔ نور خورشید به بیناب قابل رؤیت به‌وسیلهٔ منشور، با اشاره به‌نقش آن در درك رنگهای رنگین کمان و به‌طور کلی ماهیت نور. درسالهای پیریش خاطرات دوران جوانی معجزه‌آسای خود را چنین بیان کرده است: آن زمانها بهترین دوران عمر من درکشفیات بود و بیش‌از هر زمان دیگر، به ریاضیات و فلسفه [یعنی علوم] توجه داشتم.

نیوتن همواره شخصی درونگرا و راز نگهدار بود، و اغلب اکتشافات شگفت‌آورش را نزد خود حفظ می‌کرد. او تمایلی به انتشارکارهای خود نداشت واغلب کارهای برجسته خود را، به‌اصرار و پافشاری دوستانش، جمع‌آوری می‌کرد. با این حال، شایستگی بی‌نظیر او بـراستادش آیزك بارو[2] چنان آشکار بود که بارو درسال ۱۶۶۹ به‌نفع دانشجوی خود از استادی استعفا داد (اتفاقی کـه درمحیط دانشگاهی بی‌سابقه بـود!) و نیوتـن ۲۷ سال پس‌ازآن درکمبریج ماند. کشفیات‌ریاضی اوهرگز به‌طور منظم و منسجم منتشرنشد،وبه‌طور محدود وتـاحدی بتصادف،از طریق گفتگوها، و نامه‌هایی کـه درپاسخ سؤالات دیگـران می‌نوشت، معلوم‌گشت. او ظاهراً اطلاعات ریاضی خود را عمدتاً بعنوان وسیلهٔ مناسبی‌جهت مطالعهٔ مسائل‌علمی درنظر می‌گرفت، و توجه نسبتاً کمی به‌خود آنها داشت. درهمین زمان لایب‌نیتس نیز مستقلا درآلمان حساب دیفرانسیل و انتگرال را کشف کرد، وبراثر مکاتبات پیگیر خود با برنولی‌ها، وکارهای بعدی‌اویلر، رهبری‌آنالیز نوین به‌اروپا منتقل شد، وحدود ۲۰۰ سال درآنجا باقی ماند[3] .

---

1. Woolsthorpe

2. Isaac Barrow

۳. خواندن مکاتبات نیوتن با لایب‌نیتس (ازطریق اولدنبورگ) درسالهای ۱۶۷۶ و ۱۶۷۷ میلادی جالب است (رجوع کنید به
H. W. Turnbull, ed., "The Correspondence of Isaac Newton", Cambridge, New York, 1959-1961)

←

دربارهٔ زندگی نیوتن درسالهای اول استادی‌اش درکمبریج اطلاعات‌زیادی در دست نیست، ولی یقین است که نورشناسی و ساختن تلسکوپ جزوکارهای مورد علاقه‌اش بوده است. اوبرای تراشیدن عدسی، روشهای زیادی را ، به‌کمك وسایل ساخت خودش، تجربه کرد و درحدود سال ۱۶۷۰ اولین تلسکوپ بازتابی راساخت که‌صورت اولیهٔ وسایل‌عظیمی است که امروزه درمون پالومار[1] و سراسر جهان به‌کار می‌رود. تناسب، و سادگی تجزیهٔ منشوری او درمورد پرتو خورشید، (که از کارهای اولیهٔ اوست) ، همواره این‌کار را در ردیف یکی ازکارهای کلاسیك ابدی در علوم تجربی، مشخص‌کرده است. ولی این تنها آغازکاربود، زیرا او همچنان‌درجهت درك عمیق خواص شگفت‌انگیز نور پیش رفت، وتمام تلاشهای او دراین‌جهت ادامه یافت تاآنجاکه نبوغ تجربی متعالی وی‌آشکارگردید. نیوتن بعضی از اکتشافات خود را منتشر کرد، ولی برخورد دانشمندان بزرگ آلزمان با این انتشارات چنان نابخردانه‌بودکه اورا به‌کناره‌گیری واداشت ومصمم کردکه‌ازآن به‌بعد تنها برای ارضای میل خود کارکند. بیست سال بعد نزد لایب‌نیتس چنین درد دل‌کرد «درمورد پدیدهٔ رنگها ... من تصور می‌کنم مطمئن‌ترین توضیحات را یافته‌ام، ولی از ترس انکار و جاروجنجال اشخاص نادان از انتشارآنها خودداری می‌کنم»[2].

دراواخر دههٔ ۱۶۷۰ نیوتن به‌یکی از حالات بی‌میلی دوره‌ای‌اش نسبت به علوم دچار شد، وتوان خود را به مسیرهای دیگری متوجه ساخت. طی این مدت هیچ مطلبی راجع به دینامیك وثقل منتشر نکرد، واکتشافات فراوان او دراین زمینه‌ها دست نخورده درکشوی میزش ماند. ولی سرانجام، پس‌از آنکه دراثر دعاوی و انتقادهای رابرت هوك[3] برانگیخته و خشمگین گشت، و توسط ادموند هالی[4] (کاشف ستارهٔ دنباله‌دار هالی) سیاستمدارانه تسکین داده شد، مجدداً به‌این مسائل روی آورد و نوشتن‌کتاب برجسته‌اش تحت عنوان اصول (*Principia*) را آغاز نمود. نیوتن در تلاشهای علمی‌اش تقریباً شبیه به‌یك کوه آتشفشان، با دورانهای خاموشی طولانی ، بود که گاه‌گاهی با فعالیتهای تقریباً فوق بشری‌فروزان می‌گشت. وقتی کتاب اصول که طی ۱۸ ماه تمرکزکامل و باورنکردنی فکری نوشته شده بود، درسال ۱۶۸۷ منتشر شد بلافاصله به‌عنوان یکی از برجسته‌ترین دستاوردهای فکر بشر شناخته شد. نیوتن دراین‌کتاب اصول اساسی مکانیك نظری و دینامیك

در بندهای ۱۶۵، ۱۷۲، ۱۸۸، و ۲۰۹ نیوتن، سری دوجمله‌ای خود را مورد بحث قرار می‌دهد ولی درعین حال با جملاتی مقلوب به اختفای ایده‌هایش راجع به حساب دیفرانسیل وانتگرال و معادلات دیفرانسیل می‌پردازد، در حالی که لایب‌نیتس نظر خود راجع به حساب دیفرانسیل و انتگرال را بروشنی آشکار می‌کند. بند ۱۹۰ نیز بسیار جالب است، زیرا نیوتن در آنجا مطالبی می‌نویسدکه احتمالاً اولین بیان و اثبات قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل‌وانتگرال‌است.

1. Mount Palomar

۲. مراجعه شود به قسمت ۴۲۷ از مکاتبات نیوتن در منبع مذکور در پانویس ۳ صفحهٔ ۱۲۰.

3. Robert Hooke

4. Edmund Halley

سیالات را طرح کرد؛ اولین بیان‌ریاضی حرکت موج را ارائه کرد؛ قوانین کپلر را ازقانون عکس مجذور فاصله گرانش به‌دست‌آورد؛ و چگونگی مدار ستاره‌های دنباله‌دار را توضیح داد؛ جرم زمین، خورشید، وسیارات قمردار را محاسبه‌کرد؛ پخ‌شدگی شکل زمین را بیان کرد، و ازآن برای توضیح تقویم اعتدالین استفاده کرد؛ و نظریهٔ جزر و مد راپایه‌گذاری کرد. اینها تنها شمه‌ای از کارپرشکوه اوست. مطالعهٔ کتاب اصول همواره‌مشکل بوده است، زیرا سبک و شیوهٔ آن دارای کیفیت ناآشنا و دور از دسترس است، که شاید برای چنین محتوای پراهمیتی مناسب باشد. همچنین، ریاضیات‌فشردهٔ به‌کار رفته درآن تقریباً متشکل‌از تمامی هندسهٔ‌کلاسیک است، که درآن زمان چندان پرورده نشده بود و حالاهم کمتر بدان می‌پردازند[1]. نیوتن در دینامیک و مکانیک سماوی به‌موفقیتی دست یافت که کپرنیک،کپلر،و گالیله راه آن‌را هموار کرده بودند. این پیروزی چنان‌کامل بودکه درطول دوقرن بعداز آن، کار بزرگترین دانشمندان این رشته‌ها چندان ازپانویسهایی براین‌کار عظیم نیوتن تجاوز نکرد. دراینجا خوب است یادآوری‌کنیم‌که منشأ علم بینا بنمایی، که نقش کم‌نظیری درگسترش دانش نجوم به جهان ماورای منظومهٔ شمسی داشته است، درتجزیهٔ بینابی نور خورشید توسط نیوتن نهفته بود.

پس‌از اوجگیری پرقدرت نبوغ وی که منجر به آفرینش کتاب اصول شد، نیوتن دوباره ازعلوم روی برگرداند. درسال ۱۶۹۶ کمبریج رابه‌قصد لندن ترك‌کرد تا سرپرست (وبعدهاکارفرمای) ضرابخانه‌گردد، و دربقیهٔ عمرطولانی خودکمی وارد اجتماع شد وحتی شروع به برخورداری از موقعیت استثنایی خود در رأس دانشمندان مشهور کرد. این تغییر و تحول درعلائق و محیط اطرافش، چیزی از قدرت نبوغ سرشار او نکاست. به‌عنوان مثال، آخروقت یکی‌از بعدازظهرهای‌روزی سخت وخسته‌کننده، درضرابخانه مطلع شدکه برنولی زیرکترین ریاضیدانان جهان را برای حل مسئلهٔ منحنی کوتاهترین زمان به مبارزه طلبیده است وقبل از آن‌که به‌بستر برود آن‌را حل‌کرد.

انتشارکتاب او تحت‌عنوان نورشناسی[2] درسال ۱۷۰۴ یکی از باارزش‌ترین کارها درزمینهٔ علوم بود. دراین‌کتاب اوکارهای قبلی‌خودرا درمورد نور و رنگ جمع‌آوری‌کرد و توسعه داد. وی به‌عنوان پیوست، سؤالات مشهور خود، یا اندیشه‌هایی در زمینه‌هایی از علوم را،که بعدها مجال پرداختن به‌آنها را نیافت، اضافه‌کرد. قسمتی ازاین سؤالات به‌یك عمر مطالعات وی در علم شیمی (یا به اصطلاح آن زمان کیمیاگری) مربوط بود. او نتایج مقدماتی اما بی‌نهایت دقیقی‌را، برمبنای‌تجربه، برای تشریح ماهیت احتمالی ماده به دست

---

۱. اشکال دیگر آن است که این «هندسه» اغلب ترجمه‌ای از استدلال حساب دیفرانسیل و انتگرال به زبان هندسی است، و همین موضوع خواندن آن‌را برای‌خوانندگان معاصر تقریباً غیرممکن می‌سازد. مراجعه شود به

Newton and the Attraction of a Sphere, in J. E. Littlewood, "A Mathematician's Miscellany," pp. 94-99 Methuen, London, 1963.

2. Opticks

آورد، و با آنکه بررسی اندیشه‌هایش راجع به اتم (وحتی هسته) مستلزم آزمایشهای دقیقتر اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بود، معلوم‌شدکه ایده‌های اصلیش کاملا درست بوده است.[۱] بنابراین، در این رشته از علوم نیز توانایی و دقت شگفت‌انگیز مشهودعلمی او نه تنها از معاصرانش بلکه ازچندین نسل بعداز وی بمراتب جلوتر بود. علاوه براین دومطلب حیرت‌انگیز از سؤالات ۱ و ۳۰ را به‌ترتیب نقل می‌کنیم: «آیا اجسام از راه دور برنور اثر نمی‌کنند، و باتأثیرشان پرتوهای نور را خمیده نمی‌کنند؟» و «آیا اجسام مادی و نور قابل تبدیل به‌یکدیگر نیستند؟» ازکلمات فوق چنین به نظر می‌رسد که‌نیوتن دراینجا خمش گرانشی نور و هم‌ارزی جرم وانرژی را بیان می‌کند ــ که نتایج اصلی نظریه نسبیت هستند. درموارد دیگر نیز به‌نظر می‌رسدکه به‌طور شهودی اسرارآمیز، مطالبی بیش‌از آنچه می‌توانست ویامی‌خواست بیان کند، می‌دانست، همان‌طورکه ازاین جملهٔ‌مرموز او به‌دوستش برمی‌آید: «این برای من به‌کمك منبعی که ازآن نتیجه‌گیری کرده‌ام روشن است، ولی تعهدی نمی‌کنم آن رابرای دیگران اثبات‌کنم»[۲]. ماهیت این «منبع» هرچه بوده باشد، بدون شك به‌قدرت تمرکزخارق‌العادهٔ وی مربوط بوده است. وقتی که‌از اوسؤال شدکه‌اکتشافات خود را چگونه انجام داده‌اید، پاسخ دادکه «مطلب را به‌طور دایم درنظر می‌گیرم و منتظر می‌شوم‌که نخستین پرتوها اندك‌اندك تبدیل‌به روشنایی کامل گردند». این موضوع به‌نظر ساده می‌رسد، ولی هرشخص با سابقه درعلوم یا ریاضیات می‌داند که نگاه داشتن مداوم مسئله‌ای برای‌بیش‌از چند ثانیه یاچند دقیقه در ذهن، چقدر مشکل است. توجه شخص سست می‌شود، مسئله بارها از نظر دور می‌شود و بارها باید با تلاش آنرا برگرداند. به‌قرار گفته‌های شاهدان، ظاهراً نیوتن قادر بود تقریباً بدون تلاش، حواس خود را برای ساعتها، روزها، وبلکه هفته‌ها روی مسئله‌ای متمرکز کند، وحتی احتیاجات گهگاه او به‌غذا و خواب بندرت رشتهٔ فکر او را درمورد مطلبی‌که باآن درگیر بود، قطع می‌کرد.

اغلب، نیوتن را یك خردگرای تمام‌عیار و تجسمی از عصر خردگرایی توصیف می‌کنند. شاید دقیق‌ترآن باشدکه راجع به او از دید قرون‌وسطی بیندیشیم: شخصی مقدس، گوشه‌نشین و دارای قوه شهودی‌که علوم و ریاضیات را ابزارکشف معمای‌جهان می‌دانست.

---

۱. مراجعه شود به
S. I. Vavilov, Newton and The Atomic Theory, in "Newton Tercentenary Celebrations", Cambridge University Press, New York, 1947.

۲. مراجعه شود به بند ۱۹۳ از مکاتبات نیوتن.

۴

نظریهٔ نوسان ومسائل مقدار مرزی

۲۲. ویژگیهای کیفی جوابها

احساس آنکه یك معادلهٔ دیفرانسیل باید حل شود، طبیعی است و یکی از اهداف عمدهٔ کار ما در فصل سوم، گسترش راههایی برای یافتن جوابهای صریح معادلهٔ

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

بود. امامتأسفانه، همانگونه که سعی داشتیم برآن تأکیدکنیم، حل این معادله برحسب توابع مقدماتی آشنا بندرت امکان‌پذیر است. این وضعیت ما را برآن می‌دارد تا با طرح مسئله در یك‌سطح بالاتر، به‌دنبال دورنماهای گسترده‌تر باشیم ودریابیم که هدف واقعی، درك ماهیت و ویژگیهای جوابهای معادلهٔ (۱) است. چنانچه بتوان با استفاده از فرمولهای مقدماتی برای این جوابها به‌هدف مزبور دست یافت، مراد حاصل است. درغیراین صورت ، سعی خواهیم کرد تا راههای دیگری برای نیل به این هدف بگشاییم. در این فصل توجه خود را به مسئلهٔ فراگیری هرچه بیشتر خصوصیات اساسی جوابهای (۱) به وسیلهٔ تحلیل مستقیم‌خود معادله، وبدون داشتن‌عبارتهای رسمی‌برای جوابهای معادله،معطوف‌می‌داریم. مقداراطلاعات مفید و جالبی که می‌توان از این راه به‌دست‌آورد شگفت‌انگیز است.

به‌عنوان مثالی از این فکرکه ویژگیهای زیادی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان بدون حل سنتی معادله ، به وسیلهٔ مطالعهٔ خود معادله کشف کرد، به بحث در مورد معادلهٔ آشنای زیر می‌پردازیم

$$y''+y=0. \qquad (2)$$

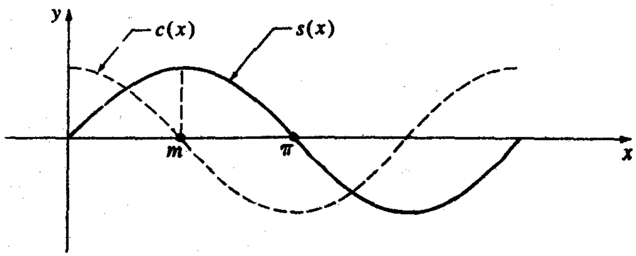
بخوبی می‌دانیم که $y_1(x)=\sin x$ و $y_2(x)=\cos x$ دو جواب مستقل خطی معادلهٔ (۲) هستند که کاملاً توسط شرایط اولیهٔ $y_1(0)=0$ ، $y'_1(0)=1$ و $y_2(0)=1$ ، $y'_2(0)=0$ تعیین می‌شوند و جواب عمومی معادلهٔ (۲) به صورت $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ است. معمولاً با این تفاسیر معادلهٔ (۲) کاملاً حل شده تلقی می گردد، زیرا با توابع سینوس و کسینوس از قبل آشنایی داریم ، ومطالب زیادی دربارهٔ آنها می‌دانیم. اما می‌توانیم برای دانش خود دربارهٔ $\sin x$ و $\cos x$ یك جنبهٔ تاریخی قائل شویم و به‌منظور تأکید برنقطه نظرهای فعلی‌مان، فعلاً این آشناییها را نادیده می گیریم. هدف این است که ببینیم چگونه می‌توانَ خواص آنها را از معادلهٔ (۲) وشرایط اولیه‌ای که در آن صدق می کنند، استخراج کرد. تنها ابزارهایی که به‌کارخواهیم برد، بحثهای کیفی واصول کلی تشریح شده در بخشهای ۱۴ و ۱۵ هستند.

بنابراین،فرض می کنیم که $y=s(x)$ جوابی ازمعادلهٔ (۲) باشد که در شرایط اولیهٔ $s(0)=0$ و $s'(0)=1$ صدق کند. اگرسعی کنیم نمودار $s(x)$ را ، بافرض‌آنکه x ازصفر افزایش می‌یابد، رسم کنیم*، شرایط اولیه ایجاب می‌کنند که منحنی از مبدأ مختصات شروع شود و با شیب اولیهٔ یك ، افزایش یابد. (شکل ۲۷). از خود معادله چنین برمی‌آید که $s''(x)=-s(x)$ ، لذا وقتی که منحنی در بالای محور x قرار می گیرد $s''(x)$ عددی منفی است که با صعود منحنی کاهش می‌یابد. از آنجاکه $s''(x)$ آهنگ تغییر شیب $s'(x)$ است، هرچه منحنی بالاتر می‌رود، این شیب، باآهنگی فزاینده کاهش می‌یابد، وباید در نقطه‌ای‌مثل $x=m$ صفرشود. با ازدیاد x ، منحنی به‌سمت محور x پایین‌می‌آید، $s'(x)$ با یك آهنگ نزولی‌کاهش می‌یابد و منحنی محور x را در نقطه‌ای که آن را بنابه تعریف می‌توان π نامید ، تلاقی می کند. از آنجا که $s''(x)$ تنها به $s(x)$ بستگی دارد، ملاحظه می‌کنیم که نمودار منحنی از $x=0$ تا $x=\pi$ نسبت به‌خط $x=m$ متقارن است، بنابراین $m=\pi/2$ و $s'(\pi)=-1$. بحث مشابهی نشان می‌دهد که قسمت بعدی منحنی، به شکل وارونهٔ اولین‌کمان است و منحنی را می‌توان به همین ترتیب تا بینهایت ادامه داد.

برای اینکه به نتایج بیشتری نایل آییم، بهتر است در این مرحله تابع $y=c(x)$ را جوابی‌از (۲) فرض کنیم که به‌وسیلهٔ شرایط اولیهٔ $c(0)=1$ و $c'(0)=0$ معین‌می‌شود. این شرایط (شکل ۲۷) چنین بیان می‌دارند که نمودار $c(x)$ از نقطهٔ (۱ و ۰) شروع می‌شود و با شیب اولیهٔ صفر به طرف راست حرکت می کند. از آنجاکه به‌کمك معادلهٔ (۲) می‌دانیم که $c''(x)=-c(x)$ ، بنابه همان دلایل قبلی، منحنی به پایین خم می‌شود ومحور x را تلاقی‌می کند.طبعاً می‌توان‌حدس زدکه ارتفاع‌اولین‌کمان $s(x)$ یك واولین‌صفر $c(x)$ در $\pi/2$ باشد و الی آخر، لیکن برای تبدیل این‌گمانها به واقعیات ازاثبات روابط زیرآغاز می کنیم

$$c'(x)=-s(x) \quad \text{و} \quad s'(x)=c(x) \qquad (۳)$$

برای اثبات اولین‌تساوی، مشاهده می‌کنیم که از (۲) ، $y'''+y'=0$ یا $(y')''+y'=0$ به‌دست می‌آید، بنابراین مشتق هرجواب (۲) نیزیك‌جواب است (به تمرین ۱۷-۳ مراجعه



شکل ۲۷

کنید). بنابراین $s'(x)$ و $c(x)$ هردو جوابهای (۲) هستند و با توجه به قضیهٔ ۴ ۱ـالف کافی است نشان دهیم که مقادیر ومشتقهای این دو تابع در $x=0$ برابر است. این مطلب مستقیماً ازشرایط $s'(0)=1$ ، $c(0)=1$ و $s''(0)=-s(0)=0$ ، $c'(0)=0$ حاصل می‌شود. فرمول دوم (۳) نتیجهٔ مستقیمی از اولی است، زیرا $c'(x)=s''(x)=-s(x)$.

حال از (۳) برای اثبات رابطهٔ زیراستفاده می‌کنیم:

$$s(x)^2+c(x)^2=1 \tag{۴}$$

از آنجاکه مشتق طرف چپ رابطهٔ (۴) برابر است با

$$2s(x)c(x)-2c(x)s(x)$$

که صفر می‌باشد، ملاحظه می‌کنیم که $s(x)^2+c(x)^2$ مقدار ثابتی است واین مقدار ثابت، برابر با یك است، چراکه $s(0)^2+c(0)^2=1$. از (۴) بلافاصله نتیجه می‌گیریم که ارتفاع اولین‌کمان $s(x)$ برابر با یك و اولین صفر $c(x)$ برابر $\pi/2$ است. این نتیجه همچنین به ما امکان می‌دهد که نشان دهیم $s(x)$ و $c(x)$ مستقل‌خطی‌اند، زیرا رونسکیی آنها برابر است با

$$W[s(x), c(x)]=s(x)c'(x)-c(x)s'(x)$$
$$=-s(x)^2-c(x)^2=-1$$

به همین طریق، می‌توان مطلب را ادامه داد و مطالب زیر را نیز استخراج کرد:

$$s(x+a)=s(x)c(a)+c(x)s(a) \tag{۵}$$

$$c(x+a)=c(x)c(a)-s(x)s(a) \tag{۶}$$

$$s(2x)=2s(x)c(x) \tag{۷}$$

$$c(2x)=c(x)^2-s(x)^2 \tag{۸}$$

$$s(x+2\pi)=s(x) \tag{۹}$$

$$c(x+2\pi)=c(x) \tag{۱۰}$$

اثبات این‌روابط مشکل نیست واین‌کار را به خواننده واگذار می کنیم (تمرین ۱ را ببینید). ضمن سایر مطالب، از نتایج بالا بسادگی می‌بینیم که صفرهای مثبت $s(x)$ و $c(x)$ بترتیب عبارت‌اند از π ، 2π ، 3π ، ... و $\pi/2$ ، $\pi/2+\pi$ ، $\pi/2+2\pi$ ، ... .

دربارهٔ بحث‌بالا باید به دونکتهٔ اساسی اشاره شود. اول‌آنکه، تقریباً همهٔ ویژگیهای مهم توابع $\sin x$ و $\cos x$ را از معادلهٔ (۲) و تنها به وسیلهٔ روشهای معادلات دیفرانسیل، بدون هیچ‌گونه استفاده از دانش قبلی‌مان در مثلثات، استخراج کرده‌ایم . دوم آنکه، ابزار مورد استفادهٔ ماعمدتاً استدلالهای متکی بـه تحدب (شامل علامت و انـدازهٔ مشتق دوم) و خواص بنیادی معادلات خطی بیان شده در بخشهای ۱۴ و ۱۵ بود.

ناگفته نماند که، بسیاری از ویژگیهای فوق‌الذکـر توابع $\sin x$ و $\cos x$ تنهـا مختص‌این توابع هستند. با این وجود، مشخصهٔ اصلی رفتارآنها ــ یعنی این حقیقت که‌نحوهٔ نوسانهایشان چنان است که صفرهایشان متمایزند وبطور متناوب ظاهرمی‌شوندــ را می‌توان بسیار فراتر ازاین توابع خاص‌تعمیم‌داد. نتیجهٔ زیر دراین‌جهت، به قضیهٔ مجزا کنندهٔاستورم[1] موسوم است.

قضیهٔ الف. اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادلهٔ

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

باشند، صفرهای این توابع متمایز و یك در میان خواهند بود، بدین معنا که $y_1(x)$ دقیقاً یك بار بین دو صفر متوالی $y_2(x)$ صفر می‌شود و برعکس .

اثبات. استدلال عمدتاً متکی به‌این‌حقیقت است که (به‌لم‌های بخش ۱۵ مراجعه کنید) چون y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند، رونسکیی‌آنها، یعنی

$$W(y_1, y_2)=y_1(x)y'_2(x)-y_2(x)y'_1(x)$$

صفرنمی‌شود و بنابراین ازآنجاکه این رونسکیی پیوسته است، علامتش بایـد ثابت باشد. اولا ، بسهولت دیده می‌شودکه y_1 و y_2 نمی‌توانند صفرمشترکی داشته باشند، چراکـه در این صورت، رونسکیی درآن نقطه صفر خواهد شد ، کـه این غیرممکن است. حال فـرض می‌کنیم که x_1 و x_2 دو صفر متوالی y_2 باشند ونشان می‌دهیم که y_1 بین این دومقدارصفر می‌شود. واضح‌است که‌رونسکیی‌در x_1 و x_2 به‌صورت $y_1(x)y'_2(x)$ درمی‌آید، لذا $y_1(x)$ و $y'_2(x)$ در هریك از این نقاط مخالف صفراند. علاوه براین، $y'_2(x_1)$ و $y'_2(x_2)$ باید

---

۱. ژاك شارل فرانسوا استورم Jacques Charles Francois Sturm (۱۸۵۵–۱۸۰۳) یك ریاضیدان سویسی‌بودکه بیشتر عمرش را درپاریس به‌سر برد. وی مدتی‌معلم خصوصی خانوادهٔ دوبروی بود وپس از احراز سمتهای گوناگون دیگر، سرانجام کرسی‌مکانیك دانشگاه‌سوربون را پس از پواسون به‌دست آورد. کار اساسی او همان چیزی بودکه امروزه به‌نام نظریهٔ معادلات دیفرانسیل استورم لیوویل موسوم‌است‌که ، هم درریاضیات‌محض وهم درریاضیات‌کار بسته، اهمیت روزافزونی داشته است .

مختلف‌العلامه باشند، زیرا اگر y_2 در x_1 صعودی‌است، بایددر x_2 نزولی باشد، وبرعکس. ازآنجا که رونسکیی علامت ثابتی‌دارد، $y_1(x_1)$ و $y_1(x_2)$ نیز باید مختلف‌العلامه باشند، و بنابراین، با توجه به پیوستگی، $y_1(x)$ باید در نقطه‌ای بین x_1 و x_2 صفر شود. توجه می‌کنیم که y_1 نمی‌تواند بیش از یکبار بین x_1 و x_2 صفر گردد، زیرا اگرچنین شود، بحث مشابهی نشان می‌دهد که y_2 باید بین این صفرهای y_1 نیزصفرشود که با فرض اولیه راجع به اینکه x_1 و x_2 دو صفر متوالی y_2 هستند، تناقض دارد.

استدلالهای مذکور که بـرپایهٔ تحدب برای معادلهٔ $y''+y=0$ داده شده است روشن می‌کندکه برای بحث در نـوسان جوابها مناسب است‌که با معادلاتی کارکنیم کـه درآنهاجملهٔ مشتق اول موجود نباشد. حال‌نشان می‌دهیم که هرمعادلهٔ به‌صورت

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (11)$$

را می‌توان با یك تغییرساده در متغیر وابسته، به‌صورت زیرنوشت:

$$u''+q(x)u=0 \qquad (12)$$

معمولا (۱۱) را شکل استاندارد و (۱۲) را شکل نرمال معادلـهٔ خطی مـرتبهٔ دوم همگن می‌نامند. برای اینکه (۱۱) را به‌شکل‌نرمال بنویسیم، فرض می کنیم که $y(x)=u(x)v(x)$ پس $y'=uv'+u'v$ و $y''=uv''+2u'v'+u''v$. باجانشین کردن این‌عبارات در (۱۱)، چنین نتیجه می‌شود:

$$vu''+(2v'+Pv)u'+(v''+Pv'+Qv)u=0 \qquad (13)$$

از صفر قراردادن ضریب u' و حل معادلهٔ حاصله درمی‌یابیم که به‌ازای

$$v=e^{-(1/2)\int p\,dx} \qquad (14)$$

معادلهٔ (۱۳) به شکل‌نرمال (۱۲) تبدیل می‌شود، که درآن

$$q(x)=Q(x)-\frac{1}{4}P(x)^2-\frac{1}{2}P'(x) \qquad (15)$$

ازآنجا که $v(x)$ به‌صورت داده شده در (۱۴) هرگز صفر نمی‌شود، تبدیل معادلهٔ (۱۱) به (۱۲)، به‌صورت فوق هیچ‌گونه اثری برصفرهای جوابها ندارد و لذا تأثیری برپدیده‌های مربوط به نوسان، که درحال حاضر مورد توجه ماست، نخواهد داشت.

حال نشان خواهیم دادکه اگر تابع $q(x)$ در رابطهٔ (۱۲) منفی باشد، جوابهای‌این معادله‌به‌هیچ‌وجه نوسان نخواهند کرد.

قضیهٔ ب. اگر $q(x)<0$ و $u(x)$ یك جواب غیر صفر معادلهٔ $u''+q(x)u=0$ باشد، آنگاه $u(x)$ حداکثر دارای یك صفر است.

اثبات. فرض کنید x_0 یك‌صفر $u(x)$ باشد، پس $u(x_0)=0$. ازآنجا که $u(x)$ غیر

صفراست (یعنی، متحد باصفر نیست)، قضیهٔ ۱۴ــالف نشان می‌دهد که $u'(x_\circ)\neq\circ$. برای مشخص‌شدن‌بحث، فرض می کنیم که $u'(x_\circ)>\circ$ ودراین‌صورت $u(x)$ درفاصله‌ای واقع در طرف‌راست $x_\circ$ مثبت‌است. ازآنجاکه $q(x)>\circ$ ، تابع $u''(x)=-q(x)u(x)$ درهمین فاصله مثبت است. این بدان معنی است که شیب $u'(x)$ تابعی صعودی است، لـذا $u(x)$ نمی‌تواند در طرف راست $x_\circ$ دارای صفری باشد واثبات مشابهی نشان می‌دهد که این‌تابع در طرف چپ $x_\circ$ نیز صفری نخواهد داشت. برای حالت $u'(x_\circ)<\circ$ نیز می تـوان دلیل مشابهی ارائه داد. لذا $u(x)$ یا هرگـز صفر نیست. یا تنها یك صفردارد و اثبات قضیه در اینجا تمام است.

ازآنجاکه به‌بررسی نوسان جوابها علاقمندیم، این‌نتیجه ما را به‌مطالعهٔ معادلهٔ (۱۲) در حالت خاصی که $q(x)$ تابع مثبتی باشد، سوق می‌دهد. ولی حتی دراین حالت ویژه‌نیز نمی‌توان ادعاکردکه جوابها لزوماً نوسان خواهند کرد. برای آنکه به‌جریـان پی ببریم ، فرض می کنیم که $u(x)$ جواب غیرصفر معادلهٔ (۱۲) با $q(x)>\circ$ باشد. هرگاه قسمتی از نمـودار را کـه بـالای محور x واقع شده است درنظـر بگیریـم (شکل ۲۸)، چون $u''(x)=-q(x)u(x)$ منفی است $u'(x)$ ، شیب تابع، نزولی خواهد بـود. چنانچه این شیب منفی شود، روشن است‌کـه جایی در طرف راست، محور x را قطع خواهد کـرد و صفری برای $u(x)$ به‌دست می‌آید. می‌دانیم که این حالت وقتی پیش می‌آیدکه $q(x)$ثابت باشد. حالت دیگر این است‌که، گرچه $u'(x)$ نزول می کند، لیکن هرگـز صفر نمی‌شود و همانطوری‌که در قسمت بالایی شکل ۲۸ ملاحظه می کنید، منحنی به بـالا رفتن خود ادامه می‌دهد. ازاین ملاحظات بخوبی واضح می‌شود کـه وقتی x افزایش می‌یابد، اگر $q(x)$ خیلی سریع‌کاهش نیابد، $u(x)$ دارای صفرهایی خواهد بود. این مطلب ما را به قضیهٔ‌بعدی هدایت می کند.

قضیهٔ ج. فرض می‌کنیم که $u(x)$ یك جواب غیرصفر معادلهٔ $u''+q(x)u=\circ$ باشد و تابع $q(x)$ برای هر $x>\circ$ ، مثبت باشد. اگر داشته باشیم

$$\int_{1}^{\infty} q(x)dx=\infty \tag{۱۶}$$

آنگاه $u(x)$ صفرهای بیشماری در قسمت مثبت محور x خواهد داشت.

اثبات. فرض می کنیم که خلاف این مطلب درست باشد، یعنی‌فرض می کنیم که‌تعداد صفرهای $u(x)$ در فاصلهٔ $\circ<x<\infty$ حداکثر متناهی باشد، به طوری‌کـه نقطه‌ای مانند $x_\circ>1$ وجود داشته باشد با این ویژگی کـه برای تمام مقادیر $x\geqslant x_\circ$ ، داشته بـاشیم $u(x)\neq\circ$. بدون آنکه ازکلیت مسئله کاسته شود، می‌توانیم‌فرض کنیم که $u(x)$ ، برای هر $x\geqslant x_\circ$،مثبت‌است؛ زیرا درصورت لزوم‌می‌توان $u(x)$ را باقرینهٔ آن، $-u(x)$ ، تعویض کرد. هدف‌آن است‌که بانشان دادن‌اینکه $u'(x)$ جایی‌درطرف راست $x_\circ$ منفی است فرض فوق‌را به‌تناقض منجرکنیم، زیرا با توجه به‌مطالب بالا درچنین حالتی $u(x)$ باید در طرف

راست $x_{\circ}$ نیز صفرشود. چنانچه برای $x>x_{\circ}$، بنویسیم

$$v(x)=-\frac{u'(x)}{u(x)},$$

خواهیم داشت

$$v'(x)=q(x)+v(x)^{2}$$

حال اگرازطرفین این رابطه از $x_{\circ}$ تا x، باتوجه به $x>x_{\circ}$، انتگرال بگیریم، نتیجه‌چنین می‌شود

$$v(x)-v(x_{\circ})=\int_{x_{\circ}}^{x}q(x)dx+\int_{x_{\circ}}^{x}v(x)^{2}dx$$

حال، با استفاده از (۱۶) نتیجه می گیریم که برای xهایی به اندازهٔ کافی بزرگ، $v(x)$ مثبت است. این امر نشان می‌دهد که $u(x)$ و $u'(x)$ برای xهای بقدرکافی بزرگ، مختلف‌العلامه‌اند، لذا $u'(x)$ منفی است و اثبات تمام است.

تمرین

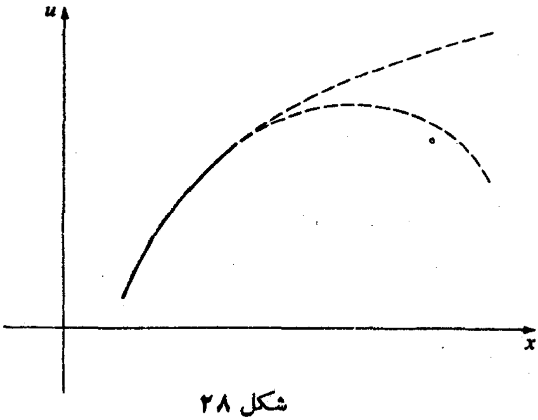
۱ـ فرمولهای (۵) تا (۱۰) را از طریق استدلالهایی هماهنگ با بحث اخیر اثبات کنید.

۲ـ نشان دهید که صفرهای توابع $a\sin x+b\cos x$ و $c\sin x+d\cos x$، وقتی که $ad-bc\neq \circ$، متمایزند و یك درمیان قرارمی گیرند.

۳ـ شکل نرمال معادلهٔ «بسل»

$$x^{2}y''+xy'+(x^{2}-p^{2})y=\circ$$

را بیابید وازآن برای اثبات اینکه‌هرجواب غیرصفراین معادله صفرهای مثبت بیشماری دارد، استفاده کنید.



شکل ۲۸

۴ــ فرضهای قضیهٔ ج در معادلهٔ $y''+(k/x^{۲})y=۰$ برقرار نیستند، لیکن نتیجهٔ آن، بسته به‌مقدار عدد ثابت ومثبت k ، گاهی درست و گاهی نادرست است. نشان دهید که تعداد صفرهای‌مثبت هرجواب غیرصفراین معادله برای $k>۱/۴$ نامتناهی‌وبرای $k\leqslant ۱/۴$ متناهی است.

۲۳. قضیهٔ مقایسهٔ استورم

دراین بخش مطالعهٔ خودرا دربارهٔ رفتار نوسانی جوابهای غیرصفر معادلهٔدیفرانسیل

$$y''+q(x)y=۰ \qquad (۱)$$

ادامه می‌دهیم. دراین معادله $q(x)$ تابعی مثبت است. مطلب را باقضیه‌ای که امکان نوسانهای بیشمار را در فاصله‌های بسته منتفی‌می‌سازد، شروع می کنیم.

قضیهٔ الف. فرض‌کنید که $y(x)$ یك جواب غیر صفر معادلهٔ (۱) درفاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ باشد. آنگاه تعداد صفرهای $y(x)$ دراین فاصله، حداکثر متناهی است.

اثبات. خلاف این امر را فرض می کنیم، یعنی فرض می کنیم که تعداد صفرهای $y(x)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ نامتناهی باشد. از این فرض نتیجه می‌شود که در فاصلهٔ $[a , b]$ نقطه‌ای مانند $x_۰$ ویك دنباله ازصفرهای $x_n\neq x_۰$ وجود دارد به‌طوری که $x_n\longrightarrow x_۰$[۱]. از آنجا که در نقطهٔ $x_۰$ تابع $y(x)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، می‌توان نوشت:

$$y(x_۰)=\lim_{x_n\to x_۰} y(x_n)=۰$$

و

$$y'(x_۰)=\lim_{x_n\to x_۰}\frac{y(x_n)-y(x_۰)}{x_n-x_۰}=۰$$

باتوجه به‌قضیهٔ ۱۴ــالف، این‌مطالب دلالت برآن دارند که $y(x)$ یك‌جواب صفرمعادلهٔ(۱) است و این تناقض، برهان را کامل می کند.

حال به‌خاطر می‌آوریم که قضیهٔ مجزاکنندهٔ استورم می گوید که صفرهای هر زوج جواب (غیرصفر) معادلهٔ (۱)، بسته به اینکه این جوابها وابستهٔ خطی یا مستقل‌خطی باشند، منطبق برهمدیگر یا متناوبند، بنابراین، تمامی جوابهای (۱) اساساً با یك سرعت نوسان می کنند، بدین مفهوم که در یك فاصلهٔ داده شده اختلاف تعداد صفرهای هر جواب با تعداد صفرهای هرجواب دیگر بیش ازیك نیست. از طرف دیگر، واضح است که جوابهای معادلهٔ

$$y''+۴y=۰ \qquad (۲)$$

---

۱. در این استنتاج، از قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس درحساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته که بیانگریکی ازویژگیهای توپولوژیکی اساسی دستگاه اعداد حقیقی است، استفاده می‌کنیم.

سریعتر از جوابهای معادلهٔ

$$y''+y=0 \qquad (۳)$$

نوسان می‌کنند، یعنی صفرهای بیشتری دارند، چرا که فاصلهٔ هر دو صفر از جوابی مانند $y=\sin 2x$ از معادلهٔ (۲) تنها نصف فاصلهٔ هر دو صفر از جوابی مانند $y=\sin x$ از معادلهٔ(۳) است. نتیجهٔ زیر که به‌قضیهٔ مقایسهٔ استودم موسوم‌است،نشان‌می‌دهد که این‌رفتاری نوعی است، بدان معنا که نوسانهای جوابهای (۱)، هنگامی که $q(x)$ افزایش می‌یابد، سریعتر می‌شوند.

قضیهٔ ب. فرض می‌کنیم‌که $y(x)$ و $z(x)$ دو جواب غیر صفر معادلات

$$y''+q(x)y=0$$

و

$$z''+r(x)z=0$$

باشند، توابع $q(x)$ و $r(x)$ مثبت باشند و داشته باشیم $q(x)>r(x)$. آنگاه $y(x)$ بین هر دو صفر متوالی $z(x)$ لااقل یکبار صفر می‌شود.

اثبات. فرض‌می کنیم که x_1 و x_2دوصفرمتوالی$z(x)$باشند،یعنی $z(x_1)=z(x_2)=0$ و $z(x)$ در فاصلهٔ باز (x_1 , x_2) صفر نشود. همچنین فرض می کنیم که $y(x)$ در فاصلهٔ (x_1 , x_2) صفر نمی‌شود و قضیه را با رسیدن به یك تناقض، به اثبات می‌رسانیم. واضح است‌که بدون‌کاستن ازکلیت مسئله می‌توان‌فرض کرد که هردو تابع $y(x)$ و $z(x)$ درفاصلهٔ (x_1 , x_2) مثبت هستند، زیرا اگرلازم باشد، می‌توانیم منفی تابع را به‌جای آن بگذاریم. اگر با نوشتن رونسکیی

$$W(y , z)=y(x)z'(x)-z(x)y'(x)$$

به‌صورت $W(x)$، تأکیدکنیم که W تابعی از x است، درفاصلهٔ (x_1 , x_2) خواهیم‌داشت:

$$\begin{aligned}\frac{dW(x)}{dx}&=yz''-zy''\\&=y(-rz)-z(-qy)\\&=(q-r)yz>0\end{aligned}$$

حال از طرفین این نابرابری از x_1 تا x_2 انتگرال می گیریم، می بینیم که

$$W(x_2)-W(x_1)>0 \quad \text{یا} \quad W(x_2)>W(x_1)$$

ولی رونسکیی در x_1 و x_2 به $y(x)z'(x)$ تبدیل می‌شود، لذا

$$W(x_2)\leqslant 0 \quad \text{و} \quad W(x_1)\geqslant 0$$

و این همان تناقض مورد نظر است.

ازاین‌قضیه‌چنین نتیجه‌می‌شود که هر گاه درمعادلهٔ (۱)، داشته‌باشیم $q(x)>k^{2}>0$، آنگاه هر جواب باید بین هر دو صفر متوالی $y(x)=\sin k(x-x_{0})$ که جوابی از معادلهٔ $y''+k^{2}y=0$ است، صفر گردد، و بنابراین باید در هر فاصله به طول π/k صفرشود. به‌عنوان مثال، چنانچه معادلهٔ بسل

$$x^{2}y''+xy'+(x^{2}-p^{2})y=0$$

را درنظر بگیریم و شکل نرمال آن، یعنی

$$u''+\left(1+\frac{1-4p^{2}}{4x^{2}}\right)u=0$$

را با معادلهٔ $u''+u=0$ مقایسه کنیم مستقیماً به قضیهٔ زیرمی‌رسیم:

قضیهٔ ج. فرض می‌کنیم که $y_{p}(x)$ یك جواب غیر صفر معادلهٔ بسل در قسمت مثبت محور x باشد. اگر $0\leqslant p<1/2$، آنگاه هر فاصله‌ای به طول π حداقل یك صفر تابع $y_{p}(x)$ را دربرمی‌گیرد؛ اگر $p=1/2$، آنگاه فاصلهٔ بین صفرهای متوالی تابع $y_{p}(x)$ دقیقاً برابر π است در صورتی که $p>1/2$، آنگاه هرفاصله‌ای به‌طول π شامل حداکثریك صفر تابع $y_{p}(x)$ است.

تمرین

۱ــ فرض کنید x_{1} و x_{2} صفرهای مثبت و متوالی یك‌جواب غیرصفر $y_{p}(x)$ از معادلهٔ بسل باشند.

الف) اگر $0\leqslant p<1/2$، نشان دهید که $x_{2}-x_{1}$ کمتر از π است و هنگامی که $x_{1}\to\infty$، این تفاضل به π میل می کند.

ب) اگر $p>1/2$، نشان‌دهید که $x_{2}-x_{1}$ بزرگتراز π است وهنگامی که $x_{1}\to\infty$ این تفاضل به π میل می کند.

۲ــ چنانچه $y(x)$ یك‌جواب غیرصفر معادلهٔ $y''+q(x)y=0$ باشد، نشان‌دهید که هرگاه برای یك مقدار $k>1/4$ نامساوی $q(x)>k/x^{2}$ برقرارباشد، آنگاه $y(x)$ دارای بینهایت صفرمثبت است وهرگاه $q(x)<1/4x^{2}$، آنگاه تعداد صفرهای مثبت $y(x)$ متناهی است.

۳ــ هرجواب غیرصفر معادلهٔ $y''+(\sin^{2}x+1)y=0$ دارای بینهایت صفرمثبت است. قضیه‌ای بیان و اثبات‌کنید که این حکم را به عنوان حالت خاص دربرداشته باشد.

۴۴. مقادیر ویژه، توابع ویژه وتار مرتعش

بررسی نوسانها، راه را برای بررسی اجمالی ایده‌هایی کـه از نیمهٔ قرن هیجدهم تا به امروز در آنالیز اهمیت شایانی داشته‌اند، هموار می‌سازد.

مطلب را با جستجوی جوابی غیرصفر، همچون $y(x)$ ، برای معادلهٔ

$$y''+\lambda y=0 \tag{۱}$$

که در شرایط مرزی

$$y(0)=0 \quad , \quad y(\pi)=0 \tag{۲}$$

صدق کند، آغاز می کنیم. پارامتر λ در معادلهٔ (۱) می‌تواند هرمقدار حقیقی را اختیار کند، و قسمتی ازکار ما یافتن مقادیری از λ است که مسئله به ازای آنهـا قـابل حل باشد. در مطالعات قبلی خود تنها به بررسی مسائل مقدار اولیه پـرداختیم، و ضمن آن به جستجوی جوابی برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم برآمدیم که دو شرط را دریك مقدار ازمتغیرمستقل ارضا کند. در اینجا با وضع کاملا متفاوتی مواجه هستیم، چرا که می‌خواهیم در دو مقدار متمایـز x، یك شرط ارضا شود. مسائلی از این نوع به مسائل مقدار مرزی موسوم‌اند و به‌طور کلی ـ هم از لحاظ نظری و هم از لحاظ عملی ـ خیلی مشکلتر و گسترده‌تر از مسائل مقدار اولیهٔ هستند.

با این حال، در مسئلهٔ مطرح شده توسط (۱) و (۲) مشکلی وجود ندارد. چنانچه λ منفی باشد، قضیهٔ ۲۲ـب می گوید که تنها جواب صفر (۱) در شرایط (۲) صدق می کند و اگر $\lambda=0$ ، جواب عمومی(۱) عبارت از $y(x)=c_1x+c_2$ خواهد بود و به‌همان نتیجه خواهیم‌رسید. بنابراین، مسئله به‌حالتی که درآن λ مثبت است، محدود می‌شود، دراین‌حالت جواب عمومی (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x$$

و چون $y(0)$ باید برابر با صفر باشد، این جواب به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}\,x \tag{۳}$$

بنابراین، اگر مسئله جوابی داشته باشد، آن جواب باید به‌صورت (۳) باشد. برای اینکه شرط مرزی دوم ، یعنی $y(\pi)=0$ ارضا شود، واضح است که $\sqrt{\lambda}\pi$ بـاید به ازای یك عـدد صحیح و مثبت n ، برابر با $n\pi$ گردد، بنابراین $\lambda=n^2$. به عبارت دیگر، λ باید برابر با یکی از اعداد ۱ ، ۴ ، ۹ ، ... باشد. این مقادیر را مقادیر ویژهٔ مسئله و جوابهای مربوط به آنها ، یعنی

$$\sin x \,،\, \sin 2x \,،\, \sin 3x \,،\, \dots \tag{۴}$$

را توابع ویژه می‌نامند. واضح است که مقادیر ویژه به وسیلهٔ مسئله ، به‌طور منحصر بفـرد ، مشخص می‌شوند، لیکن برای توابع ویژه این طور نیست؛زیرا کلیهٔ مضارب ثابت و غیر صفر (۴) مانند $a_1\sin x$ ، $a_2\sin 2x$ ، $a_3\sin 3x$ ، ... نیز توابع ویـژه هستند. به‌دو

حقیقت توجه می‌کنیم: مقادیر ویژه دنباله‌ای صعودی از اعداد مثبت تشکیل می‌دهند که به بینهایت میل می‌کند و تابع ویژهٔ nام، یعنی $\sin nx$ ، در نقاط انتهایی فاصلهٔ $[0, \pi]$ صفر می‌شود و در درون این فاصله دقیقاً دارای $(n-1)$ صفر است.

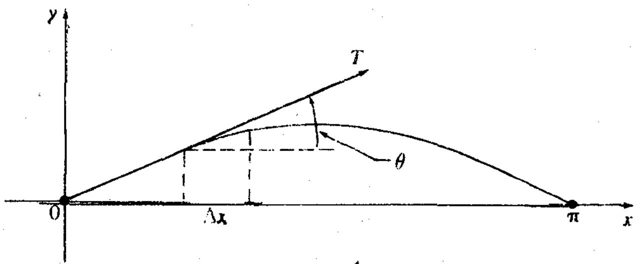
حال یکی ازمسائل کلاسیك فیزیك ریاضی یعنی مسئلهٔ تارمرتعش را بررسی می‌کنیم. هدف این است که بفهمیم مقادیر ویژه و توابع ویژه چگونه ایجاد می‌شوند. فرض می‌کنیم که یك تار انعطاف‌پذیر روی محور x محکم کشیده شده است و در دو نقطه، که برای سهولت آنها را در $x = 0$ و $x = \pi$ ، اختیار می‌کنیم، بسته شده است. آنگاه تار را در صفحهٔ xy می‌کشیم (شکل ۲۹) در نتیجه به‌شکل منحنی $y = f(x)$ درمی‌آید وسپس‌آن‌را رها می‌کنیم. برای به‌دست‌آوردن‌معادلهٔ حرکت، مسئله را با پذیرفتن چندفرض ساده‌می‌کنیم، اول آنکه ارتعاش حاصل کاملا عرضی است. این بدان معناست که مختص x هریك از نقاط تار ثابت است، بنابراین‌مختص y آن تنها به x و زمان t بستگی دارد. درنتیجه، جابجایی تار از وضعیت تعادلش به‌وسیلهٔ تابعی مانند $y = y(x, t)$ داده می‌شود، ومشتقهای زمانی آن، یعنی $\partial y/\partial t$ و $\partial^2 y/\partial t^2$ نمایشگر سرعت و شتاب تار هستند. حرکت قطعهٔ کوچکی از تار را که طول آن در وضعیت تعادل Δx است درنظرمی‌گیریم. چنانچه چگالی خطی جرم تار $m = m(x)$ باشد، جرم قطعهٔ مزبور $m\,\Delta x$ است و طبق قانون دوم حرکت نیوتن نیروی عرضی وارد بر تار عبارت‌است از

$$F = m\,\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{۵}$$

از آنجاکه تار قابل انعطاف است، کشش $T = T(x)$ درهر نقطه در امتداد مماس (شکل ۲۹) است و $T \sin\theta$ مؤلفهٔ y آن است. حال فرض می‌کنیم که حرکت‌تار صرفاً در اثر کشش آن است. درنتیجه، F برابربا اختلاف بین مقادیر $T \sin\theta$ دردو انتهای این قطعه، یعنی برابر با $\Delta(T\sin\theta)$ می‌باشد، لذا معادلهٔ (۵) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\Delta(T\sin\theta) = m\,\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{۶}$$

چنانچه ارتعاشات نسبتاً کوچك باشند، به طوری که θ کوچك باشد و $\sin\theta$ تقریباً برابر با $\tan\theta = \partial y/\partial x$ شود، (۶) را می‌توان بدین‌صورت نوشت:



شکل ۲۹

$$\frac{\Delta(T\partial y/\partial x)}{\Delta x}=m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

و وقتی Δx به صفر میل کند، چنین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)=m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{۷}$$

فعلا می‌خواهیم در این معادله، تنها به حالتی که هردو مقدار m و T ثابت‌اند توجه کنیم، بنابراین

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{۸}$$

که در آن $a=\sqrt{T/m}$. به دلایلی که در تمرینها خواهند آمد، معادلهٔ (۸) را معادلهٔ یك بعدیِ‌موج می‌نامند. در جستجوی جوابی به‌صورت $y(x,t)$ هستیم که در شرایط مرزی

$$y(0,t)=0 \tag{۹}$$

و

$$y(\pi,t)=0 \tag{۱۰}$$

و شرایط اولیهٔ

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0}=0 \tag{۱۱}$$

و

$$y(x,0)=f(x) \tag{۱۲}$$

صدق کند. شرایط (۹) و (۱۰) فرض ثابت بودن دایمی دو انتهای تار در نقاط $x=0$ و $x=\pi$ را بیان می‌کنند، و شرایط (۱۱) و (۱۲) حاکی از آنند که تارهنگام رها شدن بی‌حرکت و به‌شکل $y=f(x)$ بوده است. اما، این نکته را به‌صراحت تذکر می‌دهیم، که استنتاج روابط (۷) و (۸) ربطی به هیچ یك ازاین شرایط ندارد.

برای معادلهٔ (۸) راه حلی رسمی به روش جداسازی متغیرها ارائه می‌کنیم. این کار عبارت است از جستجوی جوابهایی به‌شکل

$$y(x,t)=u(x)v(t) \tag{۱۳}$$

(یعنی قابل تجزیه به صورت حاصلضرب توابعی باشند که هریك تنها به یکی از متغیرهای مستقل وابسته باشد.) وقتی (۱۳) در معادلهٔ (۸) گذاشته شود، خواهیم داشت

$$a^2u''(x)v(t)=u(x)v''(t)$$

یا

$$\frac{u''(x)}{u(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{v''(t)}{v(t)} \tag{۱۴}$$

چون طرف چپ این معادله تابعی از x و طرف راست‌آن تابعی از t است ، معادلهٔ (۱۴)، تنها وقتی می‌تواند برقـرار باشدکه هردو طرف آن ثابت باشند . چنانچه این ثابت را با $-\lambda$ نشان دهیم، (۱۴) به دو معادلـهٔ دیفرانسیل معمولی ، برای $u(x)$ و $v(t)$ ، تجزیـه می‌شود :

$$u''+\lambda u=0 \tag{۱۵}$$

و

$$v''+\lambda a^2 v=0 \tag{۱۶}$$

برای ارضا کردن (۹) و (۱۰) می‌توان (۱۵) را با شرایط مـرزی $u(0)=u(\pi)=0$ حل کرد. قبلا دیده‌ایم که این مسئله جواب غیرصفر دارد، اگـر و تنها اگر به ازای عـدد صحیح ومثبتی چون n، داشته باشیم $\lambda=n^2$ وجوابهای مربوط به این اعداد، یعنی توابع ویژه، عبارت‌اند از :

$$u_n(x)=\sin nx$$

همین طور، برای این λها (مقادیر ویژه) جواب عمومی (۱۶) به‌صورت

$$v(t)=c_1\sin nat+c_2\cos nat$$

است و اگر برای ارضای (۱۱) شرط $v'(0)=0$ را اعمال کنیم، آنگاه $c_1=0$ و جوابها عبارتند از:

$$v_n(t)=\cos nat$$

بنابراین، حاصلضربهای مربوطهٔ (۱۳) برابرند با

$$y_n(x,t)=\sin nx\cos nat$$

هر یك ازاین توابع ، به ازای $n=1, 2, 3, \dots$ ، در معادلهٔ (۸) و شرایط (۹) ، (۱۰) و (۱۱) صدق می‌کند و به سادگی می‌توان دید که همین مطلب در مورد هرمجموع متناهی از مضارب ثابت y_n ها مانند

$$a_1\sin x\cos at+a_2\sin 2x\cos 2at+\dots+a_n\sin nx\cos nat$$

نیز صحت دارد. چنانچه به طور صوری جلو برویم ــ یعنی همهٔ سؤالات مربوط به همگرایی، مشتق‌پذیری جمله به‌جمله ، ونظایر اینها را ازنظر دوربداریم ــ هرسری نامتناهی به‌صورت

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx\cos nat=a_1\sin x\cos at \tag{۱۷}$$
$$+a_2\sin 2x\cos 2at+\dots+a_n\sin nx\cos nat+\dots$$

نیز جوابـی است کـه در (۹) ، (۱۰) و (۱۱) صدق می‌کند . این موضوع مـا را به شرط پایـانی (۱۲) می‌رساند، یعنی اینکـه ، بـرای $t=0$ جواب (۱۷) بایـد شکل

اولیهٔ تار را به دست دهد:

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots \qquad (18)$$

هنگامی که درسال ۱۷۵۵ ، این‌روابط توسط دانیل برنولی ارائه شد ، برای‌بسیاری ازریاضیدانان رابطهٔ (۱۸) بجز درمواردی که تابع f ازنوع بسیارخاص باشد ، غیرممکن به‌نظر می‌آمد. درطول قرن بعد معلوم‌شد که این فکر نادرست بوده‌است و درواقع عباراتی به شکل (۱۸) برای دسته‌های بسیار وسیعی از توابع $f(x)$ که در ۰ و π صفر می‌شوند ، معتبر است. به فرض اینکه این موضوع درست باشد ، هنوز مسئلهٔ یافتن ضرایب a_n ، وقتی تابع $f(x)$ داده‌شده باشد ، باقی می‌ماند. این مسئله درسال ۱۷۷۷ توسط اویلر حل شد، و حل او بود که موضوع گستردهٔ سری فوریه را پیش کشید. این ضرایب را به روشهایی که با الگوی وسیع‌تری از ایده‌ها مناسب است ، خواهیم یافت.

توابع ویژهٔ $u_m(x)$ و $u_n(x)$ ، یعنی $\sin mx$ و $\sin nx$ ، در معادلات

$$u_m'' = -m^2 u_m \text{ و } u_n'' = -n^2 u_n$$

صدق می کنند. چنانچه معادلهٔ اول را در u_n و معادلهٔ دوم را در u_m ضرب کنیم و معادلات حاصل را از همدیگر کم کنیم ، خواهیم داشت:

$$u_n u_m'' - u_m u_n'' = (n^2 - m^2) u_m u_n$$

و یا

$$(u_n u_m' - u_m u_n')' = (n^2 - m^2) u_m u_n \qquad (19)$$

حال از طرفین (۱۹) از ۰ تا π انتگرال می گیریم، و با استفاده ازاینکه

$$u_n(x) = \sin nx \text{ و } u_m(x) = \sin mx$$

هردو در ۰ و π صفر می‌شوند، چنین به دست می‌آوریم

$$(n^2 - m^2) \int_0^\pi u_m(x) u_n(x)\, dx = \Big[u_n(x) u_m'(x) - u_m(x) u_n'(x)\Big]_0^\pi = 0$$

بنابراین

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx = 0 \qquad \text{وقتی که } m \neq n \qquad (20)$$

این نتیجه ما را به این فکـــرمی‌اندازدکه طرفین (۱۸) را در $\sin nx$ ضرب کنیم و جمله به جمله ازصفر تا π انتگرال بگیریم.هنگامی که این عملیات انجام گردد، همهٔ جملات(۲۰) صفر خواهند شد وتنها چیزی که خواهد ماند عبارت است از

$$\int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx = a_n \int_0^\pi \sin^2 nx\, dx$$

و چون

$$\int_0^\pi \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2nx)dx = \frac{\pi}{2}$$

می‌توان نوشت

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\, dx \qquad (21)$$

این a_nها به‌ضرایب فوریهٔ $f(x)$ موسوم‌اند و رابطهٔ (۲۱)، فرمول اویلر خوانده می‌شود. با این ضرایب، (۱۸) را سری سینوسی فوریهٔ $f(x)$ یا بسط تابع ویژه‌ای $f(x)$ برحسب توابع ویژهٔ $\sin nx$ می‌نامند، و (۱۷) جواب برنولی معادلهٔ موج نامیده می‌شود.

واضح است که جواب بالا برای معادلهٔ موج، به‌علت آنکه با روشهای قابل تردید به‌دست‌آمده است وسؤالاتی بی‌پاسخ مانده‌اند، صورت معما به‌خودگرفته است، ودر واقع، از نظر بررسی دقیق، تنها ارزش پیشنهادی دارد. لیکن حتی همین مقدار نیز با ارزش‌است، زیرا بعضی ازسؤالات مطرح شده ــ بخصوص سؤالات مربوط به‌معنا واعتبار (۱۸)ــ بسیار مفید هستند. مثلا، اگر a_nها به‌کمك (۲۱) محاسبه شوند و برای تشکیل سری طرف راست (۱۸) به‌کار روند، تحت چه شرایطی این‌سری همگرا خواهد شد؟ واگر درنقطه‌ای مانند x همگرا شود، آیا مجموعش الزاماً به $f(x)$ میل خواهدکرد؟ این سؤالات و جوابهایشان زمینهٔ اصلی نظریه سری فوریه[1] را تشکیل می‌دهند.

در اینجا خلاصه‌ای از یك جواب سؤالات بالا را بیان می‌کنیم و بررسی مفصل این شاخهٔ غنی ازآنالیز را به‌جلد دیگری ازاین سری کتابها موکول می‌کنیم.

تابع $f(x)$ مورد نظر درفاصلهٔ $[0, \pi]$ تعریف می‌شود و درنقاط انتهایی‌این‌فاصله صفرمی‌گردد. فرض می‌کنیم که $f(x)$ درسراسر این فاصله پیوسته باشد ومشتق‌آن نیز، بجز احیاناً درتعدادی متناهی از ناپیوستگی‌های جهشی‌که درآنها حدچپ وراست مشتق‌موجود و متناهی ولی‌متفاوت‌اند، پیوسته باشد. به‌زبان هندسی، نمودارچنین تابعی، یك منحنی‌پیوسته است با این خاصیت که جهت مماس، ضمن حرکت در امتداد منحنی، به طور پیوسته تغییر

---

۱. ژوزف فوریه Joseph Fourier (۱۷۶۸ــ۱۸۳۰) دانشمندبرجستهٔ فیزیك‌ریاضی، دوست ناپلئون بود و ولینعمت خود را درسال ۱۷۹۸ تا مصر همراهی کرد. دربازگشت، حاکم بخش ایزر در جنوب شرقی فرانسه گردید و دراین سمت، اولین جادهٔ واقعی بین گرنوبل وتورینو را ساخت. وی همچنین جوانی به نام شامپولیون را که بعدها طریقهٔ خواندن سنگنبشتهٔ هیروگلیفی «روزتا» را کشف‌کرد، مساعدت کرد. او در خلال این سالها روی نظریهٔ رسانایی گرماکارکرد و در سال ۱۸۲۲ مقالهٔ مشهورش را تحت عنوان نظریهٔ تحلیلی‌گرما (Théorie Analytique de la Chaleur) منتشر ساخت. وی در این مقاله از سریهائی که امروزه به نام او خوانده می‌شود، استفادهٔ مبسوطی‌کرد. با این حال، وی سهمی در ایجاد نظریهٔ ریاضی این سریها نداشت. این‌سریها خیلی‌پیشتر، توسط، اویلر، دانیل‌برنولی، لاگرانژ و دیگران‌شناخته شده بودند. فوریه معتقد به‌این عقیدهٔ عجیب بودکه گرمای کویر، برای یك زندگی سالم، محیط زیست ایده‌آلی است وازاین‌رو خودرا مانند یك‌کالبد مومیایی‌شده می‌پیچید ودر اتاقهای فوق‌العاده‌گرم زندگی می‌کرد.

می‌کند، بجز احتمالاً در تعدادی متناهی از «گوشه‌ها» کـه جهت آن به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند. تحت این شرایط بسط (۱۸) معتبر است؛ بدین‌معنا که، اگر a_nها را به‌کمك(۲۱) تعریف کنیم، آنگاه سری طرف راست در هر نقطه، به مقدار تابع در همان نقطه، همگـرا می‌شود. این بیان صورت خاصی از قضیهٔ کلی‌تری است که بعضی مـواقع قضیهٔ بسط فوریه نامیده می‌شود. لزوم ساختن یك نظریهٔ دقیق از اینجا معلوم می‌شود که اگـر $f(x)$ صرفاً پیوسته فرض گردد وچیزی راجع به‌مشتق آن گفته نشود، می‌دانیم که احتمال دارد سری طرف راست (۱۸) در بعضی نقاط واگرا شود.

جهت دیگر بررسی، مطالعهٔ امکان بسطهایی برحسب‌توابع ویژه، همانند بسط(۱۸)، برای سایر مسائل مقادیر مرزی است. اگر موضوع اعتبار چنین بسطهایی راکنار بگذاریم، مسئلهٔ اصلی این می‌شودکه در حالات دیگرنشان دهیم کـه به‌اندازهٔ کافی مواد اولیهٔ مناسب در دسترس داریم؛ به عبارت دیگر، یك دنباله از مقادیر ویژه به‌همراه توابع ویژهٔ مربوطه که درشرایطی نظیر (۲۰) صدق‌کنند، موجود است.

به عنوان مثال، تار مرتعشی راکه در بالا مطالعه‌کردیم، با این اختلاف مهم واساسی که تار غیرهمگن است، درنظرمی‌گیـریم. در این صورت چگالی آن $m=m(x)$ ممکن است ازنقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر کند. دراین وضعیت، (۸) به صورت رابطهٔ زیردرمی‌آید

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{m(x)}{T}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{۲۲}$$

چنانچه مجدداً دنبال جوابی به شکل (۱۳) بگردیم، (۲۲) به‌شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{u''(x)}{m(x)u(x)}=\frac{1}{T}\,\frac{v''(t)}{v(t)}$$

و همچون گذشته، به مسئلهٔ مقادیرمرزی زیرمی‌رسیم :

$$u''+\lambda m(x)u=0 \ ,\ u(0)=u(\pi)=0 \tag{۲۳}$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه دراین حالت کدام‌اند؟ ناگفته پیداست کـه بدون اطلاع دقیق از مشخصات تابع چگالی $m(x)$ نمی‌توانیم جواب دقیقی عرضه کنیم. لیکن لااقل می‌توانیم نشان دهیم که این مقادیر ویژه و توابع ویژه وجود دارند. جـزئیات این بحث در پیوست الف آمده است.

تمرین

۱ـ در هریك ازحالات زیر λ_n، مقادیر ویـژه، و $y_n(x)$، توابع ویژه، را برای معادلهٔ $y''+\lambda y=0$ بیابید.

الف) $y(0)=0 \ ,\ y(\pi/2)=0$

ب) $y(0)=0 \ ,\ y(2\pi)=0$

ج) $y(0)=0 \,،\, y(1)=0$

د) $y(0)=0 \,،\, y(L)=0$ وقتی $L>0$

ه) $y(-L)=0 \,،\, y(L)=0$ وقتی $L>0$

و) $y(a)=0 \,،\, y(b)=0$ وقتی $a<b$

دو مسئلهٔ زیر را، بدون توجه به‌موضوعاتی از قبیل مشتق‌پذیری توابع وهمگرایی‌سریها، حل کنید.

۲ـ اگر $y=F(x)$ یك تابع دلخواه و a عدد مثبتی باشد. آنگاه $y=F(x+at)$ نمایشگر موجی ، به شکل ثابت است که در امتداد محور x با سرعت a به طرف چپ حرکت می کند (شکل ۳۰) . همین طور ، چنانچه $y=G(x)$ تابع دلخواه دیگری باشد، آنگاه $y=G(x-at)$ موجی است که به طرف‌راست حرکت می کند، و کلیترین بیان موج یك بعدی با سرعت a عبارت است از

$$y(x\,،\,t)=F(x+at)+G(x-at) \qquad (*)$$

الف) نشان دهید که $(*)$ در معادلهٔ موج (۸) صدق می کند .

ب) بسادگی می‌توان مشاهده نمود که عدد ثابت a در معادلهٔ (۸) بعد سرعت دارد . همچنین، بدون اثبات روشن است که اگر اختلالی در یك تارکشیده شده ایجاد کنیم، امواج ناشی از آن، در هردو جهت حرکت می کنند و از منبع اختلال دور می‌شوند. این ملاحظات متغیرهای جدید $\alpha=x+at$ و $\beta=x-at$ را مطرح می‌سازند. نشان دهید که با این متغیرهای مستقل، معادلهٔ (۸) به صورت

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}=0$$

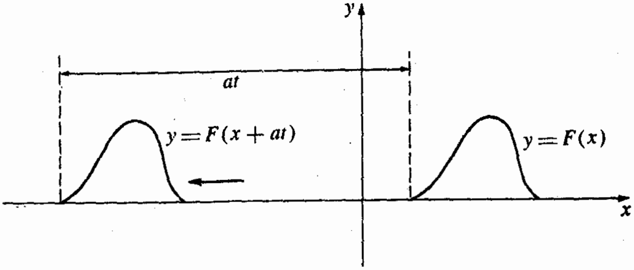
درمی‌آید، واز این رابطه، $(*)$ را به وسیلهٔ انتگرال گیری به دست آورید. فرمول $(*)$ را جواب دالامبر معادلهٔ موج‌می‌نامند[1]. این‌فرمول‌توسط دالامبر وکمی بعدمستقل‌از وی، توسط اویلر نیز به‌دست آمد (هردو این فرمول را درسال ۱۷۴۷ کشف کردند).

۳ـ تاری را درنظر می گیریم که در امتداد محور x از $-\infty$ تا $+\infty$ محکم کشیده شده است. فرض کنید تغییرشکلی به‌صورت $y=f(x)$ درتار ایجاد و سپس آن‌را رها کنیم، و فرض کنید حرکتی که در تار به‌وجود می‌آید به‌کمك معادلهٔ موج (۸) بیان گردد.

الف) با استفاده از $(*)$ نشان دهید که جابجایی تار از فرمول دالامبر حاصل می گردد:

---

۱ . ژان‌لورون‌دالامبر Jean le Rond d'Alembert (۱۷۱۷ـ۱۷۸۳) فیزیکدان،ریاضیدان و ادیب فرانسوی بود. او در علوم به خاطر اصل دالامبر درمکانیك و راه حل وی برای معادلهٔ موج شهرت دارد. کار اساسی او در زندگی، همکاریش با دیدرو درتهیهٔ دایرةالمعارف مشهور اوست، که باتأکید برعلوم و ادبیات وحمله به نیروهای ارتجاعی درکلیسا و دولت، نقش مهمی را در دوران روشنگری فرانسه بازی‌کرد. او دوست اویلر، لاگرانژ ولاپلاس بود.



شکل ۳۰

$$y(x , t)=\frac{۱}{۲}[f(x+at)+f(x-at)] \qquad (**)$$

راهنمایی: شرایط اولیهٔ (۱۱) و (۱۲) را به‌خاطر آورید.

ب) علاوه براین، فرض کنید که تار در نقاط $x=0$ و $x=\pi$ بیحرکت باقی ماند(این گونه نقاطگره نام دارند)، به طوری که $y(0 , t)=y(\pi , t)=0$، و با استفاده از (**) نشان‌دهید که $f(x)$ تابعی فرد و متناوب، با دورهٔ تناوب ۲π است [بدین معنا که $f(-x)=-f(x)$ و $f(x+۲\pi)=f(x)$]

ج) نشان دهید که چون $f(x)$ تابعی فرد ومتناوب با دورهٔ تناوب ۲π است، الزاماً در نقاط ۰ و π صفرمی‌شود.

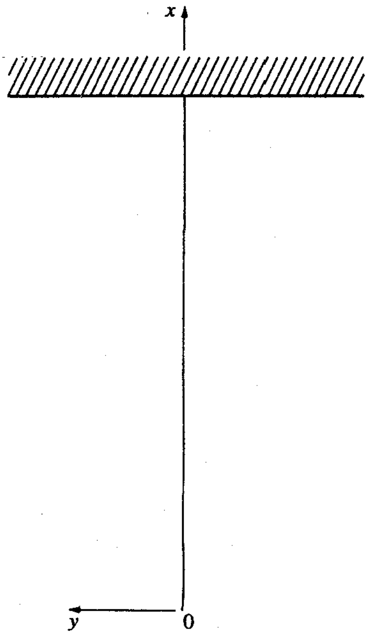
د) نشان دهید که جواب برنولی (۱۷) را می‌توان به صورت (**) نوشت.

راهنمایی: $[۲\sin nx \cos nat=\sin[n(x+at)]+\sin[n(x-at)]]$

۴ـ زنجیر قابل انعطاف یکنواختی که چگالی جرمی‌اش ثابت و برابـر m_0 است، از یك انتهایش آویزان وآزاد است. چنانچه دستگاه مختصات را آن طور که در شکل (۳۱) می بینید اختیار کنیم، هنگامی که اختلالی در وضع زنجیر ایجاد گردد، ارتعاشات‌عرضی آن به وسیلهٔ معادلـهٔ (۷) بیان می‌شود. در این حالت کشش T در هرنقطه برابـر وزن قسمتی از زنجیراست که زیرآن‌نقطه قراردارد و بنابراین‌از رابطهٔ $T=m_0 xg$ به‌دست می‌آید. دراین رابطه g شتاب ثقل زمین است. با حذف m_0 معادلهٔ (۷) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(gx\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$$

الف) فرض کنید که‌این‌معادلهٔ دیفرانسیل‌جزئی، جوابی به‌صورت $y(x,t)=u(x)v(t)$ دارد و به عنوان یك نتیجه نشان دهید که $u(x)$ باید در معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر صدق کند



شکل ۳۱

$$\frac{d}{dx}\left(gx\frac{du}{dx}\right)+\lambda u=0 \qquad (***)$$

ب) اگر متغیر مستقل را از x به $z=2\sqrt{\lambda x/g}$ تغییردهیم، نشان‌دهید که‌معادلهٔ (***) به صورت

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{du}{dz}+zu=0$$

درمی‌آید، که (صرف‌نظر از علایم) معادلهٔ بسل ۱ـ(۹) درحالت ویژهٔ $p=0$، است.

پیوست الف . مسائل منظم استورم ـ لیوویل

نظریهٔ عمومی مقادیر ویژه، توابع ویژه، وبسط برحسب توابع ویژه یکی از عمیقترین و غنیترین بخشهای ریاضیات نوین است. دراین پیوست توجه خود را به بخشی کوچك ولی مهم از این موضوع گسترده معطوف می‌داریم. هدف نخستین ما آن‌است که ثابت‌کنیم هر مسئلهٔ مقدار مرزی از نوع ۲۴ـ(۲۳) که از تار مرتعش غیرهمگن ناشی می‌شود، دارای مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ای است که خواصی مشابه با آنچه در بخش ۲۴ دیدیم، دارد. با انجام این‌کار، درخواهیم یافت که با یك تغییر متغیرساده می‌توانیم این نتیجه را به دستهٔ نسبتاً عمومیتری از مسائل تعمیم دهیم.

مطلب را باچندین پی‌آمد ساده از قضیهٔ مقایسهٔ استورم آغاز می کنیم.

لم ۱. فرض می‌کنیم که $y(x)$ و $z(x)$ دو جواب غیر صفر

$$y''+q(x)y=0$$

و

$$z''+r(x)z=0$$

باشند، که درآن $q(x)$ و $r(x)$ توابع مثبت و پیوسته‌ای هستند به‌طوری که $q(x)>r(x)$[1]. فرض می‌کنیم‌که $y(x)$ و $z(x)$ هردو در نقطه‌ای مانند b_0 صفر می‌شوند، و $z(x)$ دارای تعداد متناهی یا نامتناهی صفرهای متوالی b_1 ، b_2 ، b_3 ، ... ، b_n ، ... درطرف راست b_0 است. آنگاه تعداد صفرهای $y(x)$ درهرفاصلهٔ بستهٔ $[b_0, b_n]$ لااقل برابرتعداد صفرهای $z(x)$ درآن فاصله‌است؛ واگرصفرهای متوالی $y(x)$ درطرف‌راست b_0 عبارت از a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، ... باشند، آنگاه برای‌هر n داریم، $a_n<b_n$.

اثبات. به کمك قضیهٔ مقایسهٔ استورم (قضیهٔ ۲۳ــب)، $y(x)$ در هر یك از فاصله‌های (b_0, b_1) ، (b_1, b_2) ، ... ، (b_{n-1}, b_n) ، لااقل دارای یك صفراست وهردو حکم بالا نتیجهٔ مستقیم این مطلب است.

لم ۲. فرض می‌کنیم کــه $q(x)$ تابع پیوسته و مثبتی باشد کــه در فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ در نامساویهای

$$0<m^2<q(x)<M^2$$

صدق‌کند. اگر $y(x)$ یك جواب غیرصفر $y''+q(x)y=0$ در این فاصله باشد، و اگر x_1 و x_2 دو صفر متوالی $y(x)$ باشند، آنگاه

$$\frac{\pi}{M}<x_2-x_1<\frac{\pi}{m} \tag{1}$$

علاوه بــراین، چنانچه $y(x)$ در a و b و در $n-1$ نقطهٔ دیگر در فاصلهٔ باز (a, b) صفر شود، آنگاه

$$\frac{m(b-a)}{\pi}<n<\frac{M(b-a)}{\pi} \tag{2}$$

اثبات. اثبات (۱) را از مقایسهٔ معادلهٔ داده شده با معادلهٔ $z''+m^2z=0$ آغــاز

---

۱. پیوستگی این توابع ضریب همواره بطور ضمنی جزء فرض بوده است. دراینجا این فرض‌را صریحاً بیان‌کرده‌ایم، زیرا در اثبات لم ۳ از بعضی خواص توابع پیوستهٔ مثبت در فواصل بسته استفادهٔ چشمگیری خواهیم کرد.

می کنیم . یک جواب غیر صفر این معادله که در x_1 صفر می‌شود عبارت است از $z(x)=\sin m(x-x_1)$. چون صفر بعدی $z(x)$ ، $x_1+\pi/m$ است و بنابر قضیهٔ ۲۳ـب x_2 بایدقبل‌ازاین صفرواقع گردد، داریم $x_2<x_1+\pi/m$ یا $x_2-x_1<\pi/m$. بحث مشابهی‌نامساوی دیگر (۱) را به‌دست می‌دهد.

برای اثبات (۲) ، ابتدا توجه می کنیم که تعداد n زیر فاصله بین $n+1$ صفر وجود دارد، بنابراین با توجه به (۱) داریم،

$$b-a= \text{مجموع طولهای } n \text{ زیرفاصله} < n(\pi/m)$$

پس $m(b-a)/\pi<n$. به همین طریق می‌توان نشان داد که $b-a>n(\pi/M)$ یا $n<M(b-a)/\pi$.

نتیجهٔ مقدماتی اساسی ما لم بعدی است.

لم۳. فرض می‌کنیم که $q(x)$ تابع پیوسته و مثبتی باشد و معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+\lambda q(x)y=0 \tag{۳}$$

را در فاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ در نظرمی‌گیریم. به ازای هر یك از مقادیر λ ، فرض می‌کنیم که $y_\lambda(x)$ جواب منحصر به فرد معادلهٔ (۳) باشد که شرایط اولیهٔ $y_\lambda(a)=0$ و $y_\lambda'(a)=1$ را ارضا می‌کند، آنگاه یك دنبالهٔ صعودی از اعداد مثبت به صورت

$$\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n<\dots$$

وجود داردکه به بینهایت میل می‌کند و دارای این خاصیت است که: $y_\lambda(b)=0$ اگرو تنها اگر λ مساوی یکی از λ_nها باشد. ازاین‌گذشته، تابع $y_{\lambda_n}(x)$ دقیقاً $(n-1)$ صفر درفاصلهٔ باز (a , b) دارد.

اثبات. با توجه به قضیهٔ ۲۳ـب واضح است که وقتی $\lambda\leqslant 0$ ، $y_\lambda(x)$ صفری در در طرف راست a ندارد. می‌خواهیم رفتار نوسانی $y_\lambda(x)$ راضمن صعود λ از 0 مشاهده کنیم. مطلب را چنین آغاز می کنیم که با توجه به پیوستگی $q(x)$ ، اعداد مثبت m و M وجود دارند به قسمی که در فاصلهٔ $[a , b]$ داریم $0<m^2<q(x)<M^2$. بنابراین، به معنای بیان شده در بخش۲۳، $y_\lambda(x)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ سریعتر از جوابهای معادلهٔ

$$y''+\lambda m^2 y=0$$

وکندتر از جوابهای معادلهٔ

$$y''+\lambda M^2 y=0$$

نوسان می کند. باتوجه به لم ۲، هنگامی که λ مثبت و کوچك است (آن‌قدر کوچك که‌داشته باشیم $\pi/\sqrt{\lambda}M\geqslant b-a$) تابع $y_\lambda(x)$ درفاصلهٔ $[a , b]$ درطرف‌راست a صفری‌ندارد؛

و هنگامی که λ آن قدر افزایش یابد کـه $\pi/\sqrt{\lambda}m\leqslant b-a$ آنگاه $y_\lambda(x)$ حداقـل یك چنین صفری دارد. به طریق مشابه، با افزایش λ به سمت ∞، تعداد صفرهای $y_\lambda(x)$ در $[a ، b]$ به‌سمت ∞ میل می‌کند. از لم ۱ چنین نتیجه‌می‌شود که هرچه λ بزرگ‌می‌شود، صفر nاُم $y_\lambda(x)$، درطرف راست a، به‌طرف‌چپ حرکت می کند ودراینجا می‌پذیریم که حرکت این صفر پیوسته است (این مطلب را می‌توان ثابت کرد). نتیجتاً ، وقتی کـه λ از صفرشروع می کند و به‌سمت∞ افزایش می‌یابد، مقادیر بیشماری از λ_1، λ_2، ...، λ_n، ... وجود دارند به‌طوریکه یك صفر $y_\lambda(x)$ به b می‌رسد وسپس وارد فاصله می‌شود، بنا بر این $y_{\lambda_n}(x)$ در a و b صفر می‌شود و $(n-1)$ صفر در $(a ، b)$ دارد. برای اینکه نشان دهیم دنبالهٔ λ_1، λ_2، ...، λ_n، ... به سمت ∞ میل‌می کند ازنامساوی (۲) استفاده می کنیم که در این حالت به‌صورت

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}\, m(b-a)}{\pi}<n<\frac{\sqrt{\lambda_n}\, M(b-a)}{\pi}$$

یا

$$\frac{n^2\pi^2}{M^2(b-a)^2}<\lambda_n<\frac{n^2\pi^2}{m^2(b-a)^2}$$

درمی‌آید .

معادلهٔ (۳) حالت خاصی است از معادلهٔ استورم ـ لیوویل که در زیر آمده است:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right]+\lambda q(x)y=0 \qquad (۴)$$

که درآن $p(x)=1$. دراینجا فرض می‌کنیم که توابع $p(x)$ و $q(x)$ در فاصلهٔ $[a ، b]$ پیوسته و مثبت هستند و نیز فرض می‌کنیم که $p(x)$ دارای مشتق پیوسته‌ای در این فاصلـه است. اگر متغیرمستقل معادلهٔ (۴) را از x به‌متغیرجدید w که به‌صورت

$$w(x)=\int_a^x\frac{dt}{p(t)}$$

تعریف می‌شود، تغییردهیم، به‌طوری که

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dw}\,\frac{dw}{dx}=\frac{1}{p(x)}\,\frac{dy}{dw} \quad \text{و} \quad \frac{dw}{dx}=\frac{1}{p(x)}$$

آنگاه (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^2y}{dw^2}+\lambda q_1(w)y=0 \qquad (۵)$$

که تابع $q_1(w)$ در فاصلهٔ تبدیل‌یافتهٔ $0\leqslant w\leqslant c=w(b)$ مثبت و پیوسته است. با استفاده

از لم ۳ در معادلهٔ (۵)، بلافاصله می‌توان حکم زیر را برای (۴) به دست آورد.

قضیهٔ الف. مسئلهٔ مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda q(x)y=0 \text{ ، } y(a)=y(b)=0 \qquad (۶)$$

که $p(x)$ و $q(x)$ شرایط فوق‌الذکر را ارضا می‌کنند. حال، دنباله‌ای صعودی از اعداد مثبت، مانند

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$$

وجود دارد که به سمت ∞ میل می‌کند و دارای این خاصیت است که معادلهٔ (۶) وقتی و فقط وقتی یک جواب غیر صفر دارد که λ برابر با یکی از λ_nها باشد. جواب متناظر $\lambda=\lambda_n$ منحصر به فرد است و فقط ضریب ثابت آن دلخواه است، و دقیقاً $n-1$ صفر در فاصلهٔ باز $(a \text{ ، } b)$ دارد.

اعداد λ_n مقادیر ویژهٔ مسئلهٔ (۶) وجوابهای مربوطه، $y_n(x)$، توابع ویژه هستند. بنابراین داریم:

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{dy_m}{dx}\right]+\lambda_m q y_m=0$$

و

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{dy_n}{dx}\right]+\lambda_n q y_n=0$$

اگر این معادلات را، بترتیب، در y_n و y_m ضرب و نتایج را از هم کم کنیم، خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dx}\left[p\left(y_n\frac{dy_m}{dx}-y_m\frac{dy_n}{dx}\right)\right]+(\lambda_m-\lambda_n)qy_my_n=0$$

که پس ازانتگرال گیری از a تا b به‌صورت

$$\left[p\left(y_n\frac{dy_m}{dx}-y_m\frac{dy_n}{dx}\right)\right]_a^b+(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b qy_my_n\,dx=0$$

درمی‌آید. ازآنجا که $y_m(x)$ و $y_n(x)$ هردو در a و b صفر می‌شوند، جملهٔ اول طرف‌چپ صفر است و نتیجه می‌گیریم که

$$\int_a^b qy_my_n\,dx=0 \text{ ، اگر } m\neq n \qquad (۷)$$

از این محاسبات قضیهٔ بعدی به دست می‌آید.

قضیهٔ ب. توابع ویژهٔ مسئلهٔ مقدار مرزی (۶) در رابطهٔ (۷) صدق می‌کنند.
محتوای این قضیه معمولاً چنین بیان می‌شود که توابع ویژهٔ $y_{1}(x)$ ، $y_{2}(x)$ ، ... ، $y_{n}(x)$ ، ... در فاصلهٔ $[a , b]$ نسبت به تابع وزن $q(x)$ متعامدند. بویژه، همان طور که در بخش ۲۴ دیدیم، توابع

$$\sin x , \sin 2x , \dots , \sin nx , \dots \qquad (8)$$

توابع ویژهٔ مسئلهٔ $y''+\lambda y=0$ با شرایط $y(0)=y(\pi)=0$ هستند و بنا براین در فاصلهٔ $[0 , \pi]$ نسبت به تابع وزن ۱ متعامدند.

درست همان‌طور که توابع (۸) پایهٔ سری سینوسی فوریه توابعی است که در ۰ و π صفر می‌شوند، توابع ویژهٔ (۶) را می‌توان برای یافتن بسط تابع $f(x)$ که در a و b صفر می‌شود، برحسب توابع ویژه، به‌کار برد:

$$f(x)=a_{1}y_{1}(x)+a_{2}y_{2}(x)+\dots+a_{n}y_{n}(x)+\dots \qquad (9)$$

اگر طرفین این رابطه را در $q(x)\, y_{n}(x)$ ضرب کنیم و از a تا b جمله به جمله انتگرال بگیریم و از رابطهٔ (۷) استفاده کنیم، ضریب nام به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_{n}=\frac{1}{\alpha_{n}}\int_{a}^{b}q(x)y_{n}(x)f(x)\,dx \qquad (10)$$

که در آن

$$\alpha_{n}=\int_{a}^{b}q(x)y_{n}(x)^{2}\,dx$$

بسطهایی به صورت (۹) را که ضرایب آنها در (۱۰) داده شده‌اند، اغلب بسطهای استورم-لیوویل می‌نامند. این بسطها برای دسته‌های وسیعی از توابع معتبرند، لیکن مطالعهٔ دقیق این گونه مسائل از حوزهٔ کار این کتاب خارج است.

آخرین نکته این که، معمولا (۶) را یك مسئلهٔ منظم استورم-لیوویل می‌خوانیم، چرا که فاصله آن متناهی است و توابع $p(x)$ و $q(x)$ در تمامی این فاصله مثبت و پیوسته‌اند. مسائل غیرعادی وقتی ظاهر می‌شوند که فاصله نامتناهی باشد یا اگر فاصله متناهی است، $p(x)$ یا $q(x)$ در یك یا هردو نقطهٔ انتهایی فاصله صفر یا ناپیوسته باشد. این مسائل به‌طور قابل ملاحظه‌ای مشکلترند و مسلماً در چارچوب این پیوست قرار نمی‌گیرند. متأسفانه، بسیاری ازجالبترین معادلات دیفرانسیل بدین معنی غیرعادی هستند. معادلات زیررا به‌عنوان مثال ذکر می‌کنیم:

معادلهٔ لژاندر

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^{2})\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0 , \quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

معادلهٔ چبیشف

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{1/2}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda(1-x^2)^{-1/2}y=0 \ , \quad -1<x<1$$

معادلهٔ هرمیت

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x^2}y=0 \ , \quad -\infty<x<\infty$$

و معادلهٔ لاگر

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x}y=0 \ , \quad 0\leqslant x<\infty$$

این معادلات مجدداً در فصل پنجم ظاهرخواهند شد واز دیدگاهی کاملا متفاوت موردمطالعه قرار خواهندگرفت.

یادداشت دربارهٔ لیوویل. ژوزف لیوویل (۱۸۰۹–۱۸۸۲) استاد گرانقدر کولژدوفرانس پاریس و بنیانگذار وسردبیر مجلهٔ «ریاضیات‌محض وکاربردی[1]» بود، مجلهٔ ادواری مشهوری‌که در طول قرن نوزدهم نقش مهمی در سرنوشت ریاضیات فرانسه بازی‌کرد. ولی بنابه دلایلی دستاوردهای چشمگیر او به عنوان یك ریاضیدان خلاق آن طورکه باید وشاید مورد تقدیر قرارنگرفته است. این حقیقت‌که مجموعهٔ آثار وی هرگز به چاپ نرسیده است، قصوری اسف‌بار، بلکه تعجب‌آور از جانب هم میهنان وی می‌باشد.

او اولین کسی بودکه یك‌مسئلهٔ مقدارمرزی را از طریق‌حل‌معادلهٔ انتگرال‌معادل آن حل کرد، روشی‌که در اوایل دهه ۱۹۰۰ میلادی به‌وسیلهٔ فرد هولم و هیلبرت در یکی از زمینه‌های عمدهٔ آنالیز نوین بسط داده شد. نظریهٔ دیفرانسیل‌گیری کسری هوشیارانهٔ او به این سؤال دیرینه پاسخ گفت‌که برای علامت d^ny/dx^n، وقتی که n عددی صحیح مثبت نباشد، چه مفهوم معقولی‌می‌توان قایل شد. او یك قضیهٔ بنیادی آنالیز مختلط را کشف‌کرد که امروزه به قضیهٔ لیوویل مشهور است ــ و براساس آن، هرتابع تام وکراندار الزاماً مقداری ثابت است ــ و از آن به‌عنوان پایهٔ نظریهٔ توابع بیضوی خود استفاده کرد. یك قضیهٔ بسیار مشهور از لیوویل نیز در مکانیك هامیلتونی‌وجود داردکه برطبق‌آن، انتگرالهای‌حجم، درفضای فاز، مستقل‌از زمان‌اند. نظریهٔ انتگرالهای‌توابع مقدماتی او، شاید اصیلترین‌کار وی‌باشد، زیرا طی‌آن ثابت کرد که انتگرالهایی از قبیل

$$\int e^{-x^2}dx \ , \quad \int\frac{e^x}{x}dx \ , \quad \int\frac{\sin x}{x}dx \ , \quad \int\frac{dx}{\log x}$$

و نیز انتگرالهای بیضوی از نوع اول و دوم را نمی‌توان برحسب تعدادی متناهی

---

1. Journal des Mathématiques Pures et Appliquées

از توابع مقدماتی بیان کرد[1].

نظریهٔ جالب و در عین حال مشکل اعداد غیرجبری، شاخهٔ مهم دیگری از ریاضیات است که از کارهای لیوویل سرچشمه گرفت. غیرگویایی اعداد π و e ـ یعنی اینکه اعداد مزبور ریشهٔ هیچ معادلهٔ خطی به‌صورت $ax+b=0$ باضرایب صحیح نیستند ـ در قرن هیجدهم به وسیلهٔ لامبرت و اویلر به اثبات رسیده بود. در سال ۱۸۴۴ لیوویل نشان داد که e ریشهٔ هیچ معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرایب صحیح نیز نیست. این مطلب او را به این حدس رساند که e غیر جبری است، یعنی در هیچ معادلهٔ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح همچون

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

صدق نمی‌کند. کوشش او برای اثبات این مطلب به جایی نرسید، لیکن نظرات او در توفیق هرمیت در سال ۱۸۷۳ و سپس در اثبات سال ۱۸۸۲ لیندمان در مورد اینکه π نیز غیرجبری است، سهم بسزایی‌داشت. سرانجام نتیجهٔ حاصل ازکارلیندمان نشان داد که مسئلهٔ قدیمی تربیع دایره به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار غیر ممکن است. یکی از دستاوردهای عظیم ریاضیات عصر نوین، اثبات عرضه شده توسط گلفوند در سال ۱۹۲۹ درمورد غیرجبری بودن e^π بود، لیکن تا به حال اطلاعی دربارهٔماهیت اعداد $\pi+e$ ، πe یا π^e به‌دست نیامده است. لیوویل، همچنین، یك شرط‌کافی برای غیرجبری‌بودن اعدادکشف کرد و درسال ۱۸۴۴ ازآن‌برای حصول به‌نخستین مثالها از اعداد حقیقی‌که غیرجبری بودن‌آنها قابل اثبات است استفاده کرد. یکی از این مثالها عدد زیراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \cdots = 0{,}110001000\ldots$$

این روشهای او به تحقیقات گستردهٔ دیگری در قرن بیستم نیز منجرگردیده است[2].

---

۱. مراجعه کنید به

D. G. Mead, Integration, *Am. Math. Monthly* vol. 68, pp. 152-156, 1961.

وبرای توضیحات بیشتر

G. H. Hardy, «The Integration of Functions of a Single Variable,» Cambridge, London, 1916.

یا

J. F. Ritt, «Integration in Finite Terms,» Columbia, New York, 1948.

را ملاحظه‌کنید.

۲. با مراجعه به‌کتاب

A. O. Gelfond, «Transcendental and Algebraic Numbers,» Dover, New York, 1960.

می‌توان تا حدودی به عمق وپیچیدگی این مطلب پی‌برد.

۵

جوابهای سری توانی و توابع خاص

۲۵. مقدمه. مروری بر سریهای توانی

اغلب توابع خاصی که درآنالیز مقدماتی ظاهرمی‌شوند متعلق به دسته‌ای از توابع، مشهور به توابع مقدماتی، هستند. برای توصیف این دسته ازتوابع یادآوری می کنیم که تابع جبری، چند جمله‌ای، تابع گویا، و درحالت کلی‌تر هرتابعی مانند $y=f(x)$ است که درمعادله‌ای به‌صورت زیرصدق کند:

$$P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\cdots+P_1(x)y+P_0(x)=0$$

دراین معادله توابع $P_i(x)$ چند جمله‌ای هستند. توابع مقدماتی عبارت‌اند ازتوابع جبری و توابع متعالی (یا غیرجبری) مقدماتی که در حساب دیفرانسیل‌وانتگرال ظاهرمی گردند؛ یعنی توابع مثلثاتی، مثلثاتی معکوس، نمایی، وتوابع لگاریتمی، وديگر توابعی که ازجمع، تفریق، ضرب، تقسیم، یا ترکیب این توابع به وجود می‌آیند. بنابراین

$$y=\tan\left[\frac{xe^{1/x}+\tan^{-1}(1+x^2)}{\sin x\cos 2x-\sqrt{\log x}}\right]^{1/3}$$

يك تابع مقدماتی است.

بعد از توابع مقدماتی، توابع‌متعالی از رده‌های بالاتر که اغلب توابع خاص نامیده می‌شوند قرار دارند. ازآغاز قرن هیجدهم صدها تابع خاص به لحاظ اهمیت و جذابیت

کافی تا حدودی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بسیاری از این توابع تقریباً به طور کامل فراموش شده‌اند، ولی برخی، همچون تابع گاما، تابع زتای ریمان، توابع بیضوی، و توابعی که در فیزیك ریاضی همچنان مورد استفاده می‌باشند، باعث ایجاد نظریه‌های مبسوطی گردیده‌اند. در بین این توابع، چند تابع وجود داردکه آنقدر در مفهوم وعمل غنی هستند که صرف تاریخچهٔ هر کدام از آنان کتابی حجیم را پرخواهدکرد[1].

توجه مشتاقانهٔ بزرگترین ریاضیدانان قرون هیجدهم و نوزدهم میلادی ــ از جمله اویلر، گاوس، آبل، یاکوبی، وایرشتراس، ریمان، هرمیت، وپوانکاره ــ موجب گسترش مبحث توابع خاص شده است. اما سلیقه‌ها بازمان تغییرمی‌کند، و امروزه اغلب ریاضیدانان ترجیح می‌دهندکه به جای بررسی یکایك توابع مهم، به بررسی دسته‌های وسیعی از توابع (توابع پیوسته، توابع انتگرال‌پذیر و غیره) بپردازند. با وجود این، هنوز عدهٔ بسیاری بیوگرافی را برجامعه‌شناسی ترجیح می‌دهند، ویك بررسی متعادل نمی‌تواند هیچیك ازاین دو نظررا نادیده انگارد.

توابع خاص، بسته به منشأ، ماهیت وکاربردشان، انواع نسبتاً گسترده‌ای دارند. ولی، یك دستهٔ بزرگ آنان که از درجهٔ همگونی قابل توجهی برخوردارند توابعی هستند که به صورت جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ظاهرمی‌شوند. بسیاری از این توابع در ارتباط با معادلات دیفرانسیل جزئی مربوط به فیزیك ریاضی کاربرد پیدا می‌کنند. این توابع همچنین ، در نظریهٔ بسطهای متعامد به عنوان منبع تاریخی اصلی آنالیز خطی، که نقش‌اساسی در شکل‌گیری قسمت اعظمی از ریاضیات محض نوین ایفاکرده است ، اهمیت می‌یابند.

ابتدا سعی‌می‌کنیم چگونگی پیدایش این توابع را به‌طریقی کلی درك‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که هرگاه بخواهیم معادلهٔ دیفرانسیل سادهٔ

$$y''+y=0 \tag{1}$$

را حل‌کنیم، توابع آشنای $y=\cos x$ و $y=\sin x$ ازحساب دیفرانسیل وانتگرال برای این منظور در دسترس هستند اما در مورد معادلهٔ

$$xy''+y'+xy=0 \tag{2}$$

چنین‌نیست، چراکه معادلهٔ بالا را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی حل‌کرد. در واقع‌باید گفت که هیچ معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم شناخته شده‌ای (بجز معادلات با ضرایب ثابت یا معادلاتی که باتغییرمتغیر مستقل به‌این‌گونه معادلات‌تبدیل می‌گردند) که بتوان آن‌را برحسب توابع مقدماتی حل کرد، وجود ندارد. در فصل ۴ دریافتیم که برخی از خواص عمومی جوابهای چنین معادله‌ای را اغلب می‌توان بدون حل آن معادله به دست آورد. ولی هرگاه

---

۱. خواننده‌ای که می‌خواهد تصوری از وسعت این قسمت آنالیز داشته باشد می‌تواند به‌کتاب سه جلدی زیر مراجعه‌کند،
"Higher Transcendental Functions," A. Erdélyi (ed.), Mc Graw-Hill, New York, 1953 - 1955.

معادلهٔ خاصی از این نوع دارای آن چنان اهمیتی باشدکه جواب صریحی را بطلبد، در آن صورت چه می‌توان‌کرد؟ روش ما در این فصل حل معادله برحسب سریهای توانی و به کاربردن این سریها برای تعریف توابع خاص جدید است. آنگاه خواص این توابع را به‌وسیلهٔ بسط سری‌آنها مورد بررسی قرارمی‌دهیم. چنانچه موفق به‌شناخت کافی این‌توابع شویم، این توابع مانند «توابع‌آشنا» می‌توانند به‌منزلهٔ ابزاری برای مطالعهٔ مسئله‌ای که منجر به معادلهٔ دیفرانسیل اصلی‌شده است مورد استفاده قرارگیرند. نیازی به‌گفتن نیست‌که توصیف برنامهٔ بالا از اجرای آن ساده‌تر است و تنها در مواردی ارزشمند است که تابع دارای‌کاربردهای متنوع مهم باشد.

از تذکرات بالا روشن‌می‌شودکه سریهای توانی در سرتاسراین فصل به‌میزان‌وسیعی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. فرض برآن است‌که اغلب خوانندگان،طی یك درس ریاضی عمومی قبلی، به اندازهٔ کافی با سریها آشنایی یافته‌اند. با وجود این به خاطر آنهایی‌که احتمالاً این مبحث را تا حدودی به‌فراموشی سپرده‌اند، نکات اساسی دراین‌مورد راباختصار مرورمی‌کنیم.

الف. سری نامتناهی به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad (۳)$$

را سری توانی از x می‌نامند. سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \qquad (۴)$$

سری توانی از $x-x_0$ است‌که تا اندازه‌ای‌کلی‌تر از (۳) است. ولی (۴) را همواره می‌توان باگذاشتن $x-x_0$ به‌جای x (که صرفاً یك انتقال دستگاه مختصات است) به (۳) تبدیل‌کرد. بنابراین، در اغلب موارد بحث خودرا به‌سریهای توانی از شکل (۳) محدود خواهیم کرد.

ب. سری(۳) را درنقطهٔ x همگرا گویند هرگاه حد

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$$

وجود داشته باشد، و دراین حالت مجموع این سری، مقدار این حد است. واضح است‌که (۳) همواره در $x=0$ همگراست. تمامی سریهای توانی از x ازلحاظ نحوهٔ توزیع‌نقاط همگرایی‌شان به سه دستهٔ اصلی تقسیم می‌شوند. این دسته‌ها به‌وسیلهٔ مثالهای زیر مشخص می‌گردند:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \dots \qquad (۵)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (7)$$

اولین سری فوق برای همهٔ مقادیر x بجز $x=0$ واگراست (یعنی همگرا نیست) ؛ دومین سری برای تمام مقادیر x همگـراست ؛ و سومین سری برای $|x|<1$ همگرا و بـرای $|x|>1$ واگراست. رفتار برخی سریهای توانی از x ، مـانند (۵) است ، و تنها برای $x=0$ همگرا هستند. این سریها مورد توجه ما نیستند. برخی، مانند (۶)، برای همهٔمقادیر x همگـرا هستند . کار با این سریهـا از همه ساده‌تـر است. بقیهٔ سریها همگی تقـریباً شبیه (۷) هستند. این بدان مفهوم است که به هرسری از این نوع عدد حقیقی مثبتی مانند R ، به‌نام شعاع همگرایی، متناظرمی گردد که سری‌برای $|x|<R$ همگرا وبرای $|x|>R$ واگراست [در مورد (۷) ، $R=1$].

متداول است که برای حالتی که سری تنها در $x=0$ همگراست R را برابر باصفر و برای حالتی که سری برای تمام مقادیر x همگرا باشد R را برابر با ∞ قـراردهیم. با این قرارداد می‌توان تمام حالات را با یك عبارت توصیف کرد: هرسری توانی از x دارای یك شعاع همگرایی R ، $(0 \leqslant R \leqslant \infty)$ است به‌طوری که سری برای $|x|<R$ همگرا و برای $|x|>R$ واگراست. باید توجه داشت که هر گاه $R=0$ ، هیچ xای وجود ندارد که‌در $|x|<R$ صدق کند، وهنگامی که $R=\infty$ آنگاه هیچ xای وجودندارد که $|x|>R$ را ارضا کند.

در بسیاری از حالتهای مهم، مقدار R را می‌توان به‌طریق زیر به‌دست آورد. فرض می کنیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

یك سری از اعداد ثابت غیرصفر باشد. از حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدمـاتی به خاطر داریم که هر گاه حد

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$$

وجود داشته باشد، براساس آزمون نسبت، برای $L<1$ سری همگرا و برای $L>1$ سری واگراست. درمورد سری توانی (۳)، این مطلب بیان می کند که هر گاه همهٔ a_nها مخالف صفر باشند، و در نقطهٔ ثابت $x\neq 0$ ، داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L$$

آنگاه سری (۳) برای $L<1$ همگرا و برای $L>1$ واگرا خواهد بود. هرگاه حد زیر موجود باشد، ملاحظات بالا فرمول

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

را به دست می‌دهد (هرگاه $|a_n/a_{n+1}|\to\infty$، R را برابر با ∞ می‌گیریم.) صرفنظر ازاینکه رابطهٔ بالا را بتوان به‌کاربرد یا نه، باید دانست که R همواره وجود دارد؛ وچنانچه R متناهی و غیرصفر باشد، فاصلهٔ همگرایی $-R<x<R$ را آنچنان تعیین می‌کند که در داخل این فاصله سری همگرا وخارج ازآن واگرا باشد. در هریك از نقاط انتهایی فاصلهٔ همگرائی سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

ج. فرض می‌کنیم که سری (۳) برای $|x|<R$ با $R>0$ همگرا باشد، و مجموع آن را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \tag{۸}$$

در این‌صورت، برای $|x|<R$، تابع f خود به‌خود پیوسته است ودارای مشتقاتی ازتمام مراتب است. بعلاوه، از این سری می‌توان جمله به‌جمله مشتق گرفت، به این معنا که

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=2a_2+3\times 2a_3x+\cdots$$

و الی‌آخر، و برای $|x|<R$، هریك ازسری‌های حاصل همگرا می‌باشند. این‌مشتق‌گیری پی دزپی سری‌ها به فرمول اساسی زیر، که a_nها را به $f(x)$ ومشتقات آن ربط می‌دهد، منجر می‌شود:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{۹}$$

بعلاوه، غالباً دانستن این نکته مفید است که از سری (۸) می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت به‌شرط آنکه حدود انتگرال‌گیری در داخل فاصلهٔ همگرایی واقع باشند.

هرگاه سری‌توانی‌دیگری‌از x داشته‌باشیم که برای $|x|<R$ به‌تابعی، مانند $g(x)$، همگرا شود، به‌طوری که

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots \tag{۱۰}$$

سری‌های (۸) و (۱۰) را می‌توان جمله به جمله جمع یا تفریق کرد:

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+\cdots$$

این سریها را همچنین می‌توان، مانند چند جمله‌ایها، در یکدیگر ضرب کرد، بدین معنا که

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

که‌درآن $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$[1]. هرگاه هردوسری مورد بحث به‌یك تابع همگرا شوند، به قسمی‌که برای $|x|<R$ ، $f(x)=g(x)$ ، درآن صورت فرمول (۹) حاکی از آن است‌که ضرایب هردو سری باید برابر باشند: یعنی $a_0=b_0$ ، $a_1=b_1$ ، ... بویژه، هرگاه برای $|x|<R$ ، داشته باشیم $f(x)=0$ ، آنگاه $a_0=0$ ، $a_1=0$ ، ...

د. فرض‌می‌کنیم‌که تابع $f(x)$ ، برای $|x|<R$ با $R>0$، پیوسته ودارای‌مشتقات تمام مراتب باشد. آیامی‌توان $f(x)$ را به‌صورت یك‌سری توانی نمایش‌داد؟ اگراز (۹) برای تعریف a_nها استفاده‌کنیم، آنگاه طبیعی است انتظار داشته باشیم‌که بسط

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots \tag{11}$$

در تمام فاصلهٔ مورد نظر برقرار باشد. این مطلب غالباً صحیح است، ولی متأسفانه گاهی اوقات نادرست درمی‌آید. یك روش برای بررسی اعتبار این بسط دریك نقطهٔ مشخص x واقع در فاصلهٔ مورد نظر، استفاده از فرمول تیلور است:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}+R_n(x)$$

که درآن، باقی ماندهٔ $R_n(x)$ مساوی است با

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1}$$

که درآن، $\bar{x}$ نقطه‌ای بین ۰ و x است. برای تحقیق درستی (۱۱) ، کافی است نشان دهیم که هرگاه $n\to\infty$ ، آنگاه $R_n(x)$ به‌سمت‌صفرمیل می‌کند. با این روش، بآسانی می‌توان بسطهای آشنای زیر را به‌دست آورد‌که برای تمام مقادیر x صادق‌اند:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{12}$$

---

۱. برای‌مطالب بعدی مفید خواهدبود اگر توجه‌کنیم‌که c_n را به‌دو صورت معادل زیر می‌توان نوشت:

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k} \qquad \text{و} \qquad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \qquad (13)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \qquad (14)$$

هرگاه سری توانی همگرای خاصی داده شده باشد، چگونه می‌توان تابعی را که مجموع سری‌است مشخص نمود؟ درحالت کلی این کارغیرممکن است، چراکه تنها تعداد بسیارکمی از سری‌های توانی مجموعی به شکل توابع مقدماتی آشنا دارند.

ﻫ. تابع $f(x)$ را درنقطهٔ x_0 تحلیلی گوییم، هرگاه بسط سری توانی آن به‌صورت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (15)$$

در یك همسایگی x_0 معتبر باشد. دراین حالت a_nها لزوماً از رابطهٔ

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

به دست می‌آیند و (۱۵) را سری تیلور $f(x)$ در x_0 می‌نامند. بنابراین (۱۲) ، (۱۳) و (۱۴) بیان‌کنندهٔ این مطالب‌اندکه توابع e^x ، $\sin x$ ، و $\cos x$ در $x_0=0$ تحلیلی‌اند ، و سریهای داده شده ، سری‌تیلور این‌توابع دراین نقطه‌اند. اغلب سؤالات مربوط به‌تحلیلی بودن توابع را می‌توان توسط مطالب زیر پاسخ داد:

۱. چند جمله‌ایها وتوابع e^x ، $\sin x$ و $\cos x$ در تمامی نقاط تحلیلی هستند.

۲. هرگاه‌توابع $f(x)$و$g(x)$ در x_0 تحلیلی‌باشند،درآن‌صورت‌توابع$f(x)+g(x)$ و $f(x)\ g(x)$ و $f(x)/g(x)$ [با فرض $g(x_0)\neq 0$] نیزدرنقطهٔ x_0 تحلیلی‌اند.

۳. اگر تابع f در x_0 تحلیلی و$f^{-1}(x)$ معکوس پیوستهٔ آن باشد ، در آن صورت $f^{-1}(x)$در $f(x_0)$ تحلیلی خواهد بود ، مشروط به اینکه $f'(x_0)\neq 0$.

۴. اگر تابع $g(x)$ در x_0، وتابع $f(x)$ درنقطهٔ $g(x_0)$ تحلیلی باشد، آنگاه تابع $f(g(x))$ درنقطهٔ x_0 تحلیلی است.

۵. مجموع سری توانی در همهٔ نقاط داخل فاصلهٔ همگرائی تحلیلی است.

برخی ازاین مطالب را می‌توان به آسانی با روش‌های مقدماتی ثابت‌کرد ، ولی در مورد بقیه چنین‌نیست. به‌طورکلی ، رفتارتوابع تحلیلی تنها درزمینهٔ گسترده‌تر نظریهٔ توابع‌مختلط به طورکامل قابل درك است.

تمرین

۱ــ با استفاده از آزمون نسبت نشان دهیدکه شعاع همگرایی سری‌های (۵) ، (۶) و (۷)

بترتیب برابرند با $R=۰$ ، $R=\infty$ ، و $R=۱$.

۲ــ هرگاه p صفر یا عدد صحیح مثبتی نباشد، نشان دهیدکه سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{p(p-۱)(p-۲)\cdots(p-n+۱)}{n!}x^n$$

برای $|x|<۱$ همگرا و برای $|x|>۱$ واگراست.

۳ــ نشان دهیدکه در سری‌های سمت راست بسطهای (۱۳) و (۱۴)، $R=\infty$.

۴ــ از فرمول تیلور برای اثبات درستی بسطهای (۱۲) ، (۱۳) ، (۱۴) برای تمام مقادیر x استفاده کنید. راهنمایی: برای هر ثابت a حد $a^n/n!$ صفراست (چرا؟)

۵ــ در جبر مقدماتی دیده‌ایم که :

$$۱+x+x^۲+\cdots x^n=\frac{۱-x^{n+۱}}{۱-x} \quad ، \quad x\neq ۱ \text{ برای}$$

از این مطلب استفاده کنید و نشان دهیدکه بسطهای

$$\frac{۱}{۱-x}=۱+x+x^۲+x^۳+\cdots$$

و

$$\frac{۱}{۱+x}=۱-x+x^۲-x^۳+\cdots$$

برای $|x|<۱$ معتبرند. از بسط اخیر برای اثبات روابط

$$\log(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots$$

و

$$\tan^{-۱}x=x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}-\frac{x^۷}{۷}+\cdots$$

در فاصلهٔ $|x|<۱$ استفاده کنید.

۶ــ از اولین بسط مسئلهٔ ۵ برای یافتن سری توانی $۱/(۱-x)^۲$ به طرق زیر استفاده کنید :

الف) به‌وسیلهٔ مجذور کردن ؛

ب) با مشتق گیری .

۷ــ الف) نشان‌دهیدکه سری بسط $\cos x$

$$y=1-\frac{x^2}{1\times 2}+\frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4}-\frac{x^6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}+\cdots$$

دارای خاصیت $y''=-y$ و بنابراین یك جواب معادله (۱) است.

ب) نشان دهید که سری

$$y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\times 4^2}-\frac{x^6}{2^2\times 4^2\times 6^2}+\cdots$$

برای همهٔ مقادیر x همگراست، و تحقیق کنید که یك جواب معادلهٔ (۲) است. [توجه کنید که سری مزبور را می‌توان از سری داده شده در (الف) با جایگزینی هر عامل فرد ازمخرج به‌وسیلهٔ عدد زوج بعدیش، به‌دست‌آورد. مجموع این سری یکی ازتوابع خاص مفید است که آن را با $J_0(x)$ نشان می‌دهند و تابع بسل مرتبهٔ ۰ می‌نامند؛ در فصل آتی این تابع مفصلا مورد بررسی قرار خواهدگرفت.]

۲۶. جوابهای به صورت سری معادلات مرتبهٔ اول

بارها تأکید کرده‌ایم که بسیاری از معادلات دیفرانسیل جالب و مهم را با هیچ یك از روشهایی که در فصلهای گذشته مورد بحث قرار گرفت نمی‌توان حل کرد، و همچنین گفتیم که جوابهای این‌نوع معادلات را می‌توان برحسب سری توانی به‌دست آورد. مقصود مادراین بخش تشریح این روش، با نشان‌دادن چگونگی عملکرد آن درمورد معادلات مرتبهٔ اولی است که با روشهای مقدماتی بسادگی حل می‌شوند.

به عنوان اولین مثال، معادلهٔ

$$y'=y \tag{۱}$$

را درنظرمی گیریم. فرض می‌کنیم که این معادله دارای جوابی به شکل سری توانی

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{۲}$$

باشد، که برای $|x|<R$ ، $R>0$ ، همگراست؛ بعبارت دیگر فرض می‌کنیم که معادلهٔ (۱) دارای جوابی باشد که در مبدأ تحلیلی است. از هرسری توانی در فاصلهٔ همگرایی‌اش می‌توان جمله به‌جمله مشتق گرفت، لذا

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots \tag{۳}$$

از آنجا که $y'=y$ ، سری‌های (۲) و (۳) باید دارای ضرایب برابر باشند:

$$a_1=a_0 \text{ ، } 2a_2=a_1 \text{ ، } 3a_3=a_2 \text{ ، } \ldots \text{ ، } (n+1)a_{n+1}=a_n \text{ ، } \ldots$$

با این معادلات می‌توانیم هر a_n را برحسب a_0 بیان کنیم:

$$a_1=a_0 \text{ ، } a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{a_0}{2} \text{ ، } a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{a_0}{2\times 3} \text{ ، } \ldots \text{ ، } a_n=\frac{a_0}{n!} \text{ ، } \ldots$$

هنگامی که این ضرایب در (۲) قرارداده شوند، جواب سری‌توانی موردنظر به‌دست‌می‌آید

$$y=a_\circ\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right) \qquad (۴)$$

که در آن هیچ شرطی برای $a_\circ$ وجود ندارد. درك این نکته اساسی است که تا اینجا این جواب‌صرفاً آزمایشی است، زیرا هیچ تضمینی درمورد اینکه معادلهٔ (۱) جوابی به شکل سری توانی (۲) داشته باشد، وجود ندارد. استدلال بالا فقط نشان می‌دهد که اگر معادلهٔ (۱) دارای چنین جوابی باشد، دراین‌صورت این‌جواب باید به‌صورت (۴) باشد. درهرحال از آزمون نسبت بلافاصله دیده می‌شود که سری (۴) برای کلیهٔ مقادیر x همگراست، و بنابراین مشتق‌گیری جمله به‌جمله معتبراست، و (۴) عملا جوابی برای معادلهٔ (۱) است. در این حالت، بآسانی می‌توان سری (۴) را به‌عنوان بسط سری توانی e^x تشخیص داد، بنابراین رابطهٔ(۴) را می‌توان به‌شکل:

$$y=a_\circ e^x$$

نوشت. لازم به‌تذکر نیست، که این‌جواب را مستقیماً می‌توان ازرابطهٔ(۱) با تفکیك متغیرها و انتگرال‌گیری به‌دست‌آورد. باوجوداین، تشخیص این‌مطلب مهم‌است‌که حتی اگرمعادلهٔ (۱) به وسیلهٔ روشهای مقدماتی قابل حل نبود وسری (۴) به‌عنوان بسط هیچ یك ازتوابع آشنا تشخیص داده نمی‌شد، بازهم سری (۴) کاملا ارزشمند بود.

این مثال، روشی مناسب برای یافتن بسط سری توانی یك تابع مفروض را عرضه می‌کند: یافتن معادلهٔ دیفرانسیلی که تابع مفروض درآن‌صدق کند، وسپس حل‌معادله به‌وسیلهٔ سری توانی.

برای نمونه تابع

$$y=(1+x)^p \qquad (۵)$$

را درنظرمی‌گیریم، که درآن p مقدار ثابت دلخواهی است. بآسانی دیده می‌شودکه‌تابع (۵) جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیراست:

$$(1+x)y'=py \;,\; y(0)=1 \qquad (۶)$$

همچون‌گذشته، فرض می‌کنیم‌که معادلهٔ (۶) جوابی به‌صورت سری توانی داشته باشد،

$$y=a_\circ+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (۷)$$

که شعاع همگرایی آن مثبت باشد. از این فرض نتیجه می‌شودکه

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$
$$xy'=a_1x+2a_2x^2+\cdots+na_nx^n+\cdots$$
$$py=pa_\circ+pa_1x+pa_2x^2+\cdots+pa_nx^n+\cdots$$

با توجه به معادلهٔ (۶)، مجموع دو سری اول باید باسومی برابر باشد، لذا بامساوی قرار دادن ضرایب توانهای پیاپی x به‌معادلات

$$a_1 = pa_0 \text{ ، } 2a_2 + a_1 = pa_1 \text{ ، } 3a_3 + 2a_2 = pa_2 \text{ ، } \dots \text{ ، }$$
$$(n+1)a_{n+1} + na_n = pa_n \text{ ، } \dots$$

می‌رسیم. با توجه به‌شرط اولیهٔ (۶)، $a_0 = 1$ ، بنابراین داریم:

$$a_1 = p \text{ ، } a_2 = \frac{a_1(p-1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2(p-2)}{3} = \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \times 3}, \dots$$

$$a_n = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}, \dots$$

با این ضرایب ، سری (۷) به‌صورت

$$y = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (8)$$

درمی‌آید. برای استنتاج اینکه سری (۸) در واقع جواب مطلوب است، کافی‌است مشاهده شود که این سری برای $|x|<1$ همگراست (تمرین ۲۵-۲ را نگاه کنید). بـا مقایسهٔ دو جواب (۵) و(۸)، واستفاده ازاین امر که معادلهٔ (۶) تنها یک‌جواب دارد، برای $|x|<1$ خواهیم داشت

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (9)$$

این نتیجه به‌سری دو جمله‌ای مشهور است، وقضیهٔ بسط دوجمله‌ای را برای هرتوان‌دلخواه تعمیم می‌دهد.[1]

---

۱. همچنان‌که خواننده از جبر مقدماتی به‌خاطر می‌آورد ، قضیهٔ دوجمله‌ای می‌گویدکه هرگاه nعددی صحیح و مثبت باشد ، آنگاه

←

تمرین

۱ـ معادلات دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید:

الف) $y' = 2xy$

ب) $y' + y = 1$

برای هرحالت، جواب سری توانی به‌صورت $\sum a_n x^n$ را بیابید، سعی کنید تشخیص دهیدکه سری حاصل بسط کدام تابع آشناست، و درستی استنتاج خود را باحل مستقیم این معادلات تحقیق کنید.

۲ـ معادلات دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید:

الف) $xy' = y$

ب) $x^2 y' = y$

برای هرحالت، جواب سری توانی این معادلات را به‌صورت $\sum a_n x^n$ بیابید، معادله را مستقیماً حل کنید، و هراشکالی که ظاهرمی‌شود توضیح دهید.

۳ـ با حل معادلهٔ $y' = (1 - x^2)^{-1/2}$ به دو روش، تابـع $\sin^{-1} x$ را به صورت سری توانی به‌شکل $\sum a_n x^n$ بیان‌کنید. (راهنمایی: سری دو جمله‌ای را به خاطرآورید.) از این‌نتیجه برای یافتن فرمول زیراستفاده کنید:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \times \frac{1}{5 \times 2^5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \times \frac{1}{7 \times 2^7} + \cdots$$

۴ـ معادلات دیفرانسیلی که در متن‌آورده شد وتمرینهای قبلی تماماً خطی هستند. معادلهٔ

$$y' = 1 + y^2 \qquad (*)$$

غیرخطی‌است، بسادگی‌می‌توان به‌طورمستقیم‌مشاهده کردکه $y = \tan x$ جوابی‌خصوصی است‌که درشرط اولیهٔ $y(0) = 0$ صدق‌می‌کند. فرض‌کنید معادلهٔ(*) جوابی به‌صورت

→

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k + \cdots + x^n$$

یا به صورت فشرده‌تر

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

که درآن $\binom{n}{k}$ ضریب دو جمله‌ای است و توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

سری توانی $\sum a_n x^n$ دارد و a_nها را به‌دو طریقی که درزیرخواهد آمد بیابید ونشان دهید که

$$\tan x = x + \frac{۱}{۳}x^۳ + \frac{۲}{۱۵}x^۵ + \cdots$$

الف) با روشی که در متن برای مثالها به‌کار رفت (بخصوص توجه‌کنید کـه غیرخطی بودن معادله تا چه‌حد فرمولها را پیچیده‌ترمی‌کند)؛

ب) با مشتق‌گیری متوالی از (*) ویافتن روابط

$$y'' = ۲y'y \,،\, y''' = ۲yy'' + ۲(y')^۲ \,،\, \ldots$$

و استفاده از رابطهٔ $a_n = f^{(n)}(۰)/n!$

۵ـ معادلهٔ زیر را به‌وسیلهٔ هریك از روشهای پیشنهاد شده درتمرین ۴ حل‌کنید:

$$y' = x - y \,،\, y(۰) = ۰$$

سری حاصل نمایش‌دهندهٔ کدام یك از توابع آشناست؟ درستی نتیجهٔ خود را با حل مستقیم این معادلهٔ خطی‌مرتبهٔ اول تحقیق‌کنید.

۲۷. معادلات خطی مرتبهٔ دوم. نقاط عادی

اکنون توجه خودرا به معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم همگن‌کلی به‌صورت

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = ۰ \qquad (۱)$$

معطوف می‌کنیم. چنانکه می‌دانیم چنین معادله‌ای راگهگاه می‌توان برحسب توابع‌مقدماتی آشنا حل‌کرد. مثلا ، این امر درحالتی‌که $P(x)$ و $Q(x)$ مقادیرثابتی باشند، وهمچنین در چند حالت دیگر اتفاق می‌افتد. ولی، در بیشتر حالات ، این نوع معادلات‌که هم از نظـر ریاضیات محض وهم از نظر ریاضیات کاربسته اهمیت شایانی دارند، با روشهای مقدماتی قابل حل نیستند وآنها را فقط با روشهای سری توانی می‌توان حل‌کرد.

نکتهٔ اساسی درمورد معادلهٔ دیفرانسیل (۱) آن‌است‌که رفتار جوابهای‌آن درنزدیکی نقطهٔ $x_۰$ بستگی به‌رفتار توابع ضریبی $P(x)$ و $Q(x)$ در مجاورت آن نقطه دارد. در این بخش خود را به‌حالتی که توابع $P(x)$ و $Q(x)$ به مفهوم تحلیلی بودن در $x_۰$ ، «خوش رفتار» می‌باشند محدود می‌کنیم. معنی این مطلب‌آن است‌که هریك ازآنها دریك همسایگی این‌نقطه دارای‌بسطی به‌صورت‌سری توانی‌می‌باشند. درچنین حالتی‌نقطهٔ $x_۰$ را نقطهٔ عادی معادله (۱) می‌نامند، و ثابت می‌شودکه هرجواب معادله نیز در این نقطه تحلیلی است. به بیان دیگر، تحلیلی بودن ضرایب(۱) در نقطه‌ای معین، متضمن تحلیلی بودن جوابهای‌معادله در آن نقطه است . هرنقطه‌ای‌راکه نقطهٔ عادی معادلهٔ (۱) نباشد نقطهٔ غیرعادی می‌نامند.

حکمی راکه درپاراگراف بالا بیان‌کردیم ثابت خواهیم‌کرد، ولی نخست به‌بررسی

برخی مثالهای روشنگر می‌پردازیم.

در مورد معادلهٔ آشنای

$$y''+y=0 \qquad (2)$$

توابع ضریبی $P(x)=0$ و $Q(x)=1$ هستند. این توابع در تمامی نقاط تحلیلی‌اند، بنابراین در صدد یافتن جوابی به‌شکل

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (3)$$

برمی‌آییم. با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۳) داریم

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots \qquad (4)$$

و

$$y''=2a_2+2\times3a_3x+3\times4a_4x^2+\cdots+(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\cdots \qquad (5)$$

هرگاه (۵) و (۳) را درمعادلهٔ (۲) بگذاریم واین دوسری را جمله به‌جمله باهم‌جمع کنیم، خواهیم‌داشت

$$(2a_2+a_0)+(2\times3a_3+a_1)x+(3\times4a_4+a_2)x^2+(4\times5a_5+a_3)x^3+\cdots+[(n+1)(n+2)a_{n+2}+a_n]x^n+\cdots=0$$

از مساوی صفر قراردادن ضرایب توانهای x خواهیم داشت،

$$2a_2+a_0=0\ ,\ 2\times3a_3+a_1=0\ ,\ 3\times4a_4+a_2=0$$

$$4\times5a_5+a_3=0\ ,\ \ldots\ ,\ (n+1)(n+2)a_{n+2}+a_n=0\ ,\ \ldots$$

به‌کمك این روابط می‌توان a_n را برحسب a_0 یا a_1، بسته به اینکه n زوج باشد یافرد، محاسبه‌کرد:

$$a_2=-\frac{a_0}{2}\ ,\ a_3=-\frac{a_1}{2\times3}\ ,\ a_4=-\frac{a_2}{3\times4}=\frac{a_0}{2\times3\times4}$$

$$a_5=-\frac{a_3}{4\times5}=\frac{a_1}{2\times3\times4\times5}\ ,\ \ldots$$

با این ضرایب، معادلهٔ (۳) به

$$y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2}x^2-\frac{a_1}{2\times3}x^3+\frac{a_0}{2\times3\times4}x^4+\frac{a_1}{2\times3\times4\times5}x^5-\cdots$$

$$=a_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right) \qquad (6)$$

تبدیل می‌شود. دوسری داخل پرانتز را به $y_1(x)$ و $y_2(x)$ نمایش می‌دهیم. به‌طورصوری نشان داده‌ایم که برای هردو ثابت دلخواه a_0 و a_1، (۶) در (۲) صدق می‌کند. بویژه، با انتخاب $a_0=1$ و $a_1=0$ مشاهده می‌شود که تابع y_1 دراین معادله صدق می‌کند، و با انتخاب $a_0=0$ و $a_1=1$ می‌بینیم که y_2 نیز درمعادله صادق‌است. درست همچون‌مثالهای بخش قبل، تنها مطلبی که باقی‌می‌ماند بررسی‌همگرایی سری‌هایی است که توابع y_1 و y_2 را تعریف می‌کنند. آزمون نسبت بلافاصله نشان می‌دهد که هریك از این سری‌ها، وبنابراین سری (۶)، برای تمام مقادیر x همگراست (تمرین ۲۵-۳ را نگاه کنید). از اینجا نتیجه می‌شود که همهٔ عملیات انجام شده در مورد سری (۳) مجاز بوده است، و لذا سری (۶) دیگر نه جواب صوری بلکه جوابی معتبر برای معادلهٔ (۲) است. ازاین‌گذشته، توابع y_1 و y_2 مستقل خطی هستند زیرا روشن است که هیچ یك ازاین سریها مضرب ثابتی ازدیگری نیست. به‌این ترتیب مشاهده می‌کنیم که (۶) جواب عمومی معادلهٔ (۲) است، و هرجواب خصوصی با مشخص کردن مقادیر $y(0)=a_0$ و $y'(0)=a_1$ به‌دست می‌آید.

درمثال بالا بآسانی می‌توان تشخیص داد که دوسری داخل‌پرانتز بسط توابع $\cos x$ و $\sin x$ می‌باشند، وبنابراین رابطهٔ (۶) را می‌توان به صورت

$$y=a_0\cos x+a_1\sin x$$

نوشت. طبعاً، این نتیجه ازهمان آغاز هم قابل پیش‌بینی بود، زیرا (۲) معادلهٔ بسیارساده‌ای است که باجوابهای آن کاملاآشنا هستیم. اما، این‌نتیجه را صرفاً باید به‌حساب حسن‌تصادف گذاشت، زیرا شناسایی اکثر جوابهای به‌صورت سری‌که بدین طریق به‌دست می‌آیندکاملا غیرممکن است واین جوابها توابعی را نشان می‌دهندکه از قبل آنها را نمی‌شناختیم.

برای روشن شدن این نکته، از همین روش برای حل معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0 \qquad (7)$$

استفاده می‌کنیم. دراینجا p عددی ثابت است. روشن است که توابع ضریبی

$$P(x)=\frac{-2x}{1-x^2} \quad \text{و} \quad Q(x)=\frac{p(p+1)}{1-x^2} \qquad (8)$$

در مبدأ تحلیلی‌اند. بنابراین، مبدأ یك نقطهٔ عادی معادله است، و انتظار داریم که جوابی به شکل $y=\sum a_n x^n$ موجود باشد. چون $y'=\sum(n+1)a_{n+1}x^n$، بسطهای زیر را برای تك‌تك عبارات سمت چپ معادلهٔ (۷) به‌دست می‌آوریم:

$$y''=\sum(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

$$-x^2y''=\sum-(n-1)na_nx^n$$

$$-2xy' = \sum -2na_n x^n$$

و

$$p(p+1)y = \sum p(p+1)a_n x^n$$

براساس معادلهٔ (۷)، لازم است که مجموع این‌سریها صفرشود، وبنابراین ضریب x^n باید به‌ازای تمام nها برابر با صفر باشد:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)na_n - 2na_n + p(p+1)a_n = 0$$

با عملیات مختصری، چنین نتیجه می‌شود

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad (9)$$

درست همچون مثال گذشته، این رابطهٔ بازگشتی ما را قادر می‌سازد تا، بسته به‌اینکه n زوج یا فرد باشد، a_n را برحسب a_0 یا a_1 به‌دست آوریم:

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{1\times 2}a_0,$$

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{2\times 3}a_1,$$

$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{3\times 4}a_2 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0,$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4\times 5}a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1,$$

$$a_6 = -\frac{(p-4)(p+5)}{5\times 6}a_4 = -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0,$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6\times 7}a_5$$

$$= -\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1$$

و الی آخر. با قراردادن این ضرایب درجواب مفروض $y = \sum a_n x^n$، داریم

$$y = a_0\Big[1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4$$

$$-\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \dots\Big]$$

$$+a_1\left[x-\frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3+\frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5\right.$$
$$\left.-\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7+\cdots\right] \quad (10)$$

که به‌منزلهٔ جواب صوری (۷) است.

هنگامی که p عدد صحیح نباشد، شعاع همگرایی هردو سری داخل کروشه برابر یك است. این مطلب بآسانی با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۹) مشاهده می گردد: برای اولین سری، فرمول بالا (باقراردادن $2n$ به‌جای n) نتیجه می‌دهد که وقتی $n\to\infty$ ، داریم

$$\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right|=\left|-\frac{(p-2n)(p+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\right||x|^2\to|x|^2$$

وبرای سری دوم نیزهمین طور است. همچون گذشته، این واقعیت که شعاع همگرایی هریك از سریها مثبت است صحت عملیات انجام شده را تصدیق می کند و نشان می‌دهد که سری (۱۰) برای کلیهٔ مقادیر a_0 و a_1 ، جوابی معتبر برای معادلهٔ (۷) است. هریك از توابع داخل کروشه یك جواب خصوصی است؛ و از آنجاکه استقلال خطی توابعی که توسط این سریها تعریف می‌شوند، روشن است، سری (۱۰) جواب عمومی معادلهٔ (۷) در فاصلهٔ $|x|<1$ است.

توابع تعریف شده توسط (۱۰) توابع لژاندر نامیده می‌شوند، و درحالت کلی توابعی مقدماتی نیستند. ولی، هنگامی که p یك عدد صحیح غیرمنفی باشد، یکی از دو سری متناهی است و بنابراین یك چند جمله‌ای می باشد ــ اولین سری، برای p زوج، دومین سری برای p فرد ــ درحالی که سری دیگر همچنان یك سری نامتناهی باقی می‌ماند. مشاهدهٔ این امر مارا به‌جوابهای خصوصی معادلهٔ (۷)سوق می‌دهد که به چند جمله‌ایهای لژاندر مشهورند و خواص‌وکاربردهایشان درفصل ۶ بررسی خواهد شد.

اکنون روش مذکور در این مثالها را برای اثبات قضیهٔ کلی زیر در مورد ماهیت جوابها درنزدیکی نقاط عادی، به‌کار می بریم.

قضیهٔ الف. هرگاه x_0 یك نقطهٔ عادی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (11)$$

باشد و a_0 و a_1 دو ثابت دلخواه باشند، تابع منحصر به‌فردی مثل $y(x)$ وجود دارد که در x_0 تحلیلی است و در یك همسایگی نقطهٔ x_0 در معادلهٔ (۱۱) صدق می‌کند، و شرایط اولیهٔ $y(x_0)=a_0$ و $y'(x_0)=a_1$ را ارضا می‌کند. بعلاوه، هرگاه بسطهای سری توانی $P(x)$ و $Q(x)$ در فاصلهٔ $|x-x_0|<R$ ، $R>0$، معتبر باشند، بسط سری توانی این جواب نیز در همین فاصله معتبر خواهد بود.

اثبات. به‌خاطرسادگی، بحث خودرا به‌حالت $x_0=0$ ، منحصرمی کنیم. این امر به‌ما

امکان می‌دهد که به‌جای کارکردن باسریهای توانی برحسب $x-x_{\circ}$ ، با سری‌های توانی برحسب x سروکار داشته باشیم، و این‌کار از کلیت مسئله نمی‌کاهد. با این‌ساده کردن‌مختصر، مفروضات قضیه چنین خواهد شد که $P(x)$ و $Q(x)$ در مبدأ تحلیلی‌اند و بنابراین دارای بسطهای سری توانی زیرهستند:

$$P(x)=\sum_{n=\circ}^{\infty} p_n x^n = p_{\circ}+p_{۱}x+p_{۲}x^{۲}+\cdots \qquad (۱۲)$$

و

$$Q(x)=\sum_{n=\circ}^{\infty} q_n x^n = q_{\circ}+q_{۱}x+q_{۲}x^{۲}+\cdots \qquad (۱۳)$$

که در فاصله‌ای مانند $|x|<R$ ، $R>\circ$ ، همگرا هستند. با به‌خاطر داشتن شرایط اولیهٔ ذکرشده ، کوشش می‌کنیم جوابی برای معادلهٔ (۱۱) به‌شکل سری توانی

$$y=\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n = a_{\circ}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}+\cdots \qquad (۱۴)$$

به‌دست آوریم، که شعاع همگرایی آن حداقل برابر با R باشد. با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۱۴) داریم

$$y'=\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+۱)a_{n+۱}x^n = a_{۱}+۲a_{۲}x+۳a_{۳}x^{۲}+\cdots \qquad (۱۵)$$

و

$$y''=\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+۱)(n+۲)a_{n+۲}x^n$$
$$=۲a_{۲}+۲\times ۳a_{۳}x+۳\times ۴a_{۴}x^{۲}+\cdots \qquad (۱۶)$$

اکنون، از قاعدهٔ ضرب دوسری نتیجه می‌شود که

$$P(x)y'=\left(\sum_{n=\circ}^{\infty} p_n x^n\right)\left[\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+۱)a_{n+۱}x^n\right]$$
$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left[\sum_{k=\circ}^{n} p_{n-k}(k+۱)a_{k+۱}\right]x^n \qquad (۱۷)$$

و

$$Q(x)y=\left(\sum_{n=\circ}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n\right)$$
$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\sum_{k=\circ}^{n} q_{n-k}a_k\right)x^n \qquad (۱۸)$$

با قراردادن (۱۶)، (۱۷)، و (۱۸) در (۱۱) وجمع کردن جمله به‌جملهٔ سریها، خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(k+1)a_{k+1}+\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k\right]x^n=0$$

بنابراین، رابطهٔ بازگشتی زیر برای a_nها به‌دست می‌آید:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=-\sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1}+q_{n-k}a_k] \qquad (19)$$

برای مقادیر $n=0$ ، ۱ ، ۲ ، ... این رابطه به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$2a_2=-(p_0a_1+q_0a_0)$$
$$2\times 3a_3=-(p_1a_1+2p_0a_2+q_1a_0+q_0a_1)$$
$$3\times 4a_4=-(p_2a_1+2p_1a_2+3p_0a_3+q_2a_0+q_1a_1+q_0a_2),$$
$$\cdots$$

این فرمولها مقادیر a_2 ، a_3 ، ... را برحسب a_0 و a_1 تعیین می‌کنند، بنابراین سری‌حاصل، (۱۴)، که از نظرمحاسباتی در معادلهٔ (۱۱) وشرایط اولیهٔ مفروض صدق می‌کند، به‌شکل منحصر به فردی توسط این شرایط تعیین می‌گردد.

حالا فرض می‌کنیم بتوان ثابت کرد که سری (۱۴) که ضرایب آن توسط رابطهٔ (۱۹) تعریف شده‌اند، برای مقادیر $|x|<R$ واقعاً همگراست. درآن صورت براساس نظریهٔ عمومی سریهای توانی، عملیاتی صوری که روی سری (۱۴) انجام گرفت (مشتق‌گیری جمله به جمله، ضرب، و جمع جمله به‌جمله) تا در معادلهٔ (۱۱) صدق کند، تأیید می‌شوند، و اثبات کامل خواهد بود. این استدلال ساده نیست. جزئیات آن را درپیوست الف آورده‌ایم تا خواننده درصورت تمایل ازآن چشم‌پوشی کند.

تذکر چند نکتهٔ نهایی لازم است. درمثالها، برای تعیین ضرایب جوابهای سری مجهول، تنها با آنچه به‌فرمولهای بازگشتی دوجمله‌ای مشهورند، مواجه گشتیم. سادگی این فرمولها کار تعیین جملهٔ عمومی سری حاصل وکسب اطلاعات دقیق راجع به شعاعهای همگرایی آنها را نسبتاً آسان می‌کند. ولی ازفرمول (۱۹) روشن است که در حالت کلی نباید چنین سادگی را انتظار داشت. در بیشترموارد، بهترین کاری که می‌توان کرد این است که شعاعهای همگرایی بسطهای سری $P(x)$ و $Q(x)$ را به‌دست آوریم واز قضیهٔ بالانتیجه بگیریم که شعاع همگرایی جواب سری باید حداقل برابر باکوچکترین این اعداد باشد. به‌این ترتیب، برای معادلهٔ لژاندر با توجه به معادلهٔ (۸) و بسط آشنای

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\dots, \quad R=1$$

روشن است که برای هردوتابع $P(x)$ و $Q(x)$ ، داریم $R=1$. بنابراین بلافاصله وبدون محاسبات بیشتر، درمی‌یابیم که‌هرجواب‌معادله به‌شکل $\sum a_nx^n$ بایدحداقل‌درفاصلهٔ $|x|<1$

معتبر باشد.

تمرین

۱ـ جواب عمومی معادلهٔ $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$ را برحسب سری توانی از x به دست آورید. آیا می‌توانید این جواب را برحسب توابع مقدماتی بیان کنید؟

۲ـ معادلهٔ $y''+xy'+y=0$ را درنظربگیرید:

الف) جواب عمومی $y=\sum a_n x^n$ آنرا به شکل $y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ بیان کنید، به طوری که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ سری‌های توانی باشند.

ب) به کمك آزمون نسبت نشان دهید، همان طوری که قضیهٔ الف حکم می کند، هردو سری $y_1(x)$ و $y_2(x)$، برای کلیهٔ مقادیر x، همگرا هستند.

ج) نشان دهید که $y_1(x)$ بسط تابع $e^{-x^2/2}$ به‌سری است، واز این مطلب برای یافتن جواب مستقل دیگری از معادله به وسیلهٔ روش بخش ۱۶، استفاده کنید، و برای خود روشن‌سازید که این‌جواب دوم همان تابع $y_2(x)$ است که درقسمت(الف) به‌دست‌آمد.

۳ـ نشان دهید که معادلهٔ $y''+y'-xy=0$ دارای فرمول بازگشتی سه‌جمله‌ای است، و جوابهای سری $y_1(x)$ و $y_2(x)$ این معادله را چنان بیابید که

الف) $y_1(0)=1$ ، $y_1'(0)=0$

ب) $y_2(0)=0$ ، $y_2'(0)=1$

قضیهٔ الف تضمین می کند که هردو سری، برای همهٔ مقادیر x، همگرا هستند. توجه کنید که اثبات این مطلب از طریق انجام عملیات روی خود این سریها تا چه حدمشکل است.

۴ـ معادلهٔ $y''+(p+1/2-x^2/4)y=0$ ، که در آن p عدد ثابتی است، به طور قطع دارای جوابی به‌شکل سری $y=\sum a_n x^n$ می باشد.

الف) نشان دهید که ضرایب a_n توسط فرمول بازگشتی سه جمله‌ای زیر به یکدیگر مربوط‌اند:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+\left(p+\frac{1}{2}\right)a_n-\frac{1}{4}a_{n-2}=0$$

ب) نشان دهید که هرگاه متغیر وابسته توسط رابطهٔ $y=we^{-x^2/4}$ از y به w تبدیل شود، معادلهٔ دیفرانسیل به $w''-xw'+pw=0$ تبدیل خواهد شد.

ج) نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل در (ب) دارای فرمول بازگشتی دو جمله‌ای است وجواب عمومی آنرا بیابید.

۵ـ جوابهای معادلهٔ ایری $y''+xy=0$، توابع ایری نامیده می‌شوند، و دارای کاربردهایی

در نظریهٔ پراش می‌باشند.[۱]

الف) با استفاده ازقضایای بخش۲۲ تحقیق کنید که هرتابع غیرصفرایری‌دارای تعدادی نامتناهی صفرمثبت وحداکثریك صفرمنفی است.

ب) توابع ایری را به شکل سری توانی به‌دست آورید ومستقیماً تحقیق کنید که این سریها برای همهٔ مقادیر x همگرا هستند.

ج) با استفاده از نتایج (ب) جواب عمومی معادلهٔ $y''-xy=0$ را بدون محاسبه بنویسید.

۶ـ معادلهٔ چبیشف به صورت

$$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0$$

می‌باشد، که درآن p عدد ثابتی است.

الف) دو جواب مستقل خطی به‌صورت سری از این معادله راکه برای $|x|<1$ معتبر باشند به‌دست آورید.

ب) نشان دهیدکه هرگاه $p=n$ ، که در آن n عددی صحیح و غیرمنفی است، در آن صورت جوابی برای معادله به‌صورت چند جمله‌ای از درجهٔ n موجود خواهد بود. هنگامی که این‌چند جمله‌ای‌ها درثابتهای مناسبی ضرب‌شوند، چند جمله‌ای‌های چبیشف نامیده می‌شوند. درتمرینهای بخش ۳۰ و درپیوست د به‌این موضوع بازخواهیم گشت.

۷ـ معادلهٔ هرمیت عبارت است از

$$y''-2xy'+2py=0$$

که درآن p عددی ثابت است.

الف) نشان دهیدکه جواب عمومی این معادله تابع $y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ است، که درآن

$$y_1(x)=1-\frac{2p}{2!}x^2+\frac{2^2p(p-2)}{4!}x^4-\frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}x^6+\dots$$

---

۱. سر جرج بیدل ایری(Sir George Biddell Airy)، (۱۸۰۱ـ۱۸۹۲)که سالهای‌متمادی منجم سلطنتی انگلیس بود فردی پرکار وزحمتکشی منظم بود که آداب دانیش جان کوچ آدامز (John Couch Adams) را تقریباً از افتخار کشف سیارهٔ نپتون محروم کرد. وی در خردسالی به خاطر مهارتش در طراحی «فوتك پرتاب نخود» انگشت‌نما بود، ولی با وجود این شروع امیدوارکننده وکارهای اولیه‌اش در نظریهٔ نور ـ دراین زمینه او اولین کسی بود که به نقص بینایی موسوم به‌آستیگماتیسم‌توجه‌کرد ـ به صورت آن گونه دانشمندان‌کاملا تجربی پرورش یافت که ذهنشان درگیر محاسبات عددی پیچیده است وکمتر به ایده‌های‌کلی علم می‌پردازند.

و

$$y_2(x)=x-\frac{2(p-1)}{3!}x^3+\frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5-\frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7+\dots$$

براساس قضیهٔ الف، هردو سری به‌ازای کلیهٔ مقادیر x همگرا هستند. این مطلب‌را مستقیماً تحقیق کنید.

ب) هرگاه p یك عدد صحیح غیرمنفی باشد، یکی از دو سری متناهی، و بنابراین یك چند جمله‌ای است ـ $y_1(x)$ برای p زوج و $y_2(x)$ برای p فرد ـ حال آنکه، سری دیگرهمچنان نامتناهی باقی می‌ماند. تحقیق کنیدکه برای $p=0, 1, 2, 3, 4, 5$ این چند جمله‌ای‌ها عبارتند از

$$1 ,\ x ,\ 1-2x^2 ,\ x-\frac{2}{3}x^3 ,\ 1-4x^2+\frac{4}{3}x^4 ,\ x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5$$

ج) روشن است که تنها جوابهای چند جمله‌ای معادلهٔ هرمیت مضارب ثابتی از چند جمله‌ای‌های بیان شده در (ب) هستند. آن جوابهای چند جمله‌ای معادلهٔ هرمیت، که جملهٔ حاوی بالاترین‌درجهٔ xشان، به‌صورت $2^n x^n$ باشد چند جمله‌ای‌های هرمیت نامیده می‌شوندو با $H_n(x)$ نمایش‌داده‌می‌شوند. تحقیق کنید که $H_0(x)=1$ ، $H_1(x)=2x$ ، $H_2(x)=4x^2-2$ ، $H_3(x)=8x^3-12x$ ، $H_4(x)=16x^4-48x^2+12$، و $H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$.

د) نشان دهید که چند جمله‌ای‌های در قسمت (ج) بافرمول کلی

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

بیان می‌گردند. در پیوست ب نشان خواهیم دادکه چگونه می‌توان فرمول مذکور در قسمت (د) را از سری مذکور در قسمت (الف) به دست آورد، چندین خاصیت از مهمترین خواص چندجمله‌ای‌های هرمیت را ثابت می‌کنیم، و مختصراً نشان می‌دهیم که چگونه‌این توابع دریکی از مسائل بنیادی مکانیك کوانتومی ظاهر می‌گردند.

۲۸. نقاط غیرعادی منظم

یادآوری می‌کنیم که نقطه‌ای مانند x_0 را یك نقطهٔ غیرعادی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

می‌گویند، هرگاه یك یا هردو تابع ضریبی $P(x)$ و $Q(x)$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی نباشند. در این‌حالت قضیه و روشهای بخش‌قبل را نمی‌توان به‌کاربرد، وبرای بررسی جوابهای‌معادلهٔ

(۱) درنزدیکی x_0، مفاهیم جدیدی مورد نیاز هستند. در عمل، این امر از اهمیت قابل توجهی برخوردار است؛ چراکه بسیاری از معادلات دیفرانسیلی که در مسائل فیزیکی ظاهر می‌شوند دارای نقاط غیرعادی هستند، و غالباً انتخاب جوابهای فیزیکی مناسب موکول به تعیین رفتار آنها در نزدیکی این نقاط است. به این ترتیب، نمی‌توان از نقاط غیرعادی معادلات دیفرانسیل اجتناب ورزید، زیرا معمولا همین نقاط مستلزم توجه خاصی هستند. به عنوان یك مثال ساده، مبدأ بوضوح یك نقطهٔ غیرعادی معادلهٔ زیراست

$$y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=0$$

بسادگی می‌توان نشان داد که برای $x>0$، توابع $y_1=x$ و $y_2=x^{-2}$ دوجواب مستقل خطی معادله هستند، بنابراین $y=c_1x+c_2x^{-2}$ جواب عمومی معادله دراین فاصله است. اگر تنها به‌جوابهای کراندار معادله در نزدیکی مبدأ علاقمند باشیم، از این جواب عمومی روشن است که این توابع از قراردادن $c_2=0$ حاصل می‌شوند.

در حالت کلی، در مورد جوابهای (۱) در نزدیکی نقطهٔ غیرعادی x_0 مطالب کمی می‌توان بیان کرد. ولی، خوشبختانه، دراغلب کاربردها نقاط غیرعادی نسبتاً «ضعیف» هستند، به این مفهوم که توابع ضریبی تنها کمی غیرتحلیلی‌اند، و با مختصر ترمیمی در روش قبلی به جوابهای قابل قبول می‌رسیم. این نقاط، نقاط غیرعادی منظم هستند، که به طریق زیر تعریف می‌شوند. نقطهٔ غیرعادی x_0 ازمعادلهٔ (۱) را منظم گوییم، هرگاه توابع $(x-x_0)P(x)$ و $(x-x_0)^2Q(x)$ تحلیلی باشند، در غیراین صورت آن‌را نامنظم می‌نامیم.[1] به‌زبان‌ساده، این امر بدین معناست که غیرعادی بودن در $P(x)$ از غیرعادی بودن در $1/(x-x_0)$ و غیرعادی بودن در $Q(x)$ از غیرعادی بودن در $1/(x-x_0)^2$ بدتر نیست.

هرگاه معادلهٔ لژاندر ۲۷-(۷) را به‌صورت

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{p(p+1)}{1-x^2}y=0$$

در نظر بگیریم، روشن می‌گردد که $x=1$ و $x=-1$ نقاط غیرعادی آن هستند. نقطهٔ اول منظم است، زیرا

$$(x-1)P(x)=\frac{2x}{x+1} \quad \text{و} \quad (x-1)^2Q(x)=-\frac{(x-1)p(p+1)}{x+1}$$

در نقطهٔ $x=1$ تحلیلی‌اند، و دومی نیز به دلایل مشابه منظم است. به عنوان دومین مثال، معادلهٔ بسل از مرتبهٔ p را، که در آن p ثابتی غیرمنفی‌است، درنظر می‌گیریم:

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \qquad (2)$$

---

۱. این اصطلاح از سنتی دیرینه در ریاضیات ناشی می‌شود که براساس آن وضعیتهایی که بسادگی تحلیل‌پذیر نیستند با توسل به عباراتی از قبیل «ناسره»، «ناپذیرفتنی»، «تبهگون»، «نامنظم» وغیره کنارگذارده می‌شوند.

هرگاه معادله را به‌صورت

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-p^2}{x^2}y=0$$

بنویسیم، روشن می‌شود که مبدأ، یك نقطهٔ غیرعادی منظم است، زیرا

$$xP(x)=1 \quad \text{و} \quad x^2Q(x)=x^2-p^2$$

در $x=0$ تحلیلی هستند. در بقیهٔ این فصل غالباً از معادلـهٔ بسل به عنوان مثالی تشریحی استفاده می‌کنیم، و در فصل ۶ جوابها و کاربردهای آن را با تفصیل قابل توجهی بـررسی خواهیم کرد.

اکنون کوشش می‌کنیم وجه تسمیه نقطهٔ غیرعادی منظم را بیابیم. برای‌سادگی، فرض می‌کنیم که نقطهٔ غیرعادی x_0 در مبدأ واقع باشد؛ چراکه در غیراین صورت، با تغییر متغیر مستقل از x به $x-x_0$ این نقطه را همواره می‌توان به مبدأ منتقل کـرد. مطلب را با این حقیقت‌که شکل عمومی‌هرتابع تحلیلی در مبدأ، به صورت $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ است آغاز می‌کنیم. در نتیجه، مبدأ یقیناً نقطهٔ غیرعادی معادلهٔ (۱) است هرگاه

$$P(x)=\dots+\frac{b_{-2}}{x^2}+\frac{b_{-1}}{x}+b_0+b_1x+b_2x^2+\dots$$

و

$$Q(x)=\dots+\frac{c_{-2}}{x^2}+\frac{c_{-1}}{x}+c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$$

و حداقل یکی از ضرایب با انـدیس منفی مخالف صفر باشد. بنا به دلائلی که در زیـر خواهندآمد نوع جوابی ازمعادلهٔ (۱) که مورد نظراست یك، «سری شبه توانی» به‌صورت

$$y=x^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)$$

$$=a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+\dots \qquad (۳)$$

است، که درآن توان m می‌تواند یك عدد منفی صحیح، کسری، یا حتی یك عـدد حقیقی گنگ‌باشد. درتمرینهای ۶ و ۷ خواهیم دید که دوجواب مستقل ازاین نوع، تنها درصورتی وجود دارند، کـه، عبارات فوق برای $P(x)$ و $Q(x)$ بترتیب بیش ازیك جمله یا بیش از دوجمله در طرف چپ جملهٔ ثابت b_0 و c_0 نداشته باشند. به‌بیان دیگر، $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ باید در مبدأ تحلیلی باشند؛ و براساس تعریف، این دقیقاً به‌همان معناست‌که بگوییم $x=0$ نقطهٔ غیرعادی منظم معادله است.

سؤال بعدی که‌کوشش می‌کنیم به آن پاسخ دهیم چنین است: ازکجا این فکرمطرح می‌شودکه سری به صورت (۳) می‌تواند جواب مناسبی برای معادلهٔ (۱) در نزدیکی نقطهٔ غیرعادی منظم $x=0$ باشد؟ در این مرحله، تنها معادلهٔ خطی مرتبهٔ دومی کـه آن را در

نزدیکی یك نقطهٔ غیرعادی منظم می‌توانیم حل کنیم، معادلهٔ اویلر است که در تمرین ۱۷-۴ مورد بحث قرار گرفت:

$$x^{2}y''+pxy'+qy=0 \tag{4}$$

اگر این معادله را به‌صورت

$$y''+\frac{p}{x}y'+\frac{q}{x^{2}}y=0 \tag{5}$$

بنویسیم، به‌طوری که در آن $P(x)=p/x$ و $Q(x)=q/x^{2}$ ، آنگاه روشن خواهد بود که هرگاه ثابتهای p و q هردو باهم صفر نباشند، مبدأ نقطهٔ غیرعادی منظمی از معادله خواهد بود. جوابهای این معادله پل هدایت کننده‌ای برای حالت کلی ارائه می‌کنند، بنابراین جزئیات آنرا اجمالاً یادآوری می‌کنیم. کلید یافتن این جوابها این است که با تغییرمتغیر مستقل x به $z=\log x$ ، معادلهٔ (۴) به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. برای انجام این کار، فرض می‌کنیم که $x>0$ (و بنابراین z متغیری حقیقی است) ومی‌نویسیم

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{1}{x}$$

و

$$y''=\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dz}\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)+\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)$$
$$=-\frac{1}{x^{2}}\,\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x^{2}}\,\frac{d^{2}y}{dz^{2}}-\frac{1}{x^{2}}\,\frac{dy}{dz}$$

هرگاه این عبارات را در (۴) قراردهیم، واضح است که معادلهٔ تبدیل یافته به صورت

$$\frac{d^{2}y}{dz^{2}}+(p-1)\frac{dy}{dz}+qy=0 \tag{6}$$

درمی‌آید، که معادلهٔ کمکی آن

$$m^{2}+(p-1)m+q=0 \tag{7}$$

است. اگر m_1 و m_2 ریشه‌های (۷) باشند، آنگاه می‌دانیم که معادلهٔ (۶) دارای جوابهای مستقل زیر است:

$e^{m_1 z}$ و $e^{m_2 z}$ هرگاه $m_1\neq m_2$

$e^{m_1 z}$ و $ze^{m_1 z}$ هرگاه $m_1=m_2$

از آنجا که $x=e^{z}$ ، دو جفت جواب متناظر (۴) چنین است

x^{m_1} و x^{m_2} هرگاه $m_1\neq m_2$

$$x^{m_1} \text{ و } x^{m_1}\log x \quad \text{هرگاه} \quad m_1=m_2 \tag{8}$$

هرگاه درصدد یافتن جوابهایی معتبر در فاصلهٔ $x<0$ باشیم، تنها باید متغیر مستقل را به $t=-x$ تغییر دهیم و معادلهٔ حاصل را برای $t>0$ حل کنیم.

دراینجا بحث معادلهٔ اویلر وجوابهای آنرا به دو دلیل ارائه کردیم. اولا، خاطرنشان می‌کنیم که عمومی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیلی که مبدأ نقطه غیرعادی منظم آن باشد به همان صورت معادلهٔ سادهٔ (۵) است که به جای صورتهای ثابت p و q، سری‌های توانی نوشته شده باشند:

$$y''+\left(\frac{p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots}{x}\right)y' +\left(\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots}{x^2}\right)y=0 \tag{9}$$

ثانیاً، چون با گذاشتن سری توانی به‌جای مقادیر ثابت،ازمعادلهٔ (۵) به‌معادلهٔ (۹) می‌رسیم، طبیعی‌است حدس بزنیم که اگر در(۸) به‌جای x^m یك‌سری به‌شکل (۳) بگذاریم به‌جوابهای معادلهٔ (۹) خواهیم رسید. بنابراین انتظار داریم که معادلهٔ (۹) دارای دو جواب مستقل به صورت (۳) و یا شاید یك جواب از این نوع وجواب دیگری به‌صورت

$$y=x^m\log x\,(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \tag{10}$$

باشد که درآن فرض می‌شود $x>0$. بخش بعد نشان خواهد داد که این حدسها بسیار بجا هستند.

قبل از اتمام کلیات یك تذکر نهایی لازم است. توجه کنید که هرگاه درعباراتی مانند (۳) و (۱۰)، $a_0=0$، آنگاه می‌توان ازیك توان صحیح ومثبت x درسری توانی‌فاکتور گرفت و آن را در x^m ادغام کرد. بنابراین همواره فرض می‌کنیم که در چنین عباراتی $a_0\neq 0$؛ و این فرض تنها بدان مفهوم است که قبل از انجام هرمحاسبه‌ای باید ازبالاترین توان ممکن x فاکتورگرفت. سری‌هایی به شکل (۳) را سری فروبنیوسی، و دستورالعمل زیررا برای یافتن جوابهایی ازاین نوع روش فروبنیوس می‌نامیم.[1] بدیهی است که سریهای فروبنیوس سریهای توانی را به‌ازای $m=0$ یا عددی صحیح و مثبت، بعنوان حالات‌خاص دربرمی‌گیرند.

برای روشن‌کردن مطالب فوق، معادلهٔ

$$2x^2y''+x(2x+1)y'-y=0 \tag{11}$$

---

۱. فردیناند گئورگ فروبنیوس (Ferdinand Georg Frobenius)، (۱۸۴۹-۱۹۱۷) در برلین وزوریخ تدریس می‌کرد. وی کارهای ارزندهٔ متعددی درنظریهٔ توابع بیضوی و معادلات دیفرانسیل ارائه کرده است. ولی مؤثرترین کار او در مبحث جبر بود. وی در جبر مفهوم مهم مشخصه‌های گروه را ابداع کرد و به‌کاربرد وقضیهٔ مشهوری را راجع به توسیعهای ممکن‌دستگاه اعداد مختلط به اثبات رساند.

را در نظر می‌گیریم. هرگاه این معادله را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$y''+\frac{1/2+x}{x}y'+\frac{-1/2}{x^2}y=0 \qquad (12)$$

بلافاصله روشن می‌شود که $xP(x)=1/2+x$ و $x^2Q(x)=-1/2$ ، لذا $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است. اکنون جواب سری فروبنیوس مفروض،

$$\begin{aligned} y &= x^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \\ &= a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+\cdots \end{aligned} \qquad (13)$$

و مشتقات آن

$$y'=a_0mx^{m-1}+a_1(m+1)x^m+a_2(m+2)x^{m+1}+\cdots$$

و

$$y''=a_0m(m-1)x^{m-2}+a_1(m+1)mx^{m-1}+a_2(m+2)(m+1)x^m+\cdots$$

را می‌نویسیم. برای یافتن ضرایب سری (۱۳)، اساساً مثل حالت نقطهٔ عادی عمل می‌کنیم، با این تفاوت مهم که اکنون باید مقدار (یا مقادیر) مناسب توان m را نیز بیابیم. این سه سری را در معادلهٔ (۱۲) می‌گذاریم، و عامل مشترك x^{m-2} را حذف می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & a_0m(m-1)+a_1(m+1)mx+a_2(m+2)(m+1)x^2+\cdots \\ & +\left(\frac{1}{2}+x\right)[a_0m+a_1(m+1)x+a_2(m+2)x^2+\cdots] \\ & -\frac{1}{2}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=0 \end{aligned}$$

با تحقیق و بررسی، توانهای متناظر x را ترکیب می‌کنیم وضریب هریك از توانهای x را برابر صفر قرارمی‌دهیم. با این‌کار به‌دستگاه معادلات زیرمی‌رسیم:

$$\begin{aligned} & a_0\left[m(m-1)+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right]=0 \\ & a_1\left[(m+1)m+\frac{1}{2}(m+1)-\frac{1}{2}\right]+a_0m=0 \\ & a_2\left[(m+2)(m+1)+\frac{1}{2}(m+2)-\frac{1}{2}\right]+a_1(m+1)=0 \end{aligned} \qquad (14)$$

همان طور که در بالا توضیح دادیم، فرض برآن است که $a_0\neq 0$ ، بنابراین ازاولین‌معادلهٔ این دستگاه نتیجه می‌شود که

$$m(m-۱)+\frac{۱}{۲}m-\frac{۱}{۲}=۰ \qquad (۱۵)$$

این‌معادله، معادلهٔ شاخص معادلهٔ دیفرانسیل(۱۱) نامیده می‌شود. ریشه‌های‌آن عبارت‌اند از

$$m_۲=-\frac{۱}{۲} \quad و \quad m_۱=۱$$

و اینها تنها مقادیر ممکن برای توان m در (۱۳) هستند. حال برای هریك از این مقادیـر m ، بـا استفاده از بقیهٔ معادلات (۱۴) ضرایب $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... را برحسب $a_۰$ به دست می‌آوریم. برای $m_۱=۱$ خواهیم داشت

$$a_۱=-\frac{a_۰}{۲\times۱+\frac{۱}{۲}\times۲-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۲}{۵}a_۰$$

$$a_۲=-\frac{۲a_۱}{۳\times۲+\frac{۱}{۲}\times۳-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۲}{۷}a_۱=\frac{۴}{۳۵}a_۰,$$

$$\cdots$$

و برای $m_۲=-۱/۲$ چنین داریم

$$a_۱=\frac{\frac{۱}{۲}a_۰}{\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}}=-a_۰$$

$$a_۲=-\frac{\frac{۱}{۲}a_۱}{\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۱}{۲}a_۱=\frac{۱}{۲}a_۰,$$

$$\cdots$$

بنابراین دو جواب سری فروبنیوس زیررا خواهیم داشت،که در هریك ازآنها $a_۰$ را برابر با یك قرارداده‌ایم :

$$y_۱=x\left(۱-\frac{۲}{۵}x+\frac{۴}{۳۵}x^۲+\cdots\right) \qquad (۱۶)$$

$$y_۲=x^{-۱/۲}\left(۱-x+\frac{۱}{۲}x^۲+\cdots\right) \qquad (۱۷)$$

روشن است‌که این جوابها برای $x>۰$ مستقل خطی هستند، بنابراین جواب عمومی(۱۱) دراین فاصله به‌صورت زیراست:

$$y=c_1x\left(1-\frac{2}{5}x+\frac{4}{35}x^2+\cdots\right)+c_2x^{-1/2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right)$$

مسئلهٔ یافتن فاصلهٔ همگرایی دو سری توانی داخل پرانتز، در بخش بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت.

اگر به‌روشی که برای بدست‌آوردن (۱۵) از(۱۲) به‌کار رفته‌است دقیقتر نگاه کنیم، روشن می‌شود که معادلهٔ شاخص معادلهٔ دیفرانسیل عمومی‌تر (۹) عبارت است از

$$m(m-1)+mp_0+q_0=0 \tag{18}$$

درمثال بالا، معادلهٔ شاخص دوریشهٔ حقیقی متمایزداشت و به‌دو جواب مستقل (۱۶) و (۱۷) به‌صورت سری رسیدیم. هرگاه معادلهٔ شاخص (۱۸) دارای ریشه‌های حقیقی متمایز m_1 و m_2 باشد، انتظار چنین نتیجه‌ای طبیعی است. این امر درحالی‌که تفاضل m_1 و m_2 غیر صحیح باشد درست‌است. ولی، هرگاه این تفاضل عددی صحیح باشد، غالباً (ولی نه‌همواره) یکی از دو جواب سری مورد انتظار، وجود ندارد. در این حالت (درست مانند حالت $m_1=m_2$) لازم است که جواب مستقل دوم را به روشهای دیگری بیابیم. دربخش بعد این اشکالات را با تفصیل بیشتری بررسی خواهیم کرد.

تمرین

۱ـ در هریك از معادلات دیفرانسیل زیر، محل نقاط غیرعادی واقع برمحور xها رامشخص وآنها را دسته‌بندی کنید:

الف) $x^3(x-1)y''-2(x-1)y'+3xy=0$

ب) $x^2(x^2-1)^2y''-x(1-x)y'+2y=0$

ج) $x^2y''+(2-x)y'=0$

د) $(3x+1)xy''-(x+1)y'+2y=0$

۲ـ نوع نقطهٔ $x=0$ را برای هریك از معادلات زیرتعیین کنید:

الف) $y''+(\sin x)y=0$ د) $x^3y''+(\sin x)y=0$

ب) $xy''+(\sin x)y=0$ ه) $x^4y''+(\sin x)y=0$

ج) $x^2y''+(\sin x)y=0$

۳ـ معادلهٔ شاخص هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید وریشه‌های آن‌را حساب کنید:

الف) $x^3y''+(\cos 2x-1)y'+2xy=0$

ب) $4x^2y''+(2x^4-5x)y'+(3x^2+2)y=0$

۴ـ تحقیق کنید که مبدأ نقطهٔ غیرعادی منظم هریك از معادلات زیر است و دو جواب مستقل

سری فروبنیوس هریك را تعیین کنید:

الف) $4xy''+2y'+y=0$

ب) $2xy''+(3-x)y'-y=0$

ج) $2xy''+(x+1)y'+3y=0$

د) $2x^2y''+xy'-(x+1)y=0$

۵ـ وقتی $p=0$ ، معادلهٔ بسل (۲) به‌صورت

$$x^2y''+xy'+x^2y=0$$

درمی‌آید. نشان دهید که معادلهٔ شاخص آن تنها دارای یك ریشه است، و با استفاده از روش این بخش نتیجه بگیرید که

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$$

جواب سری فروبنیوس مربوطه است (تمرین ۲۵ـ۷ ب را نگاه کنید).

۶ـ معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+\frac{1}{x^2}y'-\frac{1}{x^3}y=0$$

را درنظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم از این معادله است.

ب) با استفاده از روش بخش ۱۶ واینکه $y_1=x$ یك جواب معادله است، جواب‌مستقل دوم y_2 آنرا بیابید.

ج) نشان‌دهید که جواب حاصل‌از (ب) یعنی y_2، را نمی‌توان به‌صورت سری‌فروبنیوس بیان کرد.

۷ـ معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+\frac{p}{x^b}y'+\frac{q}{x^c}y=0$$

را درنظرمی‌گیریم، که درآن p و q اعدادی حقیقی وغیرصفرند و b و c اعدادی‌صحیح ومثبت‌هستند. روشن است که چنانچه $b>1$ یا $c>2$ ، $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی‌نامنظم معادله است.

الف) اگر $b=2$ و $c=3$ ، نشان دهید که تنها برای یك مقدار m ممکن است یك جواب سری فروبنیوس وجود داشته باشد.

ب) به طور مشابه نشان دهید که m وقتی و تنها وقتی که $b=1$ و $c \leqslant 2$، در یک معادلهٔ درجهٔ دوم صدق می‌کند و بنابراین می‌توان امید داشت که مطابق با ریشه‌های این معادله، دو جواب سری فروبنیوس داشته باشیم. توجه کنید که اینها دقیقاً شرایطی هستند که $x=0$ را به عنوان نقطهٔ غیرعادی «ضعیف» یا منظم در مقابل نقطهٔ غیرعادی «قوی» یا نامنظم مشخص می‌کنند.

۸ـ نقطهٔ $x=0$ ، یک نقطهٔ غیرعادی نامنظم معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y''+(3x-1)y'+y=0$$

است. با گذاشتن (۳) در این معادله، نشان دهید که $m=0$ و «جواب» سری فروبنیوس عبارات از سری توانی

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

است، که تنها در $x=0$ همگراست. این نشان می‌دهد که سری فروبنیوس حتی اگر در چنین معادله‌ای صدق کند، لزوماً جوابی معتبر نخواهد بود.

۲۹. نقاط غیرعادی منظم (ادامهٔ مطلب)

کارما در بخش قبلی عمدتاً متوجه روشن کردن انگیزه و روشهای حل معادلات بود. اکنون به جنبهٔ نظری مسئلهٔ حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم در حالت کلی

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

در نزدیکی نقطهٔ غیرعادی منظم $x=0$ می‌پردازیم. مفاهیمی که در بالا بررسی شد ما را به محاسبهٔ صوری جوابهایی از معادلهٔ (۱) که به صورت فروبنیوسی زیر باشند هدایت می‌کند:

$$y=x^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \tag{2}$$

که در آن $a_0 \neq 0$ و m عددی است که باید تعیین شود. امید آن است که بتوان معتبر بودن هرجواب صوری حاصل از این روش را با برهان نشان داد و بدان اعتبار بخشید. کلیت این روش برای روشن کردن شرایطی که تحت آن معادلهٔ (۱) تنها دارای یک جواب به صورت (۲) است نیز به کار می‌آید[1]. بنا به دلایلی که قبلاً شرح داده شد، توجه خود را به فاصلهٔ $x>0$ محدود می‌سازیم. رفتار جوابها در فاصلهٔ $x<0$ را می‌توان با تغییر متغیر $t=-x$ و حل معادلهٔ حاصل برای $t>0$ مطالعه کرد.

فرض بر آن است که $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ در $x=0$ تحلیلی‌اند، و بنابراین دارای بسطهای سری توانی به صورت

---

۱. وقتی می‌گوییم که (۱) «فقط یک» جواب به صورت (۲) دارد، منظور آن است که جواب مستقل دیگری بدین شکل وجود ندارد.

$$xP(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{و} \quad x^2 Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \tag{3}$$

می‌باشند، که در فاصلهٔ $|x|<R$ برای مقدار مثبتی از R معتبرند. درست مانند مثال بخش قبل، باید مقادیر ممکن m را در (۲) بیابیم، و آنگاه برای هر مقدار قابل قبول m، ضرایب a_0، a_1، a_2، ... مربوطه را محاسبه کنیم. هرگاه (۲) را به صورت

$$y=x^m\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}$$

بنویسیم وازآن مشتق بگیریم، داریم

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m+n)x^{m+n-1}$$

و

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m+n)(m+n-1)x^{m+n-2}$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m+n)(m+n-1)x^n$$

حال عبارات $P(x)y'$ و $Q(x)y$ در (۱) را می‌توان به‌شکل زیرنوشت:

$$P(x)y'=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m+n)x^{m+n-1}\right]$$

$$=x^{m-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m+n)x^n\right]$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}a_k(m+k)\right]x^n$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}a_k(m+k)+p_0 a_n(m+n)\right]x^n$$

و

$$Q(x)y=\frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}\right)$$

$$=x^{m-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right)x^n$$

$$= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}a_k + q_0 a_n\right)x^n$$

اگر این عبارات به جای y'' ، $P(x)y'$ و $Q(x)y$ در (۱) گذاشته شوند وعامل مشترك x^{m-2} حذف شود، معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]\right\}x^k = 0$$

درمی‌آید، و از مساوی صفرقراردادن ضریب x^n ، فرمول بازگشتی زیر برای a_nها حاصل می‌شود :

$$a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}] = 0 \qquad (4)$$

با نوشتن این رابطه برای مقادیرپیاپی n ، روابط زیرحاصل می‌شود :

$$a_0[m(m-1)+mp_0+q_0] = 0$$
$$a_1[(m+1)m+(m+1)p_0+q_0]+a_0(mp_1+q_1) = 0$$
$$a_2[(m+2)(m+1)+(m+2)p_0+q_0]$$
$$+a_0(mp_2+q_2)+a_1[(m+1)p_1+q_1] = 0$$
$$\cdots$$
$$a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]$$
$$+a_0(mp_n+q_n)+\cdots+a_{n-1}[(m+n-1)p_1+q_1] = 0$$
$$\cdots\cdot$$

اگر بنویسیم $f(m) = m(m-1)+mp_0+q_0$ ، این معادلات به‌صورت زیردرمی‌آیند:

$$a_0 f(m) = 0$$
$$a_1 f(m+1)+a_0(mp_1+q_1) = 0$$
$$a_2 f(m+2)+a_0(mp_2+q_2)+a_1[(m+1)p_1+q_1] = 0$$
$$\cdots$$
$$a_n f(m+n)+a_0(mp_n+q_n)+\cdots+a_{n-1}[(m+n-1)p_1+q_1] = 0$$
$$\cdots\cdot$$

ازآنجاکه $a_0 \neq 0$ ، از معادلهٔ اول این‌معادلات نتیجه می گیریم که $f(m)=0$ ویا ، معادل با آن ،

$$m(m-1)+mp_0+q_0=0 \tag{5}$$

این‌همان معادلهٔ شاخص است، وریشه‌های m_1 و m_2 آن را ـ که مقادیر ممکن m درجواب مفروض(۲) هستند ـ توانهای معادلهٔ دیفرانسیل(۱) درنقطهٔ غیرعادی‌منظم $x=0$ می‌نامند. معادلاتی که به‌دنبال معادلهٔ اول آمده‌انـد، a_1 را برحسب a_0 ، a_2 را برحسب a_1 و a_0 و الی‌آخر به‌دست‌می‌دهند. بنا براین، برای هر انتخاب m ، a_n ها برحسب a_0 مشخص‌می‌شوند مگرآنکه برای یك عدد صحیح ومثبت n داشته باشیم $f(m+n)=0$ ، که درآن صورت، روند محاسبه قطع می‌شود. بنابراین ، اگر بـرای یك عدد صحیح $n \geqslant 1$ ، داشته بـاشیم $m_1=m_2+n$ ، گزینش $m=m_1$ جوابی صوری به دست می‌دهد ، ولی معمولاً انتخاب $m=m_2$ چنین نمی کند چراکه $f(m_2+n)=f(m_1)=0$. هرگاه $m_1=m_2$ ، بازهم تنها یك جواب صوری به‌دست می‌آوریم. در همهٔ حالات دیگر که درآنها m_1 و m_2 حقیقی باشند، این روش دو جواب صوری مستقل به‌دست خواهد داد. البته، این امکان وجود دارد که m_1 و m_2 دو عدد مختلط مزدوج باشند، ولی این حالت را بررسی نمی کنیم، زیرابرای بررسی‌کافی آن بیش از حد به آنالیز مختلط کشانده می‌شویم. اشکال مشخص دراینجا این است که اگر mها بتوانند مختلط باشند، درآن صورت a_nها نیزمختلط خواهند بود، وفرض ما برآن است که خواننده با سری‌های توانی با ضرایب مختلط آشنایی ندارد.

در قضیهٔ زیر، این مطالب به‌طور دقیقتر بیان شده‌اند.

قضیهٔ الف. فرض کنید که $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم معادلـهٔ دیفرانسیل (۱) باشد و بسطهای سری توانی به‌صورت (۳) برای توابع $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ در فاصلهٔ $|x|<R$ با $R>0$ معتبر باشند. فرض کنید که معادلهٔ شاخص (۵) دارای دو جواب حقیقی m_1 و m_2 ، با فرض $m_2 \leqslant m_1$ ، باشد. آنگاه معادلهٔ (۱) در فـاصلهٔ $0<x<R$ حداقل دارای یك جواب به صورت

$$y_1=x^{m_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0) \tag{6}$$

است، که در آن a_nها توسط فرمول بازگشتی (۴) با قراردادن m_1 به جای m برحسب a_0 به دست می‌آیند، و سری $\sum a_n x^n$ بـرای $|x|<R$ همگراست. بعلاوه ، هرگاه m_1-m_2 صفر یا یك عدد صحیح مثبت نباشد، در آن صورت معادلهٔ (۱) در همان فاصله دارای جواب مستقل دیگری به‌صورت

$$y_2=x^{m_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0) \tag{7}$$

است، که دراین حالت ضرایب a_n به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۴) برحسب a_0 به دست می‌آیند، مشروط

به اینکه m_2 را به‌جای m قراردهیم ، وباز هم سری $\sum a_n x^n$ درفاصلهٔ $|x|<R$ همگراست.

با توجه به‌آنچه قبلاً عمل کرده‌ایم، اثبات‌این قضیه‌بانشان دادن اینکه درهرمورد سری $\sum a_n x^n$ در فاصلهٔ $|x|<R$ همگراست کامل می‌شود. خوانندهٔ علاقمند به جزئیات این مبحث، می‌تواند این‌اثباتها را در پیوست الف بیابد. تأکیدمی‌کنیم که برای محاسبهٔضرایب دریك مسئلهٔ مشخص، مستقیماً قراردادن صورت‌کلی سری فروبنیوس(۲) در معادلهٔدیفرانسیل بسیار ساده‌تر ازکاربرد فرمول بازگشتی (۴) است. کاربرد اصلی این فرمول بازگشتی در اثبات ظریف همگرایی است‌که درپیوست الف‌آمده است.

متأسفانه قضیهٔ الف قادر به‌پاسخ گویی این‌سؤال نیست‌که چگونه می‌توان درحالتی که m_1-m_2 مساوی صفر یا یك عدد صحیح و مثبت باشد، جواب دوم را یافت. برای اینکه تصوری در مورد حالات ممکن داشته باشیم، سه حالت زیررا مشخص می کنیم.

حالت الف. هرگاه $m_1=m_2$ ، جواب سری فروبنیوس دومی نمی‌تواند موجود باشد.

دو حالت دیگر ، که در هر دوی آنها m_1-m_2 یك عدد صحیح و مثبت است، را می‌توان با قراردادن $m=m_2$ در فرمول بازگشتی (۴) ونوشتن آن به صورت

$$a_n f(m_2+n)=-a_0(m_2 p_n+q_n)-\cdots$$
$$-a_{n-1}[(m_2+n-1)p_1+q_1] \qquad (8)$$

بآسانی درك‌كرد. همچنانکه می‌دانیم ، اشکال محاسبهٔa_nها در این است که برای مقدار صحیح و مثبتی از n ، $f(m_2+n)$ صفرمی‌شود. دو حالت بعد به این مسئله مربوطاند.

حالت ب. اگر وقتی $f(m_2+n)=0$، سمت راست رابطهٔ (۸) مخالف صفرباشد، هیچ راهی برای‌ادامهٔ محاسبهٔ ضرایب‌وجود ندارد وجواب سری فروبنیوس دومی‌نمی‌تواند وجود داشته باشد.

حالت ج. اگر وقتی $f(m_2+n)=0$ ، سمت راست (۸) صفر شود، آنگاه a_n محدودیتی‌نداردوهرمقدار دلخواهی‌را می‌تواندانختیارکند. بخصوص، می‌توانیمa_n رابرابر صفر بگیریم و بدون هیچ اشکال دیگری به‌محاسبهٔ بقیهٔ ضرایب ادامه دهیم. بنابراین، دراین حالت یك جواب سری فروبنیوس دیگرموجوداست.

مسائل زیرنشان می‌دهندکه هریك از این سه حالت واقعاً اتفاق می‌افتند.

با محاسبات زیر می‌توانیم شکل جواب دوم را وقتی m_1-m_2 صفریا یك عدد صحیح و مثبت باشد، تشخیص دهیم. مطلب را با تعریف یك عدد صحیح مثبت k به‌صورت $k=m_1-m_2+1$ شروع می کنیم. معادلهٔ شاخص (۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$(m-m_1)(m-m_2)=m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2=0$$

لذا از مساوی قراردادن ضرایب m خواهیم داشت ، $p_0-1=-(m_1+m_2)$ یا $m_2=1-p_0-m_1$ ، وداریم $k=2m_1+p_0$. با استفاده از روش بخش۱۶، می‌توانیم جواب‌دوم y_2 معادله‌را ازجواب معلوم $y_1=x^{m_1}(a_0+a_1x+\dots)$، بانوشتن $y_2=vy_1$ به دست‌آوریم، که درآن

$$v'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\frac{1}{x^{2m_1}(a_0+a_1x+\cdots)^2}e^{-\int\left(\frac{p_0}{x}+p_1+\cdots\right)dx}$$

$$=\frac{1}{x^{2m_1}(a_0+a_1x+\cdots)^2}e^{(-p_0\log x-p_1x-\cdots)}$$

$$=\frac{1}{x^k(a_0+a_1x+\cdots)^2}e^{(-p_1x-\cdots)}=\frac{1}{x^k}g(x)$$

روشن است که تابع $g(x)$ که توسط رابطهٔ اخیر تعریف می‌شود در $x=0$ تحلیلی است و درآن $g(0)=1/a_0^2$ ، بنابراین در فاصله‌ای حول مبدأ خواهیم داشت

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots,\ b_0\neq 0 \qquad (9)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$v'=b_0x^{-k}+b_1x^{-k+1}+\cdots+b_{k-1}x^{-1}+b_k+\cdots$$

بنابراین

$$v=\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\frac{b_1x^{-k+2}}{-k+2}+\cdots+b_{k-1}\log x+b_kx+\cdots$$

و

$$y_2=y_1v=y_1\left(\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\cdots+b_{k-1}\log x+b_kx+\cdots\right)$$

$$=b_{k-1}y_1\log x+x^{m_1}(a_0+a_1x+\cdots)\left(\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\cdots\right)$$

اگر از عامل x^{-k+1} در سری آخر این رابطه فاکتور بگیریم، و $m_2=m_1-k+1$ را به‌کار بریم و دو سری باقی مانده را درهم ضرب کنیم، آنگاه جواب دوم به صورت زیر به دست می‌آید

$$y_2=b_{k-1}y_1\log x+x^{m_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \qquad (10)$$

فرمول (۱۰) به عنوان یك ابزار عملی ارزش چندانی ندارد ، ولی چند چیز را روشن می‌کند. اولاً، اگر توانهای m_1 و m_2 برابر باشند، آنگاه $k=1$ و $b_{k-1}=b_0\neq 0$ ؛ بنابراین دراین حالت (که حالت الف در بالاست) جملهٔ حاوی $\log x$ مشخصاً در دومین جواب (۱۰) ظاهر می‌شود. ولی، چنانچه $m_1-m_2=k-1$ یك عدد صحیح مثبت باشد ، در آن صورت بعضی مواقع $b_{k-1}\neq 0$ و جملهٔ لگاریتمی وجوددارد (حالت ب)، و گاهی نیز

$b_{k-1}=0$ و جمله لگاریتمی وجود ندارد (حالت ج). اشکال عملی این‌است که نمی‌توانیم b_{k-1} را بآسانی محاسبه کنیم، چرا که هیچ وسیلهٔ مستقیمی برای محاسبهٔ ضرایب (۹) موجود نیست. در هرحال، حداقل می‌دانیم که در حالات الف و ب، وقتی $b_{k-1}\neq 0$ و روش فروبنیوس تنها تاحدی نتیجه بخش است، شکل عمومی جواب دوم چنین است

$$y_2=y_1\log x+x^{m_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{۱۱}$$

که درآن c_n ها مقادیر ثابت مجهولی هستند که آنها را می‌توان باقراردادن مستقیم (۱۱) در معادلهٔ دیفرانسیل محاسبه کرد. دقت کنید که این عبارت بافرمول ۲۸-(۱۰) مشابه ولی قدری پیچیده‌تر از آن است.

تمرین

۱ــ معادلهٔ

$$x^2y''-3xy'+(4x+4)y=0$$

فقط دارای یك جواب سری فروبنیوس است. آنرا بیابید.

۲ــ معادلهٔ

$$4x^2y''-8x^2y'+(4x^2+1)y=0$$

تنها یك جواب سری فروبنیوس دارد. جواب عمومی معادله را بیابید.

۳ــ درهریك از معادلات زیر، دو جواب سری فروبنیوس مستقل به‌دست آورید:

الف) $xy''+2y'+xy=0$

ب) $x^2y''-x^2y'+(x^2-2)y=0$

ج) $xy''-y'+4x^3y=0$

۴ــ معادلهٔ دیفرانسیل بسل از مرتبهٔ $p=1$ چنین است:

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$$

نشان‌دهید که $m_1-m_2=2$ ومعادله تنها دارای یك‌جواب‌سری فروبنیوس است. سپس این جواب را بیابید.

۵ــ معادلهٔ دیفرانسیل بسل از مرتبهٔ $p=1/2$ به شکل

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$$

است. نشان دهید که $m_1-m_2=1$، ولی با این وجود این معادلـه دارای دو جواب سری فروبنیوس مستقل‌است، وآنها را بیابید.

۶ـ تنها جواب سری فروبنیوس معادلهٔ بسل از مرتبهٔ $p=0$ در تمرین ۲۸ـ۵ داده شده است. با انتخاب این‌جواب به‌عنوان y_1 وجایگزینی فرمول(۱۱) در معادلهٔدیفرانسیل، جواب مستقل دوم معادلهٔ دیفرانسیل را به‌صورت زیر به‌دست‌آورید:

$$y_2=y_1\log x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{2n}$$

۳۰. معادلهٔ فوق هندسی گاوس

این معادلهٔ دیفرانسیل مشهور چنین است

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0 \qquad (1)$$

در اینجا a ، b ، و c ثابت‌اند. ممکن است ضرایب معادلهٔ (۱) نسبتاً عجیب به نظرآیند، ولی درخواهیم یافت که ضرایب فوق با مواردگوناگون کاربرد جوابهای آن‌کاملا سازگاری دارند. بهترین روش درك این مطلب آن‌است که معادله را حل کنیم و ببینیم چه پیش می‌آید.

داریم

$$P(x)=\frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \quad \text{و} \quad Q(x)=\frac{-ab}{x(1-x)}$$

بنابراین $x=0$ و $x=1$ تنها نقاط غیرعادی واقع برمحور x ها هستند. بعلاوه

$$xP(x)=\frac{c-(a+b+1)x}{1-x}=[c-(a+b+1)x](1+x+x^2+\cdots)$$
$$=c+[c-(a+b+1)]x+\cdots$$

و

$$x^2Q(x)=\frac{-abx}{1-x}=-abx(1+x+x^2+\cdots)$$
$$=-abx-abx^2-\cdots$$

بنابراین $x=0$ (و همین طور $x=1$) یك نقطهٔ غیرعادی منظم است. این بسطها نشان می‌دهندکه $p_0=c$ و $q_0=0$. بدین ترتیب، معادلهٔ شاخص عبارت‌است از:

$$m(m-1)+mc=0 \quad \text{یا} \quad m[m-(1-c)]=0$$

و توانها $m_1=0$ و $m_2=1-c$ هستند. اگر $1-c$ یك عدد صحیح مثبت نباشد ، یعنی، اگر c صفر یا یك عدد صحیح منفی نباشد، آنگاه قضیهٔ ۲۹ـالف وجود یك جواب (۱)را به‌صورت

$$y=x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad (2)$$

تضمین می‌کند، که در آن a_0 ثابتی غیرصفر است. با جایگذاری این سری در (۱) ومساوی صفر قراردادن ضرایب x^n ، فرمول بازگشتی زیر برای a_nها به‌دست می‌آید:

$$a_{n+1}=\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}a_n \qquad (۳)$$

اکنون a_0 را برابریك می‌گیریم و a_nها را پیاپی محاسبه می‌کنیم

$$a_1=\frac{ab}{1\times c}\ ,\ a_2=\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\times 2c(c+1)}$$

$$a_3=\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\times 2\times 3c(c+1)(c+2)}, \ldots$$

با این ضرایب، (۲) به صورت

$$y=1+\frac{ab}{1\times c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\times 2c(c+1)}x^2$$

$$+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\times 2\times 3c(c+1)(c+2)}x^3+\ldots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\ldots(c+n-1)}x^n \qquad (۴)$$

درمی‌آید که به سری فوق هندسی مشهور است، و با علامت $F(a , b , c , x)$ نمایش‌داده می‌شود. این سری بدان دلیل‌چنین خوانده می‌شود که تعمیمی از سری هندسی معمولی‌است، به این صورت که‌اگر $a=1$ و $c=b$ ، خواهیم داشت

$$F(1 , b , b , x)=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

اگر a یا b صفر یا یك عدد صحیح منفی باشد، سری(۴) درجایی قطع و به‌یك چندجمله‌ای تبدیـل می‌شود؛ درغیراین صورت، آزمون نسبت نشان می‌دهد کـه برای $|x|<1$ سری همگراست، زیرا از (۳) داریم

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\right||x|\to|x| \quad \text{وقتی} \quad n\to\infty$$

این رفتار همگرایی با توجه به این که نزدیکترین نقطهٔ غیرعادی به مبدأ $x=1$ است، از قبل نیز قابل پیش‌بینی بود. به همین ترتیب هنگامی که c صفریا یك عدد صحیح منفی‌نباشد، $F(a , b , c , x)$ درفاصلهٔ $|x|<1$ تابعی‌تحلیلی‌است، وتابع فوق‌هندسی نامیده می‌شود. این‌ساده‌ترین جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل فوق‌هندسی است، تابع فوق هندسی‌دارای خواص بسیار زیادی است، که واضح‌ترین آنها این‌است که تبدیل a به b تغییری در تابع

به وجود نمی‌آورد: $F(a, b, c, x)=F(b, a, c, x)$.[1]

هرگاه $c-1$ صفر یا یك عدد صحیح منفی نباشد (یعنی c عددی صحیح و مثبت نباشد) آنگاه قضیهٔ ۲۹ـالف همچنین بیان می‌داردکه جواب مستقل دیگری از (۱) با توان $m_2=1-c$ در نزدیکی $x=0$ موجود است. این جواب را می‌توان باجایگزینی سری

$$y=x^{1-c}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$$

در (۱) و محاسبهٔ ضرایب، مستقیماً به‌دست آورد. ولی تغییرمتغیر وابستهٔ y به z در (۱) به وسیلهٔ رابطهٔ

$$y=x^{1-c}z$$

کار آمدتر است. هنگامی که محاسبات مربوطه انجام گیرد ـ خواننده باید خود این کاررا انجام دهد ـ معادلهٔ (۱) به‌صورت معادلهٔ فوق هندسی زیر:

$$x(1-x)z''+[(2-c)-([a-c+1]+[b-c+1]+1)x]z' \\ -(a-c+1)(b-c+1)z=0 \qquad (5)$$

درمی‌آیدکه به‌جای‌ضرایب a ، b ، و c بترتیب $a-c+1$، $b-c+1$ و $2-c$ آمده‌اند. از قبل می‌دانیم که (۵) در نزدیکی مبدأ دارای جواب سری توانی

$$z=F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

است، بنابراین، جواب مطلوب دوم

$$y=x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

است. از این‌رو، وقتی c عددی صحیح نباشد،

$$y=c_1F(a, b, c, x)+c_2x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \qquad (6)$$

را به عنوان جواب عمومی معادلهٔ فوق هندسی در نزدیکی نقطهٔ غیرعادی $x=0$ به دست می‌آوریم.

عموماً این جواب فقط در نزدیکی مبدأ معتبر است. اکنون‌معادلهٔ (۱) را درنزدیکی نقطهٔ غیرعادی $x=1$ حل می‌کنیم. ساده‌ترین روش آن‌است که این جواب را به‌کمك‌جوابی که قبلاً یافته‌ایم، با واردکردن‌متغیرمستقل جدید $t=1-x$ ، به دست‌آوریم. دراین تبدیل، نقطهٔ $x=1$ با $t=0$ تطبیق می‌یابد ومعادلهٔ (۱) به

$$t(1-t)y''+[(a+b-c+1)-(a+b+1)t]y'-aby=0$$

تبدیل می‌شود، که درآن علامت پریم به معنی مشتق نسبت به t است.چون این یك معادلـهٔ

---

۱. خلاصه‌ای از برخی خواص دیگر آن‌را می‌توان درکتاب زیریافت:
A. Erdélyi (ed.), "Higher Transcendental Functions," vol.I, pp.56–119, McGraw-Hill, New York, 1953.

فوق هندسی است، جواب عمومی آن را در نزدیکی $t=0$ می‌توان با گذاشتن t به‌جای x و $a+b-c+1$ به‌جای c مستقیماً از فرمول (۶) نوشت؛ و وقتی به‌جای t، $1-x$ قرار داده شود، مشاهده می‌کنیم که جواب‌عمومی (۱) درنزدیکی $x=1$ به‌صورت زیر است

$$y=c_1F(a, b, a+b-c+1, 1-x)$$
$$+c_2(1-x)^{c-a-b}F(c-b, c-a, c-a-b+1, 1-x) \quad (7)$$

دراین حالت لازم است فرض کنیم که $c-a-b$ عدد صحیح نیست.

فرمولهای (۶) و (۷) نشان می‌دهند که سازگاری مقادیر ثابت در معادلهٔ (۱) این امکان‌را ایجاد می‌کند که جواب عمومی این‌معادله را درنزدیکی هریك ازنقاط منفردش تنها برحسب تابع F بیان کنیم. خیلی بیش ازاینها نیزمی‌توان گفت، چراکه این مفاهیم درگروه وسیعی‌ازمعادلات دیفرانسیل کاربرد دارند. نکتهٔ کلیدی، توجه به‌این‌جنبه‌های کلی معادلهٔ فوق هندسی است که: ضرایب y'' ، y' ، و y چند جمله‌ایهای از درجهٔ ۲ ، ۱ ، و ۰ هستند ، و همچنین اولین چندجمله‌ای ازاین چندجمله‌ایها دارای صفرهای حقیقی متمایزاست. هرمعادلهٔ دیفرانسیل با این مشخصات را می‌توان بایك تغییرخطی متغیر مستقل، به معادلهٔ فوق‌هندسی تبدیل کرد، و بنابراین می‌توان‌آن را درنزدیکی نقاط غیرعادیش برحسب تابع فوق‌هندسی حل کرد .

برای مشخص‌تر کردن این‌نکات، معادلهٔ عمومی ازاین نوع را باختصار مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$(x-A)(x-B)y''+(C+Dx)y'+Ey=0 \quad (8)$$

که درآن $A\neq B$. اگرمتغیر مستقل را به‌وسیلهٔ

$$t=\frac{x-A}{B-A}$$

از x به t تغییردهیم، آنگاه $x=A$ با $t=0$ و $x=B$ با $t=1$ مطابقت‌دارند. بامحاسبه‌ای مختصر، معادلهٔ (۸) به شکل

$$t(1-t)y''+(F+Gt)y'+Hy=0$$

درمی‌آیدکه‌درآن F ، G ، و H ترکیبهایی‌ازمقادیرثابت در(۸) هستند وعلامت‌پریم به‌معنی مشتق‌نسبت به t است. این یك معادلهٔ فوق هندسی است که درآن a ، b ، و c توسط روابط

$$F=c \qquad , G=-(a+b+1) , \qquad H=-ab$$

تعریف می‌شوند، و بنابراین می‌توان آن‌را در نزدیکی نقاط $t=0$ و $t=1$ برحسب تابع فوق هندسی حل‌کرد. این به‌معنای این است که معادلهٔ (۸) را می‌توان برحسب همان تابع درنزدیکی نقاط $x=A$ و $x=B$ حل کرد.

مطالب بالا جامعیت متنوع تابع فوق هندسی $F(a, b, c, x)$ را در زمینهٔ‌معادلات دیفرانسیل نشان می‌دهند. همچنین (درتمرین ۱) خواهیم دید که انعطاف‌پذیری سه ثابت

a، b، و c، این امکان را فراهم می‌آورد که تابع فوق هندسی اغلب توابع آشنای آنالیز مقدماتی را به‌عنوان حالات خاص در بر گیرد. این تابع برای اویلر که تعدادی از خواص آن را کشف کرد شناخته شده بود؛ ولی برای اولین بار گاوس آن را در زمینهٔ معادلهٔ فوق‌هندسی به نحوی منظم بررسی کرد، وهم او بود که در این ارتباط، اولین بررسی قانع‌کننده از همگرایی یك سری نامتناهی را ارائه کرد. کار گاوس از اهمیت تاریخی شایانی برخوردار بود، زیرا راهگشای تحولات دوربرد در بسیاری از رشته‌های آنالیز ـ نه‌تنها درسری‌های نامتناهی بلکه همچنین درنظریات عمومی‌معادلات‌دیفرانسیل خطی‌وتوابع مختلط ـ بوده‌است. تابع فوق هندسی، به علت اثر وحدت‌بخش نیرومندش، اهمیت خود را در ریاضیات جدید همچنان حفظ کرده است، زیرا بسیاری از توابع خاص مهم در آنالیز پیشرفته نیز به آن مربوط‌اند[1].

تمرین

۱ـ درستی روابط زیر را با بررسی بسطهای سری توابع طرف چپ تحقیق کنید:

الف) $$(۱+x)^p=F(-p ، b ، b ، -x)$$

ب) $$\log(۱+x)=xF(۱ ، ۱ ، ۲ ، -x)$$

ج) $$\sin^{-۱}x=xF\left(\frac{۱}{۲} ، \frac{۱}{۲} ، \frac{۳}{۲} ، x^۲\right)$$

د) $$\tan^{-۱}x=xF\left(\frac{۱}{۲} ، ۱ ، \frac{۳}{۲} ، -x^۲\right)$$

روابط زیر نیزصحیح‌اند:

ه) $$e^x=\lim_{b\to\infty}F\left(a ، b ، a ، \frac{x}{b}\right)$$

و) $$\sin x=x\left[\lim_{a\to\infty}F\left(a ، a ، \frac{۳}{۲} ، \frac{-x^۲}{۴a^۲}\right)\right]$$

ز) $$\cos x=\lim_{a\to\infty}F\left(a ، a ، \frac{۱}{۲} ، \frac{-x^۲}{۴a^۲}\right)$$

بدون توجیه فرایندهای حدی به‌کار رفته، ازصحت تساویهای فوق، اطمینان حاصل کنید.

۲ـ جواب عمومی هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را درنزدیکی نقطهٔ غیرعادی ذکرشده به دست آورید:

الف) $$x(۱-x)y''+\left(\frac{۳}{۲}-۲x\right)y'+۲y=۰ ، \qquad x=۰$$

---

۱. شرح مختصری راجع به‌گاوس وکار علمی او در پیوست ج ارائه شده است.

ب) $(2x^2+2x)y''+(1+5x)y'+y=0 \text{ ، } x=0$

ج) $(x^2-1)y''+(5x+4)y'+4y=0 \text{ ، } x=-1$

د) $(x^2-x-6)y''+(5+3x)y'+y=0 \text{ ، } x=3$

۳ـ در تمرین ۲۷ـ۶ معادلهٔ چبیشف به‌صورت

$$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0$$

را، که درآن p ثابتی غیرمنفی‌است، بررسی کردیم. به‌جای x، عبارت $t=(1-x)/2$ را بگذارید و آن‌را به‌یك معادلهٔ فوق هندسی تبدیل کنید، ونشان دهیدکه جواب‌عمومی آن درنزدیکی $x=1$ عبارت است از

$$y=c_1F\left(p \text{ ، } -p \text{ ، } \frac{1}{2} \text{ ، } \frac{1-x}{2}\right)$$
$$+c_2\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(p+\frac{1}{2} \text{ ، } -p+\frac{1}{2} \text{ ، } \frac{3}{2} \text{ ، } \frac{1-x}{2}\right)$$

۴ـ معادلهٔ دیفرانسیل

$$x(1-x)y''+[p-(p+2)x]y'-py=0$$

راکه درآن p عدد ثابتی است، در نظربگیرید.

الف) درحالتی‌که p یك عـــدد صحیح نباشد، جواب عمومی را در نـزدیکی $x=0$ برحسب توابع فوق‌هندسی بیابید.

ب) جواب عمومی راکه در قسمت (الف) یافته‌اید برحسب توابع مقدماتی بنویسید.

ج) وقتی $p=1$ ، معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت

$$x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0$$

درمی‌آید، و جواب (ب)،دیگر جواب عمومی معادله نخواهد بود. با روش بخش ۱۶ جواب عمومی را دراین‌حالت بیابید.

۵ـ برخی از معادلات دیفرانسیل، با وجودی‌که ظاهرشان نشان نمی‌دهد، از نوع معادلات فوق هندسی هستند. به‌کمك تغییر متغیر مستقل $t=e^x$ ، جواب عمومی معادلهٔ

$$(1-e^x)y''+\frac{1}{2}y'+e^xy=0$$

را در نزدیکی نقطهٔ غیرعادی $x=0$ بیابید.

۶ـ الف) نشان‌دهید $F'(a \text{ ، } b \text{ ، } c \text{ ، } x)=\dfrac{ab}{c}F(a+1 \text{ ، } b+1 \text{ ، } c+1 \text{ ، } x)$.

ب) در تمرین ۳، فـرمول مشتق گیری در (الف) را به‌کار برید و نشان دهیدکـه تنها جوابهایی‌از معادلهٔ چبیشف که مشتقهای آنهـا در نزدیکی $x=1$ کراندارند به صورت

$(\text{۲}/(\text{۱}-x)/\text{۲}$ ، $y=c_\text{۱}F(p$ ، $-p$ ، $\text{۱}/\text{۲}$ ، هستند. نتیجه بگیرید که تنها جوابهای چند جمله‌ای معادلهٔ چبیشف، مضارب ثابت $(\text{۲}/(x-\text{۱})$ ، $\text{۱}/\text{۲}$ ، $-n$ ، $F(n$ هستند، که در آن n یك عدد صحیح غیر منفی است.

چندجمله‌ای چبیشف از درجهٔ n با $T_n(x)$ نمایش داده می‌شود و به وسیلهٔ رابطهٔ $T_n(x)=F(n, -n, \text{۱}/\text{۲}, (\text{۱}-x)/\text{۲})$ تعریف می‌شود[1]. در پیوست د کاربرد جالبی از این چند جمله‌ایها درنظریهٔ تقریب مورد بحث واقع خواهد شد.

۳۱. نقطه در بینهایت

در فیزیك و ریاضیات محض، اغلب بررسی جوابهای معادلهٔ

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=\text{۰} \qquad (\text{۱})$$

برای مقادیر بزرگی از متغیر مستقل، مطلوب است. برای نمونه، هرگاه متغیر زمان باشد، ممکن است بخواهیم بدانیم که رفتار دستگاه فیزیکی که توسط (۱) توصیف می‌شود درآیندهٔ دور، یعنی هنگامی که اغتشاشات گذرا تحلیل رفته‌اند، چگونه است.

برای این مقصود گسترده‌تر می‌توانیم آنچه را که قبلاً گفته‌ایم برای مطالعهٔ جوابها درنزدیکی نقطهٔ بینهایت تنظیم کنیم. دستورالعمل این کار کاملاً ساده است، زیرا اگر متغیر مستقل را از x به

$$t=\frac{\text{۱}}{x} \qquad (\text{۲})$$

تغییر دهیم، آنگاه مقادیر بزرگ x با مقادیر کوچك t متناظر خواهند بود. درنتیجه، هرگاه (۲) را در (۱) اعمال کنیم، و معادلهٔ تبدیل یافته را درنزدیکی $t=\text{۰}$ حل کنیم، و آنگاه دراین جوابها به‌جای t، $\text{۱}/x$ بگذاریم، جوابهایی از (۱) راخواهیم یافت که برای مقادیر بزرگ x معتبرند. برای انجام این کار، به فرمولهای زیر نیازمندیم:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(-\frac{\text{۱}}{x^\text{۲}}\right)=-t^\text{۲}\frac{dy}{dt} \qquad (\text{۳})$$

و

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(-t^\text{۲}\frac{d^\text{۲}y}{dt^\text{۲}}-\text{۲}t\,\frac{dy}{dt}\right)(-t^\text{۲})\cdot \qquad (\text{۴})$$

اگر این عبارات در (۱) قرار داده شوند، وعلامت پریم را برای مشتق نسبت به t به‌کار بریم، آنگاه (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

---

۱. از علامت $T_n(x)$ به‌این دلیل استفاده می‌شودکه نام چبیشف (Chebyshev) قبلاً به‌صورت Tchebychev ، Tchebycheff ، یا Tschebycheff نوشته می‌شد.

$$y''+\left[\frac{۲}{t}-\frac{P(۱/t)}{t^۲}\right]y'+\frac{Q(۱/t)}{t^۴}y=۰ \qquad (۵)$$

نقطهٔ $x=\infty$ را نقطهٔ عادی، نقطهٔ غیر عادی منظم با توانهای $m_۱$ و $m_۲$، ویانقطهٔغیرعادی نامنظم معادله‌گوییم، هر گاه نقطهٔ $t=۰$ دارای مشخصهٔ متناظر برای معادلهٔ تبدیل یافتهٔ (۵) باشد.

به‌عنوان یك نمونهٔ ساده، معادلهٔ دیفرانسیل اویلر را درنظر می گیریم

$$y''+\frac{۴}{x}y'+\frac{۲}{x^۲}y=۰ \qquad (۶)$$

مقایسهٔ (۶) و (۵) نشان می‌دهد که معادلهٔ تبدیل یافته به‌صورت

$$y''-\frac{۲}{t}y'+\frac{۲}{t^۲}y=۰ \qquad (۷)$$

است. روشن است که $t=۰$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم معادله (۷) است، و معادله شاخص‌آن

$$m(m-۱)-۲m+۲=۰$$

وتوانها $m_۱=۲$ و $m_۲=۱$ هستند. این بدان معناست که $x=\infty$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم معادلهٔ (۶) با توانهای ۲ و ۱ است.

مثال عمدهٔ ما معادلهٔ دیفرانسیل فوق هندسی زیر است:

$$x(۱-x)y''+[c-(a+b+۱)x]y'-aby=۰ \qquad (۸)$$

می‌دانیم که (۸) دارای دونقطهٔ غیرعادی منظم متناهی است: نقطهٔ $x=۰$ با توانهای ۰ و $c-۱$؛ ونقطهٔ $x=۱$ باتوانهای ۰ و $c-a-b$. برای تعیین ماهیت نقطهٔ $x=\infty$، (۳)و (۴) را مستقیماً در (۸) می گذاریم. پس‌از مختصر تغییری درترتیب جملات، معادلهٔ تبدیل یافته را چنین می‌یابیم

$$y''+\left[\frac{(۱-a-b)-(۲-c)t}{t(۱-t)}\right]y'+\frac{ab}{t^۲(۱-t)}y=۰ \qquad (۹)$$

دراین معادله $t=۰$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم با معادلهٔ شاخص

$$m(m-۱)+(۱-a-b)m+ab=۰$$

یا

$$(m-a)(m-b)=۰$$

است. این نشان می‌دهدکه توانهای معادلهٔ (۹) در $t=۰$ برابر با a و b هستند، پس $x=\infty$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم معادلهٔ (۸) با توانهای a و b است. نتیجه می گیریم که معادلهٔ فوق هندسی (۸) دقیقاً دارای سه نقطهٔ غیرعادی منظم، درنقاط ۰، ۱، و ∞ است که توانهای مربوطه عبارت‌اند از ۰ و $c-۱$، ۰ و $c-a-b$، و a و b. درپیوسته

نشان می‌دهیم که با مشخص کردن این سه نقطهٔ غیرعادی منظم همراه با این‌شرط کـه حداقل یکی ازاین توانها درهریك ازنقاط $x = ۰$ و $x = ۱$ صفر باشد، شکل معادلهٔ فـوق هندسی به‌طورکامل تعیین می‌شود.

معادلهٔ دیفرانسیل کلاسیك دیگری که از اهمیت قابل توجهی برخوردار است معادلهٔ فوق هندسی متلاقی است

$$xy'' + (c - x)y' - ay = ۰ \qquad (۱۰)$$

برای درك اینکه‌این معادله ازکجا می‌آید وچرا این‌نام را برخود دارد، معادلهٔ فوق‌هندسی معمولی(۸) را بصورت زیر درنظر می‌گیریم

$$s(۱ - s)\frac{d^۲y}{ds^۲} + [c - (a + b + ۱)s]\frac{dy}{ds} - aby = ۰ \qquad (۱۱)$$

اگر متغیر مستقل را از s به $x = bs$ تغییر دهیم، آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{ds} = b\frac{dy}{dx} \quad \text{و} \quad \frac{d^۲y}{ds^۲} = b^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}$$

و (۱۱) به‌صورت

$$x\left(۱ - \frac{x}{b}\right)y'' + \left[(c - x) - \frac{(a + ۱)x}{b}\right]y' - ay = ۰ \qquad (۱۲)$$

تبدیل می‌شود، که علامتهای پریم نشان‌دهندهٔ مشتق نسبت به x هستند. نقاط $x = ۰$ ، $x = b$، و $x = \infty$ نقاط غیرعادی منظم معادلهٔ (۱۲) هستند؛ معادلـهٔ جدید از این نظر با معادلـهٔ (۱۱) متفاوت است که دراینجا نقطهٔ $x = b$ متحرك است. هـرگاه b را بـه ∞ میل دهیم، آنگاه معادلهٔ (۱۲) به (۱۰) تبدیل می‌شود. نقطهٔ غیرعادی در b آشکارا برنقطهٔ غیرعادی در ∞ منطبق می‌شود، و بسادگی دیده می‌شود کـه این تلاقی دونقطهٔ غیرعـادی منظم در ∞، یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم درآنجا ایجاد می‌کند (تمرین۳).

تمرین

۱ــ با استفاده از (۳) و (۴) نوع نقطهٔ $x = \infty$ را برای معادلات زیر تعیین کنید:

الف) معادلهٔ لژاندر $(۱ - x^۲)y'' - ۲xy' + p(p + ۱)y = ۰$

ب) معادلهٔ بسل $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - p^۲)y = ۰$

۲ــ نشان‌دهید که تغییر متغیر وابسته‌ای که به‌وسیلهٔ $y = t^a w$ تعریف‌می‌شود، معادلهٔ (۹) را به معادلهٔ فوق هندسی

$$t(۱ - t)w'' + \{(۱ + a - b) - [a + (۱ + a - c) + ۱]t\}w'$$
$$- a(۱ + a - c)w = ۰$$

تبدیل می‌کند. اگر a و b برابر نباشند و تفاضل آنهاهم یك عددصحیح نباشد، نتیجه بگیرید که برای مقادیر بزرگ x، معادلهٔ فوق هندسی (۸) دارای جوابهای مستقل زیر است:

$$y_1 = \frac{1}{x^a} F\left(a, 1+a-c, 1+a-b, \frac{1}{x}\right)$$

و

$$y_2 = \frac{1}{x^b} F\left(b, 1+b-c, 1+b-a, \frac{1}{x}\right)$$

۳ـ تحقیق کنید که $x=\infty$ یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم معادلهٔ فوق هندسی متلاقی (۱۰) است.

۴ـ تحقیق کنید که $x=0$ برای معادلهٔ فوق هندسی متلاقی (۱۰) یك نقطهٔ غیرعادی منظم با توانهای ۰ و $c-1$ است. درحالتی که c صفر یا یك‌عدد صحیح منفی نباشد، نشان‌دهید که‌جواب سری فروبنیوس مربوط به‌توان صفر عبارت‌است از

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!\,c(c+1)\cdots(c+n-1)} x^n$$

تابعی که به‌وسیلهٔ سری بالا تعریف می‌شود تابع فوق هندسی متلاقی نامیده می‌شود، و معمولاً با علامت $F(a, c, x)$ نمایش داده می‌شود.

۵ـ معادلهٔ لاگر به‌صورت

$$xy'' + (1-x)y' + py = 0$$

است که درآن p یك مقدار ثابت است.[1] از تمرین ۴ استفاده کنید ونشان‌دهید که تنها جوابهایی از معادله که درنزدیکی مبدأ کراندارند، مضارب ثابت $F(-p, 1, x)$ هستند، ونیز اینکه هرگاه p یك عدد صحیح غیرمنفی باشد، این جوابها به‌صورت چندجمله‌ای‌اند. توابع $L_n(x) = F(-n, 1, x)$ را، که درآنها $n = 0, 1, 2, \ldots$ چندجمله‌ایهای لاگرمی‌نامند؛ این‌توابع دارای موارد استعمال‌مهمی درمکانیك کوانتومی اتم هیدروژن هستند.

---

۱. ادمون لاگر (Edmond Laguerre) (۱۸۳۴ـ۱۸۸۶) استاد «کولژ دوفرانس» در پاریس بود، و عمدتاً درهندسه و نظریهٔ معادلات کارکرد. وی اولین کسی بود که تذکر داد می‌توان به بیش از یك طریق یك تابع متریك «معقول» برروی صفحهٔ مختصات هندسهٔ تحلیلی وضع کرد.

پیوست الف. دو اثبات همگرایی

تکمیل اثبات قضیهٔ ۲۷-الف. فرض بر آن است که سری‌های

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{و} \quad Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \tag{۱}$$

برای $|x|<R$ همگرا هستند و $R>0$. باید نشان دهیم چنانچه a_0 و a_1 دلخواه باشند و برای $n\geqslant 0$، a_{n+2} به‌وسیلهٔ رابطهٔ بازگشتی

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=-\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1}+q_{n-k}a_k] \tag{۲}$$

تعریف شود، آنگاه سری

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{۳}$$

حداقل درهمان فاصله همگراست. فرض کنید r عددی مثبت و کوچکتراز R است. ازآنجا که سری (۱) در $x=r$ همگراست، وجملات سری همگرا به‌صفر میل می‌کنند و درنتیجه کراندارند، عدد مثبتی مانند M وجود دارد به‌قسمی که برای همهٔ مقادیر n داریم

$$|p_n|r^n\leqslant M \quad \text{و} \quad |q_n|r^n\leqslant M$$

با اعمال این نامساویها در (۲)، خواهیم داشت

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}|\leqslant\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k$$

$$\leqslant\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k+M|a_{n+1}|r$$

که درآن، جملهٔ $M|a_{n+1}|r$ را به‌این دلیل درج کرده‌ایم که در زیر بدان‌نیاز خواهیم‌داشت. اکنون b_0 و b_1 را با $b_0=|a_0|$، $b_1=|a_1|$، و b_{n+2} (برای $n\geqslant 0$) را به وسیلهٔ

$$(n+1)(n+2)b_{n+2}=\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_{n+1}r \tag{۴}$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که برای کلیهٔ مقادیر n داریم $0\leqslant|a_n|\leqslant b_n$. اکنون سعی می‌کنیم دربارهٔ مقادیری از x که برای آنها سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{۵}$$

همگراست، اطلاعاتی به‌دست‌آوریم، و برای این منظور به‌اطلاعاتی درمورد رفتار نسبت b_{n+1}/b_n وقتی که $n\to\infty$ نیاز داریم. این اطلاعات را به‌شیوهٔ زیر به‌دست می‌آوریم. در رابطهٔ (۴) به‌جای n ابتدا $n-1$ وسپس $n-2$ می‌گذاریم، خواهیم داشت

$$n(n+1)b_{n+1}=\frac{M}{r^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_nr$$

و

$$(n-1)nb_n=\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_{n-1}r$$

با ضرب اولین معادله از دومعادلهٔ بالا در r و استفاده از دومین معادله خواهیم داشت

$$\begin{aligned}rn(n+1)b_{n+1}&=\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k\\&\qquad+rM(nb_n+b_{n-1})+Mb_nr^2\\&=(n-1)nb_n-Mb_{n-1}r+rM(nb_n+b_{n-1})+Mb_nr^2\\&=[(n-1)n+rMn+Mr^2]b_n\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n-1)n+rMn+Mr^2}{rn(n+1)}$$

واین نشان می‌دهد که

$$\left|\frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_nx^n}\right|=\frac{b_{n+1}}{b_n}|x|\to\frac{|x|}{r}$$

بنابراین سری (۵) برای $|x|<r$ همگراست، پس براساس نامساوی $|a_n|\leqslant b_n$ وآزمون مقایسه، سری (۳) نیز برای $|x|<r$ همگراست. چون r یك عدد مثبت دلخواه کوچکتراز R بود، نتیجه می گیریم که سری (۳) برای $|x|<R$ همگراست، واثبات‌کامل است.

تکمیل اثبات قضیهٔ ۲۹ـالف. این استدلال شبیه به‌استدلالی است که دربالا برای قضیهٔ ۲۷ـالف ارائه‌کردیم، ولی درجزئیات به‌اندازهٔ کافی اختلاف وجود داردکه بررسی جداگانه‌ای را طلب‌کند. فرض می کنیم که سریهای

$$xP(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \quad \text{و} \quad x^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n \tag{۶}$$

برای $|x|<R$ ، $R>0$ همگرا باشند. معادلهٔ شاخص عبارت‌است از

$$f(m)=m(m-1)+mp_0+q_0=0 \tag{۷}$$

وفقط حالتی راکه درآن معادلهٔ (۷) دارای دو ریشهٔ حقیقی m_1 و m_2 ، با $m_2\leqslant m_1$ ، است درنظر می گیریم. باید همگرایی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{۸}$$

را بررسی کنیم. دراین سری a_0 ثابت غیرصفر دلخواهی است و a_nهای دیگر به‌طور بازگشتی برحسب a_0 به‌طریق زیر تعریف می‌شوند:

$$f(m+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}] \tag{۹}$$

و منظور اثبات این مطلب است‌که هرگاه $m=m_1$، ونیز هرگاه $m=m_2$ و m_1-m_2 یك‌عدد صحیح مثبت نباشد، سری (۸) درفاصلهٔ $|x|<R$ همگراست.

مطلب را با مشاهدهٔ اینکه $f(m)$ را می‌توان به‌صورت

$$f(m)=(m-m_1)(m-m_2)=m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2$$

نوشت، آغاز می‌کنیم، این به‌ما امکان می‌دهد که با محاسباتی جزئی روابط

$$f(m_1+n)=n(n+m_1-m_2)$$

و

$$f(m_2+n)=n(n+m_2-m_1)$$

ودرنتیجه روابط

$$|f(m_1+n)| \geqslant n(n-|m_1-m_2|) \tag{۱۰}$$

و

$$|f(m_2+n)| \geqslant n(n-|m_2-m_1|) \tag{۱۱}$$

را به‌دست آوریم. فرض کنید که r عددی مثبت وکوچکتراز R است. چون سری (۶) در $x=r$ همگراست، عدد ثابت $M>0$ وجود دارد به‌قسمی که برای همهٔ مقادیر n

$$|p_n|r^n \leqslant M \quad و \quad |q_n|r^n \leqslant M \tag{۱۲}$$

هرگاه در رابطهٔ (۹)، m را برابر m_1 قرار دهیم و از روابط(۱۰) و (۱۲) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$n(n-|m_1-m_2|)|a_n| \leqslant M\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{r^{n-k}}(|m_1|+k+1)$$

اکنون دنبالهٔ $\{b_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$b_n=|a_n| \quad برای \quad 0\leqslant n\leqslant |m_1-m_2|$$

و

$$n(n-|m_1-m_2|)b_n = M\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}}(|m_1|+k+1) \tag{۱۳}$$

برای $|m_1-m_2|<n$. روشن است که برای کلیهٔ مقادیر n ، $0 \leqslant |a_n| \leqslant b_n$. ثابت خواهیم کرد که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{۱۴}$$

برای $|x|<r$ همگراست، و برای دستیابی به این مطلب به جستجوی عبارت مناسبی برای نسبت b_{n+1}/b_n می‌پردازیم. در (۱۳) به جای n ، $n+1$ می‌گذاریم، آن را در r ضرب می‌کنیم و به کمك (۱۳) نتیجه را ساده می‌کنیم، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} r(n+1)(n+1-|m_1-m_2|)b_{n+1} \\ = n(n-|m_1-m_2|)b_n + Mb_n(|m_1|+n+1) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n-|m_1-m_2|)+M(|m_1|+n+1)}{r(n+1)(n+1-|m_1-m_2|)}$$

این نشان می‌دهد که

$$\left|\frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n}\right| = \frac{b_{n+1}}{b_n}|x| \to \frac{|x|}{r}$$

و درنتیجه سری (۱۴) برای $|x|<r$ همگراست. اکنون از نامساویهای $0 \leqslant |a_n| \leqslant b_n$ نتیجه می‌گیریم که سری (۸) نیز برای $|x|<r$ همگراست؛ وازآنجا که r عدد مثبت دلخواهی کوچکتر از R فرض شده بود، نتیجه می‌گیریم که سری (۸) برای $|x|<R$ همگراست. اگر همه‌جا به‌جای m_1 ، m_2 بگذاریم و به‌جای (۱۰) از (۱۱) استفاده کنیم، آنگاه همان محاسبات ثابت می‌کنند که در این حالت سری (۸) برای $|x|<R$ نیز همگراست، البته‌مشروط به‌آنکه m_1-m_2 یك عدد صحیح‌مثبت نباشد تا سری (۸) خوش‌تعریف باشد.

پیوست ب. چندجمله‌ایهای هرمیت و مکانیك کوانتومی

مهم‌ترین کاربرد چندجمله‌ایهای هرمیت درنظریهٔ نوسانگر همساز خطی درمکانیك کوانتومی است. معادلهٔ دیفرانسیلی که دراین نظریه ظاهر می‌شود و ارتباط نزدیکی بامعادلهٔ هرمیت دارد (تمرین ۲۷-۷) ، معادلهٔ

$$\frac{d^2w}{dx^2}+(2p+1-x^2)w=0 \tag{۱}$$

است، که درآن p عدد ثابتی است. بنا به‌دلایلی که درانتهای این پیوست ذکر خواهند شد، فیزیکدانها تنها به جوابهایی از (۱) علاقه‌مندند، که وقتی $|x|\to\infty$، به‌صفر میل کنند.

هر گاه بخواهیم معادلهٔ (۱) رامستقیماً به‌وسیلهٔ سری توانی حل کنیم، به یك فرمول بازگشتی سه‌جمله‌ای برای ضرایب دست خواهیم یافت، و این پیچیده‌تر از آن است که فعلا آن‌را مورد بررسی قرار دهیم. برای ساده کردن مسئله، متغیر وابستهٔ جدیدی مانند y را به‌وسیلهٔ

$$w=ye^{-x^{2}/2} \qquad (۲)$$

تعریف می‌کنیم. این‌کار معادلهٔ (۱) را به معادلهٔ هرمیت

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-2x\frac{dy}{dx}+2py=0 \qquad (۳)$$

تبدیل می‌کند. بنابراین جوابهای مطلوب (۱) متناظر با جوابهایی از معادلهٔ (۳) هستند که قدرمطلقشان باسرعتی کمتراز $e^{x^{2}/2}$ رشد می‌کنند (وقتی $|x|\to\infty$) ، وخواهیم دید که این جوابها اساساً همان چندجمله‌ایهای هرمیت هستند.

فیزیکدانها با استدلال هوشمندانهٔ زیر تبدیل (۲) را توجیه مـی‌کنند. هنگامی‌که x بزرگ باشد، ثابت $2p+1$ درمعادلهٔ (۱) درمقایسه با x^{2} قابل اغماض است، بنابرایـن معادلهٔ (۱) به‌طور تقریبی به‌صورت

$$\frac{d^{2}w}{dx^{2}}=x^{2}w$$

درمی‌آید. چندان دوراز منطق نیست که توابع $w=e^{\pm x^{2}/2}$ را به‌عنوان جوابهای احتمالی این معادله حدس بزنیم. اکنون مشاهده می‌کنیم که

$$w'=\pm xe^{\pm x^{2}/2} \quad \text{و} \quad w''=x^{2}e^{\pm x^{2}/2}\pm e^{\pm x^{2}/2}$$

وچون برای مقادیر بزرگ x ، دومین جملهٔ w'' درمقایسه بـا اولین جمله قـابل صرف‌نظر کردن است، به‌نظر می‌رسد که در واقع $w=e^{x^{2}/2}$ و $w=e^{-x^{2}/2}$ «جـوابهای تقریبی» (۱) باشند. اولی راکنار می گذاریم،زیرا وقتی $|x|\to\infty$، این‌تابع به‌صفر نزدیك نمی‌شود. بنابراین‌منطقی است فرض کنیم که جواب دقیق(۱) به‌شکل(۲) است، به‌این‌امید که‌ساختمان تابع $y(x)$ ساده‌تراز $w(x)$ باشد.

فارغ از تصوری که نسبت به‌این استدلال می‌توان داشت، ایـن شیوه کارآمد است. زیرا درتمرین ۲۷ـ۷ مشاهده‌کرده‌ایم که معادلهٔ هرمیت (۳) دارای یك فرمول بـازگشتی دوجمله‌ای

$$a_{n+2}=-\frac{2(p-n)}{(n+1)(n+2)}a_{n} \qquad (۴)$$

است ونیز اینکه فرمول فوق به دوجواب سری مستقل زیر منتهی می‌شود:

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \cdots \quad (5)$$

و

$$y_2(x) = x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5$$

$$- \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \cdots \quad (6)$$

که برای کلیهٔ مقادیر x همگرا هستند.

اکنون آهنگ رشد توابع $y_1(x)$ و $e^{x^2/2}$ را باهم مقایسه می کنیم. هدف این است که نشان دهیم

$$\frac{y_1(x)}{e^{x^2/2}} \to 0 \quad \text{وقتی} \quad |x| \to \infty$$

اگر و تنها اگر سری $y_1(x)$ درجایی قطع شود ویك چندجمله‌ای باشد، یعنی اگر و تنها اگر پارامتر p مساوی بایکی ازمقادیر ۰ ، ۲ ، ۴ ، ... باشد. قسمت «اگر» مطلب به‌کمك قضیهٔ هوپیتال روشن است. برای اثبات قسمت «تنها اگر»، فرض می کنیم که $p \neq 0, 2, 4, \ldots$ ونشان می‌دهیم که دراین‌صورت نسبت بالا به‌صفر میل نمی کند. برای این‌کار، از این مطلب که تابع $y_1(x)$ به‌شکل $y_1(x) = \sum a_{2n}x^{2n}$ است که ضرایب آن به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۴) و شرط $a_0 = 1$ تعیین مـی‌شوند، ونیز ازاینکه $e^{x^2/2}$ دارای بسط سری $e^{x^2/2} = \sum b_{2n}x^{2n}$ است که درآن $b_{2n} = 1/(2^n n!)$ استفاده می کنیم، بنابراین داریم

$$\frac{y_1(x)}{e^{x^2/2}} = \frac{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots}{b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + \cdots + b_{2n}x^{2n} + \cdots}$$

باتوجه به فرمول(۴) ، تمام ضرایب صورت کسر برای اندیسهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ ، هم‌علامت هستند، پس بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود این ضرایب را می‌تـوان مثبت انگاشت. بنابراین، بـرای اثبات اینکه حد کسر مـوردنظر، وقتی $|x| \to \infty$ ، به‌صفر میل نمی کند، کافی است نشان دهیم که برای مقادیر به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ n داریم $a_{2n} > b_{2n}$. برای اثبات این مدعا، ابتدا مشاهده می کنیم که

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -\frac{2(p-2n)}{(2n+1)(2n+2)} \quad \text{و} \quad \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{1}{2(n+1)}$$

بنابراین

$$\frac{a_{2n+2}/a_{2n}}{b_{2n+2}/b_{2n}} = -\frac{2(p-2n)2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \to 2$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای کلیهٔ مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ n ، نامساوی

$$\frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} > \frac{3}{2} \times \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$$

برقرار است. اگر N یکی از این مقادیر n باشد، آنگاه کاربرد مکرر این نامساوی نشان می‌دهد که برای تمام مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ k داریم،

$$\frac{a_{2N+2k}}{b_{2N+2k}} > \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{a_{2N}}{b_{2N}} > 1$$

بنابراین اگر n به‌اندازه کافی بزرگ باشد $a_{2n}/b_{2n} > 1$ ویا $a_{2n} > b_{2n}$. استدلال فوق نشان می‌دهد که وقتی $x \to \infty$ ، خواهیم داشت $y_1(x)e^{-x^2/2} \to 0$ اگر و تنها اگر p مساوی با یکی از مقادیر ۰ ، ۲ ، ۴ ، ... باشد. بااستدلال مشابهی همین نتیجه را برای $y_2(x)e^{-x^2/2}$ (به‌ازای ... ، ۵ ، ۳ ، ۱ $= p$) به‌دست‌می‌آوریم، بنابراین جوابهای‌مطلوب معادلهٔ هرمیت، مضارب ثابت چند جمله‌ایهای هرمیت $H_0(x)$ ، $H_1(x)$ ، $H_2(x)$ ، ... هستندکه درتمرین ۲۷ـ۷ تعریف شده‌اند.

تابع مولد و فرمول رودریگس. قبلا دیدیم که چندجمله‌ایهای هرمیت چگونه پدید می‌آیند، واکنون‌توجه خودرا به‌مفیدترین خواص آنها معطوف می‌کنیم. اهمیت این خواص درانتهای این پیوست روشن می‌شود.

این چندجمله‌ایها غالباً به‌وسیلهٔ بسط سری توانی زیر تعریف می‌شوند:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{H_2(x)}{2!} t^2 + \cdots \qquad (7)$$

تابع e^{2xt-t^2} را تابع مولد چندجمله‌ایهای هرمیت می‌نامند. این تعریف دارای مزیت کارآیی برای استخراج خواص $H_n(x)$ است، و این نقطهٔ ضعف بدیهی را داردکه کاملا بدون انگیزهٔ قبلی وارد بحث شده است. بنابراین، رابطهٔ (۷) را از جوابهای سری (۵) و (۶) به‌دست می‌آوریم.

همهٔ جوابهای چندجمله‌ای معادلهٔ (۳) با قرار دادن یك عدد صحیح $n \geqslant 0$ به‌جای p دراین سریها وضرب آنها دریك مقدار ثابت دلخواه به‌دست می‌آیند. اینها همگی به‌شکل

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \cdots + a_{n-6}x^{n-6} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-2}x^{n-2} + a_n x^n \\ &= a_n x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-6}x^{n-6} + \cdots \end{aligned}$$

هستندکه درآن مجموع اخیر به‌جملهٔ a_0 یا $a_1 x$ ختم می‌شود، بسته به‌اینکه n زوج یا فرد باشد وضرایب آن بارابطهٔ زیر به‌یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$a_{k+2} = -\frac{2(n-k)}{(k+1)(k+2)} a_k \qquad (8)$$

ضرایب $a_{n-۲}$ ، $a_{n-۴}$ ، ... را برحسب a_n به‌دست خواهیم آورد، و برای این‌منظور ، در رابطهٔ (۸) ، به‌جای k ، ۲ $-k$ می‌گذاریم و به‌دست می‌آوریم:

$$a_k=-\frac{۲(n-k+۲)}{(k-۱)k}a_{k-۲}$$

یا

$$a_{k-۲}=-\frac{k(k-۱)}{۲(n-k+۲)}a_k$$

با قرار دادن مقادیر n ، ۲ $-n$ ، ۴ $-n$ وغیره به‌جای k ، خواهیم داشت

$$a_{n-۲}=-\frac{n(n-۱)}{۲\times ۲}a_n$$

$$a_{n-۴}=-\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲\times ۴}a_{n-۲}=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲^۲\times ۲\times ۴}a_n$$

$$a_{n-۶}=-\frac{(n-۴)(n-۵)}{۲\times ۶}a_{n-۴}$$

$$=-\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)}{۲^۳\times ۲\times ۴\times ۶}a_n$$

و به‌همین ترتیب الی‌آخر، و درنتیجه داریم:

$$h_n(x)=a_n\Big[x^n-\frac{n(n-۱)}{۲\times ۲}x^{n-۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲^۲\times ۲\times ۴}x^{n-۴}$$

$$-\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)}{۲^۳\times ۲\times ۴\times ۶}x^{n-۶}+\dots$$

$$+(-۱)^k\frac{n(n-۱)\dots(n-۲k+۱)}{۲^k\times ۲\times ۴\dots(۲k)}x^{n-۲k}+\dots\Big]$$

این عبارت را می‌توان به‌شکل

$$h_n(x)=a_n\sum_{k=۰}^{[n/۲]}(-۱)^k\frac{n!}{۲^{۲k}k!(n-۲k)!}x^{n-۲k}$$

نوشت، که درآن $[n/۲]$ علامت متعارف برای بزرگترین عددصحیح کوچکتراز $n/۲$ یا مساوی با $n/۲$ است. برای به‌دست آوردن n امین چندجمله‌ای هرمیت، یعنی $H_n(x)$ ، a_n را برابر با ۲^n قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{۹}$$

این گزینش برای مقدار a_n صرفاً به‌خاطر راحتی‌کار است، و این اثر را داردکه فرمولهای بیان‌کنندهٔ خواص گوناگون چندجمله‌ایهای هرمیت را ساده می‌سازد.

برای انتقال از (۹) به (۷) کمی از مطلب دور می‌شویم. استفاده از فرمول تعریف ضرب دوسری توانی

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)t^n$$

درمواردی‌که سری اول تنها شامل توانهای زوج t باشد، مطلوب نخواهد بود:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n\right)=?$$

آنچه دراینجا می‌خواهیم انجام دهیم این است که تمام توانهای n ام t را ازهمهٔ حاصل‌ضربهای $a_kt^{2k}b_jt^j$ گردهم آوریم، پس $n=j+2k$ وجملاتی که درنظرمی‌گیریم به‌صورت $a_kt^{2k}b_{n-2k}t^{n-2k}$ خواهند بود. محدودیتها عبارت‌اند از $k\geqslant 0$ و $n-2k\geqslant 0$، و بنابراین $0\leqslant k\leqslant n/2$؛ وبرای هرعدد $n\geqslant 0$ مشاهده می‌کنیم که k ازصفر تابزرگترین عددصحیح کوچکتر از $n/2$ یا مساوی با $n/2$ تغییر می‌کند. بدین‌ترتیب دستورالعمل حاصلضرب

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{[n/2]}a_kb_{n-2k}\right)t^n \tag{۱۰}$$

را به‌دست می‌آوریم. حال‌اگر رابطهٔ (۹) را درسمت راست رابطهٔ (۷) اعمال و از (۱۰) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}\right]t^n\\&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}t^n\right]\\&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2xt)^n}{n!}\right]\\&=e^{-t^2}e^{2xt}=e^{2xt-t^2}\end{aligned}$$

که اثبات رابطهٔ (۷) است.

به‌عنوان کاربردی از رابطهٔ (۷)، فرمول رودریگ را برای چند جمله‌ایهای هرمیت ثابت می‌کنیم:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{11}$$

با توجه به‌رابطهٔ ۲۵ـ(۹) برای ضرایب سری توانی، از رابطهٔ (۷) خواهیم داشت

$$H_n(x)=\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{2xt-t^2}\right)_{t=0}=e^{x^2}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}\right)_{t=0}$$

اگرمتغیر جدید $z=x-t$ را معرفی واز واقعیت $\partial/\partial t=-(\partial/\partial z)$، استفاده کنیم،چون $t=0$ متناظر با $z=x$ است، عبارت اخیر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}\right)_{z=x}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

و اثبات کامل می‌شود.

تعامد. می‌دانیم که، برای هرعددصحیح غیرمنفی n، تابع

$$w_n(x)=e^{-x^2/2}H_n(x) \tag{12}$$

که تابع هرمیت از مرتبهٔ n نامیده می‌شود، وقتی‌که $|x|\to\infty$ به‌سمت صفر میل می‌کند و جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل

$$w''_n+(2n+1-x^2)w_n=0 \tag{13}$$

است. یك خاصیت مهم این توابع این‌است‌که:

$$\int_{-\infty}^{\infty}w_m w_n dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx=0 \quad \text{هرگاه } m\neq n \tag{14}$$

این رابطه غالباً به‌این شکل بیان می‌شودکه توابع هرمیت درفاصلهٔ $(-\infty ، +\infty)$ متعامدند.

برای اثبات (۱۴)، مطلب را بانوشتن معادله‌ای آغاز می‌کنیم‌که تابع $w_m(x)$درآن صدق می‌کند،

$$w''_m+(2m+1-x^2)w_m=0 \tag{15}$$

اکنون با ضرب (۱۳) در w_m و (۱۵) در w_n و تفریق آنها ، داریم

$$\frac{d}{dx}(w'_n w_m-w'_m w_n)+2(n-m)w_m w_n=0$$

هرگاه از این معادله از $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال بگیریم و از این واقعیت که $w'_n w_m-w'_m w_n$ درهر دوحد صفر می‌شود، استفاده کنیم، خواهیم دیدکه

$$۲(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} w_m w_n dx = ۰$$

که رابطهٔ (۱۴) را نتیجه می‌دهد.

همچنین نیاز داریم بدانیم که وقتی $m=n$ ، مقدار انتگرال (۱۴) برابر با

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}[H_n(x)]^۲\,dx = ۲^n n!\sqrt{\pi} \qquad (۱۶)$$

می‌شود. برای اثبات این موضوع، از فرمول رودریگس (۱۱) استفاده می‌کنیم، واز

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} H_n(x) H_n(x)\,dx = (-۱)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^۲}dx$$

به‌صورت زیر انتگرال جزء به جزء می گیریم:

$$u = H_n(x) \quad , \quad du = H'_n(x)\,dx$$

$$dv = \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^۲}dx \quad , \quad v = \frac{d^{n-۱}}{dx^{n-۱}}e^{-x^۲}$$

چون uv حاصل‌ضرب $e^{-x^۲}$ دریك چندجمله‌ای است، درهر دوحد صفر می‌شود و داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}[H_n(x)]^۲\,dx = (-۱)^{n+۱}\int_{-\infty}^{\infty} H'_n(x)\frac{d^{n-۱}}{dx^{n-۱}}\,e^{-x^۲}dx$$

$$= (-۱)^{n+۲}\int_{-\infty}^{\infty} H''_n(x)\frac{d^{n-۲}}{dx^{n-۲}}e^{-x^۲}dx$$

$$= \dots = (-۱)^{۲n}\int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x)e^{-x^۲}dx$$

اکنون جملهٔ حاوی بزرگترین توان x در $H_n(x)$ عبارت از $۲^n x^n$ است ، پس $H_n^{(n)}(x) = ۲^n n!$ و آخرین انتگرال عبارت خواهد بود از

$$۲^n n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}dx = (۲^n n!)\,۲\int_{۰}^{\infty} e^{-x^۲}dx = ۲^n n!\sqrt{\pi}$$

که نتیجهٔ موردنظر است.[۱]

از این خواص تعامد می‌توان برای بسط تابع «دلخواه» $f(x)$ به سری هرمیت استفاده کرد:

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n H_n(x) \qquad (۱۷)$$

---

۱. این حقیقت‌که انتگرال $e^{-x^۲}$ از ۰ تا ∞ برابر $\sqrt{\pi}/۲$ است اغلب در ریاضیات عمومی ثابت می‌شود. تمرین ۳۴ـ۳ را ببینید.

اگر به‌طور صوری عمل کنیم، ضرایب a_n را مــی‌توان با ضرب (۱۷) در $e^{-x^2}H_m(x)$ و انتگرال‌گیری جمله به‌جمله از $-\infty$ تا $+\infty$ به‌دست آورد. با توجه به (۱۴) و (۱۶) داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\,dx=a_m 2^m m!\sqrt{\pi}$$

بنابراین (با قرار دادن n به‌جای m) خواهیم داشت

$$a_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)f(x)\,dx \qquad (۱۸)$$

این روش صوری، مسئلهٔ ریاضی یافتن شرایطی برای تابع $f(x)$ را مطرح مــی‌کند کــه تحت آن شرایط، وقتی a_nها به‌وسیلهٔ (۱۸) تعریف می‌شوند، اعتبار (۱۷) تضمین گــردد. مسائلی از این نوع، بخشی از نظریهٔ عمومــی توابع متعامد هستند. برخی از کاربــردهای مستقیم فیزیکی بسطهای متعامد مانند (۱۷) درپیوستهای الف و ب از فصل ششم موردبحث قرار می‌گیرند.

نوسانگر همساز. همچنانکه‌درابتدا متذکرشدیم، کاربرداصلی‌مفاهیم‌ریاضی، که در بالا مورد بررسی واقع شدند، درمکانیك کــوانتومی است. بحث‌کافی درمورد مفاهیم فیزیکــی بنیادی دراین زمینه، بیشك خارج‌از حیطهٔ‌کار ایــن پیوست است. باوجــود این، درك نقش چندجمله‌ایهای هرمیت $H_n(x)$ و توابع هرمیت مربوطه، یعنی $e^{-x^2/2}H_n(x)$، بسیارساده است.

دربخش ۲۰ نوسانگر همساز کلاسیك را بررسی کردیم، که می‌توان آن‌را به‌منزلــهٔ ذره‌ای بــه‌جرم m پنداشت‌کــه مقید بــه‌حرکت درامتداد محور x است و تــوسط نیروی بازگردانندهٔ $-kx$ به‌نقطهٔ تعادل $x=0$ مقید می‌شود. معادلهٔ حرکت آن عبارت است‌از

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

و دیدیم که تحت‌شرایط اولیهٔ مناسب، جواب آن، نوسانگر همساز

$$x=x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

است، که درآن x_0 دامنه است. هــمچنین یادآوری مــی‌کنیم کــه دورهٔ تناوب T به‌وسیلهٔ $T=2\pi\sqrt{m/k}$ تعیین مــی‌شود؛ و چــون بسامــد ارتعاشی ν عکس دورهٔ تناوب است، $k=4\pi^2 m\nu^2$. بعلاوه، چون انرژی جنبشی برابر با $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ و انــرژی پتانسیل آن برابر با $\frac{1}{2}kx^2$ است، محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که انرژی کل دستگاه برابر مقدار ثابت $E=\frac{1}{2}kx_0^2$ است.روشن‌است که‌این انرژی کل می‌تواند هرمقدارمثبتی‌را اختیار کند.

درمکانیك‌کوانتومی، معادلهٔ موج شرودینگر برای یك نوسانگر همساز که دربالا شرح داده شد، به‌صورت

$$\frac{d^۲\psi}{dx^۲}+\frac{۸\pi^۲m}{h^۲}\left(E-\frac{۱}{۲}kx^۲\right)\psi=۰ \tag{۱۹}$$

است، که درآن E بازهم انرژی‌کل، h ثابت پلانك، و جوابهای قابل قبول $\psi(x)$ به‌توابع موج شرودینگر موسوم‌اند.[۱] هرگاه برای‌حذف ثابت‌نیرو، یعنی k، ازمعادلهٔ $k=۴\pi^۲m\nu^۲$ استفاده کنیم، درآن‌صورت معادلهٔ (۱۹) را می‌توان به‌شکل

$$\frac{d^۲\psi}{dx^۲}+\frac{۸\pi^۲m}{h^۲}(E-۲\pi^۲m\nu^۲x^۲)\psi=۰ \tag{۲۰}$$

نوشت. جوابهایی ازاین‌معادله ازنظر فیزیکی قابل قبول‌اند (یا «معقول»اند) که درشرایط زیر صدق کنند:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^۲\,dx=۱ \quad \text{و} \quad |x|\to\infty \quad \text{وقتی} \quad \psi\to۰ \tag{۲۱}$$

این جوابها (توابع موج شرودینگر) توابع ویژهٔ این مسئله نیز نامیده می‌شوند، و خواهیم دیدکه این توابع ویژه فقط هنگامی موجودندکه E دارای مقادیر خاصی به‌نام مقادیر ویژه باشد.

هرگاه متغیر مستقل را به

$$u=۲\pi\sqrt{\frac{\nu m}{h}}\,x \tag{۲۲}$$

تغییر دهیم، معادلهٔ (۲۰) به

$$\frac{d^۲\psi}{du^۲}+\left(\frac{۲E}{h\nu}+u^۲\right)\psi=۰ \tag{۲۳}$$

تبدیل می‌شود و شرایط (۲۱) به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^۲du=۲\pi\sqrt{\frac{\nu m}{h}} \quad \text{و} \quad |u|\to\infty \quad \text{وقتی} \quad \psi\to۰ \tag{۲۴}$$

---

۱. اروین شرودینگر Erwin-Schrödinger (۱۹۶۱ـ۱۸۸۷) دانشمند فیزیك نظری اتریشی بودکه جایزهٔ نوبل ۱۹۳۳ را مشترکاً با دیراك (Dirac) برنده شد. تنها خبرگان می‌توانند ارزش علمی وی را درك کنند، مردی با علائق فرهنگی وسیع، ونویسنده‌ای برجسته و روشن نویس به‌سبك پوانکاره بود. به‌نوشتن کتابهای‌کوچك پرمحتوی دربارهٔ موضوعات بزرگ تمایل داشت: زندگی چیست؟، علوم و انسانگرایی، طبیعت ویونانیها، که بترتیب در سالهای ۱۹۴۴، ۱۹۵۲، ۱۹۵۴ توسط انتشارات دانشگاه کمبریج در نیویورك منتشر گردیده‌اند.

گذشته از علایم، معادلهٔ (۲۳) دقیقاً همان شکل معادلهٔ (۱) را داراست. بنابراین می‌دانیم که این معادله دارای جوابهایی است که درشرط اول (۲۴) صدق می‌کنند، اگر وتنها اگر $2E/h\nu = 2n+1$ ویا برای یك عددصحیح غیرمنفی n رابطهٔ

$$E = h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right) \tag{۲۵}$$

برقرار باشد. همچنین می‌دانیم که دراین‌حالت این جوابهای معادلهٔ (۲۳) به‌صورت

$$\psi = ce^{-u^2/2}H_n(u)$$

هستندکه درآن c عدد ثابتی است. حال اگر دومین شرط (۲۴) را اعمال واز رابطهٔ (۱۶) استفاده کنیم، نتیجه می گیریم که

$$c = \left[\frac{4\pi\nu m}{2^{2n}(n!)^2 h}\right]^{1/4}$$

بنابراین تابع ویژهٔ مربوط به مقدار ویژهٔ (۲۵) ، به‌شکل

$$\psi = \left[\frac{4\pi\nu m}{2^{2n}(n!)^2 h}\right]^{1/4} e^{-u^2/2}H_n(u) \tag{۲۶}$$

است، که رابطهٔ (۲۲)، u را برحسب x به‌دست می‌دهد.

فیزیکدانها علاقهٔ تخصصی عمیقی به‌جزئیات خواص این توابع ویژه دارند. ولی، برای ما این مسئله تنها برای روشن کردن علت مطرح شدن چندجمله‌ایهای هرمیت به‌کار می‌آید، بنابراین تنها به‌ذکر این نکته که فرمول (۲۵) باصطلاح ترازهای انرژی کوانتیدهٔ نوسانگر همساز را به‌دست می‌دهد، بسنده می کنیم و مطلب را بیش‌از این دنبال نخواهیم کرد. این بدان‌معناست که انرژی E تنها می‌تواند این مقادیر گسسته را اختیار کند، که‌البته با وضعیت کلاسیك مربوطه که دربالا توضیح داده شد تفاوت زیادی دارد. ساده‌ترین کاربرد مشخص این‌مفاهیم درحرکت ارتعاشی اتم‌های موجود دریك مولکول دواتمی است. هرگاه این پدیده به‌طور تجربی مورد بررسی قرار گیرد، دیده می‌شود که انرژی‌های موردنظر، دقیقاً با (۲۵) مطابقت دارند.

یادداشت دربارهٔ هرمیت[1]**.** شارل‌هرمیت(۱۸۲۲–۱۹۰۱) یکی‌از برجسته‌ترین ریاضیدانان‌قرن‌نوزدهم فرانسه‌است که‌بویژه به‌خاطرظرافت‌ومهارت موجود درآثارش از دیگران متمایز بود. در دوران دانشجویی، مطالعهٔ متون‌کلاسیك ریاضیات وضعیت تحصیلی او را برهم زد وباآنکه‌بزحمت ازعهدهٔ امتحانات برآمد، درسنین بیست‌وچند سالگی در ردیف ریاضیدانان خلاق طراز اول درآمد. درسال ۱۸۷۰ به‌مقام استادی

---

1. Charles Hermite

درسوربن گمارده شد، ودرآنجا نسل کاملی از ریاضیدانان مشهور فرانسوی، ازجمله پیکار، بورل و پوانکاره را پرورش داد.

سرشت غیرعادی ذهن وی توسط پوانکاره چنین توصیف شده است. «وقتی با آقای هرمیت گفتگو کنید، وی هرگز از تصاویر عینی سخن نمی‌گوید، بااین وجود بزودی‌معلوم می‌شودکه انتزاعی‌ترین مفاهیم نزد وی مانند موجودات جاندارهستند». او به هندسه علاقه نداشت، ولی کاملا مجذوب نظریهٔ اعداد و آنالیز شده بود، و موضوع مورد علاقهٔ وی توابع بیضوی بود، مبحثی که به‌طرق متعددی این دو زمینه را به‌همدیگر ربط می‌دهد. ممکن است خواننده بداندکه سالها قبل آبل ثابت‌کرد که معادلهٔ درجهٔ پنجم کلی را نمی‌توان با توابعی که درآنها تنها عملیات گویا و ریشه گیری به‌کار می‌آید، حل‌کرد. یکی از شگفت‌انگیزترین دستاوردهای هرمیت (درسال ۱۸۵۸) اثبات مقدور بودن حل این معادله به‌وسیلهٔ توابع بیضوی بود. اثبات سال ۱۸۷۳ او درمورد متعالی بودن e یکی دیگر از نکات برجستهٔ حیات‌علمی‌وی بود.

چندین کشف‌وی در ریاضیات‌محض،سالها بعدکاربردهای‌غیرمنتظره‌ای‌درفیزیک ریاضی یافت. مثلا، فرمها و ماتریسهای هرمیتی که وی آنها را درارتباط با مسائل معینی از نظریهٔ اعداد ابداع کرد درتبیین مکانیک کوانتومی به‌وسیلهٔ هایزنبرگ‌درسال ۱۹۲۵ نقش حیاتی یافت، ومشاهده‌کردیم که چندجمله‌ایها و توابع هرمیت درحل معادلهٔ موج شرودینگر مفید هستند. علت روشن نیست، ولی این نکته درست به‌نظر می‌رسدکه ریاضیدانان برخی از ارزشمندترین کارهای عملی خود را هنگام اندیشیدن به مسائلی انجام می‌دهندکه بظاهر هیچ‌ارتباطی با واقعیت فیزیکی ندارند.

پیوست ج. گاوس

کارل فریدریش گاوس[1] (۱۷۷۷ــ۱۸۵۵) بزرگترین‌ریاضیدان تاریخ وشاید پراستعدادترین نابغه‌ای بودکه نامش تاکنون برجای مانده است. این چهرهٔ برجسته، که از آغاز قرن ۱۹ سرآمد اقران شد ، دوران ریاضیات نوین را از همهٔ ریاضیات ماقبل خود جدا می‌کند. بینش درونی و اصالت، وسعت و عمق فوق‌العادهٔ دستاوردها ، نمایشهای مکرر قدرت و پیگیری تقریباً فوق انسانی وی، همه وهمه دریك انسان واحد چنان جمع شده‌بودندکه‌برای ما نیز همچون معاصرانش چون معمایی درنیافتنی جلوه می‌کند.

گاوس درشهر برونسویك درشمال آلمان متولد شد. مهارت استثنایی وی دراعداد از همان اوان طفولیت وی آشکار بود، و او بعدها بشوخی می‌گفت‌که قبل‌از به‌حرف‌آمدن، شمارش رامی‌دانسته است. گفته می‌شودکه گوته درشش سالگی نمایشنامه‌های‌کوتاهی‌برای یك تأتر عروسکی نوشت وکارگردانی کرد، و موتسارت اولین‌آهنگهای رقص کودکانهٔ خود را درسن ۵ سالگی تصنیف‌کرد، ولی‌گاوس درسه‌سالگی اشتباهی از لیست حقوق پدرش‌را

---

1. Carl Friedrich Gauss

تصحیح کرد[1]. پدر وی باغبان و بنا بود و نه امکانات کمك به‌شکوفایی استعداد فرزندش را داشت و نه به‌فکر چنین‌کاری بود. ولی، خوشبختانه قابلیتهای قابل ملاحظهٔ وی درمحاسبات ذهنی علاقهٔ چندین فرد با نفوذ محیط را به‌خود جلب کرد و سرانجام وی را مورد توجه دوك برونسویك قرار داد. دوك تحت‌تأثیر این پسربچه قرار گرفت ومخارج تحصیلات بعدی وی را ابتدا در کالج کارولین واقع در برونسویك (۱۷۹۲–۱۷۹۵)، وسپس در دانشگاه گوتینگن (۱۷۹۵–۱۷۹۸)، تقبل کرد.

درکالج کارولین، گاوس به‌زبانهای کلاسیك تسلط پیدا کرد، و به‌کاوش درآثار نیوتن، اویلر، و لاگرانژ پرداخت. دراوایل این دوره (شاید درسن چهارده یا پانزده سالگی) قضیهٔ اعداد اول را کشف کرد، که سرانجام درسال ۱۸۹۶ بعدازکوششهای زیاد توسطریاضیدانان متعدد به‌اثبات رسید (به یادداشتهای مربوط به چبیشف و ریمان نگاه کنید). وی همچنین روش کوچکترین مربعات را برای می‌نیمم کردن خطاهای ذاتی در داده‌های تجربی کشف کرد، و قانون توزیع گاوسی (یا نرمال) درنظریهٔ احتمالات را مطرح ساخت.

گاوس در دانشگاه، مجذوب زبان‌شناسی شد از دروس ریاضی بیزار گشت، وبرای مدتی مسیر زندگی‌آیندهٔ وی نامعلوم بود. اما، درسن ۱۸ سالگی به‌یك کشف جالب‌هندسی توفیق یافت. این کشف باعث شدکه به ریاضیات روی آورد و تا آخرعمر لذت زیادی به وی‌بخشید. یونانیهای باستان‌روش‌ترسیم‌چندضلعیهای منتظم با ۳ ، ۴ ، ۵ ، و۱۵ ضلع وهمهٔ چندضلعیهای منتظمی راکه توسط این اشکال با نصف کردن زوایا به‌دست می‌آیند به‌کمك خطکش و پرگار، می‌دانستند. ولی بیش‌از این چیزی دراین‌باره نمی‌دانستند. مدت ۲۰۰۰ سال موضوع راکد مانده بود، تا هنگامی که گاوس این مسئله را بطورکامل حل کرد. وی ثابت کردکه هر nضلعی منتظم وقتی و تنها وقتی قابل ترسیم است که n حاصل‌ضرب توانی از ۲ و اعداد اول متمایز به‌شکل $p_k = ۲^{۲^k} + ۱$ باشد. بویژه،هرگاه $k = ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳$، مشاهده می‌کنیم که هریك از اعداد مربوطهٔ $p_k = ۳ ، ۵ ، ۱۷ ، ۲۵۷$ اول‌اند و بنابراین چندضلعیهای منتظم با این تعداد ضلع قابل ترسیم‌اند[2].

درخلال این دوران گاوس تقریباً غرق درافکاری بودکه در ذهن او جریان داشتند. او شروع به نوشتن یادداشتهای کوتاه در دفترچهٔ خاطرات علمیش کرد بلکه بتواند کشفهای‌خود را ثبت کند، زیرا تعداد این اکتشافات بیش‌از آن‌بود که بتواند بتفصیل به‌همهٔ آنها بپردازد.

---

۱. به

W. Sartorius von Waltershausen, «Gauss zum Gedächtniss.»

مراجعه‌کنید. این خاطرات شخصی درسال ۱۸۵۶ انتشاریافت. ترجمه‌ای ازآن توسط هلن و. گاوس (که‌گاوس ریاضیدان‌پدرجداو بود)درسال۱۹۶۶ به‌هزینهٔ شخصی درشهرکلرادو اسپرینگز به‌چاپ رسید.

۲. جزئیات برخی از این ترسیمها درمرجع زیرآمده است:

H. Tietze, «Famous Problems of Mathematics,» chap. IX, Graylock, Baltimore, 1965.

اولین مطلب، به‌تاریخ ۳۰ مارس ۱۷۹۶ حاکی از قابل ترسیم بودن ۱۷ ضلعی منتظم بود، ولی حتی قبل‌از این، وی عمیقاً به قلمروهای دست‌نخورده‌ای از نظریهٔ اعداد راه یافته‌بود. درسال ۱۷۹۵ قانون تقابل مربعی را کشف کرد، و خود بعداً نوشت «یکسال تمام، این‌قضیه فکر مرا مشغول‌کرد و بیشترین تلاش مرا به‌خود اختصاص داد تا سرانجام اثباتی برای آن یافتم»[1]. درآن هنگام نمی‌دانست‌که قبلا اویلر این‌قضیه را بدون اثبات و به‌طور ناقص بیان کرده است، ولژاندر صورت صحیح این قضیه را با اثبات غلطی ارائه‌کرده است. این هستهٔ قسمت اصلی رسالهٔ مشهور وی موسوم به تحقیقات حسابی[2] بودکه هرچند در ۱۷۹۸ کامل گردید ولی در ۱۸۰۱ به‌چاپ رسید[3]. صرف‌نظر ازنتایج جزئی‌مربوط به ریاضیدانان پیشین،این اثرعظیم تماماً بدیع‌بود. معمولا این اثر رانقطهٔ‌آغاز حقیقی برای‌نظریهٔ نوین‌اعداد می‌دانند ، که رابطهٔ آن با نظریهٔ اعداد مانند رابطهٔ کتاب اصول نیوتن با فیزیك و نجوم است. در صفحات مقدمه گاوس روش همنهشتی خود را برای مطالعهٔ مسائل بخش‌پذیری مطرح می‌کند و اولین اثبات قضیهٔ اساسی حساب را (که قضیهٔ منحصر به‌فرد بودن تجزیه نیز نامیده می‌شود) به‌دست می‌دهد. براساس این قضیه، هرعددصحیح $n>1$ را می‌توان به‌طور منحصر به‌فردی به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت. قسمت اصلی کتاب عمدتاً به همنهشتی‌های درجهٔ دوم، صورتها و باقیمانده‌ها مربوط می‌شود. آخرین بخش، نظریهٔ کامل وی را درمورد معادلهٔ دایره‌بر (تقسیم دایره)، و موارد استعمال آن در بررسی ترسیم‌پذیری چندضلعیهای منتظم عرضه می‌کند. کل اثر یك شاهکار عظیم در ریاضیات محض‌بود، که ریاضیدانان بعداز وی بکندی وبااشکال قادر به درك آن بودند.

گاوس دراین رسالهٔ خود برخورد دقیق نوین با ریاضیات را نیز پدید آورد. وی کاملا از نوشته‌های غیر دقیق و استدلالهای آشفتهٔ پیشینیان ناراحت شده بود، وبرآن بودکه آثارش از این لحاظ غیرقابل انتقاد باشند. گاوس دراین مورد به‌یکی از دوستان خود نوشت، «مقصودم ازکلمهٔ اثبات نه به مفهومی است‌که قانوندانان به‌کار می‌برند، که برای آنها دواثبات نصفه برابر یك اثبات‌کامل است، بلکه اثبات به‌مفهوم ریاضی آن‌است، که نیمی از اثبات مساوی صفر است، ولازم است‌که هیچ تردیدی دراثبات مقدور نباشد». رسالهٔ تحقیقات با چنین روحی وبا شیوهٔ کمال یافتهٔ گاوس تدوین گردید، که موجز، دقیق،

---

۱. مراجعه شود به

D. E. Smith, «A Source Book in Mathematics,» pp. 112-118, McGraw-Hill, New York, 1929.

این مجموعه صورتی از این قضیه وپنجمین اثبات از هشت اثباتی راکه گاوس طی چندسال‌یافته بود دربر می‌گیرد. امروزه احتمالا بیش‌از پنجاه اثبات موجود است.

2. Disquisitiones Arithmeticae

۳. از این اثر ترجمه‌ای توسط Arthur A. Clarke وجود داردکه توسط ناشر زیر انتشار یافته است:

Yale University Press, New Haven, Conn., 1966.

عاری از شاخ و برگ، و دربسیاری از موارد چنان بدقت پرداخت شده بودکه تقریباً غیرقابل فهم بود. او درنامهٔ دیگری گفت، «می‌دانیدکه بکندی می‌نویسم. این بیشتر به‌دلیل آن‌است‌که هرگز احساس رضایت نمی‌کنم، مگراینکه درچند کلمه تا آنجاکه ممکن است، حداکثر مطلب را بگنجانم، و نوشتن بااختصار بمراتب زمان بیشتری از نوشتن به‌تفصیل می‌گیرد». یکی از پیامدهای این عادت آن است‌که آثارش تقریباً به‌همان میزان‌که مطالب را روشن می‌کنند باعث ابهام نیز می‌گردند، زیرا وی تلاش زیادی درحذف ردپای تسلسل فکری، که به‌کشفیاتش منجر می‌گردید، داشت. آبل اظهار داشت «وی شبیه روباهی است، که رد پایش را درشنزار با دمش ازبین می‌برد». گاوس به‌چنین انتقاداتی این‌گونه پاسخ می‌دادکه، هیچ معماری‌که برای خود احترام قایل است بعداز اتمام بنا چوب‌بست‌را باقی نمی‌گذارد. با این وجود، مشکل بودن مطالعهٔ آثارش تاحد زیادی مانع نشر افکار او گردید.

رسالهٔ دکترای گاوس (درسال ۱۷۹۹) یکی دیگر از وقایع مهم تاریخ ریاضیات بود. پس‌ازکوششهای بی‌نتیجهٔ ریاضیدانان قبلی(دالامبر، اویلر، لاگرانژ، لاپلاس)، درمورد قضیهٔ اساسی جبر، اولین اثبات قانع کنندهٔ آن دراین رساله داده شد. این قضیه وجود یك ریشهٔ حقیقی یا مختلط را برای هرمعادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی یا مختلط تضمین می‌کند. موفقیت گاوس دوران اثباتهای وجودی را آغازکرد، که از آن‌هنگام تاکنون‌نقش مهمی در ریاضیات محض ایفاکرده‌اند. بعلاوه، دراین اولین اثبات (روی‌هم‌رفته وی چهار اثبات ارائه‌کرد) ظاهراً گاوس اولین ریاضیدانی است‌که از اعداد مختلط وهندسهٔ صفحهٔ مختلط با اطمینان‌کامل استفاده‌کرده‌است[1].

گاوس در دورهٔ بعدی زندگی خود بیشتر به ریاضیات‌کار بسته متمایل شد، و گذشته ازچند استثنا گنجینهٔ عظیم اندیشه‌های وی در دفترچهٔ خاطرات و یادداشتهایش به‌حال خود رها شد.

در دهه‌های آخر قرن هیجدهم، بسیاری از منجمین درجستجوی یك سیارهٔ جدید بین مریخ و مشتری بودند، که براساس قانون «بود»[2] باید وجود می‌داشت. اولین و بزرگترین سیاره دربین سیارات کوچك متعدد موسوم به سیارك‌ها درسال ۱۸۰۱ دراین حوزه کشف، و «سرس»[3] نامیده شد. از بازی روزگار، این‌کشف مقارن با اثری تحسین‌آور ازهگل‌فیلسوف گردید، که درآن وی منجمین را به‌خاطر درنظر نگرفتن فلسفه استهزا کرد: به‌گفته هگل، این‌علم می‌تواند، بااثبات امکان‌ناپذیری وجود سیارات‌جدید، آنها را از هدر دادن زحمات

---

۱. اصول این اثبات به‌طور خیلی‌روشن درکتاب زیربیان شده است،

F. Klein, «Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint,» pp. 101-104, Dover, New York, 1945.

2. Bode's Law (1772)

3. Ceres

خود برهاند.[1] هگل دربقیه زندگیش راه خود را ادامه داد، و بعداً به افکار تیره‌تری دچار شد. متأسفانه حتی دربهترین شرایط سیارهٔ کوچك جدید به‌دشواری دیده می‌شد، و بزودی درنورآسمان درنزدیکی خورشید ناپدیدمی گشت. داده‌های رصدهای پراکنده،مسئلهٔ محاسبهٔ نسبتاً دقیق مدار سرس را در دستورکار قرارداد تا بتوان پس‌از دور شدن سرس ازخورشید مکان دقیق آنرا دوباره یافت. منجمین اروپا برای انجام این کار ماهها بدون هیچ گونه توفیقی کوشیدند. سرانجام، گاوس به‌این مبارزه کشیده شد و باکمك روش کمترین مربعات خود و مهارت بی‌نظیرش درمحاسبات عددی، این مدار را تعیین کرد، وبه‌منجمین گفت که با تلسکوپهای خود کجا را رصدکنند، و سیارك درست درهمانجا بود. پس‌از شکست همهٔ خبرگان، وی موفق به‌کشف مجدد سرس شده بود.

این‌دستاورد برای اوشهرت به‌بار آورد وموجب شد دوك حقوق وی را افزایش‌دهد. و درسال ۱۸۰۷ به‌سمت استادی نجوم منصوب شد وعنوان اولین مدیر رصدخانهٔ جدید گوتینگن را به‌دست‌آورد. وی وظایفش را طبق عادت درحدکمال انجام می‌داد، ولی‌روشن شدکه، وی ازمشاغل اداری، شرکت درجلسات، وهمهٔ مقررات اداری خسته‌کننده‌که مستلزم شغل استادی است، بیزار است. وی همچنین علاقهٔ چندانی به‌تدریس نداشت وآن‌را اتلاف وقت خود و اساساً (به‌دلایل‌مختلف) آن‌را برای‌محصلین مستعد وغیرمستعد هردو، بی‌فایده می‌دانست. اما هنگامی که ناگزیر از تدریس می‌شد آن‌را با شایستگی تمام انجام می‌داد. یکی‌از شاگردان وی، ریچارد ددکیند[2] متخصص مشهور جبر بودکه پس‌ازگذشت ۵۰ سال، کلاسهای درس گاوس همچنان برایش «به‌عنوان جالبترین خاطرهٔ فراموش نشدنی»[3] باقی ماند! گاوس فرصتهای زیادی برای ترك گوتینگن داشت، ولی همهٔ پیشنهادات را رد کرد وتاآخر عمر درآنجا باقی ماند. زندگی راحت و ساده‌ای داشت، بندرت مسافرت می کرد، وبا انرژی فوق‌العاده روی مسائل متعدد ریاضی وکاربرد آنهاکار می کرد. بغیراز علوم و خانواده‌اش (وی دو زن و شش فرزند داشت که دوتایشان به‌امریکا مهاجرت کردند) علائق عمدهٔ گاوس تاریخ وادبیات جهان، سیاست بین‌المللی، و مالیهٔ عمومی بود. وی‌یك کتابخانهٔ بزرگ شامل حدود شش‌هزار کتاب به‌زبانهای متعددی، ازجمله یونانی، لاتین، انگلیسی،

---

۱. صفحات آخرکتاب زیر را ببینید؛

«De Orbitis Planetarum,» vol. I of Georg Wilhelm Hegel's «Sämtliche Werke,» Frommann Verlag Stuttgart, 1965.

2. Richard Dedekind

۳. خاطرات مفصل ددکیند دراین درس، درکتاب زیر ارائه‌گردیده است؛

G. Waldo Dunnington, «Carl Friedrich Gauss: Titan of Science,» pp. 259-261, Hafner, New York, 1955.

این‌کتاب عمدتاً به‌خاطر نقل‌قولهای متعددش ازگاوس، به‌خاطرکتابشناسی آثار گاوس، وفهرست دروسی‌که وی بین سالهای ۱۸۰۸ تا ۱۸۵۴ پیشنهاد کرد (ولی اغلب آنها را تدریس نکرد) مفید است.

فرانسه، روسی، دانمارکی، والبته آلمانی، داشت. ذکاوت وی درتنظیم مسائل مالیش از این واقعیت روشن می‌گرددکه گرچه او اساساً باهیچ آغازکرد، املاکی از خود به‌جای گذارد که از صد برابر متوسط درآمد سالانهٔ او درنیمهٔ آخر عمرش بیشتر بود.

در دو دههٔ اول‌قرن نوزدهم، گاوس مرتباً روی‌مسائل نجومی‌کار می کرد، که‌مهمترین اثرش دراین زمینه، مقالـهٔ نظریهٔ حرکت اجرام فلکی[1] درسال ۱۸۰۹ بـود. این اثر بیش‌از یك قرن‌کتاب مقدس اخترشناسان درمطالعهٔ سیارات بود. روش وی دربرخورد بااختلالات، بعدها به‌کشف نپتون منجرگردید. گاوس نجوم را به‌عنوان حـرفه خود و ریاضی محض را به‌عنوان سرگرمی تلقی می کرد و گاه وبیگاه بعضی نتایج تحقیق خصوصی خـود را منتشر می‌کرد. اثر برجستهٔ وی دربارهٔ سری فـوق هندسی (۱۸۱۲) متعلق بـه‌همین دوران است. این نمونه‌ای از تلاشهای گاوس بود، سرشار از ایده‌های جدیدی درآنالیز که از آن هنگام تاکنون ریاضیدانان را به‌خود مشغول کرده است.

حدود سال ۱۸۲۰ از جانب حاکم هانوور[2] از وی درخواست شدکه بریك مساحی از قلمرو پادشاهی نظارت‌کند، وجنبه‌های گوناگون این‌کارش ـ ازقبیل‌کار گسترده روی‌زمین و مثلث‌بندی‌های خسته‌کنندهٔ متعددـ سالها وقت وی را اشغال کـرد. تصوراینکه مغزی چون مغز او باچنین تکلیفی به‌هدر می‌رود طبیعی است، ولی اندیشه‌های بـزرگ علوم از بسیاری راههای عجیب پدید می‌آیند. این زحمات‌که ظاهراً بدون پاداش بود، به‌یکی از عمیق‌ترین و فراگیرترین خدمات وی در ریاضیات محض منجر شد، که بدون آن، تـدوین نسبیت عام اینشتین‌کاملا غیرممکن بود.

کار مساحی گاوس به اندازه گیری دقیق مثلثهای بزرگ واقع برسطح زمین مـربوط می‌شد. این محرکی بودکـه وی را به‌افکار مندرج درمقالهٔ سال ۱۸۲۷ او به‌نام تحقیقات کلی راجع به‌سطوح‌خمیده[3] هدایت‌کند. وی دراین‌مقاله هندسهٔ دیفرانسیل ذاتـی رویه‌های خمیدهٔ عمومی را بنیان نهاد[4]. دراین اثر وی مختصات منحنی‌الخط u و v را روی یك‌سطح معرفی کرد و شکل دیفرانسیل درجهٔ دوم بنیادی بـرای عنصر طول قوس ds را بـه‌صورت $ds^۲=E\,du^۲+۲F\,du\,dv+G\,dv^۲$ به‌دست آورد، که امکان تعیین منحنی‌های ژئودزیك را فراهم می‌آورد؛ وی مفاهیم انحنای گاوسی و انحنای انتگرال را نیز بیان کـرد[5]. نتایج

---

1. Theoria Motus Corporum Coelestium
2. Hanover
3. Disquisitiones generales circa superficies curvas
۴. تـرجمهٔ انگلیسی این اثر توسط A. Hiltebeitel و J. Morehead تحت‌عنوان زیـر انتشار یافت،

«General Investigations of Curved Surfaces,» by the Raven Press, Hewlett, New York, 1965.

۵. این مفاهیم به‌زبان غیرفنی درکتاب زیر تشریح شده‌اند؛
C. Lanczos, «Albert Einstein and the Cosmic World Order,» chap. 4, Interscience-Wiley, New York, 1965.

اساسی مشخص وی عبارت بودند از قضیهٔ مشهور به قضیهٔ ممتاز[1]، که برطبق آن انحنای گاوسی تنها وابسته به مقادیر E، F، و G است، و بنابراین دراثر خمش تغییرناپذیراست؛ وقضیه گاوس-بونه[2] دربارهٔ انحنای انتگرالی درحالت مثلث ژئودزیك، که درشکل عمومی خود واقعیت اصلی هندسهٔ دیفرانسیل نوین است. گذشته از کشفهای مفصل وی، نکتهٔ اساسی بینش گاوس درکلمهٔ ذاتی نهفته است، زیرا وی نشان داد که چگونه می‌توان هندسهٔ یك رویه راتنها روی خود رویه وبدون هیچگونه توجهی به‌فضایی که درآن قرار می‌گیرد مطالعه کرد. برای روشنتر کردن این مطلب، فرض می‌کنیم که موجود دوبعدی با شعوری، ساکن رویه است وازبعد سوم ویا هرچیز دیگر خارج از رویه هیچ اطلاعی ندارد. هرگاه این موجود قادر به‌حرکت دراطراف خود، اندازه گیری فواصل واقع بررویه، وبه‌تعیین کوتاهترین مسیر (ژئودزیك) بین دونقطه باشد، قادر به‌اندازه گیری انحنای گاوسی درهر نقطه نیز هست و می‌تواند هندسه‌ای غنی از رویه را ایجاد کند واین هندسه اقلیدسی (مسطح) خواهد بود، اگر وتنها اگر انحنای گاوسی درهمه‌جا صفرباشد. تعمیم این مفاهیم به‌بیش‌از دوبعد راه را برای هندسهٔ ریمانی، آنالیز تانسوری، واندیشه‌های اینشتین باز می‌کند.

اثرعظیم دیگر او دراین دوران، مقالهٔ‌سال ۱۸۳۱ وی درمورد مانده‌های دومجذوری است. دراینجا وی برخی ازکشفهای پیشین خود درنظریهٔ اعداد را با کمك روش جدیدی، که همان برخورد کاملا جبری وی با اعداد مختلط است، تعمیم داد. وی این اعداد را به‌عنوان زوجهای مرتب از اعداد حقیقی تعریف کرد که عملیات جبری برای آنها به‌گونه‌ای مناسب تعریف شده‌اند، وبااین‌کار به‌ابهاماتی که هنوز دراین موضوع وجود داشت خاتمه داد، و راه را برای جبر وهندسهٔ فضاهای n بعدی بازکرد. ولی این درمقابل هدف اصلی وی، که تعمیم مفاهیم مربوط به‌نظریهٔ اعداد به‌قلمرو مختلط بود، جنبهٔ فرعی‌داشت. وی‌اعداد صحیح مختلط را به‌صورت $a+ib$ تعریف کرد، که درآن a، b اعداد صحیح معمولی هستند (این‌اعداد درحال حاضر اعداد صحیح گاوسی نامیده می‌شوند)؛ مفهوم جدیدی‌برای اعداد اول تعریف کرد که درآن ۳ همچنان عددی اول است، ولی $۵ = (۱ - ۲i)(۱ + ۲i)$ اول نیست، وقضیهٔ تجزیهٔ منحصر به‌فرد به عوامل اول را برای این اعداد صحیح و اول اثبات کرد. ایده‌های این مقاله راهگشای نظریهٔ اعداد جبری است، که ازآن زمان تاکنون دایماً درحال پیشرفت بوده است.[3]

از دههٔ ۱۸۳۰ به بعد، گاوس به شکلی فزاینده به‌فیزیك مشغول شد، وبه‌هرشاخه‌ای از فیزیك که دست می‌زد، آن را غنی می‌کرد. درنظریهٔ کشش سطحی، مفهوم بنیادی بقای انرژی را مطرح ساخت و اولین مسئلهٔ حساب تغییرات راکه شامل انتگرالی دوگانه‌باحدود

---

1. Theorema egregium

2. Bonnet

۳. مراجعه شود به

E. T. Bell, Gauss and the Early Development of Algebraic Numbers, *National Math., Mag.*, vol. 18, pp. 188-204, 219-233, 1944.

متغیر بود حل کرد. درعلم نورشناسی مفهوم فاصلهٔ کانونی دستگاهی از عدسیها را تعریف کرد و عدسیهای با زاویهٔ بازگاوسی را (که نسبتاً عاری از خطای رنگی است) برای عدسیهای شیئی تلسکوپ و دوربین اختراع کرد. او درحقیقت علم ژئومغناطیس[1] راپدیدآورد، وباهمکاری دوست وهمکارش ویلهلم وبر[2] یك رصدخانهٔ مغناطیسی عاری از آهن ساخت و با آن کار کرد، انجمن مغناطیس را برای گردآوری وچاپ مشاهداتی که در بسیاری از نقاط جهان به‌عمل می‌آید بنیان نهاد و تلگراف الکترومغناطیسی ومغناطیس سنج دورشته‌سیمی راابداع کرد. در کتاب معروف جیمز کلارك ماکسول درمورد الکتریسیته و مغناطیس (۱۸۷۳) بارها به‌کار گاوس ارجاع داده شده است. درمقدمهٔ این کتاب، ماکسول می‌گوید که گاوس «قدرت فکری عظیم خود را برای تدوین نظریهٔ مغناطیس و روشهای مشاهدهٔ آن به‌کار گرفت، وی نه‌تنها به دانش ما درمورد نظریهٔ جاذبه به‌مقیاسی عظیم افزود، بلکه تمامی علم مغناطیس را ازنظر ابزارهای به‌کار رفته، روشهای مشاهده، ومحاسبهٔ نتایج، بازسازی کرد، به‌طوری که یادداشتهای وی درمورد مغناطیس زمینی، برای همهٔ آنهایی که به اندازه‌گیری هریك از نیروهای موجود درطبیعت مشغول‌اند، می‌تواند به‌منزلهٔ مدلهایی از پژوهش فیزیکی قلمداد شود». در ۱۸۳۹ گاوس مقالهٔ بنیادی خود را درخصوص نظریهٔ عمومی نیروهای عکس مجذور منتشر کرد، که نظریهٔ پتانسیل را به‌عنوان رشته‌ای منسجم از ریاضیات تثبیت کرد[3]. طبق معمول، وی سالهای زیاد درخصوص این مطالب اندیشیده بود، و دربین کشفهای او، می‌توان از قضیهٔ دیورژانس درآنالیز برداری نوین (که قضیهٔ گاوس نیز نامیده می‌شود)، قضیهٔ اساسی مقدار متوسط برای توابع همساز وحکم بسیار نیرومندی که بعدها به «اصل دیریکله» شهرت‌یافت وسرانجام در ۱۸۹۹ توسط هیلبرت ثابت شد، نام برد.

تا اینجا بخش منتشر شده از کل دستاوردهای گاوس را بررسی کرده‌ایم، ولی قسمت چاپ نشده و خصوصی آنها نیز تقریباً به‌همان اندازه جالب‌اند. بسیاری از این آثار بعداز مرگش، پس‌از اینکه بخش عظیمی از مطالب یادداشتها و مکاتبات علمیش دقیقاً تجزیه و تحلیل گردیدند و درمجموعهٔ آثارش جای گرفتند، شناخته شدند. کتابچهٔ یادداشتهای علمی وی را قبلا ذکر کردیم. این کتابچهٔ کوچك ۱۹ صفحه‌ای، که یکی از گرانقدرترین مدارك درتاریخ ریاضی است، تا سال ۱۸۹۸ ناشناخته ماند، تا سرانجام بین‌کاغذهای خانوادگی وی نزد یکی‌از نوه‌های گاوس یافت شد. این کتابچه مربوط به دورهٔ سالهای ۱۷۹۶ تا ۱۸۱۴ و شامل ۱۴۶ حکم بسیارکوتاه از نتایج تفحصاتی است، که اغلب هفته‌ها یا ماهها

---

۱. علم خواص مغناطیسی زمین

2. Wilhelm Weber

۳. مقالهٔ زیر ازجرج گرین، گمنام مانده بود وتقریباً به‌طورکامل تا سال ۱۸۴۶ که مجدداً به‌چاپ رسید ناشناخته ماند،

«Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism»,(1828).

او را مشغول کرده بود[۱]. همهٔ این مطالب کاملا روشن می کند که چنانچه گاوس مطالبی را که به‌دست آورده بود و روی آنها بتفصیل کار کرده بود (ولی نزد خود نگهداشته بود) منتشر می کرد وهیچ کار دیگری انجام نمی‌داد بزرگترین ریاضی‌دان عصر خود می‌شد.

برای مثال، نظریهٔ توابع مختلط یکی از دستاوردهای اصلی ریاضیات قرن نوزدهم بود، ومطالب اصلی این رشته، قضیهٔ انتگرال کوشی (۱۸۲۸) و بسط تیلور ولورن یك تابع تحلیلی(۱۸۳۱ ، ۱۸۴۱)می باشند. درنامه‌ای که گاوس درسال ۱۸۱۱ به‌دوستش بسل نوشت، صریحاً صورت قضیهٔ کوشی را بیان می کند، وسپس تذکر می‌دهد «این قضیهٔ بسیار زیبایی است که اثبات نسبتاً سادهٔ آن‌را درفرصتی مناسب ارائه خواهم کرد. این قضیه درارتباط باحقایق زیبای دیگری است که مربوط به‌بسطهای سری هستند[۲]». به‌این ترتیب، گاوس سالها قبل‌ازآنهایی که رسماً به‌خاطر این یافته‌های مهم مشهور شدند، ازقضیهٔ کوشی آگاه بود و احتمالا از هردو بسط سری نیز اطلاع داشت. ولی به‌دلایلی «فرصت مناسب» برای نشر آنها هیچگاه پیدا نشد. یك توضیح ممکن دراین مورد را می‌توان دراظهارنظرهای وی درنامه‌ای یافت، که به فورکوش بویوئی[۳] نوشت. فورکوش بویوئی، دوست نزدیك سالهای دانشگاهیش بود که تاآخر عمر مکاتبهٔ خود را با وی حفظ کرد. دراین نامه می‌نویسد: «این نه‌دانش بلکه عمل یادگیری، ونه درچنگ خود داشتن بلکه عمل به‌دست‌آوردن است که موجب بیشترین لذت می گردد. وقتی مطلبی را روشن کردم وبه‌پایان رساندم، آنگاه آن‌را رها می کنم تا مجدداً وارد تاریکیها شوم». وی طبیعت سیاحی را داشت، که وقتی می‌تواند سفر دیگری‌راشروع کند، از صرف وقت درنوشتن خاطرات آخرین سیاحتش اکراه دارد. واقعیت این بودکه، گاوس بسیار نوشت، ولی برای نشر تمامی کشفهای بنیادی خود، به‌گونه‌ای که رضایت اورا جلب کند، به‌چندین عمر طولانی نیاز داشت.

مثال عمدهٔ دیگر، هندسهٔ غیراقلیدسی است، که ازلحاظ تأثیرش براذهان بشر متمدن باانقلاب کوپرنیك درنجوم مقایسه شده است. از زمان اقلیدس تا هنگام کودکی گاوس، اصول هندسهٔ اقلیدسی‌عموماً به‌عنوان ضروریات تفکرتلقی می‌شدند. ولی گرهی درساختمان هندسهٔ اقلیدسی وجود داشت که مدتهای مدیدکانون توجه‌گردیده بود: اصل مشهور به اصل توازی،که براساس آن ازهرنقطهٔ خارج‌ازیك خط مفروض، تنها یك خط می‌توان به‌موازات آن خط رسم کرد. به‌نظر می‌رسیدکه این اصل از سایر اصول مستقل نباشد، وبسیاری بدون توفیق سعی کرده بودند تا آن‌را به‌عنوان یك‌قضیه ثابت کنند. اکنون می‌دانیم که گاوس درسن ۱۵ سالگی به‌این تلاشها پیوست، و وی نیز با شکست مواجه گردید. ولی عدم توفیق او با دیگران تفاوت داشت، زیرا بزودی به‌این استنتاج تکان دهنده که ازچشم همهٔ پیشینیان او

---

۱. مراجعه شود به:

Gauss's «Werke,» vol. X., pp. 483-574, 1917.

2. «Werke,» vol. VIII, p. 91, 1900.

۳. Wolfgang Bolyai. نام این‌دانشمند مجارستانی‌درکشورهای اروپایی «ولفگانگ بولیه» تلفظ می‌شود.

پوشیده مانده بود دست‌یافت کـه هندسهٔ اقلیدسی تنها هندسهٔ ممکن نیست. او طی سالهای متمادی به‌طور متناوب به‌این افکار مشغول بود و درحدود سال ۱۸۲۰ قضایای اصلی هندسهٔ غیراقلیدسی را تدوین کرد (نام هندسه غیراقلیدسی نیز مـرهون اوست)[1]. ولی وی نتایجی راکه یافته‌بود آشکار نکرد، و درسالهای ۱۸۲۹ و ۱۸۳۲ لوباچفسکی و یانوش بویوئی[2] (پسر فورکوش بویوئی) کارهای مستقل خـود را دربارهٔ ایـن موضوع منتشر کردند. یك دلیل کاملا ساده برای سکوت گاوس دراین خصوص وجود دارد. جو فکری آن‌زمان آلمان کاملا تحت‌سیطرهٔ فلسفهٔ کانت بود، ویکی از اصول پایه‌ای نظام فلسفی مذکـور این بودکـه هندسهٔ اقلیدسی تنهاشیوهٔ تفکر دربارهٔ فضاست. گاوس می‌دانست که این عقیده کاملانادرست است واساس نظام‌کانتی ساختمانی‌سست است. ولی، وی برای زندگی خصوصی وآرام‌خود ارزش قایل بود، وبه‌خاطر اجتناب از اتلاف وقتش درمشاجـره بافلاسفه، آرامش خود را حفظ کرد. درسال ۱۸۲۹ به‌بسل چنین نوشت: «مـن احتمالا برای مدتی طولانی، و شایـد درتمام طول عمرم پژوهشهای گستردهٔ خودرا روی این موضوع (مبانی هندسه) به‌شکل قابل انتشار، درنخواهم آورد، زیرا، می‌ترسم اگر نظراتم را دراین‌باره به‌طور کامل اظهارکنم، دچار فریادهای بوئوشایی‌ها شوم[3]».

شبیه همین واقعه درنظریهٔ توابع بیضوی، کـه زمینه‌ای بسیار غنی درآنـالیز است و ابتدا درسال۱۸۲۷ به‌وسیلهٔ آبل وسپس درسالهای۱۸۲۸–۱۸۲۹ به‌وسیلهٔ یاکوبی[4] مطرح شد، نیز به‌وقوع پیوست. گاوس دراین زمینه هیچ‌چیزی منتشر نکرده بـود، وهیچ ادعایی نکرد، بنابراین هنگامی که تدریجاً معلوم شدکه وی به بسیاری از نتایج آبل و یاکوبی حتی قبل‌از تولد آنان دست یافته بود عالم ریاضی مملو ازتحیر شد. مرگ زودرس آبل درسال ۱۸۲۹، درسن بیست‌وشش‌سالگی موجب شدکه او از این‌خبرکوبنده بی‌اطلاع بماند،ولی یاکوبی ناگزیر بود این نومیدی را تحمل‌کند وبه کارش ادامـه دهد. حقایق تاحدی توسط خود یاکوبی روشن‌شد. درکتاب تحقیقات (مقالهٔ ۳۳۵)، عبارت مرموزی‌که درك مفهوم‌آن تنها با داشتن دانشی از توابع بیضوی میسر است، توجه یاکوبی را جلب کـرد. یاکوبی برای اینکه تردیدهای خودرا به‌یقین بدل سازد و درمورد آخـرین کشفهای خود با گاوس گفتگوکند، چندین‌بار به‌دیدن او رفت، وگاوس هر بار دست‌نویسهای‌مربوط به‌سی‌سال‌قبل‌را از میز خود بیرون می‌کشید، وآنچه راکـه یاکوبی تازه بـه وی نشان داده بود به‌او نشان می‌داد. عمق آزردگی‌خاطر یاکوبی بسهولت قـابل تصور است. گاوس درایـن مقطع از

---

۱. همهٔ آنچه راکه می‌دانیم او درمـورد مبانی هندسه نوشته است در کتاب زیـر از وی به‌چاپ رسیده است:

«Werke», vol. VIII, pp. 159-268, 1900

۲. Johann Bolyai -نام این ریاضیدان درکشورهای اروپایی «یوهان بولیه» تلفظ می‌شود. بوئوشا قبیله‌ای در یونان باستان بود که اهالیش به‌کودنی شهرت داشتند.

3.«Werke». vol. VIII, p, 200.

4. Jacobi

زندگی خود به‌شهرت بی‌اعتنا بود و در واقع مایل بود که از فشار تهیهٔ رساله درمورد مطلبی که مدتها قبل طرح کرده بود، خلاصی یابد. یاکوبی بعداز ملاقات یك‌هفته‌ای خود با گاوس درسال ۱۸۴۰، به‌برادرش نوشت «اگر نجوم عملی این نابغهٔ عظیم را ازمسیر علمی درخشانش منحرف نکرده بود، ریاضیات اکنون در وضعیت کاملا متفاوتی می‌بود».

گاوس ریاضی‌دان بزرگ، چنین کسی بود. اومرزهای دستاوردهای ممکن برای‌مردان نابغهٔ معمولی را درموارد آنچنان متعددی درنوردید که گاهی این‌توهم به‌انسان دست‌می‌دهد که گاوس از گونه‌ای متعالی‌تر بود.

پیوست د . چندجمله‌ایهای چبیشف و خاصیت مینی‌ماکس

درتمرین ۳۰-۶ چندجمله‌ایهای چبیشف $T_n(x)$ را برحسب تابع فوق هندسی به‌وسیلهٔ رابطهٔ $T_n(x)=F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$ تعریف کردیم، که درآن $n=0, 1, 2, \ldots$.
لازم به‌تذکر نیست، که این تعریف به‌خودی‌خود عملا مبین‌هیچ‌چیز نیست، زیرا سؤال مهم این است که: این چندجمله‌ایها به‌چه‌کار می‌آیند؟ اکنون سعی خواهیم کرد به‌این سؤال‌پاسخ گوییم.

بهتر است مطلب را با به‌کار گرفتن تعریف دیگری از $T_n(x)$ آغاز کنیم. بعداً خواهیم دید که این دوتعریف با یکدیگر سازگارند. نقطهٔ آغاز، این حقیقت است که اگر n یك‌عددصحیح غیرمنفی باشد، آنگاه براساس فرمول دوموآور[1] درنظریهٔ اعداد مختلط‌داریم

$$\begin{aligned}\cos n\theta+i\sin n\theta&=(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\&=\cos^n\theta+n\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta)\\&\quad+\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2+\cdots+(i\sin\theta)^n\end{aligned}\qquad(1)$$

ومی‌بینیم که $\cos n\theta$ قسمت حقیقی مجموع طرف راست است. حال جملات حقیقی دراین مجموع دقیقاً آنهایی که شامل جملات توان زوج $i\sin\theta$ هستند، می‌باشند؛و ازآنجا که $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$، روشن است که $\cos n\theta$ یك تابع چندجمله‌ای از $\cos\theta$ است.از این موضوع به‌عنوان تعریف‌چندجمله‌ای nام چبیشف استفاده می‌کنیم: چندجمله‌ای $T_n(x)$ با رابطهٔ زیرتعریف می‌شود:

$$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)\qquad(2)$$

چون $T_n(x)$ یك چندجمله‌ای است، بنابراین برای‌کلیهٔ مقادیر x تعریف شده است. اما، هرگاه x رابه‌فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ مقید کنیم‌وبنویسیم $x=\cos\theta$، که درآن $0\leqslant\theta\leqslant\pi$، آنگاه از رابطهٔ (۲)، رابطهٔ

---

1. de Moivre

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x) \tag{۳}$$

به‌دست می‌آید. باهمین محدودیتها می‌توان $T_n(x)$ را به‌شکل غریب دیگری به‌دست‌آورد، زیرا با جمع دوفرمول

$$\cos n\theta \pm i\sin n\theta = (\cos\theta \pm i\sin\theta)^n$$

خواهیم داشت،

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n]$$

$$= \frac{1}{2}[(\cos\theta + i\sqrt{1-\cos^2\theta})^n + (\cos\theta - i\sqrt{1-\cos^2\theta})^n]$$

$$= \frac{1}{2}[(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1})^n + (\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 1})^n],$$

بنابراین

$$T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n] \tag{۴}$$

نمایش صریح دیگری از $T_n(x)$ را می‌توان با استفاده از فرمول بسط دوجمله‌ای به‌دست آورد، که برطبق آن رابطهٔ (۱) به‌شکل

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cos^{n-m}\theta(i\sin\theta)^m$$

درمی‌آید. قبلا ملاحظه کرده‌ایم که جملات حقیقی دراین مجموع با مقادیر زوج m، یعنی با $m = 2k$، متناظرند، که درآن $k = 0, 1, 2, \ldots, [n/2]$.[1] چون

$$(i\sin\theta)^m = (i\sin\theta)^{2k} = (-1)^k(1-\cos^2\theta)^k = (\cos^2\theta - 1)^k$$

خواهیم داشت

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta(\cos^2\theta - 1)^k,$$

وبنابراین

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}x^{n-2k}(x^2-1)^k \tag{۵}$$

از رابطهٔ (۴) روشن می‌شود که $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$؛ ولی برای مقادیر دیگر n، $T_n(x)$ را بآسانی می‌توان با استفاده از یك فرمول بازگشتی محاسبه کرد. اگر بنویسیم

---

۱. نماد $[n/2]$علامت متداول برای بزرگترین عددصحیح کوچکتر یا مساوی $n/2$ است.

$$\cos n\theta = \cos[\theta + (n-1)\theta] = \cos\theta\cos(n-1)\theta - \sin\theta\sin(n-1)\theta$$

و

$$\cos(n-2)\theta = \cos[-\theta + (n-1)\theta]$$
$$= \cos\theta\cos(n-1)\theta + \sin\theta\sin(n-1)\theta$$

آنگاه نتیجه خواهد شد

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta$$

اگر از رابطهٔ (۲) استفاده کنیم و به جای $\cos\theta$ ، x بگذاریم آنگاه این اتحاد مثلثاتی، فرمول بازگشتی مطلوب را به‌دست خواهد داد:

$$T_n(x) + T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x) \qquad (6)$$

از $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$ شروع می‌کنیم و از (۶) روابط $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ، $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ ، $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ، وغیره را به‌دست می‌آوریم.

شکل فوق هندسی. برای برقراری ارتباطی بین معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف و چندجمله‌ایهای چبیشف که هم‌اکنون آنها را تعریف کردیم، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هرگاه متغیر x را بوسیلهٔ $x = \cos\theta$ به θ تغییر دهیم، چندجمله‌ای $y = T_n(x)$ به‌تابع $y = \cos n\theta$ تبدیل می‌شود. حال تابع $y = \cos n\theta$ بوضوح جوابی ازمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2y = 0 \qquad (7)$$

است، ومحاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که اگر متغیر θ را مجدداً به x تغییر دهیم، معادلهٔ (۷) به‌معادلهٔ چبیشف تبدیل می‌شود

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0 \qquad (8)$$

به‌این ترتیب می‌دانیم که $y = T_n(x)$ یك جواب چندجمله‌ای برای (۸) است. ولی براساس تمرین ۳۰ـ۶ تنها جوابهای چندجمله‌ای (۸) به‌صورت $cF\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$ هستند؛ وچون براساس (۴)، برای هرمقدار n داریم $T_n(1) = 1$ و $cF\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = c$ نتیجه می‌گیریم که

$$T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \qquad (9)$$

تعامد. یکی ازمهم‌ترین خواص توابع $y_n(\theta) = \cos n\theta$ برای مقادیر مختلف n تعامد آنها درفاصلهٔ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ، یعنی برقراری رابطهٔ زیر است:

$$\int_{0}^{\pi} y_m y_n \, d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0 \quad , \quad m \neq n \text{ اگر} \qquad (10)$$

برای اثبات این مطلب، معادلات دیفرانسیلی‌را، که توابع $y_m = \cos m\theta$ و $y_n = \cos n\theta$ درآنها صدق می‌کنند، می‌نویسیم:

$$y''_m + m^2 y_m = 0 \quad \text{و} \quad y''_n + n^2 y_n = 0$$

با ضرب اولین معادله در y_n و دومین معادله در y_m و کم کردن آنها ازهم خواهیم داشت

$$\frac{d}{d\theta}(y'_m y_n - y'_n y_m) + (m^2 - n^2) y_m y_n = 0$$

و رابطهٔ (۱۰) را می‌توان باانتگرال‌گیری هردوجملهٔ این‌معادله از 0 تا π بلافاصله به‌دست آورد، زیرا y'_m و y'_n هردو دراین نقاط انتهایی صفر می‌شوند و $m^2 - n^2 \neq 0$.

هنگامی که در رابطهٔ(۱۰) متغیراز θ به $x = \cos\theta$ تغییر کند، آنگاه (۱۰) به‌صورت

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \, , \qquad m \neq n \text{ اگر} \qquad (11)$$

درخواهد آمد. این واقعیت را معمولا به‌این‌صورت بیان می‌کنند که چندجمله‌ایهای چبیشف درفاصلهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ نسبت به تابع وزن $(1-x^2)^{-1/2}$ متعامدند. درحالت $m = n$، خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \, , & n \neq 0 \text{ اگر} \\ \pi \, , & n = 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (12)$$

این‌احکام اخیر از

$$\int_{0}^{\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \, , & n \neq 0 \text{ اگر} \\ \pi \, , & n = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

با انتگرال‌گیری مستقیم بسادگی به دست می‌آیند.

درست همان‌گونه که درپیوست ب درمورد چندجمله‌ایهای هرمیت گفته شد، ازخواص تعامد (۱۱) و (۱۲) می‌توان برای بسط تابع «دلخواه» $f(x)$ به‌صورت سری چبیشف استفاده کرد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \qquad (13)$$

همان دستورالعمل‌صوری قبلی مقادیر این ضرایب را به‌دست می‌دهد

$$a_{\circ}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^{2}}}dx \qquad (14)$$

و برای $n>0$

$$a_{n}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{n}(x)f(x)}{\sqrt{1-x^{2}}}dx \qquad (15)$$

و بازهم مسئلهٔ حقیقی ریاضی، یافتن شرایطی است که تحت آن سری (۱۳) که a_nها درآن توسط روابط (۱۴) و (۱۵) تعریف شده‌اند در واقع به $f(x)$ میل می‌کند.

خاصیت مینی‌ماکس. مسئلهٔ چبیشف که اکنون موردنظر است این‌است که ببینیم باچه دقتی می‌توان تابع x^n را در فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ با چندجمله‌ایهایی از درجهٔ $n-1$ به‌صورت $a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_{\circ}$ تقریب زد؛ یعنی ببینیم با انتخاب مقادیرمناسب ضرایب، مقدار

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x^{n}-a_{n-1}x^{n-1}-\dots-a_{1}x-a_{\circ}|$$

را تاچه‌حد می‌توان کوچك‌کرد. این به‌نوبهٔ خود معادل مسئلهٔ زیر است: مینیمم‌کردن‌عدد

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|$$

دربین همهٔ چندجمله‌ایهای $P(x)=x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_{1}x+a_{\circ}$ از درجهٔ n که ضریب‌بزرگترین توان‌آن‌یك‌است، و درصورت‌امکان‌تعیین یك چندجمله‌ای‌که این‌مقدارمینیمم را به‌دست می‌دهد.

از $T_1(x)=x$ وفرمول بازگشتی (۶) روشن است‌که وقتی $n>0$، ضریب x^n در $T_n(x)$ برابر با 2^{n-1} است، وبنابراین ضریب x^n درچندجمله‌ایهای $2^{1-n}T_n(x)$ برابر یك است. این چندجمله‌ایها مسئلهٔ چبیشف را به‌طورکامل حل می‌کنند، به‌این‌معنی‌که دارای خاصیت قابل‌توجه زیر هستند.

خاصیت مینی‌ماکس. دربین تمام چند جمله‌ایهای $P(x)$ از درجهٔ $n>0$ که ضریب x^n آنها برابر یك باشد، تابع $2^{1-n}T_n(x)$ در فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ دارای کمترین انحراف از صفر است:

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|\geqslant\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|2^{1-n}T_{n}(x)|=2^{1-n} \qquad (16)$$

اثبات. اولا، رابطهٔ (۱۶) بلافاصله از

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|T_{n}(x)|=\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}|\cos n\theta|=1$$

نتیجه‌می‌گردد. برای‌تکمیل استدلال فرض می‌کنیم که $P(x)$ یك چندجمله‌ای ازنوع‌مذکور باشدکه برای آن

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| < 2^{1-n} \qquad (17)$$

و از این فرض به‌تناقضی می‌رسیم. مطلب را با ذکر این نکته آغاز می کنیم که چندجمله‌ای $2^{1-n}T_n(x) = 2^{1-n}\cos n\theta$ متناوباً مقادیر مثبت‌ومنفی $2^{1-n}, -2^{1-n}, 2^{1-n}, \ldots, \pm 2^{1-n}$ را در $n+1$ نقطه‌ای از x که متناظر بامقادیر 0 ، π/n ، $2\pi/n$ ، ... ، $n\pi/n$ بـرای θ هستند، اختیار می کند. مطابق با فرض (۱۷)، تابع $Q(x) = 2^{1-n}T_n(x) - P(x)$ دراین نقاط دارای همان علامت $2^{1-n}T_n(x)$ است که بنا براین باید حداقل دارای n صفردرفاصلهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ باشد. ولی این غیر ممکن است چـرا که تابع $Q(x)$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $n-1$ است که متحد باصفر نیست.

دراین بررسی خیلی مختصر متأسفانه معلوم نیست که خاصیت مینی‌ماکس از کجاآمده است، وهیچ‌انگیزه و رهنمودی وجود ندارد کـه متوجه شویم چـرا چندجمله‌ایهای چبیشف به‌این‌طریق غیرعادی رفتار می کنند. امیدواریم که خـوانند‌ه این تضمین مارا قبول کند کـه در زمینهٔ وسیع‌تر ایده‌های بدیع چبیشف این خاصیت شگفت‌انگیزکاملا طبیعی است[1]. برای افرادی که علاقمندند برای ریاضیاتی که فرامی گیرند کاربردهای مشخص بیابند، بایداضافه کنیم که خاصیت‌مینی‌ماکس در رابطهٔ نزدیکی است باموقعیت‌مهمی که چندجمله‌ایهای‌چبیشف درآنالیز عددی معاصر دارند.

یادداشت دربارهٔ چبیشف. پـافنوتـی لـوویچ چبیشف[2] (۱۸۲۱-۱۸۹۴) برجسته‌ترین ریاضیدان قـرن نوزدهم روسیه بـود. وی بـا هندسه‌دان مشهور روسی لوباچفسکی (۱۷۹۳-۱۸۵۶) معاصر بـود، ولی آثارش تأثیر عمیق‌تری در سراسر اروپای غربی داشت وبه‌عنوان پایه‌گذار مکتب عظیم ریاضی کـه درقرن گذشته در روسیه شکوفا گشته است، بشمار می‌آید.

وی درخردسالی مجذوب اسباب‌بـازیهای مکانیکی گـردید، وظاهراً درابتدا به‌علت پی‌بردن‌به‌اهمیت هندسه در درك طرزکار ماشین‌ها به ریاضیات جلب شد. بعداز سالهای دانشجوییش درمسکو، استاد ریاضی دانشگاه سن‌پترزبـورگ شد، و ایـن سمت را تا هنگام بازنشستگی حفظ کرد. پدر وی جزو اشراف روسیه بود، ولی‌بعداز قحطی ۱۸۴۰ دارایی خانوادگی آنچنان کم شد که چبیشف مجبور شد تا آخر عمر

---

۱. از دانشجویانی‌که شکاکیت‌شان بسادگی برطرف نمی‌شود وبحق ازپذیرش چنین تضمین‌هایی بدون بررسی‌شخصی، امتناع می‌ورزند دعوت می‌شودکه به‌مراجع زیر مراجعه‌کنند:

N. I. Achieser, «Theory of Approximation,» Ungar, New York, 1956;
E. W. Cheney, «Introduction to Approximation Theory,» McGraw-Hill, New York, 1966;

یا

G. G. Lorentz, «Approximation of Functions,» Holt, New York, 1966.

2. Pafnuty Lvovich Chebyshev

به‌قناعت روی آورد و هرگز ازدواج نکرد. وی بخش عمده‌ای از درآمد اندك خود را صرف مدل‌های مکانیکی و مسافرتهای گاه و بیگاه به‌اروپای غربی می‌کرد، که درآنجا بویژه از دیدن آسیابهای بادی وماشینهای بخار ونظایر آنها لذت‌می‌برد.

چبیشف ریاضیدانی جامع بودکه استعداد نادری درحل مسائل مشکل ریاضی به‌کمك روشهای مقدماتی داشت. اکثر تلاش وی‌صرف ریاضیات محض گردید، ولی آنچنان‌که ازگفتهٔ زیرین وی مشهود است به کاربردهای عملی آثارش نیز توجه داشت: «جداکردن ریاضیات از خواسته‌های عملی علوم اصرار درعقیم کردن گاو ماده با جداکردن از گاو نر است».وی در زمینه‌های بسیاری‌کارکرد، ولی مهمترین دستاوردهایش در زمینهٔ احتمالات، نظریهٔ‌اعداد،وتقریب‌توابع بود (که‌به‌علت‌علاقه‌اش به دستگاههای ماشینی به‌آن رهنمون گردید).

وی‌دراحتمالات، مفاهیم‌امید ریاضی و واریانس‌را برای‌مجموعها و واسطه‌های حسابی متغیرهای تصادفی مطرح ساخت، واثبات زیبا و ساده‌ای برای قانون اعداد بزرگ مبتنی برآنچه اکنون‌به‌نامساوی چبیشف مشهور است ارائه‌کرد، و درخصوص قضیهٔ حد مرکزی بررسیهای گسترده‌ای انجام داد. او به‌عنوان پدر معنوی سلسله‌ای طولانی از دانشمندان مشهور روسی ازقبیل آ. آ. مارکوف، س. ن. برنشتاین، آ. ن. کولموگوروف، آ.ی. خینچین[1]، و دیگران‌که درپیشبرد نظریهٔ‌ریاضی‌احتمالات سهم داشتند تلقی می‌گردد.

چبیشف دراواخر دهٔ ۱۸۴۰ درآماده کردن برخی آثار اویلر برای انتشار همکاری‌کرد. به‌نظر می‌رسدکه این‌کار سبب بذل توجه وی به‌نظریهٔ اعداد، وبویژه به‌مسئلهٔ بسیار مشکل توزیع اعداد اول، شده باشد. همان‌طورکه خواننده احتمالا می‌داند هرعدد اول عدد صحیحی مانند $p>1$ است‌که برهیچ‌عددی جز یك‌وخودش بخش‌پذیر نیست. بآسانی دیده می‌شود که چندتای اول این اعداد عبارت‌اند از
۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ...
روشن است‌که توزیع اعداد اول دربین اعداد صحیح‌مثبت تقریباً نامنظم است؛ زیرا هرچه جلوتر برویم، به‌نظر می‌آید که این اعداد با فراوانی کمتر وکمتری ظاهر می‌شوند، ولی بازهم اعداد اول‌متوالی بسیاری‌وجود دارندکه بین آنها تنها یك عدد زوج وجود دارد. مسئلهٔ یافتن قانون حاکم برچگونگی وقوع این اعداد ـ و دانستن دلیل آن ـ یکی از مسائلی است‌که صدها سال‌کنجکاوی دانشمندان را برانگیخته است. درسال ۱۷۵۱ اویلر عدم موفقیت خود دراین خصوص را چنین بیان کرد: «ریاضیدانان تا به‌امروز به‌عبث‌کوشیده‌اند نظم وترتیبی در دنبالهٔ اعداد اول بیابند، و دلایلی براین باور داریم‌که ذهن بشری هیچگاه این راز را کشف نخواهدکرد.»

کوششهای بسیاری برای یافتن فرمول ساده‌ای برای n امین عدد اول و تعداد دقیق اعداد اول واقع دربین اولین n عددصحیح و مثبت صورت‌گرفته است. همهٔ این

1. A. A. Markov, S. N. Bernstein, A. N. Kolmogorov, A. Y. Khinchin

گونه تلاشها با شکست مواجه شده‌اند، و پیشرفت واقعی تنها هنگامی حاصل گردید که ریاضیدانان به‌جای روش قبلی، به‌جستجوی اطلاعاتی درمورد توزیع متوسط اعداد اول دربین اعداد صحیح و مثبت پرداختند. متداول است که تعداد اعداد اول کوچکتر از عدد مثبت x یا مساوی با آن را با $\pi(x)$ نمایش دهیم. به‌این‌ترتیب $\pi(۱)=۰$، $\pi(۲)=۱$، $\pi(۳)=۲$، $\pi(\pi)=۲$، $\pi(۴)=۲$، الی آخر. گاوس در اوان جوانی $\pi(x)$ را به‌طور تجربی مطالعه کرد، و هدف او یافتن تابع ساده‌ای بود که با خطای نسبتاً کمی آن‌را برای مقادیر بزرگ x تقریب کند. وی براساس مشاهدات خود (شاید درسن چهارده یا پانزده سالگی) حدس زد که تابع $x/\log x$ تابع تقریب‌کننده مناسبی است، به‌این‌معنی که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=۱ \qquad (۱۸)$$

این‌حکم همان قضیهٔ اعداد اول مشهور است، وتا آنجا که معلوم است، گاوس هیچگاه نتوانست حتی قسمتی‌از اثبات آن را عرضه کند.

چبیشف بی‌اطلاع از حدس گاوس، اولین ریاضیدانی بود که به‌یك نتیجه‌گیری محکم درمورد این مسئله دست یافت. وی در ۱۸۴۸ و ۱۸۵۰ ثابت کرد که برای همهٔ مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ x

$$۰٫۹۲۱۳\ldots<\frac{\pi(x)}{x/\log x}<۱٫۱۰۵۵\ldots \qquad (۱۹)$$

ونیز ثابت کرد که درصورت وجود حد (۱۸) این حد باید برابر یك باشد[۱]. به‌عنوان نتیجهٔ جنبی این کار، وی اصل برتران را نیز ثابت کرد: برای هرعدد صحیح $n\geqslant ۱$ یك عدد اول p موجود است به‌طوری که $n<p\leqslant ۲n$. تلاشهای چبیشف وی را به اثبات نهایی قضیهٔ اعداد اول رهنمون نکرد (این امر درسال ۱۸۹۶ به‌وقوع پیوست)، ولی باعث تشویق بسیاری از ریاضیدانان دیگر شد تا کار روی این مسئله را دنبال کنند. درپیوست ه، در یادداشت مربوط به ریمان به‌این موضوع بازخواهیم گشت.

پیوست ه. معادلهٔ ریمان

هدف ما دراین پیوست درك ساختمان معادلهٔ فوق هندسی گاوس است

$$x(۱-x)y''+[c-(a+b+۱)x]y'-aby=۰. \qquad (۱)$$

دربخشهای ۳۰ و ۳۱ دیدیم که این‌معادله دقیقاً سه‌نقطهٔ غیرعادی منظم در $x=۰$، $x=۱$، و $x=\infty$ دارد، ونیز حداقل یکی‌از توانها درهریك ازنقاط $x=۰$ و $x=۱$ صفر است.

---

۱. عدد واقع درطرف چپ (۱۹)، $A=\log ۲^{۱/۲}\times ۳^{۱/۳}\times ۵^{۱/۵}\times ۳۰^{-۱/۳۰}$، و عدد واقع درطرف راست $۶A/۵$ است.

ثابت خواهیم کرد که با این خواص معادلهٔ (۱) به‌طور کامل تعیین می‌شود، به‌این‌معنا که هرگاه این فرضها را درمعادلهٔ عمومی

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (۲)$$

به‌کارگیریم، آنگاه (۲) لزوماً به‌شکل (۱) خواهد بود.

مطلب را با یادآوری این‌نکته از بخش ۳۱ آغاز می‌کنیم که هرگاه متغیر مستقل در (۲) از x به $t=1/x$ تغییر داده شود، آنگاه (۲) به

$$y''+\left[\frac{2}{t}-\frac{P(1/t)}{t^2}\right]y'+\frac{Q(1/t)}{t^4}y=0 \qquad (۳)$$

تبدیل می‌گردد، که پریم‌ها نمایش دهندهٔ مشتق نسبت به t هستند. از معادلهٔ (۳) روشن می‌شود که $x=\infty$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم (۲) خواهد بود هرگاه این نقطه، نقطهٔ عادی معادله نباشد، و توابع

$$\frac{1}{t}P\left(\frac{1}{t}\right) \quad و \quad \frac{1}{t^2}Q\left(\frac{1}{t}\right)$$

هردو در $t=0$ تحلیلی باشند.

اکنون به‌طور صریح فرض می‌کنیم که (۲) دارای نقاط غیرعادی منظم $x=0$، $x=1$، و $x=\infty$ است وهمهٔ نقاط دیگر عادی هستند. درنتیجه $xP(x)$ در $x=0$ و $(x-1)P(x)$ در $x=1$ تحلیلی است، ونیز تابع $x(x-1)P(x)$ برای کلیهٔ مقادیر متناهی x تحلیلی است:

$$x(x-1)P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (۴)$$

اگر جایگزینی $x=1/t$ را انجام دهیم، آنگاه (۴) به

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)P\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{t}\right)^n$$

تبدیل می‌شود، بنابراین

$$\frac{1}{t}P\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{t}\right)^n=\frac{1}{1-t}\left(a_0t+a_1+\frac{a_2}{t}+\dots\right)$$

چون $x=\infty$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم (۲) است، این تابع باید در $t=0$ تحلیلی باشد. نتیجه می‌گیریم که $a_2=a_3=\dots=0$، وبنابراین (۴) چنین به‌دست می‌دهد

$$P(x)=\frac{a_0+a_1x}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1} \qquad (۵)$$

که درآن A و B اعدادی ثابت هستند. همین‌طور، تابع $x^2(1-x)^2Q(x)$ برای تمامی مقادیر متناهی x تحلیلی است، بنابراین

$$x^{2}(x-1)^{2}Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

$$\frac{1}{t^{2}}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2}Q\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{t}\right)^{n}$$

و

$$\frac{1}{t^{2}}Q\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t^{2}}{(1-t)^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{t}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{(1-t)^{2}}\left(b_0 t^{2}+b_1 t+b_2+\frac{b_3}{t}+\cdots\right) \qquad (6)$$

مانند گذشته، فرض اینکه $x=\infty$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم (۲) است، به‌این‌نتیجه منتهی می‌شود که (۶) باید در $t=0$ تحلیلی باشد، وبنا براین $b_3=b_4=\ldots=0$ و

$$Q(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^{2}}{x^{2}(x-1)^{2}}=\frac{C}{x}+\frac{D}{x^{2}}+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{(x-1)^{2}}. \qquad (7)$$

اکنون کراندار بودن (۶) درنزدیکی $t=0$ به‌این مفهوم است که برای مقادیر بزرگ x، $x^{2}Q(x)$ کراندار است، بنابراین

$$x^{2}\left(\frac{C}{x}+\frac{E}{x-1}\right)=x^{2}\left[\frac{(C+E)x-C}{x(x-1)}\right]$$

نیز کراندار است و $C+E=0$. این امر به‌ما امکان می‌دهد که (۷) را به‌صورت

$$Q(x)=\frac{D}{x^{2}}+\frac{F}{(x-1)^{2}}-\frac{C}{x(x-1)} \qquad (8)$$

بنویسیم، و براساس روابط (۵) و (۸)، معادلهٔ (۲) به‌شکل

$$y''+\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\right)y'+\left[\frac{D}{x^{2}}+\frac{F}{(x-1)^{2}}-\frac{C}{x(x-1)}\right]y=0 \qquad (9)$$

درمی‌آید. اکنون نماهای مربوط به‌نقاط غیرعادی منظم ۰ ، ۱ ، و ∞ را بترتیب با α_1 و α_2 ، β_1 و β_2 ، γ_1 و γ_2 نشان می‌دهیم. این اعداد ریشه‌های معادلات شاخص در این سه نقطه‌اند:

$$m(m-1)+Am+D=0$$

$$m(m-1)+Bm+F=0$$

$$m(m-1)+(2-A-B)m+(D+F-C)=0$$

دومعادلهٔ اول این معادلات را می‌توان مستقیماً با بررسی (۹) نوشت، ولی، به‌دست آوردن

سومین معادله به‌مقدار کمی محاسبهٔ مبتنی بر (۳) نیاز دارد. هر گاه این معادلات را به‌شکل

$$m^{2}+(A-1)m+D=0$$
$$m^{2}+(B-1)m+F=0$$
$$m^{2}+(1-A-B)m+(D+F-C)=0$$

بنویسیم، آنگاه به کمك روابط شناخته شده‌ای که ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را با ضرایب آن ربط می‌دهند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2&=1-A\,, & \alpha_1\alpha_2&=D \\ \beta_1+\beta_2&=1-B\,, & \beta_1\beta_2&=F \\ \gamma_1+\gamma_2&=A+B-1\,, & \gamma_1\gamma_2&=D+F-C \end{aligned} \tag{10}$$

از ستون اول روشن می‌شود که

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1 \tag{11}$$

و با به‌کاربردن (۱۰)، معادلهٔ (۹) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$y''+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{x}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{x-1}\right)y'$$
$$+\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{x^2}+\frac{\beta_1\beta_2}{(x-1)^2}+\frac{\gamma_1\gamma_2-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}{x(x-1)}\right]y=0\,. \tag{12}$$

این معادله را معادلهٔ ریمان نامند، و (۱۱) به اتحاد ریمان مشهور است.

مضمون کیفی این استنتاج قابل توجه را می‌توان به‌شرح زیر بیان کـرد: شکل دقیق (۲) به‌طور کامل توسط این شرط که این معادله صرفاً دارای سه نقطهٔ منفرد منظم در $x=0$، $x=1$ و $x=\infty$ باشد و با مشخص کردن مقادیر نماهای آن درهـریك از این نقاط تعیین می گردد.

اکنون اگر این شرط اضافی را که حداقل یك‌نما درهریك ازنقاط $x=0$ و $x=1$ صفر باشد،مثلا $\alpha_1=\beta_1=0$،اعمال کنیم، آنگاه با مختصری ساده‌کردن و با کمك (۱۱)، معادلهٔ ریمان به

$$x(1-x)y''+[(1-\alpha_2)-(\gamma_1+\gamma_2+1)x]y'-\gamma_1\gamma_2 y=0$$

تبدیل مـی‌شود، کـه با استفاده از علامتهای متداول $a=\gamma_1$، $b=\gamma_2$، و $c=1-\alpha_2$ بوضوح به‌معادله گاوس (۱) بدل می گـردد. به‌همین دلیل گاهی معادلهٔ (۱۲)، معادلهٔ فوق هندسی تعمیم یافته نامیده می‌شود.

این نتایج صرفاً گامهای اولیهٔ نظریهٔ گسترده معادلات دیفرانسیل است که توسط ریمان بنیان نهاده شد. یکی از اهداف ایـن نظریه آن‌است که به‌طریقی تاحـد ممکن ساده، همهٔ معادلات دیفرانسیلی را مشخص کنیم که جـوابهای آنان برحسب تابع فـوق هندسی گاوس

قابل بیان است. هدف دیگر دست‌یافتن به‌یک دسته‌بندی منظم از کلیهٔ معادلات دیفرانسیل با ضرایب گویا، برحسب تعداد و ماهیت‌نقاط غیرعادی این‌معادلات‌است. واقعیت شگفت‌انگیزی که از این دسته‌بندی پدیدار می‌شود، آن‌است که در واقع تمامی چنین معادلاتـی راکه در ریاضی‌ـفیزیک ظاهر می‌شوند می‌توان از طریق تلاقی، از یک معادلهٔ واحد با پنج نقطهٔ غیر عادی منظم که در آنها تفاوت بین نماها درهریک از نقاط ۱/۲ است، به‌دست‌آورد[۱].

یادداشت دربارهٔ ریمان. هیچکدام از متفکران گذشته، در ریاضیات قرن‌بیستم تأثیری ژرفتراز برنهارد ریمان[۲] (۱۸۲۶ـ۱۸۶۶) نداشته‌اند. وی فرزند یک کشیش فقیر روستایی درشمال آلمان بود. آثار اویلر و لژاندر را هنگامی مطالعه کردکـه هنوز در دبیرستان به‌سر می‌برد، وگفته می‌شودکـه رسالهٔ لژاندر را دربارهٔ نظریـهٔ اعداد درکمتراز یکهفته‌کاملا درک کرد.ولی وی خجول و فروتن بـود، و از استعداد فوق‌العادهٔ خود اطلاع چندانی نداشت، بنابـراین درسن ۱۹ سالگی وارد دانشگاه گوتینگن شد تابرای رضای‌خاطر پدرش الهیات بخواند وهمانند پدرش کشیش‌شود. خوشبختانه این لقمهٔ لذیذ ازگلویش پایین نرفت، وبانظر مـوافق پدرش، به ریاضی تغییر رشته داد.

حضورگاوس‌افسانه‌ای‌خودبه‌خودگوتینگن رابه‌مرکز جهان ریاضی تبدیل کرده بود. ولی گاوس ـبخصوص برای دانشجویان تازه واردـ دور از دسترس بود، وتنها بعداز گذشت یک سال ریمان این محیط ناخوشایند را ترک‌گفت وبه دانشگاه برلین رفت. درآنجا دیریکله ویاکوبی به او دوستانه توجه‌کردند و او مطالب زیـادی از هردوی آنان فراگرفت. دوسال بعد به‌گوتینگن بازگشت و درآنجا درجهٔ دکترایش را درسال ۱۸۵۱ اخذکرد. درخلال هشت‌سال بعدازآن به‌فقر جانکاهی دچار بود و معظم‌ترین آثارش راخلق‌کرد. درسال۱۸۵۴ به‌سمت «مدرس بدون حقوق»، که‌درآن زمان اولین سمت دانشگاهی محسوب می‌شد، منصوب‌گردید. گاوس درسال ۱۸۵۵ درگذشت، و از دیریکله به‌عنوان جـانشین وی بـه گوتینگن دعوت شد. دیـریکله به‌هرطریقی‌که می‌توانست ریمان را یـاری داد، ابتدا بااختصاص مستمری اندکـی

---

۱. درک‌کاملی از این بحثهای پیشرفته‌تر نیازمند اطلاعاتی درمورد اصول عمدهٔ آنالیز مختلط است. بااین وجود، خواننده‌ای‌که این اطلاعات را در دست نداشته باشد مـی‌تواند از مـراجع زیر برداشتهای مفیدی داشته باشد:

E. T. Whittaker and G. N. Watson, «Modern Analysis,» pp. 203-208, Cambridge, London, 1935;

یا

E. D. Rainville, «Intermediate Differential Equations,» chap. 6, Macmillan, New York. 1964.

2. Bernhard Riemann

(درحدود یک‌دهم حقوق یک استاد)، وسپس با ارتقاء وی به‌سمت استادیاری. درسال ۱۸۵۹ وی نیز درگذشت، و ریمان به‌عنوان استاد به‌جای دیریکله منصوب گردید. سالهای فقر و تنگدستی ریمان به‌پایان رسید، اما دیگر سلامت وی از دست‌رفته بود. او برای فرار از سرما و رطوبت شمال آلمان چندبار به ایتالیا سفرکرد ودرآخرین سفر، درسن ۳۹ سالگی، به‌مرض سل درگذشت. ریمان کوتاه زیست، و آثار نسبتاً کمی منتشرکرد، اما آثار وی برای همیشه مسیر ریاضیات را درآنالیز، هندسه، و نظریهٔ اعداد تغییر داد[۱].

اولین مقالهٔ چاپ شدهٔ وی رسالهٔ دکترای مشهور سال ۱۸۵۱ او دربارهٔ نظریهٔ عمومی توابع مختلط است[۲]. هدف اصلی ریمان دراین تز رهانیدن مفهوم تابع تحلیلی ازهروابستگی به‌عبارات صریح، ازقبیل سری‌های توانی، و درعوض تکیه روی اصول کلی و مفاهیم هندسی بود. وی نظریه‌اش را براساس آنچه امروزه معادلات کوشی-ریمان نامیده می‌شوند، بناکرد، ابزار مبتکرانهٔ رویه‌های ریمان را برای روشن کردن ماهیت توابع چند مقداری به‌وجودآورد، وبه قضیهٔ گسترش ریمان دست یافت. گاوس بندرت به دستاوردهای ریاضی معاصرانش علاقه‌نشان می‌داد، ولی درگزارش‌رسمیش به دانشگاه ، کار ریمان را بااین عبارات بگرمی ستود: «رسالهٔ عرضه شده توسط آقای ریمان شواهد متقاعدکننده‌ای از بررسیهای جامع و نافذ ایشان، دربخشهایی از موضوع که آنها را در رساله خود مورد بررسی قرار داده است، به‌دست می‌دهد، و حاکی از ذهنی‌خلاق، فعال، واقعاً ریاضی‌ونیروی ابداعی پربار و درخشان‌می‌باشد».

ریمان بعدها این مفاهیم را درمطالعهٔ توابع فوق هندسی و توابع آبلی به‌کار گرفت. درکارش روی توابع آبلی بر ترکیب قابل‌ملاحظه‌ای از استدلال هندسی و بینش فیزیکی اتکا کردکه عامل اخیر به‌صورت اصل دیریکله درنظریهٔ پتانسیل‌ظاهر گشت. او رویه‌های ریمانی را به‌عنوان پلی بین آنالیز وهندسه به‌کار گرفت‌که بیان هندسی عمیق‌ترین خواص تحلیلی توابع را امکان‌پذیر ساخت. قدرت شهودی نیرومندش وی را غالباً قادر می‌ساخت تا با تجسم سادهٔ اشکال ممکن رویه‌های بسته و انجام آزمایشهای فرضی فیزیکی روی این سطوح به‌کشف چنین خواصی نایل آید (مثلاً بیان وی از قضیهٔ ریمان-رخ[۳]). روشهای هندسی ریمان درآنالیز مختلط آغاز واقعی توپولوژی را تشکیل داد، که مبحثی غنی از هندسه در رابطه با

---

۱. مجموعهٔ‌آثار ریاضی‌وی‌به‌نام «Gesammelte Mathematische Werke» (که درسال ۱۹۵۳ به‌وسیلهٔ انتشارات Dover مجدداً به‌چاپ رسید) تنها یك جلد است، که دوسوم آن متشکل‌از مطالبی است‌که پس‌ازمرگ وی انتشار یافته است. از نه مقاله‌ای‌که ریمان‌خودبه‌چاپ رساند تنها پنج مقاله درمورد ریاضیات محض بود.

2. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, in «Werke,» pp. 3-43.

3. Roch

خواصی از اشکال است که تحت تغییر شکلهای پیوسته تغییر نمی کنند.

درسال ۱۸۵۴ از وی یك رسالهٔ آزمایشی به‌منظور آزمایش‌پذیرش برای تدریس (بدون حقوق) در دانشگاه خواسته شد، و پاسخ وی اثر غنی دیگری بود که تأثیر نازدودنی‌آن در ریاضیات دوران ماهم مشهوداست[1]. مسئله‌ای که وی برای‌خود انتخاب کرد این بود که شرایط دیریکله (۱۸۲۹) را برای قابلیت نمایش توابع توسط سری فوریه تجزیه و تحلیل کند. یکی از این شرایط این بود که تابع باید انتگرال‌پذیر باشد. ولی این به‌چه معنی بود؟ دیریکله ازتعریف انتگرال‌پذیری کوشی استفاده کرده بود، که تنها درمورد توابعی که‌پیوسته یاحداکثر دارای تعدادی متناهی نقاط ناپیوسته باشند ، به کار می‌رفت. برخی از توابعی که درنظریهٔ اعداد ظاهر می گردند ریمان را به‌فکر تعمیم این تعریف انداختند. وی مفهوم انتگرال ریمان را آنچنان که هم‌اکنون دراکثر کتابهای درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می آید بنانهاد، شرایط لازم و کافی برای وجود چنین انتگرالی را به‌دست آورد، و شرایط دیریکله برای‌اعتبار بسط فوریه راتعمیم داد. کانتور[2] درنظریهٔ مشهور خود دربارهٔ مجموعه‌ها مستقیماً از مسئله‌ای که دراین مقاله مطرح شد الهام گرفته است، و این ایده‌ها به‌نوبهٔ خودبه‌مفهوم انتگرال لبگ‌وحتی‌انواع‌عمومی‌تر انتگرال‌منجر گردید. به‌این‌ترتیب پژوهشهای راهگشای ریمان گامهای نخستین درشاخهٔ جدید دیگری از ریاضیات، یعنی نظریهٔ توابع حقیقی بودند.

قضیهٔ بازآرایش ریمان درنظریهٔ سری‌های نامتناهی یك نتیجهٔ ضمنی مقاله‌ای بود که هم‌اکنون شرح آن گذشت. وی بامثال دیریکله، که نشان می‌داد مجموع یك سری همگرای مشروط را می‌توان باتعویض ترتیب جملاتش تغییر داد، آشنا بود:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\log 2 \qquad (13)$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2\,. \qquad (14)$$

روشن است که مجموعهای این دوسری مختلف ولی جملات آنها یکی هستند؛ زیرا در (۱۴) به دنبال دوجملهٔ مثبت اول (۱۳)، اولین جملهٔ منفی آن و سپس به دنبال دوجملهٔ مثبت بعدی، دومین جملهٔ منفی می‌آید، و به‌همین‌ترتیب تا آخر ادامه می‌یابد. ریمان ثابت کرد که می‌توان ترتیب‌جملات هرسری همگرای مشروط را آنچنان تغییر داد که سری حاصل به‌هرمجموع ازقبل تعیین شدهٔ اختیاری‌همگرا شود ویا به $+\infty$ یا $-\infty$ واگرا گردد.

برای انتصاب به مدرسی بدون حقوق، ریمان موظف بود علاوه بر رسالهٔ

---

1. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, in «Werke,» pp. 227-264.

2. Cantor

آزمایشی، سخنرانی دفاعیه‌ای درمقابل اعضای دانشکده، عرضه کند. معمول بود که داوطلب سه موضوع را پیشنهاد می‌کرد و رئیس گروه معمولا اولی را می‌پذیرفت. ریمان نسنجیده مبانی هندسه را به‌عنوان سومین موضوع ذکر کرد، واین موضوع عمیقی بود که وی برایش آمادگی نداشت ولی ذهن گاوس را به‌مدت ۶۰ سال مشغول کرده بود. طبیعتاً، گاوس کنجکاو بود که ببیند چگونه این داوطلب بخصوص «با نیروی ابتکار پربار و درخشان» باچنین مسئله‌ای دست‌وپنجه نرم می‌کند، وعلیرغم میل ریمان این مطلب موضوع سخنرانی شد. ریمان بلافاصله سایر مسائل مورد علاقه‌اش درآن هنگام ـ به گفتهٔ خود او «پژوهشهای درمورد ارتباط بین الکتریسیته، مغناطیس، نور، و نیروی ثقل» ـ را کنار گذاشت و در دو ماه سخنرانیش را نوشت. نتیجهٔ این سخنرانی یکی از درخشانترین شاهکارهای کلاسیك ریاضیات و احتمالا مهم‌ترین سخنرانی علمی است که تاکنون برگزار شده است[1]. گفته شده است که گاوس نیز به‌شگفت آمده وهیجان زده شده بود.

سخنرانی ریمان که بگونه‌ای غیرفنی ارائه شد تعمیم گسترده‌ای ازهمهٔ هندسه‌های شناخته شده، اعم از اقلیدسی و غیر اقلیدسی بود. این مبحث اکنون هندسهٔ ریمانی خوانده می‌شود؛ وصرف‌نظر از اهمیت شایان آن در ریاضیات محض، پس‌از ۶۰ سال چهارچوب کاملا مناسبی برای نظریهٔ نسبیت عام اینشتین گردید. مانند اغلب اندیشه‌های مهم علمی، اگر جزئیات فنی هندسهٔ ریمانی را کنار بگذاریم و روی جنبه‌های اصلیش تکیه کنیم، درك آن بسیار ساده می‌شود. اکنون ذکری از هندسهٔ دیفرانسیل ذاتی رویه‌های خمیده، که گاوس ۲۵ سال پیشتر آن‌را کشف کرده بود به‌میان می‌آوریم. هرگاه رویه‌ای واقع درفضای سه بعدی به‌صورت پارامتری توسط سه‌تابع $x=x(u , v)$ ، $y=y(u , v)$ ، و $z=z(u , v)$ تعریف شود، آنگاه u و v را می‌توان به‌عنوان مختصات نقاط واقع بر رویه تعبیر کرد. روی رویه، فاصلهٔ ds بین دونقطهٔ نزدیك به‌هم (u , v) و $(u+du , v+dv)$ به‌وسیلهٔ صورت دیفرانسیلی درجهٔ دوم گاوس به‌دست می‌آید

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

که درآن E ، F ، و G توابعی از u و v هستند. این‌صورت دیفرانسیلی محاسبهٔ طول منحنیهای واقع بررویه ویافتن منحنی‌های ژئودزیك (یا منحنی‌های کوتاهترین فاصله)، ومحاسبهٔ انحنای گاوسی سطح را درهر نقطه ـ بدون‌توجه به‌فضای پیرامون ـ ممکن می‌سازد. ریمان با کنار گذاشتن فرض اقلیدسی بودن فضای پیرامون وبا مطرح

---

1. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, in «Werke», pp. 272-286.

يك ترجمهٔ آن درکتاب زیر یافت می‌شود:

D. E. Smith, «A Source Book in Mathematics,» McGraw-Hill, New York, 1929.

کردن مفهوم بسلای n بعدی پیوسته ازنقاط $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ این مطلب‌راتعمیم داد. وی سپس یك فاصلهٔ مفروض دلخواه (یامتریك) ds بین نقاط نزدیك

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad و \quad (x_1+dx_1, x_2+dx_2, \ldots, x_n+dx_n)$$

را به‌وسیله صورت دیفرانسیلی درجهٔ دوم، وضع کرد:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (۱۵)$$

که درآن g_{ij}ها توابع مناسبی از $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هستند و دستگاههای متفاوت g_{ij}ها، روی بسلاهای مورد بحث، هندسه‌های ریمانی متفاوتی را تعریف مـی‌کنند. گامهای بعدی وی‌بررسی مفهوم انحنا برای این‌بسلاهای ریمانی و پژوهش‌درحالت خاص انحنای ثابت، بود. همهٔ اینها متکی بـه‌یك سلسله محاسبات حجیم بود، کـه ریمان درسخنرانی خود از روی ملاحظه آنهارا حذف‌کـرد، ولی این محاسبات در مقاله‌ای درمورد هدایت‌گرما که پس‌ازمرگش انتشار یافت آورده شده‌اند. وی‌دراین مقاله به‌طور صریح تانسور انحنای ریمان را معرفی کـرد، کـه درحالت $n = ۲$ به‌انحنای‌گاوسی تبدیل می‌شود، ونشان دادکه صفر شدن‌آن تانسورشرط لازم وکافی برای معادل بودن متریك درجهٔ دوم مفروض با متریك اقلیدسی است. ازاین‌نقطه‌نظر، تانسور انحنا، میزان انحراف هندسهٔ ریمانی تعریف شده بـه‌وسیلهٔ فرمول (۱۵) را از هندسهٔ اقلیدسی نشان می‌دهد. اینشتین ایـن مفاهیم را دریك جمله خلاصه کـرده است: «رابطهٔ هندسهٔ ریمانی فضای n بعدی بـا هندسهٔ اقلیدسی فضای n بعدی نظیر رابطهٔ هندسهٔ عمومی رویه‌های خمیده باهندسهٔ صفحه‌است».

معنای فیزیکی منحنی‌های ژئودزیك به‌ساده‌ترین صورت خود درنتیجهٔ زیر از اصل همیلتون[1] درحساب تغییرات ظاهرمی‌شود: هرگاه ذره‌ای مقید به‌حرکت روی‌یك رویهٔ خمیده باشد وهیچ نیرویی به‌آن وارد نشود، آنگاه این ذره درامتداد یك‌منحنی ژئودزیك حرکت‌خواهدکرد[2]. تعمیم صریحی از این‌مفهوم، هستهٔ نظریهٔ نسبیت‌عام‌را تشکیل می‌دهد، که اساساً یك نظریهٔ گرانشی است. اینشتین هندسهٔ فضا را بـه‌عنوان یك‌هندسهٔ ریمانی درنظرگرفت‌که درآن انحنا و منحنی‌های ژئودزیك به‌وسیلهٔ‌توزیع ماده تعیین‌می‌شود؛ دراین‌فضای خمیده، سیارات‌روی منحنی‌های ژئودزیك‌درمدارهای خود حول خورشید می‌گردند، بجای‌اینکه بوسیلهٔ نیروی گرانشی مرموزی‌که هرگز کسی واقعاً ماهیت آن‌را درك نکرده است روی مسیرهای خمیده کشیده شوند.

درسال ۱۸۵۹ ریمان تنها اثرخود درنظریهٔ اعداد را به‌چاپ رساند، مقاله‌ای کوتاه ولی فوق‌العاده عمیق‌که درکمتراز ۱۰ صفحه نوشته شده است وبه‌قضیهٔ اعداد

---

1. Hamilton

۲. این مطلب درپیوست ب از فصل۹ ثابت شده است.

اول اختصاص دارد[1]. این تلاش عظیم آغازگر امواج نیرومندی درچندین شاخه از ریاضیات محض شد، و شاید تأثیر آن پس‌از گذشت‌هزار سال دیگر هنوز حس شود. نقطهٔ آغاز وی اتحاد قابل توجهی بود که یك قرن قبل‌از آن توسط اویلر کشف شده بود: اگر s یك عدد حقیقی بزرگتراز یك باشد، آنگاه:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-(1/p^s)} \qquad (16)$$

که عبارت طرف راست نمایش دهندهٔ حاصل‌ضرب اعداد $(1-p^{-s})^{-1}$ برای کلیهٔ اعداد اول p است. برای فهم چگونگی پیدایش این اتحاد، توجه می‌کنیم که برای $|x|<1$ داریم $1/(1-x)=1+x+x^2+\cdots$ ، بنابراین برای هر p داریم

$$\frac{1}{1-(1/p^s)}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots$$

با ضرب این سریها به‌ازای کلیهٔ اعداد اول p ، وبا یادآوری‌اینکه هـر عدد صحیح $n>1$ به‌طور منحصر به‌فرد قابل بیان بـه‌صورت حاصل‌ضرب توانهایی از اعـداد اول مختلف است، مشاهده می کنیم که

$$\begin{aligned}\prod_p\left(\frac{1}{1-(1/p^s)}\right)&=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\\&=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\end{aligned}$$

که همان اتحاد (۱۶) است. مجموع سری طرف چپ (۱۶) آشکارا تابعی از متغیر حقیقی $s>1$ است، واین اتحاد رابطه‌ای بین رفتار این تابع و خواص اعداد اول برقرار می کند. خود اویلر از این ارتباط به‌طریق‌گوناگون بهره‌برداری کرد، ولی ریمان فکر می کرد که دسترسی به‌خصلتهای‌عمیق‌تر توزیع اعداد اول تنها باپذیرفتن s به‌عنوان متغیر مختلط می‌تواند حاصل شود. وی تابع حاصل را با $\zeta(s)$ نمایش داد، که ازآن هنگام به‌تابع زتای ریمان مشهور شده است.

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots, \quad s=\sigma+it$$

وی درمقاله‌اش چندین خاصیت مهم این تابع را به‌اثبات رساند، و به‌نحو چشمگیری

---

1 . Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, in «Werke», pp. 145-153.

صورت قضیهٔ اعداد اول دریادداشت مربوط به چبیشف درپیوست د را ملاحظه‌کنید.

تعدادی دیگر از خواص آن را بسادگی و بدون اثبات بیان کرد. درطول یك قرنی که ازمرگ وی می گذرد، بسیاری ازبهترین ریاضیدانان جهان درتلاش برای اثبات این مطالب از حداکثر توان خود بهره گرفته و شاخه‌های جدید پرباری از آنالیز را به‌وجود آوردند. اولین موفقیت درسال ۱۸۹۳ توسط ژ. آدامار[1] حاصل شد، و گذشته ازیك استثنا تمامی مطالب همان‌گونه که ریمان انتظار داشت، به‌اثبات‌رسید[2]. این استثنا فرض‌مشهور ریمان است که: تمامی صفرهای $\zeta(s)$ واقع‌درنوار $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ روی خط مرکزی $\sigma = 1/2$ قرار می گیرند. امروزه این مسئله به‌عنوان مهم‌ترین مسئلهٔ حل نشدهٔ ریاضی باقی مانده است، و شاید مشکل‌ترین مسئله‌ای باشد که‌تاکنون به‌ذهن بشر خطور کرده‌است. دریادداشت پراکنده‌ای که پس‌از مرگ وی درمقالاتش به‌دست آمده است، وی اظهار می کندکه این قضایا «از فرمولی برای تابع $\zeta(s)$ نتیجه‌می‌شوند که هنوز به‌قدر کافی آن را ساده‌نکرده‌ام که‌قابل‌انتشار باشند»[3]. درسال ۱۹۴۴ آدامار درنوشته‌ای پیرامون این یادداشت پراکنده با ناراحتی قابل درکی چنین متذکر می‌شود که «هنوز کمترین تصوری درخصوص اینکه این فرمول چه می‌توانست باشد نداریم»[4]. وی می‌افزاید: «به‌طورکلی، بصیرت ریمان عمیقاً‌هندسی بود، ولی این امر درموردیادداشت وی درخصوص اعداد اول‌صحت‌ندارد، یادداشتی که‌درآن این‌بصیرت به‌نیرومندترین و مرموزترین شکل‌پدیدار شده است».

---

1. J. Hadamard

۲. تحقیقات آدامار او را به‌اثبات قضیهٔ اعداد اول درسال ۱۸۹۶ هدایت‌کرد. مراجعه شودبه E. C. Titchmarsh, «The Theory of the Riemann Zeta Function,» chap. 3, Oxford University Press, London, 1951.
این‌کتاب دارای یك فهرست مراجع با ۳۲۶ عنوان است.

3. «Werke» p. 154.

4. «The Psychology of Invention in the Mathematical Field,» p. 118, Dover, New York, 1954.

٦

برخی توابع خاص فیزیك ریاضی

۳۲. چندجمله‌ایهای لژاندر

این بخش و بخش بعد تماماً به‌موضوع تکنیکی تعریف چندجمله‌ای‌های لژاندر و اثبات تعدادی ازخواص ویژهٔ آنها اختصاص یافته‌است. طبیعی‌است‌که منظور ازاین‌دستگاه‌تفصیلی، و به‌طورکلیتر علت توجه ما به‌این چندجمله‌ای‌ها مورد سؤال قرارگیرد. ساده‌ترین پاسخ آن است که چندجمله‌ای‌های لژاندر درفیزیك ریاضی‌کاربردهای فراوانی دارند، واین کاربردها به‌این دستگاه وابسته‌اند. بـه‌خاطر روشن شدن دانشجوی علاقمند، زمینهٔ فیزیکـی و چندین کاربرد نمونه ازآنها درپیوست الف مورد بحث قرارگرفته‌اند. ولی، جواب دیگری‌وجود دارد، که از جنبهٔ‌کاربردی کمتری برخوردار است وبرای بررسی بعدی ما درمورد توابع بسل نیز همین‌قدر صادق است؛ وآن عبارت‌از این است که‌مطالعهٔ توابع خاص و ویژگیهای تك‌تك آنها عـاملی است‌درجهت ایجاد تعادل درمقابل وفورایده‌های مجـردی که گاهـی اوقات به‌نظر می‌رسد برریاضیات مستولی شده‌اند. علاوه‌براین، چندین موضوع راکه‌بطور طبیعی درمتن این‌فصل‌پیش می‌آیند خاطرنشان ساخته‌ایم وامیدواریم‌که برای‌همهٔ‌دانشجویان ریاضی موردتوجه قرارگیرد: تابع گاما وفرمول $\sqrt{\pi}=!(-۱/۲)$ ؛ کسر مسلسل‌لامبرت برای تانژانت،

$$\tan x=\cfrac{۱}{\cfrac{۱}{x}-\cfrac{۱}{\cfrac{۳}{x}-\cfrac{۱}{\cfrac{۵}{x}-\cdots}}}$$

و سری‌های مشهور

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad و \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

که مجموعشان توسط اویلر دراوایل قرن هجدهم کشف شد و دوباره به‌طور تعجب‌آوری در رابطه باصفرهای توابع بسل ظاهر می‌شوند.

اکنون خودچندجمله‌ای‌های لژاندر را ازطریق معادلهٔ فوق‌هندسی، بررسی‌می‌کنیم.[۱]

دربخش ۲۷، از معادلهٔ لژاندر برای تشریح روش یافتن جوابهای سری توانی معادلات‌دیفرانسیل درنقاط عادی‌استفاده کردیم. به‌دلایلی که درپیوست الف شرح‌داده‌خواهد شد، این معادله را به‌صورت

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{1}$$

می‌نویسیم، که درآن n نمایشگر عددی صحیح وغیر منفی است. خواننده به‌خاطر دارد که کلیهٔ‌جوابهای‌معادلهٔ(۱) که دربخش۲۷ به‌دست‌آمد، درفاصلهٔ $-1<x<1$ تحلیلی‌هستند. ولی درموارد کاربردی، مفیدترین جوابها آنهایی هستندکه درنزدیکی $x=1$ کراندارند، وبرای راحت‌تر تشخیص دادن اینگونه جوابها، تغییرمتغیر مستقل x به $t=(1-x)/2$ را درنظر می‌گیریم. این امر $x=1$ را با $t=0$ متناظر می‌کند و (۱) تبدیل به

$$t(1-t)y''+(1-2t)y'+n(n+1)y=0 \tag{2}$$

می‌شود، که درآن نمادهای پریم نمایش دهندهٔ مشتق نسبت به t می‌باشند. این یك معادلهٔ فوق هندسی با $a=-n$ ، $b=n+1$، و $c=1$ است،وبنابراین درنزدیکی $t=0$ دارای جواب چندجمله‌ای

$$y_1=F(-n, n+1, 1, t) \tag{3}$$

است. ازآنجاکه هردو توان‌معادلهٔ (۲) درمبدأ صفرند ($m_1=0$ و $m_2=1-c=0$)، باروش بخش ۱۶ جواب دومی را جستجو می‌کنیم. این‌جواب دوم $y_2=vy_1$ است، و با انتگرالگیری‌های ساده مشاهده می‌کنیم که

---

۱. آدرین ماری لژاندر Adrien Marie Legendre (۱۷۵۲-۱۸۳۳) طی پژوهش خود راجع به جاذبهٔ گرانشی بیضی‌وارها با چندجمله‌ای‌هایش مواجه شد. او یك ریاضیدان خیلی خوب فرانسوی بودکه متأسفانه فرصت آن‌را نیافت‌که ببیند چگونه اکثر بهترین کارهایش، درانتگرال بیضوی، نظریهٔ اعداد و روش کمترین مربعات به‌وسیلهٔ دستاوردهای افراد جوانتر و توانا ترکنار گذاشته می‌شود. به‌عنوان نمونه، او ۴۰ سال از عمر خود را وقف پژوهش روی انتگرالهای‌بیضوی‌نمود، و رسالهٔ دوجلدیش دراین‌زمینه تازه به‌چاپ رسیده بودکه کشفیات آبل و ژاکوبی این‌مبحث رابه‌طورکلی دگرگون نمود. یکی‌از صفات برجستهٔ وی بلندی نظرش بود، که براساس آن بکرات ازکارهای بهتر و نوتری که کار خود او را منسوخ می‌کرد، استقبال می‌نمود.

$$v'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,dt}=\frac{1}{y_1^2}e^{\int\frac{2t-1}{t(1-t)}dt}$$

$$=\frac{1}{y_1^2t(1-t)}=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{y_1^2(1-t)}\right]$$

چون y_1^2 یك چند جمله‌ای، با جملهٔ ثابت یك است، عبارت داخل کروشه درطرف راست تحلیلی و به‌صورت $1+a_1t+a_2t^2+\cdots$ می‌باشد و داریم

$$v'=\frac{1}{t}+a_1+a_2t+\cdots$$

نتیجتاً $v=\log t+a_1t+\cdots$ ، بنابراین

$$y_2=y_1(\log t+a_1t+\cdots)$$

و جواب عمومی (۲) درحوالی مبدأ برابر است با

$$y=c_1y_1+c_2y_2\,. \tag{۴}$$

به‌خاطر وجود جملهٔ $\log t$ در y_2 ، روشن است که (۴) درحوالی صفر کراندار است اگر و تنها اگر $c_2=0$. هرگاه در (۳) ، به‌جای t ، $(x-1)/2$ بگذاریم، نتیجه می‌شود که جوابهایی از (۱) که در حوالی $x=1$ کراندارند دقیقاً همان مضارب ثابت چندجمله‌ای $F[-n,n+1,1,(1-x)/2]$ هستند.

این مطلب ما را به‌سوی تعریف اساسی رهنمون می‌سازد. n امین چندجمله‌ای لژاندر که آن‌را با $P_n(x)$ نشان می‌دهند به‌صورت زیر تعریف می‌گردد

$$P_n(x)=F\left[-n,n+1,1,\frac{1}{2}(1-x)\right]=1+\frac{(-n)(n+1)}{(1!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$+\frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-n)(-n+1)\cdots[-n+(n-1)](n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(n!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$$

$$=1+\frac{n(n+1)}{(1!)^2 2}(x-1)+\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2 2^2}(x-1)^2$$

$$+\cdots+\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}(x-1)^n. \tag{۵}$$

از نتایج بخش ۲۷ می‌دانیم که $P_n(x)$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ n است که بسته به‌آنکه n زوج یا فرد باشد، تنها شامل توانهای زوج یا فرد است. بنابراین آن‌را می‌توان به‌صورت

$$P_n(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۲}+a_{n-۴}x^{n-۴}+\cdots \qquad (۶)$$

نوشت، واین مجموع اگر n زوج باشد به $a_۰$ و اگر n فرد باشد به $a_۱ x$ ختم می‌شود. از رابطهٔ (۵) روشن است که برای هر n داریم $P_n(۱)=۱$ ، وباتوجه به‌رابطهٔ (۶) برابری $P_n(-۱)=(-۱)^n$ نیز محرز است.

فرمول(۵) به‌صورت‌فعلی، برای‌مطالعهٔ $P_n(x)$ بسیار نامناسب‌است، لذا به‌جستجوی چیز ساده‌تری می‌پردازیم. می‌توانیم هرجمله در (۵) را بسط دهیم، و توانهای همانند x را جمع کنیم ونتیجه را به‌صورت (۶) مرتب سازیم، ولی این کاری بیش‌ازحد پرزحمت وغیر ضروری است. کاری که خواهیم کرد، توجه به‌این مطلب است که از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود که $a_n=(۲n)!/(n!)^۲۲^n$ و $a_{n-۲}$ و $a_{n-۴}$ ، ... ، را به‌طور بازگشتی برحسب a_n محاسبه می‌کنیم. آنچه دراینجا موردنیاز است، فرمول ۲۷ــ(۹) می‌باشد که درآن n جانشین p و $k-۲$ جانشین n شده است:

$$a_k=-\frac{(n-k+۲)(n+k-۱)}{(k-۱)k}a_{k-۲}$$

یا

$$a_{k-۲}=-\frac{k(k-۱)}{(n-k+۲)(n+k-۱)}a_k$$

k را برابر با n ، $n-۲$ ، ... می‌گیریم، نتیجه می‌شود

$$a_{n-۲}=-\frac{n(n-۱)}{۲(۲n-۱)}a_n$$

$$a_{n-۴}=-\frac{(n-۲)(n-۳)}{۴(۲n-۳)}a_{n-۲}$$

$$=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲\times۴(۲n-۱)(۲n-۳)}a_n$$

والی آخر، بنابراین (۶) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$P_n(x)=\frac{(۲n)!}{(n!)^۲۲^n}\Big[x^n-\frac{n(n-۱)}{۲(۲n-۱)}x^{n-۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲\times۴(۲n-۱)(۲n-۳)}x^{n-۴}$$

$$+\cdots+(-۱)^k\frac{n(n-۱)\cdots(n-۲k+۱)}{۲^k k!(۲n-۱)(۲n-۳)\cdots(۲n-۲k+۱)}x^{n-۲k}+\cdots\Big]. \quad (۷)$$

ازآنجا که

$$n(n-۱)\cdots(n-۲k+۱)=\frac{n!}{(n-۲k)!}$$

و

$$(2n-2k+1)(2n-2k+3)\cdots(2n-3)(2n-1)$$
$$=\frac{(2n-2k+1)(2n-2k+2)(2n-2k+3)\cdots(2n-2)(2n-1)2n}{(2n-2k+2)\cdots(2n-2)2n}$$
$$=\frac{(2n)!}{(2n-2k)!}\,\frac{1}{2^k(n-k+1)\cdots(n-1)n}=\frac{(2n)!(n-k)!}{(2n-2k)!2^kn!}$$

ضریب x^{n-2k} در رابطهٔ (۷) برابر می‌شود با

$$(-1)^k\frac{n!}{2^kk!(n-2k)!}\,\frac{(2n-2k)!2^kn!}{(2n)!(n-k)!}=(-1)^k\frac{(n!)^2(2n-2k)!}{k!(2n)!(n-k)!(n-2k)!}$$

به کمک این رابطه، (۷) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت؛

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{8}$$

که در آن $[n/2]$ نماد متداول برای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $n/2$ یا مساوی با $n/2$ است. برای دستیابی به‌فرمولی از این‌هم فشرده‌تر، توجه می‌کنیم که

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k}{2^nk!(n-k)!}\,\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k}{2^nk!(n-k)!}\,\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k}$$
$$=\frac{1}{2^nn!}\,\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{k!(n-k)!}(x^2)^{n-k}(-1)^k$$

هرگاه‌درمجموع‌اخیر k را از ۰ تا n تغییر دهیم وتوجه‌کنیم که این امر حاصلجمع را تغییر نخواهد داد (زیرا درجهٔ‌جملات اضافه شده کمتراز n و درنتیجه مشتق n ام آنهاصفراست)، آنگاه خواهیم دید که

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\,\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{n-k}(-1)^k$$

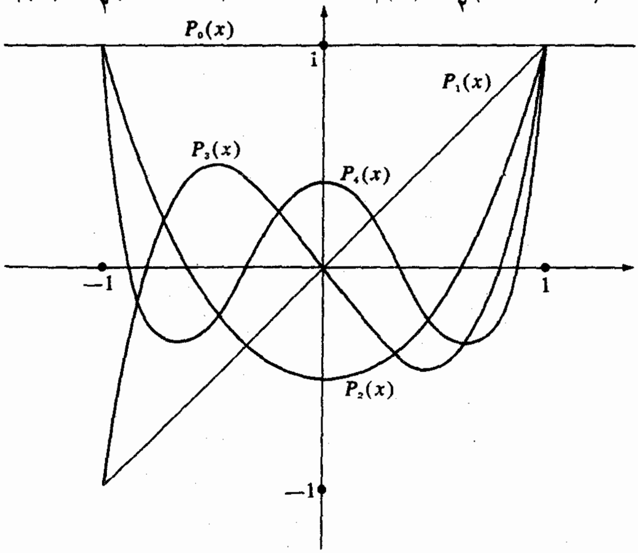
که باتوجه به‌دستور دوجمله‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{9}$$

این عبارت برای $P_n(x)$ به فرمول رودریگ مشهور است[1] ، و وسیلهٔ ساده‌ای برای محاسبهٔ چندجمله‌ای‌های پیاپی لژاندر به‌دست می‌دهد، که چندتای اول آنها عبارت‌انداز (شکل ۳۲)

$$P_0(x)=1 \quad , \quad P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad , \quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \tag{10}$$



شکل ۳۲

روش بازهم ساده‌تری درمسئلهٔ ۲ پیشنهاد شده است، ویك کاربرد مهمتر (۹) دربخش بعد مطرح خواهد شد.

تمرین

۱ــ تابع طرف چپ رابطهٔ

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=P_0(x)+P_1(x)t+P_2(x)t^2+\dots+P_n(x)t^n+\dots$$

---

۱. اولیند رودریگ Olinde Rodrigues (۱۷۹۴ــ۱۸۵۱) یك بانکدار فرانسوی بود که درسالهای تهیدستی پیری‌کلودهانری سن‌سیمون Claude Henri Saint-Simon (پایه‌گذار سوسیالیسم) به‌کمك وی شتافت و از او درسالهای آخر عمرش پشتیبانی‌کرد، ویکی از اولین مریدان اوشد. وی‌فرمول فوق‌الذکر را درسال ۱۸۱۶ کشف‌کرد، ولی اندکی بعد، به‌سازماندهی علمی جامعه علاقمند شد و دیگر هرگز به‌سوی ریاضیات برنگشت. عبارت «فرمول رودریگ» اغلب به‌عبارات مشابهی برای چندجمله‌ای‌های کلاسیك دیگری که خود رودریگ هیچ‌اطلاعی از آنها نداشت، نیز اطلاق می‌شود.

را تابع مولد چندجمله‌ای لژاندر مـی‌نامند. فرض کنید ایـن رابطه درست است و به کمك آن

الف) تحقیق کنید که $P_n(۱)=۱$ و $P_n(-۱)=(-۱)^n$.

ب) نشان دهید که $P_{۲n+۱}(۰)=۰$ و $P_{۲n}(۰)=(-۱)^n\dfrac{۱\times ۳ \dots (۲n-۱)}{۲^n n!}$.

۲ــ با توجه به‌رابطهٔ مولد

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-۲xt+t^۲}}=\sum_{n=۰}^{\infty} P_n(x)t^n$$

الف) با مشتق گیری از طرفین نسبت به t ، نشان‌دهید که

$$(x-t)\sum_{n=۰}^{\infty} P_n(x)t^n=(۱-۲xt+t^۲)\sum_{n=۱}^{\infty} nP_n(x)t^{n-۱}$$

ب) بامساوی قرار دادن ضرایب t^n در (الف)، فرمول باز گشتی زیر را به‌دست‌آورید:

$$(n+۱)P_{n+۱}(x)=(۲n+۱)xP_n(x)-nP_{n-۱}(x)$$

ج) به‌فرض آنکه $P_۰(x)=۱$ و $P_۱(x)=x$ را بـدانیم، به‌کمك فـرمول باز گشتی قسمت (ب) عبارات $P_۲(x)$ ، $P_۳(x)$ ، $P_۴(x)$ ، و $P_۵(x)$ را محاسبه کنید.

۳ــ رابطهٔ مولد تمرینهای ۱ و ۲ را طی مراحل زیر بدست آورید:

الف) از سری دوجمله‌ای استفاده کنید و بنویسید

$$[۱-t(۲x-t)]^{-۱/۲}=۱+\frac{۱}{۲}t(۲x-t)+\frac{۱}{۲^۲}\,\frac{۳}{۲!}t^۲(۲x-t)^۲+\dots$$

$$+\frac{۱\times ۳ \dots (۲n-۳)}{۲^{n-۱}(n-۱)!}\,t^{n-۱}(۲x-t)^{n-۱}$$

$$+\frac{۱\times ۳ \dots (۲n-۱)}{۲^n\,n!}\,t^n(۲x-t)^n+\dots$$

ب) واضح است که در بسط قسمت (الف) ، t^n ، تنها درجملهٔ آخر ذکر شده و جملات بعداز آن ظاهر می‌شود. با بسط توانهای مختلف $۲x-t$ ، نشان‌دهید که کل ضریب t^n برابر است با

$$\frac{۱\times ۳ \dots (۲n-۱)}{۲^n\,n!}(۲x)^n-\frac{۱\times ۳ \dots (۲n-۳)}{۲^{n-۱}(n-۱)!}\,\frac{n-۱}{۱!}(۲x)^{n-۲}$$

$$+\frac{۱\times ۳ \dots (۲n-۵)}{۲^{n-۲}(n-۲)!}\,\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲!}(۲x)^{n-۴}-\dots$$

ج) نشان‌دهید که مجموع قسمت (ب) همان $P_n(x)$ داده شده در رابطهٔ (۸) است.

۴ــ این تمرین عبارت‌است‌از روشی مستقیم برای تحقیق اینکه هرگاه $P_n(x)$ توسط (۹) تعریف شود آنگاه درمعادلهٔ لژاندر (۱) صدق می کند و دارای این خاصیت است که $P_n(1)=1$. چندجمله‌ای‌های درجهٔ n تعریف شده به‌صورت

$$y(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

را درنظر بگیرید.

الف) اگر $w=(x^2-1)^n$، آنگاه $(x^2-1)w'-2nxw=0$. از این معادله $k+1$ بار مشتق بگیرید و نشان دهید که

$$(x^2-1)w^{(k+2)}+2(k+1)xw^{(k+1)}+(k+1)kw^{(k)}-2nxw^{(k+1)}$$
$$-2(k+1)nw^{(k)}=0$$

وسپس نتیجه بگیرید که $y=w^{(n)}$ جوابی از معادلهٔ (۱) است.

ب) فرض کنید $u=(x-1)^n$ و $v=(x+1)^n$ و به‌کمك فرمول

$$y=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v^{(1)}+\dots+nu^{(1)}v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

نشان دهید که $y(1)=n!2^n$.

۳۳. خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر

دربخش قبل، دنبالهٔ چندجمله‌ای‌های لژاندر

$$P_0(x)\text{،}\ P_1(x)\text{،}\ P_2(x)\text{،}\ \dots\text{،}\ P_n(x)\text{،}\ \dots \tag{1}$$

را تعریف کردیم. خواننده متوجه است که این چندجمله‌ای‌ها دارای کاربردهایی هستند که دامنهٔ آنها ازفیزیك ریاضی تانظریهٔ تقریب را دربرمی گیرد. حال‌می پردازیم به‌بحث ایده‌های اساسی مربوط به‌بعضی از این کاربردها.

تعامد. مهمترین ویژگی چندجمله‌ای‌های لژاندر این‌است که

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & \text{اگر } m\neq n\text{،}\\[2mm] \dfrac{2}{2n+1} & \text{اگر } m=n\text{،}\end{cases} \tag{2}$$

ویژگی فوق اغلب بدین‌ترتیب بیان می‌شود که (۱) دنباله‌ای از توابع متعامد در فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ است. بعدازاثبات این رابطه، به‌توضیح اهمیت‌آن خواهیم پرداخت.

فرض کنیم که تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ دارای لااقل n مشتق پیوسته باشد، و انتگرال

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

را درنظر می‌گیریم. براساس فرمول رودریگ می‌توانیم بنویسیم

$$I=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx$$

و با انتگرالگیری جزءبه‌جزء نتیجه می‌شود که

$$I=\frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^2-1)^n dx$$

عبارت داخل کروشه درهردو حد صفر می‌شود، بنابراین

$$I=-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^2-1)^n\,dx$$

اگر به انتگرالگیری جزءبه‌جزء ادامه دهیم، خواهیم داشت

$$I=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n\,dx$$

هرگاه $f(x)=P_m(x)$ ، و $m<n$ ، آنگاه $f^{(n)}(x)=0$ وقسمت اول (۲) یعنی $I=0$ نتیجه می‌شود . برای اثبات قسمت دوم می‌نویسیم $f(x)=P_n(x)$. از آنجا که $P_n^{(n)}(x)=(2n)!/2^n n!$ ، نتیجه می‌شود که

$$I=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx \qquad (3)$$

با تغییر متغیر $x=\sin\theta$ ویادآوری فرمول زیر (که از طریق انتگرال جزءبه‌جزء ثابت می‌شود)

$$\int\cos^{2n+1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2n+1}\cos^{2n}\theta\sin\theta+\frac{2n}{2n+1}\int\cos^{2n-1}\theta\,d\theta \qquad (4)$$

انتگرال (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta\,d\theta=\frac{2n}{2n+1}\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\int_{0}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2^n n!}{1\times 3\cdots(2n-1)(2n+1)}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}$$

نتیجه می گیریم که، دراین حالت $I=2/(2n+1)$ ، واثبات (۲) کامل می‌شود.

سری لژاندر. همان‌طور که‌در پیوست الف نشان خواهیم داد، بسیاری از مسائل نظریهٔ پتانسیل به‌امکان بسط تابع‌مفروض به‌صورت یك‌سری ازچندجمله‌ای‌های‌لژاندر بستگی‌دارند. بسادگی می‌توان دید که وقتی تابع مفروض‌خود یك چندجمله‌ای باشد این‌کار همواره‌ساده است. به‌عنوان نمونه، فرمولهای ۳۲-(۱۰) می گویند که

$$1=P_0(x)\ ,\ x=P_1(x)\ ,\ x^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}P_2(x)=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)\ ,$$

$$x^3=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}P_3(x)=\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x)$$

واز اینجا نتیجه می‌شود که هرچندجمله‌ای درجهٔ سه به‌صورت

$$p(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$p(x)=b_0P_0(x)+b_1P_1(x)+b_2\left[\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)\right]$$

$$+b_3\left[\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x)\right]$$

$$=\left(b_0+\frac{b_2}{3}\right)P_0(x)+\left(b_1+\frac{3b_3}{5}\right)P_1(x)+\frac{2b_2}{3}P_2(x)+\frac{2b_3}{5}P_3(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{3} a_nP_n(x)$$

به‌طورکلی‌تر، چون به‌ازای هر n صحیح و مثبت ، $P_n(x)$ چندجمله‌ای از درجهٔ n است، تعمیم ساده‌ای از روش فوق نشان می‌دهد که x^n را همواره می‌توان به‌صورت ترکیبی‌خطی از $P_0(x)$ ، $P_1(x)$ ، ... ، $P_n(x)$ نوشت، بنابراین، هرچندجمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ k دارای بسطی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$p(x)=\sum_{n=0}^{k} a_nP_n(x)$$

ازاین نکات وباتوجه به‌احتیاجات‌کاربردی، سؤال آشکار بسط تابع «دلخواه» $f(x)$ به‌صورت سری لژاندر مطرح می گردد:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nP_n(x) \qquad (5)$$

واضح است که برای محاسبهٔ ضرایب a_n در رابطهٔ (۵) روش جدیدی لازم است، و نکتهٔ اساسی درفرمول (۲) نهفته است.

اگر احتیاطهای ریاضی را دور بریزیم و دوطـرف (۵) را در $P_m(x)$ ضرب کنیم و از نتیجه جمله به‌جمله از ۱ − تا ۱ + انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx$$

که این باتوجه به (۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx=\frac{2a_m}{2m+1}$$

بنابراین فرمول زیر برای a_nهای رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx \tag{۶}$$

هرگاه از ابتدا بدانیم که $f(x)$ دارای بسط سری به‌صورت (۵) است و ازاین‌سری می‌توان جمله به‌جمله درفاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ انتگرال گرفت، آنگاه عملیات فوق را می‌توان بسادگی توجیه نمود. وقتی که $f(x)$ چندجمله‌ای باشد، برقراری هردوشرط بالا واضح است؛ ولی درمورد سایر انواع توابع راهی برای اطلاع از برقراری این شرایط در دست نداریم و درستی این حکم که ضرایب a_n در (۵) از رابطهٔ (۶) به‌دست می‌آیند مورد تـردید است. بااین حال، این دستورالعمل صوری راهگشاست و طـرح سؤال زیر، مـی‌تواند ما را بـه ریاضیات معقولی هدایت کند. هرگاه a_n ها توسط فرمول (۶) تعریف شوند و برای تشکیل سری (۵) به‌کار روند، برای چه‌نوع از توابع $f(x)$ این a_n ها موجود و بسط (۵) معتبر خواهد بود؟ خواننده به‌خاطر می‌آورد که دربخش ۲۴ نیز سؤال مشابهی در رابطه با سری فوریه مطرح شده‌بود. دراینجا نیز جواب مشابهی موجود است، ولی اکنون موقع‌پرداختن به‌جزئیات نیست[1].

---

۱. جواب موردنظر که اغلب به قضیهٔ بسط لژاندر مشهور می‌باشد، به‌سادگی قـابل درك است، ولی اثبات آن بـه بسیاری از خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر بستگی دارد، کـه هنوز ذکـر نشده‌اند. صورت این قضیه چنین است. هرگاه حداکثر، $f(x)$ و $f'(x)$ دارای تعداد متناهی ناپیوستگی جهشی درفاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ باشند، و $f(x-)$ و $f(x+)$ حد چپ و راست $f(x)$ درنقطهٔ x رانشان دهند، آنگاه a_n ها موجودند و سری لژاندر در $-1<x<1$ به

$$\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)]$$

و برای $x=-1$ به $f(-1+)$، وبرای $x=+1$ به $f(1-)$ میل‌می‌کند، وبخصوص درهرنقطهٔ پیوستگی، حد آن همان $f(x)$ است. مراجعه شود به

N. N. Lebedev, "Special Functions and Their Applications" pp. 53-58, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

امکان وجود بسطهایی به‌صورت (۵) به‌وضوح بستگی قاطع بـه خاصیت تعامد (۲) چندجمله‌ای‌های لژاندر دارد. این یك حالت خاص از پـدیدهٔ کلی زیر است، کـه اغلب درنظریهٔ توابع خاص مطرح مـی‌گردد. هـرگاه دنباله‌ای از توابع $\phi_1(x)$ ، $\phi_2(x)$ ، $\phi_3(x)$ ، ... ، $\phi_n(x)$ ، ... کـه در فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ تعریف شده‌اند، دارای خاصیت زیر باشند:

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n \\ \alpha_n \neq 0 & \text{اگر } m = n \end{cases} \tag{۷}$$

آنگاه ϕ_n ها را دراین فاصله توابعی متعامد گویند. مانند مـورد فـوق، مسئلهٔ کلی مطرح شده در رابطه با چنین دنبالـه‌ای عبارت است از نمایش تـوابع «دلخواه» $f(x)$ توسط بسطهایی به‌صورت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

واستفادهٔ صوری از رابطهٔ (۷) مقدار a_n ها را به‌صورت

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_a^b f(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

پیشنهاد می‌کند.

مثالهای تکمیلی دیگری درپیوستهای ب و د از فصل ۵ آمده است، که درآنجا بـه تعامد (نسبت به توابع وزنی مناسب) چندجمله‌ای‌های هرمیت و چندجمله‌ای‌هـای چبیشف مختصراً اشاره شده است. جواب رضایتبخش به‌این‌گروه از مسائل یکی از دستاوردهـای عمدهٔ ریاضیات محض درقرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بـود، و آنرا دریکی ازجلدهـای بعدی این سری بررسی خواهیم کرد.

تقریب کمترین مربعات. فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی‌باشد که درفاصلهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ تعریف شده‌است. مسئلهٔ تقریب $f(x)$ به‌بهترین‌وجه ممکن، برحسب کمترین مربعات، توسط چندجمله‌ای‌هـای $p(x)$ از درجهٔ کمتراز n یـا مساوی با n را درنظر می‌گیریم. هـرگاه انتگرال

$$I = \int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2\,dx \tag{۸}$$

را نمایشگر مجموع مربعات انحرافات $p(x)$ از $f(x)$ بدانیم، آنگاه مسئله عبارت است از می‌نیمم کردن مقدار این انتگرال به‌وسیلهٔ انتخابی مناسب برای $p(x)$. خواهیم دیـد که چندجمله‌ای می‌نیمم کننده دقیقاً مجموع $n+1$ جملهٔ اول سری لژاندر (۵) می‌باشد،

$$p(x) = a_0 P_0(x) + \cdots + a_n P_n(x)$$

که در آن ضرایب از رابطهٔ (۶) به‌دست می‌آیند.

برای اثبات مطلب بالا، از این موضوع استفاده می‌کنیم که هرچندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n یا مساوی با n را می‌توان به‌صورت $b_0P_0(x)+\dots+b_nP_n(x)$ نوشت. بنابراین انتگرال (۸) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$I=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}b_kP_k(x)\right]^2dx$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)^2dx+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}b_k^2-2\sum_{k=0}^{n}b_k\left[\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx\right]$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)^2dx+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}b_k^2-2\sum_{k=0}^{n}b_k\frac{2a_k}{2k+1}$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)^2dx+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}(b_k-a_k)^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a_k^2$$

چون a_kها ثابت و b_k ها به‌اختیار ما هستند، روشن است که مقدار I وقتی می‌نیمم می‌شود که برای هر n ، ... ، $k=0$ داشته باشیم $a_k=b_k$. تنها فرض لازم برای این بحث، انتگرال‌پذیری $f(x)$ و $f(x)^2$ می‌باشد. هرگاه تابع $f(x)$ چنان خوش‌رفتار باشد که دارای بسطی به صورت سری توان درفاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ باشد، آنگاه اکثر دانشجویان تصور می‌کنند که «بهترین» تقریب چندجمله‌ای برای تابع $f(x)$ همانا مجموعهای جزئی این سری توانی است. نتیجه‌ای که در اینجا به‌دست‌آوردیم نشان می‌دهد که هرگاه معیار تقریب برحسب کمترین مربعات باشد، این مطلب درست نیست.

تمرین

۱ــ صحت فرمول (۴) را تحقیق کنید.

۲ــ معادلهٔ لژاندر را می‌توان به‌صورت

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']+n(n+1)y=0$$

نیز نوشت که درنتیجه

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m]+m(m+1)P_m=0$$

و

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_n]+n(n+1)P_n=0$$

به کمک این دومعادله اثباتی برای قسمت اول فرمول (۲) ارائه کنید که به‌شکل خاص

چندجمله‌ای‌های لژاندر بستگی نداشته باشد.

راهنمایی: معادلهٔ اول را در P_n و دومی را در P_m ضرب و معادلات حاصل را ازهم کم کنید و ازنتیجه بین ۱ − و ۱ + انتگرال بگیرید.

۳ـ هرگاه‌رابطهٔ مولد تمرینهای ۱ و ۲ بخش۳۲ را مجذور کنیم واز $x=-1$ تا $x=1$ انتگرال بگیریم، آنگاه قسمت اول (۲) نتیجه می‌دهدکه

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \, dx \right) t^{2n}$$

با نشان دادن اینکه انتگرال طرف چپ برابر است با

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}$$

قسمت دوم رابطهٔ (۲) را اثبات کنید.

۴ـ سه‌جملهٔ اول سری لژاندر را برای توابع زیر بیابید:

الف)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leqslant x < 0 \text{ اگر } \\ x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ اگر } \end{cases}$$

ب)
$$f(x) = e^x$$

۵ـ هرگاه $p(x)$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ $n \geqslant 1$ باشد، به‌طوری‌که

$$\int_{-1}^{1} x^k p(x)\, dx = 0 \quad \text{برای} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

نشان دهیدکه برای یك‌مقدار ثابت c داریم $p(x) = cP_n(x)$.

۶ـ هرگاه $P_n(x)$ را در r ، کـه معکوس ضریب x^n است، ضرب کنیم ، آنـگاه ضریب بزرگترین درجهٔ چندجمله‌ای حـاصل، یعنی $rP_n(x)$ ، برابر بـا یك خواهدشد. نشان دهیدکه این‌چندجمله‌ای دارای خاصیت می‌نیممی زیر است: دربین کلیهٔ چندجمله‌ای‌های از درجـهٔ n کـه ضریب بزرگترین درجـهٔ آنها یك مـی‌باشد ، $rP_n(x)$ درفـاصلهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ، به مفهوم کمترین مربعات،دارای حداقل انحراف ازصفر است.

۳۴. توابع بسل. تابع گاما

معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{1}$$

راکه درآن p یك عدد ثابت غیرمنفی است، معادلهٔ بسل نامند، وجوابهای آن به‌توابع بسل مشهورند. این توابع برای اولین‌بار در بررسیهای دانیل بـرنولی درخصوص نـوسانهای زنجیر آویخته (تمرین ۲۴ـ۴) وسپس مجدداً درنظریهٔ اویلر بـرای ازتعاشات غشای مدور

و مطالعات بسل روی حرکت سیارات پدیدار شد[1] اخیراً توابع بسل در فیزیك و مهندسی در رابطه با انتشار امواج، کشسانی، حرکت سیالات، وبخصوص دربسیاری ازمسائل مربوط به نظریهٔ پتانسیل و پخش که دارای تقارن استوانه‌ای هستند کاربردهای زیادی دارند. این توابع حتی دربعضی مسائل جالب ریاضیات محض ظاهر می‌شوند. تعدادی از کاربردها را درپیوست ب عرضه می‌کنیم، ولی نخست لازم است که آن‌دسته ازتوابع بسل‌را که مهمترند تعریف کنیم وبعضی از خواص سادهٔ آنها را به‌دست آوریم[2].

تعریف تابع $J_p(x)$. بررسی جوابهای معادلهٔ (۱) را با توجه به‌این‌مطلب شروع می‌کنیم که بعداز تقسیم معادلهٔ (۱) بر x^2، ضرایب y' و y بترتیب $P(x)=1/x$ و $Q(x)=(x^2-p^2)/x^2$ می‌شوند، بنابراین $xP(x)=1$ و $x^2Q(x)=-p^2+x^2$. بدین‌ترتیب مبدأ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است، و معادلهٔ مبین ۲۹ـ(۵) به‌صورت $m^2-p^2=0$ و توانهای مربوط $m_1=p$ و $m_2=-p$ می‌باشند. ازقضیهٔ ۲۹ـالف چنین برمی‌آیدکه معادلهٔ (۱) دارای جوابی به‌صورت

$$y=x^p\sum a_nx^n=\sum a_nx^{n+p} \tag{۲}$$

است، که درآن $a_0\neq 0$ و سری توانی $\sum a_nx^n$ برای کلیهٔ x ها همگرا است. برای تعیین این جواب می‌نویسیم

$$y'=\sum (n+p)a_nx^{n+p-1}$$

و

$$y''=\sum (n+p-1)(n+p)a_nx^{n+p-2}$$

---

۱. فردریش‌ویلهلم بسل Friedrich Wilhelm Bessel(۱۸۴۶-۱۷۸۴)منجم‌مشهور آلمانی ویکی از دوستان صمیمی‌گاوس بودکه سالهای زیادی با او مکاتبه داشت. او اولین‌کسی بودکه فاصلهٔ یك‌ستاره ثابت‌راتعیین‌کرد: اندازه‌گیری وی براساس‌اختلاف‌منظر درسال۱۸۳۸، فاصلهٔ ستارهٔ «۶۱دجاجه» را برابر با ۱۱ سال نوری‌یاحدود ۳۶۰,۰۰۰ برابرقطر مدار زمین‌تعیین کرد. درسال ۱۸۴۴ او دریافت‌که ستارهٔ شعرای یمانی، یعنی پرنورترین ستارهٔ آسمان، دارای ستارهٔ همراهی است، وبه‌همین‌دلیل اکنون به‌ستاره دوتایی مشهور است. این ستاره همرادشعرای یمانی، که ابعادی به‌اندازهٔ یك سیاره ولی جرمی به‌اندازهٔ یك ستاره دارد، و بنابراین چگالی آن هزار برابرچگالی آب است، یکی ازچگالیترین اجسام عالم است این اولین‌ستارهٔ مرده‌ای بودکه کشف شد، وجای خاصی را درنظریه‌های نوین سیرتکامل ستارگان اشغال‌کرده است.

۲. تمامی مطلب درسطحی وسیع درکتاب زیر مورد بررسی قرارگرفته است:

G. N. Watson, "A Treatise on the Theory of Bessel Function," 2d ed., Cambridge University Press, London, 1944.

این‌کتاب اثری است عظیم مشتمل بر ۷۵۲ صفحه بایك فهرست ۳۶ صفحه‌ای مشتمل بر ۷۹۱ مرجع. آنچه ما مورد بحث قرارخواهیم داد، درمقایسه با اقیانوس پرتلاطم تلاش علمی که درسه قرن اخیرصورت‌گرفته است، حبابی بیش نیست.

به‌کمك این فرمولها می‌توان جملات طرف چپ معادلهٔ (۱) را به‌صورت زیر درآورد

$$x^{۲}y''=\sum(n+p-۱)(n+p)a_n x^{n+p}$$
$$xy'=\sum(n+p)a_n x^{n+p}$$
$$x^{۲}y=\sum a_{n-۲}x^{n+p}$$
$$-p^{۲}y=\sum -p^{۲}a_n x^{n+p}$$

هرگاه این سری‌ها را باهم جمع کنیم وضریب x^{n+p} را برابر با صفر قرار دهیم، وقدری ساده‌کنیم، به‌رابطهٔ بازگشتی زیر برای a_n ها دست خواهیم یافت

$$n(۲p+n)a_n+a_{n-۲}=۰ \tag{۳}$$

یا

$$a_n=-\frac{a_{n-۲}}{n(۲p+n)} \tag{۴}$$

می‌دانیم که $a_۰$ مخالف‌صفر و دلخواه است. چون $a_{-۱}=۰$، از رابطهٔ(۴) داریم $a_۱=۰$؛ وکاربرد مکرر(۴) نتیجه می‌دهد، که برای هراندیس فرد n ، $a_n=۰$. بنابراین، ضرایب مخالف صفر جواب (۲) چنین‌اند

$$a_۰ ،\ a_۲=-\frac{a_۰}{۲(۲p+۲)} ,\ a_۴=-\frac{a_۲}{۴(۲p+۴)}=\frac{a_۰}{۲\times ۴(۲p+۲)(۲p+۴)}$$

$$a_۶=-\frac{a_۴}{۶(۲p+۶)}=-\frac{a_۰}{۲\times ۴\times ۶(۲p+۲)(۲p+۴)(۲p+۶)} ,\ \ldots$$

وخود جواب عبارت می‌شود از

$$y=a_۰x^p\left[۱-\frac{x^۲}{۲^۲(p+۱)}+\frac{x^۴}{۲^۴۲!(p+۱)(p+۲)}-\frac{x^۶}{۲^۶۳!(p+۱)(p+۲)(p+۳)}+\ldots\right]$$

$$=a_۰x^p\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n}}{۲^{۲n}n!(p+۱)\cdots(p+n)} \tag{۵}$$

تابع بسل از نوع اول و از مرتبهٔ p ، که آن‌را با $J_p(x)$ نشان می‌دهند، با قرار دادن $a_۰=۱/۲^p p!$ در (۵) تعریف می‌گردد، بنابراین

$$J_p(x)=\frac{x^p}{۲^p p!}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n}}{۲^{۲n}n!(p+۱)\cdots(p+n)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!} \qquad (6)$$

مفیدترین توابع بسل آنهایی هستند که از مرتبهٔ ۰ ویك باشند، که عبارت‌اند از

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\times 4^2}-\frac{x^6}{2^2\times 4^2\times 6^2}+\cdots \qquad (7)$$

و

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\cdots \qquad (8)$$

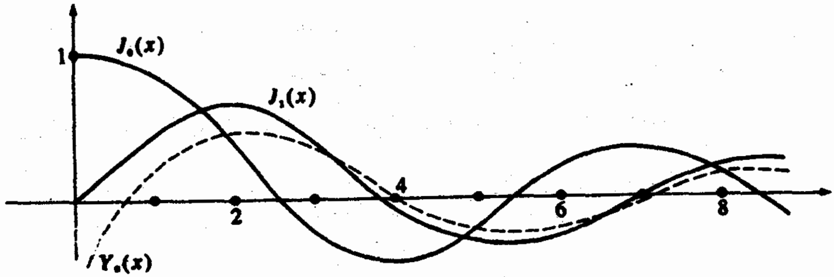
نمودار این دوتابع درشکل ۳۳ رسم شده است. این نمودارها خواص جالب متعددی از توابع $J_0(x)$ و $J_1(x)$ رانشان می‌دهند: هریك از آنها دارای یك رفتار نوسانی میرا است که‌درنتیجه بینهایت صفر مثبت‌دارد؛ وصفرهای این دوتابع به‌تناوب قرار می‌گیرند، به‌نحوی که صفرهای توابع $\sin x$ و $\cos x$ را تداعی می‌کنند. این تشابه ضعیف به‌وسیلهٔ رابطهٔ $J_0'(x)=-J_1(x)$، که اثبات‌آن درتمرینهای ۱ و ۲ به‌عهدهٔ خواننده گذاشته شده‌است، تقویت می‌شود.

امیدواریم‌خواننده دربحث فوق به‌این‌نکته توجه‌کرده باشد که تعریف $J_p(x)$ توسط رابطهٔ (۶) تنها وقتی معنی داردکه عدد غیرمنفی و حقیقی p صحیح باشد، زیرا تنها دراین حالت عوامل $(n+p)!$ ، واقع درمخرجها، معنی دارند. اینك توجه خودرا به رفع این مشکل معطوف می‌کنیم.

تابع گاما. مقصود از طرح این تابع آن است‌که معنای معقول و مفیدی برای $p!$ [وبه‌طورکلی‌تر برای $(p+n)!$ به‌ازای $n=0, 1, 2, \ldots$] وقتی عددحقیقی غیرمنفی p صحیح نیست، ارائه‌کنیم. برای این منظور تابع‌گاما $\Gamma(p)$ را ، به وسیلهٔ

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}t^{p-1}e^{-t}\,dt\ , \qquad p>0 \qquad (9)$$

تعریف می‌کنیم.



شکل ۳۳

وقتی $t \to +\infty$ ، عبارت e^{-t} چنان سریع به‌سمت صفر می‌گراید که این انتگرال ناسره، بدون توجه به‌مقدار p ، درحد بالای‌خود همگرا می‌شود ولی، درحد پایین‌می‌دانیم که هروقت $p<1$ ، آنگاه e^{-t} به‌سمت ۱ و عامل t^{p-1} به ∞ میل خواهد کرد. محدودیت $p>0$ برای تضمین همگرایی درحد پایین، ضروری است.

بسادگی دیده می‌شود که

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \tag{10}$$

زیرا انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء نشان‌می‌دهد که

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^p e^{-t}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-t^p e^{-t}\Big|_0^b + p\int_0^b t^{p-1}e^{-t}\,dt\right) \\ &= p\left(\lim_{b\to\infty}\int_0^b t^{p-1}e^{-t}\,dt\right) = p\Gamma(p)\end{aligned}$$

زیرا وقتی $b\to\infty$ ، $b^p/e^b \to 0$. رابطهٔ (۱۰) باتوجه به

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 \tag{11}$$

نتیجه‌می‌دهد که $\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$ ، $\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\times 1$ ، $\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3!$ و به‌طور کلی برای هر عددصحیح غیرمنفی n

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{12}$$

بحث راجع به تابع‌گاما را بافرض غیرمنفی بودن p شروع کردیم و درآغاز تذکر دادیم که انتگرال (۹) به‌ازای $p=0$ وجود ندارد. ولی، اگر رابطهٔ (۱۰) را به‌صورت

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \tag{13}$$

بنویسیم قادر خواهیم برد $\Gamma(p)$ را بدون‌نیاز به‌این انتگرال، برای‌بسیاری از p های منفی

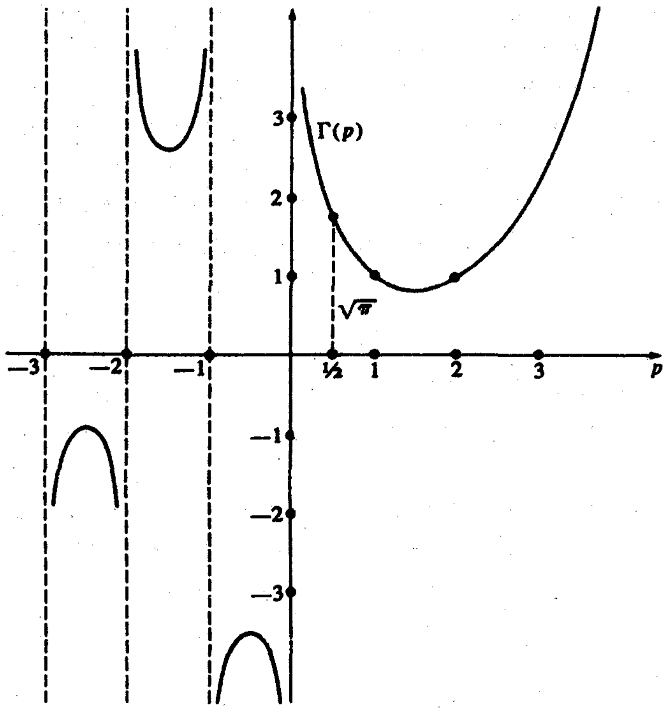
تعریف کنیم. این تعمیم تعریف برای کاربردها ضروری است، وچنین آغاز می گردد: هرگاه $-۱<p<۰$ ، آنگاه $۰<p+۱<۱$ ، وبنابراین طرف راست معادله (۱۳) مشخص است و طرف چپ (۱۳) را برابر مقدار طرف راست تعریف می کنیم. درقدم بعدی توجه می کنیم که اگر $-۲<p<-۱$ ، آنگاه $-۱<p+۱<۰$ ، بنابراین با استفادهٔ مجدد از (۱۳) می توانیم $\Gamma(p)$ را درفاصلهٔ $-۲<p<-۱$ برحسب مقادیر $\Gamma(p+۱)$ که درمرحلهٔ قبل تعریف شدند، تعریف کنیم. واضح است که این روند را می توان تاحد دلخواه ادامه داد. علاوه براین، از رابطهٔ (۱۱) روشن است که

$$\lim_{p\to ۰}\Gamma(p)=\lim_{p\to ۰}\frac{\Gamma(p+۱)}{p}=\pm\infty$$

بسته به اینکه p از راست یا از چپ به‌سمت صفر میل می کند. تابع $\Gamma(p)$ درحوالی همهٔ اعداد صحیح منفی رفتار مشابهی دارد، و بنابراین نمودار آن دارای صورت کلی نشان داده شده در شکل ۳۴ است. ما به‌دانستن رابطهٔ مهم

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sqrt{\pi} \tag{۱۴}$$

نیز احتیاج خواهیم داشت. این نکته درشکل مشخص شده و اثبات آن (درتمرین ۳) به‌عهدهٔ خواننده گذاشته شده است. ازآنجاکه $\Gamma(p)$ همواره مخالف صفر است، تابع $۱/\Gamma(p)$



شکل ۳۴

برای کلیهٔ مقادیر p، تعریف‌شده و خوش‌رفتار است هر گاه بپذیریم که مقدار $1/\Gamma(p)$ برای $p = 0, -1, -2, \ldots$، برابر باصفر است.

این ایده‌ها به‌ما امکان می‌دهند تا برای کلیهٔ مقادیر p بجز اعداد صحیح منفی p، عبارت $p!$ را به‌صورت

$$p! = \Gamma(p+1)$$

تعریف کنیم. و رابطهٔ (۱۲) نشان می‌دهد که وقتی p عدد صحیح غیرمنفی باشد $p!$ دارای همان معنای معمولی خود خواهدبود. عکس‌آن، یعنی $1/p! = 1/\Gamma(p+1)$، برای همهٔ p ها تعریف شده، وصفر است هر گاه p عددی صحیح و منفی باشد.

تابع گاما به‌خودی‌خود نیز تابع بسیار جالبی است، و بررسی‌کاملتری از خواص و کاربردهای آن را در کتاب دیگری از این سری ارائه خواهیم کرد. مقصود از معرفی آن دراینجا تضمین معنی‌دار بودن $J_p(x)$ به‌صورت تعریف شده توسط رابطهٔ (۶) برای کلیهٔ مقادیر $p \geqslant 0$ است. تذکر می‌دهیم که‌حتی به‌بیش‌از این‌حد دست‌یافته‌ایم، زیرا $1/(p+n)!$ اکنون برای هرمقدار $p+n$ معنا دارد، رابطهٔ (۶) تابعی کاملاً قابل‌قبول از x را برای کلیهٔ مقادیر p، بدون استثنا تعریف می کند.

جواب عمومی معادلهٔ بسل. موقعیت فعلی‌ما چنین‌است: یك جواب خصوصی از (۱) مربوط به توان $m_1 = p$، یعنی $J_p(x)$ را یافته‌ایم. حال برای یافتن جواب عمومی، باید به ساختن جواب مستقل دوم بپردازیم، یعنی جوابی که مضرب ثابتی از $J_p(x)$ نباشد. هر جوابی ازاین گونه را تابع بسل از نوع دوم می‌نامند. روش طبیعی آن‌است که توان $m_2 = -p$ را امتحان کنیم. ولی طی این کار هنگامی که اختلاف $m_1 - m_2 = 2p$ صفر یا یك‌عددصحیح مثبت‌باشد، یعنی‌هر گاه عدد ثابت غیرمنفی p یك عددصحیح ویانصف یك عددصحیح‌فردباشد، انتظار برخورد بامشکلات‌وجود دارد. خواهیم‌دید که مشکلات موردنظر تنها درحالت اول جدی هستند.

پس ابتدا فرض می کنیم که p عدد صحیح نباشد. دراین‌حالت درعملیات قبلی p را به $-p$ تبدیل می کنیم، وبسادگی می بینیم که بحث قبلی تقریباً بدون تغییر پیش می‌رود. تنها استثنا آن‌است‌که رابطهٔ (۳) به‌صورت

$$n(-2p+n)a_n + a_{n-2} = 0$$

درمی‌آید، و اگر احیاناً $p = 1/2$، درآن‌صورت با انتخاب $n = 1$ متوجه می‌شویم که هیچ اجباری برای‌انتخاب $a_1 = 0$ وجود ندارد. ولی،چون‌تنها می‌خواهیم به‌یك جواب‌خصوصی برسیم، مسلماً مجازیم که a_1 را برابر با صفر انتخاب کنیم. همین اشکال با $p = 3/2$ و $n = 3$ والی آخر وجود دارد؛ و درهمهٔ حالات آن‌را با انتخاب $a_1 = a_3 = \ldots = 0$ حل می کنیم. بقیهٔ چیزها طبق روال قبلی پیش می‌رود، وجواب دومی به‌صورت

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-p}}{n!(-p+n)!} \qquad (15)$$

به‌دست می‌آید. جملهٔ اول این سری برابر است با

$$\frac{1}{(-p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}$$

بنا براین $J_{-p}(x)$ درحوالی $x=0$ بیکران‌است.چون $J_p(x)$ نزدیك $x=0$ کراندار است، این دوجواب مستقل‌اند و جواب عمومی (۱) عبارت‌است‌از

$$y=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x)\ ,\quad (\text{غیرصحیح } p) \tag{۱۶}$$

درحالتی که p عددصحیح ومثبت m باشد، وضعیت کاملا متفاوت است. دراین‌حالت، فرمول (۱۵) به‌صورت

$$J_{-m}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}$$

درمی‌آید، زیـرا عبارات $1/(-m+n)!$ ، وقتی $n=0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ m-1$ ، صفرنـد. هرگاه متغیر ظاهری n را به $n+m$ تبدیل و درعوض، مجموع را از $n=0$ شروع کنیم، می بینیم که

$$J_{-m}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{(x/2)^{2(n+m)-m}}{(n+m)!n!}$$

$$=(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n+m}}{n!(m+n)!}=(-1)^mJ_m(x)$$

این امر نشان می‌دهد که $J_{-m}(x)$ مستقل از $J_m(x)$ نیست، بنا براین دراین‌حالت

$$y=c_1J_m(x)+c_2J_{-m}(x)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۱) نیست، وبررسی ادامه می‌یابد.

دراین مرحله، کار نسبتاً پیچیده می‌شود وما به‌طور بسیار خلاصه طرحی ازآن ارائه می کنیم. یکی از راههای ممکن، استفاده از روش بخش ۱۶ است، و بسادگی دیده می‌شود که جواب دوم مستقل از $J_m(x)$ برابر است با

$$J_m(x)\int\frac{dx}{xJ_m(x)^2}$$

ولی‌متداول آن‌است‌که راه نسبتاً متفاوت زیر را پیش‌گیریم. وقتی p ، عددی‌صحیح نباشد، هرتابعی به‌صورت (۱۶) با $c_2\neq 0$ ، ومنجمله خود $J_{-p}(x)$ ، یك تابع بسل از نوع دوم است. صورت متعارف تابع بسل ازنوع دوم با

$$Y_p(x)=\frac{J_p(x)\cos p\pi-J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \tag{۱۷}$$

تعریف می‌شود، این انتخاب بظاهر غیرعادی به‌دلایل مناسبی صورت گرفته است که‌هم اکنون به‌تشریح آنها می‌پردازیم. ولی، خواننده باید قبل‌از هرچیز توجه کند که (۱۶) را مسلماً می‌توان به‌صورت معادل زیر نوشت

$$y=c_1J_p(x)+c_2Y_p(x) \qquad \text{،(غیرصحیح } p) \tag{۱۸}$$

هنوز نمی‌دانیم که وقتی p عدد صحیح m است، چه‌باید کرد، زیرا (۱۷) دراین حالت بی‌معناست. پس‌از یك تحلیل مفصل می‌توان دید که تابعی که توسط

$$Y_m(x)=\lim_{p\to m} Y_p(x) \tag{۱۹}$$

تعریف می‌شود، موجود ویك تابع بسل از نوع دوم است؛ و درنتیجه

$$y=c_1J_p(x)+c_2Y_p(x) \tag{۲۰}$$

درهمهٔ حالات جواب عمومی معادلهٔ بسل‌است، خواه p عدد صحیح باشد یا نباشد. نمودار $Y_0(x)$ توسط منحنی خط‌چین شکل۳۳ نشان داده‌شده‌است. این‌نمودار نشان دهندهٔ‌این‌نکتهٔ مهم است که برای هر $p\geqslant 0$ ، تابع $Y_p(x)$ درنزدیکی مبدأ بیکران است. نتیجتاً اگر تنها علاقه‌مند به‌جوابهایی از معادلهٔ بسل باشیم که درنزدیك $x=0$ کراندارند، که دراغلب موارد کاربردی نیز چنین است، باید در (۲۰) مقدار c_2 را برابرصفر انتخاب‌کنیم.

اکنون همانطور که قول داده بودیم به‌تشریح دلیل انتخاب فرم غیرعادی (۱۷) می‌پردازیم. گفتیم که راههای زیادی برای تعریف توابع بسل از نوع دوم وجود دارد. تعریفهای (۱۷) و (۱۹) ، به دو دلیل بسیار مناسب‌اند. اولا، شکل (۱۷) به‌ما امکان‌می‌دهد تا به‌طریقی نسبتاً ساده ثابت‌کنیم که حد (۱۹) موجود است (به‌تمرین ۹ مراجعه‌کنید). و ثانیاً، این تعاریف نشان می‌دهند که رفتار $Y_p(x)$ ، برای مقادیر بزرگ، به‌طور طبیعی با رفتار $J_p(x)$ مطابقت دارد. برای آنکه ببینیم مقصود از این عبارت چیست، از تمرین ۲۲-۳ می‌دانیم که معادلهٔ بسل (۱) باتعریف تابع جدید $u(x)=\sqrt{x}\,y(x)$ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$u''+\left(1+\frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u=0 \tag{۲۱}$$

وقتی x بسیاربزرگ باشد، معادلهٔ (۲۱) رامی‌توان بامعادلهٔ دیفرانسیل آشنای $u''+u=0$، که جوابهای مستقل آن $u_1(x)=\cos x$ و $u_2(x)=\sin x$ هستند، بخوبی تقریب زد. بنابراین، انتظار می‌رود که، برای مقادیر بزرگ x ، رفتار هرتابع بسل $y(x)$ شبیه رفتار یك ترکیب خطی از توابع

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x$$

باشد. این انتظار توسط روابط زیر تقویت می‌شود:

$$J_p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)+\frac{r_1(x)}{x^{3/2}}$$

و

$$Y_p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)+\frac{r_2(x)}{x^{3/2}}$$

که درآنها توابع $r_1(x)$ و $r_2(x)$ وقتی $x\to\infty$ ، کراندارند.[1]

تمرین

۱ــ با استفاده از (۷) و (۸) نشان دهید که

الف) $\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x)$ ب) $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)$

۲ــ با استفاده از تمرین ۱ وقضیهٔ رول نشان دهید که

الف) بین هردوصفر مثبت $J_0(x)$ یك صفر از $J_1(x)$ واقع است؛

ب) بین هردوصفر مثبت $J_1(x)$ یك صفر از $J_0(x)$ واقع است.

۳ــ باتوجه به‌تعریف (۹)،

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt$$

الف) نشان دهید که تغییر متغیر $t=s^2$ به‌رابطهٔ زیر منجر می‌شود

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-s^2}ds$$

ب) ازآنجا که متغیر s در (الف) متغیری ظاهری است، داریم

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)$$

---

۱. مراجعه شود به
Watson, chap. VII; or R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics," vol. 1, pp. 331-334, 526, Interscience-Wiley, New York, 1953.

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

با تبدیل این انتگرال به‌انتگرال دوگانه درمختصات قطبی نشان دهید که

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\pi$$

وبنابراین $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

۴ـ چون برای p هایی که‌عددصحیح‌منفی نیستند،داریم $p!=\Gamma(p+1)$ ،(۱۴) بیان‌می کند که $(-1/2)!=\sqrt{\pi}$. مطلوب است محاسبهٔ $(1/2)!$ و $(3/2)!$. به‌طور کلی نشان‌دهید که برای هرعدد صحیح و غیرمنفی n داریم

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)!=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

و

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)!=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

۵ـ وقتی $p=1/2$ ، معادلهٔ (۲۱) نشان می‌دهد که جواب عمومی معادلهٔ بسل را می‌توان به‌یکی از دوصورت معادل زیر نوشت:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

و

$$y=c_1J_{1/2}(x)+c_2J_{-1/2}(x)$$

بنابراین روابط

$$\sqrt{x}J_{1/2}(x)=a\cos x+b\sin x$$

و

$$\sqrt{x}\,J_{-1/2}(x)=c\cos x+d\sin x$$

باید برای برخی مقادیر ثابت a ، b ، c ، و d برقرار باشند. با محاسبهٔ این مقادیر ثابت، نشان دهید که

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \text{و} \quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

۶ـ فرمولهای تمرین ۵ را با عملیات مستقیم روی سری‌های بسط توابع $J_{1/2}(x)$ و

$J_{-1/2}(x)$ به‌دست آورید.

۷ـ بسیاری از معادلات دیفرانسیل در واقع معادلهٔ بسل هستند، با صورتی متفاوت، و از این‌رو آنها را می‌توان به‌وسیلهٔ توابع بسل حل کرد. به‌عنوان نمونه، هرگاه معادلهٔ بسل را به‌صورت

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-p^2)w=0$$

بنویسیم، می‌بینیم که تغییر متغیرهای $z=ax^b$ و $w=yx^c$ (که درآن a، b و c ثابت هستند) معادلهٔ فوق را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنند

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(2c+1)x\frac{dy}{dx}+[a^2b^2x^{2b}+(c^2-p^2b^2)]y=0$$

جواب عمومی معادلهٔ اخیر را برحسب توابع بسل بنویسید.

۸ـ با استفاده ازنتیجهٔ تمرین ۷ نشان دهید که جواب عمومی معادلهٔ ایری[1] $y''+xy=0$ (به‌تمرین ۲۷ـ۵ مراجعه شود) عبارت است از

$$y=x^{1/2}\left[c_1J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)+c_2J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$$

۹ـ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال درمورد حد (۱۹)، نشان دهید که

$$Y_m(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial p}J_p(x)-(-1)^m\frac{\partial}{\partial p}J_{-p}(x)\right]_{p=m}$$

۳۵. خواص توابع بسل

تابع بسل $J_p(x)$ برای هرعدد حقیقی p به‌صورت

$$J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!} \qquad (1)$$

تعریف شده است، دراین بخش تعدادی از خواص این توابع را که درموارد کاربردی مفیدند، بررسی می‌کنیم.

اتحادها و توابع $J_{m+1/2}(x)$. بررسی را باتوجه به‌فرمولهای

$$\frac{d}{dx}\left[x^pJ_p(x)\right]=x^pJ_{p-1}(x) \qquad (2)$$

و

1. Airy

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p}J_p(x) \right] = -x^{-p}J_{p+1}(x) \qquad (3)$$

شروع می کنیم. برای اثبات (۲)، کافی است سری (۱) را در x^p ضرب کنیم و ازآن‌مشتق بگیریم:

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2p}}{2^{2n+p} n!(p+n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p-1} n!(p+n-1)!}$$

$$= x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p-1}}{n!(p-1+n)!} = x^p J_{p-1}(x)$$

رابطهٔ(۳) نیز به‌همین‌ترتیب اثبات می‌شود و جزئیات آن‌را درتمرین ۱ این بخش به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم. هـر گاه مشتق گیری‌های فرمولهای (۲) و (۳) را انجام دهیم و نتیجه را بر $x^{\pm p}$ تقسیم کنیم، این فرمول‌ها به‌صورت

$$J_p'(x) + \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) \qquad (4)$$

و

$$J_p'(x) - \frac{p}{x} J_p(x) = -J_{p+1}(x) \qquad (5)$$

درمی‌آیند. هر گاه (۴) و (۵) را ابتدا باهم جمع وسپس ازهم کم کنیم، خواهیم داشت

$$2J_p'(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) \qquad (6)$$

و

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) \qquad (7)$$

این فرمولها ما را قادر می‌سازند تا توابع بسل ومشتقات آنهارا برحسب دیگر توابع بسل بیان کنیم.

یکی ازکاربردهای جالب (۷) با فرمولهای

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad و \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

که درتمرین ۳۴ـ۵ اثبات شد، آغاز می گردد. حال از فرمول (۷) نتیجه می‌شود که

$$J_{3/2}(x)=\frac{1}{x}J_{1/2}(x)-J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$$

و

$$J_{5/2}(x)=\frac{3}{x}J_{3/2}(x)-J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\sin x}{x^2}-\frac{3\cos x}{x}-\sin x\right)$$

همچنین

$$J_{-3/2}(x)=-\frac{1}{x}J_{-1/2}(x)-J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\cos x}{x}-\sin x\right)$$

و

$$J_{-5/2}(x)=-\frac{3}{x}J_{-3/2}(x)-J_{-1/2}(x)=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\cos x}{x^2}+\frac{3\sin x}{x}-\cos x\right)$$

واضح است که این گونه محاسبات را می‌توان تا بینهایت ادامه داد، و بنابراین هر تابع بسل $J_{m+1/2}(x)$ (که‌درآن m عددی صحیح است) تابعی‌مقدماتی‌است. لیوویل[1] ثابت کرده‌است که اینها تنها حالاتی‌است که درآنها $J_p(x)$ تابعی مقدماتی است[2].

کاربرد دیگری از فرمول (۷) در آخر پیوست ج داده شده است و درآنجا نحوهٔ به‌دست آمدن کسر مسلسل لامبرت برای $\tan x$ ، نشان داده شده است. این کسر مسلسل دارای ارزش تاریخی عظیمی است، زیرا توسط این کسر بود که اولین اثبات غیرگویا بودن عدد π به‌دست آمد.

هرگاه فرمولهای مشتق‌گیری (۲) و (۳) را به‌صورت‌های

$$\int x^pJ_{p-1}(x)dx=x^pJ_p(x)+c \tag{۸}$$

و

---

1. Liouville

۲. جزئیات این دستاورد قابل توجه را می‌توان درفصل چهارم‌کتاب Watson وهمچنین‌مرجع زیر یافت:

J. F. Ritt, "Integration in Finite Terms," Columbia University Press, New York, 1948.

توابع $J_{m+1/2}(x)$ را اغلب توابع بسل‌کروی می‌نامند زیرا توابع مزبور درحل معادلهٔ موج درمختصات‌کروی ظاهر می‌شوند.

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x)\,dx = -x^{-p} J_p(x) + c \tag{۹}$$

بنویسیم، آنگاه ازآنها می‌توان برای انتگرالگیری ازبسیاری عبارات سادهٔ مشتمل برتوابع بسل استفاده کرد. به‌عنوان مثال، وقتی که $p=1$، (۸) به‌صورت

$$\int x J_0(x)\,dx = x J_1(x) + c \tag{۱۰}$$

درمی‌آید. درمورد انتگرالهای پیچیده‌تری که نما ومرتبهٔ تابع بسل، آن‌گونه‌که در (۸) و (۹) آمده است با یکدیگر تطبیق نکنند، معمولا استفاده از انتگرالگیری جزء‌به‌جزء نیز به‌عنوان ابزار تکمیلی ضرورت پیدا می‌کند.

صفرها و سری بسل. از تمرین ۲۲ـ۳ چنین برمی‌آید که برای هرمقدار p، تابع $J_p(x)$ بینهایت صفر مثبت دارد. این موضوع بخصوص برای $J_0(x)$ درست است. صفرهای این تابع با دقت بسیار زیادی شناخته شده‌اند و مقادیرشان دربسیاری از جداول ریاضی داده شده‌است. مقدار تقریبی پنج صفر اول عبارت‌اند از ۲٫۴۰۴۸ ، ۵٫۵۲۰۱، ۸٫۶۵۳۷، ۱۱٫۷۹۱۵ ، و ۱۴٫۹۳۰۹ ؛ وتفاضلهای پیاپی‌آنان برابرندبا ۳٫۱۱۵۳، ۳٫۱۳۳۶ ، ۳٫۱۳۷۸ ، و ۳٫۱۳۹۴ . صفرهای مثبت و تفاضلهای متناظر مربوط به $J_1(x)$ عبارت‌اند از ۳٫۸۳۱۷ ، ۷٫۰۱۵۶ ، ۱۰٫۱۷۳۵ ، ۱۳٫۳۲۳۷ ، و ۱۶٫۴۷۰۶؛ و ۳٫۱۸۳۹ ، ۳٫۱۵۷۹ ، ۳٫۱۵۰۲ و ۳٫۱۴۶۹. توجه‌کنیدکه چطور این تفاضلها تضمین‌های‌داده شده درتمرین ۲۳ـ۱ را تأیید می‌کنند.

هدف ازاین توجه به‌صفرهای $J_p(x)$ چیست؟ درفیزیك ریاضی اغلب ضرورت پیدا می‌کندکه تابع مفروضی را برحسب توابع بسل بسط دهیم، که نوع خاص این بسط به مسئلهٔ موردنظر بستگی دارد. ساده‌ترین ومفیدترین بسطهای از این‌نوع، سری‌های به‌صورت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\lambda_n x) = a_1 J_p(\lambda_1 x) + a_2 J_p(\lambda_2 x) + \cdots \tag{۱۱}$$

است. دراینجا تابع $f(x)$ روی فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ تعریف شده است و λ_n ها صفرهای مثبت تابع بسل مشخص $J_p(x)$ با $p \geqslant 0$ هستند. فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ را تنها به‌دلیل‌سادگی انتخاب کرده‌ایم، و تمام فرمولهای ذیل را می‌توان با تغییر متغیر ساده‌ای به‌حالت تابع تعریف شده روی $0 \leqslant x \leqslant a$ نیز تعمیم داد. نقش چنین بسطهایی درمسائل فیزیکی شبیه نقشی است‌که سریهای فوریه و لژاندر ایفا می‌کنند. نقش سریهای فوریه و لژاندر در رابطه با تار مرتعش و دماهای درون یك کره دربخش ۲۴ و پیوست الف روشن گردیده است. درپیوست ب کاربرد (۱۱) درحل معادلهٔ موج دوبعدی را برای غشای مدورمرتعش نشان می‌دهیم.

باتوجه به‌تجربهٔ قبلی خود درمورد سری‌های فوریه و لژاندر، انتظار داریم که تعیین ضرایب‌موجود در رابطهٔ (۱۱) به‌بعضی ازخواص انتگرالی توابع $J_p(\lambda_n x)$ بستگی داشته باشد. چیزی که دراینجا بدان نیاز داریم این‌است که

$$\int_{0}^{1} xJ_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x)dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m\neq n، \\ \frac{1}{2}J_{p+1}(\lambda_n)^2 & \text{اگر } m=n، \end{cases} \qquad (12)$$

با توجه به ایده‌هایی که در بخش ۳۳ مطرح کردیم، این فرمولها حاکی از آناندکه توابع $\sqrt{x}\,J_p(\lambda_n x)$ روی فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ متعامدند. این مطالب را در انتهای این بخش اثبات خواهیم کرد، ولی ابتدا به بیان کاربردهای آنها می‌پردازیم.

با فرض آنکه بسطی به صورت (۱۱) ممکن باشد، طرفین آن را در $xJ_p(\lambda_m x)$ ضرب می‌کنیم، ازآن به‌طور صوری، جمله به جمله ازصفر تا یك انتگرال می‌گیریم، و با استفاده از (۱۲) خواهیم داشت

$$\int_{0}^{1} xf(x)J_p(\lambda_m x)dx = \frac{a_m}{2}J_{p+1}(\lambda_m)^2$$

که از تبدیل m به n فرمول زیر برای a_n به‌دست می‌آید:

$$a_n = \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2}\int_{0}^{1} xf(x)J_p(\lambda_n x)dx \qquad (13)$$

سری (۱۱) را، که ضرایب آن به‌وسیلهٔ (۱۳) محاسبه می‌شوند، سری بسل (یا بعضی‌اوقات سری فوریه ـ بسل) تابع $f(x)$ می‌نامند. طبق معمول، بدون اثبات قضیهٔ نسبتاً عمیقی را بیان‌می‌کنیم. این‌قضیه شرایطی را ارائه می‌کندکه تحت آنها سری (۱۱) واقعاً همگراست و دارای مجموع $f(x)$ است[1].

قضیهٔ الف. (قضیهٔ بسط بسل). فرض کنید که $f(x)$ و $f'(x)$ حداکثر دارای تعدادی متناهی ناپیوستگی جهشی در فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ باشند. اگر $0 < x < 1$، آنگاه سری بسل (۱۱) وقتی که f در x پیوسته باشد به $f(x)$ و وقتی که f در x ناپیوسته باشد به $[f(x-)+f(x+)]/2$ همگرا می‌شود.

طبیعی است سؤال‌کنیم که در نقاط انتهایی فاصله چه اتفاقی می‌افتد. در $x=1$، صرف‌نظر از ماهیت تابع، سری به صفرمی‌گراید زیرا همهٔ $J_p(\lambda_m)$ها صفرند. این سری در $x=0$ نیز وقتی $p>0$ به صفر و وقتی $p=0$ به $f(0+)$ همگرا خواهد بود.

به عنوان نمونه، سری بسل تابع $f(x)=1$ را برای فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ برحسب توابع $J_0(\lambda_n x)$ محاسبه می‌کنیم؛ دراینجا λ_nها صفرهای‌مثبت $J_0(x)$ هستند. دراین‌حالت، (۱۳) به‌صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2}\int_{0}^{1} xJ_0(\lambda_n x)\,dx$$

---

۱. برای اثبات مراجعه شود به Watson, chap. XVIII.

با توجه به (۱۰)، می‌بینیم که

$$\int_0^1 xJ_0(\lambda_n x)dx = \left[\frac{1}{\lambda_n}xJ_1(\lambda_n x)\right]_0^1 = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n}$$

بنابراین

$$a_n = \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

در نتیجه سری بسل مطلوب عبارت است از

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n x) \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

اثبات خواص تعامد. برای اثبات (۱۲)، مطلب را با این امر که $y = J_p(x)$ جوابی از معادلهٔ

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

است، آغاز می‌کنیم. اگر a و b اعداد مثبت متمایزی باشند، نتیجه می‌شود که توابع $u(x) = J_p(ax)$ و $v(x) = J_p(bx)$ در معادلات

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u = 0 \qquad (14)$$

و

$$v'' + \frac{1}{x}v' + \left(b^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)v = 0 \qquad (15)$$

صدق می‌کنند. حال این معادلات را در v و u ضرب و نتایج را از هم کم می‌کنیم تا رابطهٔ

$$\frac{d}{dx}(u'v - v'u) + \frac{1}{x}(u'v - v'u) = (b^2 - a^2)uv$$

را به‌دست آوریم که پس از ضرب در x به‌صورت

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - v'u)] = (b^2 - a^2)xuv \qquad (16)$$

درمی‌آید. اگر از طرفین (۱۶) از $x = 0$ تا $x = 1$ انتگرال بگیریم مشاهده می کنیم که

$$(b^2 - a^2)\int_0^1 xuv\, dx = [x(u'v - v'u)]_0^1$$

واضح است که عبارت داخل کروشه در $x = 0$ برابر صفر است، و در انتهای دیگر فاصله

داریم $u(1)=J_p(a)$ و $v(1)=J_p(b)$. بنابراین نتیجه‌می‌شود که، هرگاه a و b صفرهای مثبت متمایز λ_m و λ_n از $J_p(x)$ باشند، انتگرال طرف چپ صفراست؛ یعنی داریم

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x)\,dx=0 \tag{17}$$

که قسمت اول رابطهٔ (۱۲) است.

مرحلهٔ نهایی، عبارت ازمحاسبهٔ انتگرال (۱۷) درحالت $m=n$ است. هرگاه (۱۴) را در $2x^2u'$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$2x^2u'u''+2xu'^2+2a^2x^2uu'-2p^2uu'=0$$

یا

$$\frac{d}{dx}(x^2u'^2)+\frac{d}{dx}(a^2x^2u^2)-2a^2xu^2-\frac{d}{dx}(p^2u^2)=0$$

اگر ازآن از $x=0$ تا $x=1$ انتگرال بگیریم، چنین به‌دست می‌آوریم

$$2a^2\int_0^1 xu^2\,dx=[x^2u'^2+(a^2x^2-p^2)u^2]_0^1 \tag{18}$$

وقتی $x=0$ ، عبارت داخل کروشه صفر می‌شود؛ و چون $u'(1)=aJ_p'(a)$ ، (۱۸) نتیجه می‌دهد که

$$\int_0^1 xJ_p(ax)^2\,dx=\frac{1}{2}J_p'(a)^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)J_p(a)^2$$

حال a را برابر با λ_n قرارمی‌دهیم وبه‌دست می‌آوریم

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_n x)^2\,dx=\frac{1}{2}J_p'(\lambda_n)^2=\frac{1}{2}J_{p+1}(\lambda_n)^2$$

در آخرین مرحلهٔ محاسبه از (۵) استفاده شده است، و این اثبات (۱۲) را کامل می‌کند.

تمرین

۱ــ صحت فرمول (۳) را تحقیق کنید.

۲ــ ثابت کنید که صفرهای‌مثبت $J_p(x)$ و $J_{p+1}(x)$ متناوباً ظاهــرمی‌شوند، یعنی بین هردو صفر مثبت متوالی از یکی، دقیقاً یك صفر از دیگری واقع می‌شود.

۳ــ توابع $J_2(x)$ ، $J_3(x)$ و $J_4(x)$ را برحسب $J_0(x)$ و $J_1(x)$ بنویسید.

۴ــ تابع $f(x)$ راکه به صورت

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x=\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}<x\leqslant 1 \end{cases}$$

تعریف شده است درنظر بگیرید وثابت کنید که

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n/2)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)^2}J_0(\lambda_n x)$$

در اینجا λ_n ها صفرهای مثبت $J_0(x)$ هستند.

۵ـ اگر در فاصلهٔ $0\leqslant x<1$ ، داشته باشیم $f(x)=x^p$، نشان دهید که سری بسل آن برحسب توابع $J_p(\lambda_n x)$ ، که درآن λ_n ها صفرهای مثبت $J_p(x)$ اند، عبارت‌است از

$$x^p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)}J_p(\lambda_n x)$$

۶ـ با استفاده از نمادهای تمرین ۵ به‌طور صوری نشان دهید که اگر تابع $g(x)$ درفاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ خوش رفتار باشد، آنگاه

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p+1}g(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)}\int_0^1 xg(x)J_p(\lambda_n x)\,dx$$

حال با انتخاب $g(x)$ برابر با x^p و x^{p+2} ، نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}=\frac{1}{4(p+1)} \quad و \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}=\frac{1}{16(p+1)^2(p+2)}$$

۷ـ صفرهای مثبت $\sin x$ عبارت‌اند از π، 2π ، 3π ، ... . با استفاده ازنتیجهٔ تمرین ۶ (و تمرین ۳۴ـ۵) نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

۸ـ نشان دهید که تغییر متغیر وابسته به‌صورت

$$By=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

معادلهٔ ریکاتی خاص

$$\frac{dy}{dx}+By^{2}=Cx^{m}$$

را به

$$\frac{d^{2}u}{dx^{2}}-BCx^{m}u=0$$

تبدیل می‌کند. اگر $m\neq -2$ ، با استفاده از تمرین ۳۴ــ۷ نشان دهید که این معادله برحسب توابع مقدماتی قابل حل است اگر و تنها اگر $m=-4k/(2k+1)$ ، که در آن k عددی صحیح است. (وقتی $m=-2$ ، جایگزینی $y=v/x$ معادلهٔ ریکاتی را به یك معادله با متغیرهای جدا شدنی تبدیل می‌کند که دارای یك جواب مقدماتی است.)

۹ــ نشان دهید که جواب عمومی

$$\frac{dy}{dx}=x^{2}+y^{2}$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y=x\,\frac{J_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^{2}\right)+cJ_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^{2}\right)}{cJ_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^{2}\right)-J_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^{2}\right)}$$

پیوست الف . چند جمله‌ای‌های لژاندر و نظریهٔ پتانسیل

اگر تعدادی ذره به جرمهای m_1 ، m_2 ، ... ، m_n ، که مطابق قانون عکس مجذور گرانش یکدیگر را جذب می‌کنند، در نقاط P_1 ، P_2 ، ... ، P_n قرار گرفته باشند، آنگاه پتانسیل ناشی از این ذرات در هر نقطهٔ P (یعنی کار انجام شده در قبال نیروهای جاذبهٔ آنها طی تغییر مکان واحد جرم از P به نقطه‌ای بینهایت دور) عبارت است از

$$U=\frac{Gm_1}{PP_1}+\frac{Gm_2}{PP_2}+\cdots+\frac{Gm_n}{PP_n} \tag{1}$$

که درآن ، G ثابت گرانش است[1]. اگـر نقاط P ، P_1 ، P_2 ، ... ، P_n دارای مختصات دکارتی (x, y, z) ، (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2) ، ... ، (x_n, y_n, z_n) باشند ، به طوری که

---

۱. مراجعه شود به معادلهٔ ۲۱ــ(۱۷).

$$PP_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

و روابطی نظیر این برای دیگر فواصل برقرار باشند، آنگاه با مشتق‌گیری جزئی بسادگی می‌توان دید که پتانسیل U در معادلهٔ لاپلاس

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \qquad (2)$$

صدق می‌کند . این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی نه شامل جرمهای بخصوص است و نه شامل مختصات نقاطی که جرمها در آن واقع‌اند ، بنابراین معادلـهٔ (۲) برای پتانسیل حاصل از یك توزیع پیوسته و یا گسستهٔ دلخواه از ذرات در یك فضای خالی نیز برقرار است. این معادله را اغلب به‌صورت

$$\nabla^2 U=0 \qquad (3)$$

می‌نویسند، که در آن ∇^2 (مجذور دل) علامت اختصاری عملگر دیفرانسیلی

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

است. تابع U را پتانسیل گرانشی ، می‌نامند. هرگاه به جای حالت فوق، ذرات بارداری با بارهای q_1 ، q_2 ، ... ، q_n را به‌کار بریم، آنگاه پتانسیل الکتروستاتیکی آنها نیز به‌همان شکل (۱) خواهد بود با این‌تفاوت‌که باید m ها را با q ها و G را با ثابت‌کولن عوض کنیم ، پس این پتانسیل نیز در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. کاربـردهای این معادله چنان فراوان و متنوع‌اند که مطالعهٔ آن به نوبـهٔ خود شاخه‌ای از آنالیز مشهور به‌نظریهٔ پتانسیل را تشکیل می‌دهد. معادلهٔ مربوطهٔ

$$a^2\nabla^2 U=\frac{\partial U}{\partial t} \qquad (4)$$

که به معادلهٔ حرارت مشهور است، در مسائل مربوط به هدایت‌حرارت ظاهـر می‌شود ، در اینجا U علاوه برمختصات، تابع زمان نیز هست. معادله موج

$$a^2\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad (5)$$

با پدیده‌های ارتعاشی مرتبط است.

چند نکتهٔ کوتاه در مورد معنای فیزیکی این معادلات می‌افزاییم. معادلهٔ (۵) همـان صورت سه بعدی معادلهٔ یك بعدی موج ۲۴ـ(۸) است، که قبلاً به طور مفصل مورد بحث قرار گرفت. با مراجعه به معادلهٔ لاپلاس (۳) ، می‌بینیم که این معادلـه همـان حکمی را در مورد U می‌کند که معادلهٔ یك بعدی $d^2y/dx^2=0$ در مورد تـابع یك متغیری $y(x)$ به عمل می‌آورد. اما از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود کـه $y(x)$ به صورت خطی $y=mx+b$

است؛ و هر تابعی به این صورت، دارای این خاصیت است که مقدارش در مرکز هر فاصله، با میانگین مقادیر آن در نقاط انتهایی برابر است. از (۱) روشن است که جوابهای معادلهٔ لاپلاس لزوماً توابعی خطی از x، y، و z نیستند؛ در واقع، این جوابها می‌توانند خیلی پیچیده باشند، با این حال، می‌توان ثابت کرد که هرجواب (۳) دارای این خاصیت شایان توجه است که مقدار آن در مرکز یك کره با میانگین مقادیرش بررویهٔ آن کره برابر است (این مطلب توسط گاوس کشف شد). به طور کلی‌تر، تابع $\nabla^2 U$ را می‌توان به عنوان اندازهٔ تقریبی تفاوت بین مقدار متوسط U بررویهٔ یك کرهٔ کوچك و مقدار دقیق آن در مرکز کره دانست. بنابراین، به عنوان مثال، اگر U نمایشگر دما دریك نقطهٔ دلخواه P دریك جسم صلب باشد و $\nabla^2 U$ در نقطه‌ای چون P_0 مثبت باشد، آنگاه مقدار U در P_0 معمولاً کمتر از مقادیر آن در نقاط نزدیك به آن است. بنابراین انتظار می‌رود که حرارت به‌طرف P_0 سیلان کند، و باعث افزایش دما در آنجا شود؛ و چون دمای U در حال افزایش است، $\partial U/\partial t$ در P_0 مثبت است. این اساساً همان چیزی است که معادلهٔ حرارت (۴) بیان می‌کند: $\partial U/\partial t$ متناسب و هم‌علامت با $\nabla^2 U$ است. اگر دمای U در سراسر جسم به‌حالت پا برجا برسد، به طوری که در همهٔ نقاط $\partial U/\partial t = 0$ آنگاه $\nabla^2 U = 0$ و به حالت معادلهٔ لاپلاس برخواهیم گشت.

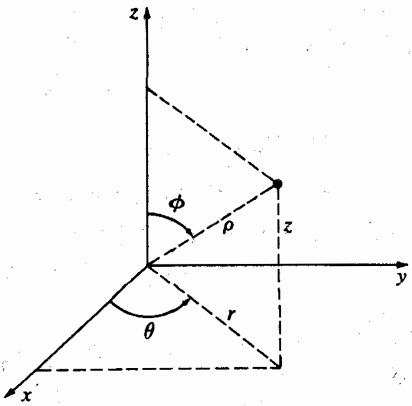
مواردی پیش خواهد آمد که از فرمول $\nabla^2 U$ در مختصات استوانه‌ای $(z ، \theta ، r)$ و مختصات کروی $(\rho ، \theta ، \phi)$ که در شکل ۳۵ نشان داده شده‌اند، استفاده کنیم.

این مختصات بوسیلهٔ روابط زیر به مختصات دکارتی مربوط می‌شوند

$$x = r\cos\theta \; ، \; y = r\sin\theta \; ، \; z = z$$

و

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \; ، \; y = \rho\sin\phi\sin\theta \; ، \; z = \rho\cos\phi$$



شکل ۳۵

به وسیلهٔ محاسباتی طولانی ولی ساده می‌توان نشان داد که، در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (6)$$

و در مختصات کروی

$$\nabla^2 U=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2 \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial U}{\partial \phi}\right)$$
$$+\frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} \qquad (7)$$

هردانشجوی ریاضی باید حداقل یك بار در عمرش این محاسبات را انجام دهد، ولی‌شاید همان یك‌بار کافی باشد!

دماهای حالت پابرجا درکره. دراین مثال می‌خواهیم تشریح حتی‌المقدور ساده‌ای از نقش چند جمله‌ایهای لژاندر در حل برخی مسائل مقدار مرزی در فیزیك ریاضی عرضه کنیم.[1]

فرض‌کنید یك‌کرهٔ صلب به شعاع ۱ را در یك دستگاه مختصات‌کروی چنان قرار داده‌ایم که مرکزش برمبدأ منطبق باشد. حال فرض‌کنیدکه رویهٔ آن را در دمای بخصوص $f(\phi)$، که برای سادگی مستقل از θ فرض می‌شود، نگه‌داریم تا وقتی‌که سیلان حرارت، حالتی پابرجا برای دمای $T(\rho, \phi)$ در داخل کره برقرار کند. مسئله عبارت از یافتن نمایش صریحی برای تابع دمای $T(\rho, \phi)$ است.

دمای حالت پابرجای T در معادلهٔ لاپلاس در دستگاه مختصات‌کروی صدق می‌کند. و چون T به θ بستگی ندارد، (۷) به ما امکان می‌دهد که این معادله را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)=0 \qquad (8)$$

برای حل معادلهٔ (۸) با شرط مرزی

$$T(1, \phi)=f(\phi) \qquad (9)$$

از روش جدا کردن متغیرها که در بخش ۲۴ گفته شد استفاده می‌کنیم، یعنی، دنبال جوابی از (۸) می‌رویم که به صورت $T(\rho, \phi)=u(\rho)v(\phi)$ باشد. اگر این عبارت را در (۸) بگذاریم و متغیرها را جدا کنیم، می‌بینیم که

$$\frac{1}{u}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{du}{d\rho}\right)=-\frac{1}{v\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dv}{d\phi}\right) \qquad (10)$$

---

۱. تعداد زیادی مسائل پیچیده‌تر در فصل هشتم‌کتاب لبدف مورد بررسی قرارگرفته‌اند.

قدم اساسی دراین روش توجه به نکته زیر است: چون طرف چپ معادلهٔ (۱۰) صرفاً تابعی از ρ و طرف راست آن صرفاً تابعی از ϕ است ، هریك از این دو طرف باید برابـر با مقدار ثابتی مانند λ باشندکه آن را ثابت جداسازی می‌نامند. درنتیجه (۱۰) به دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تجزیه می‌شود

$$\rho^{۲}\frac{d^{۲}u}{d\rho^{۲}}+۲\rho\frac{du}{d\rho}-\lambda u=۰ \tag{۱۱}$$

و

$$\frac{۱}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dv}{d\phi}\right)+\lambda v=۰ \tag{۱۲}$$

معادلهٔ (۱۱) یك معادلهٔ اویلر با $p=۲$ و $q=-\lambda$ است. پس معادلهٔ مبین آن به‌صورت

$$m(m-۱)+۲m-\lambda=۰ \quad \text{یا} \quad m^{۲}+m-\lambda=۰$$

است. بنابـراین نماها برابرند با $(-۱\pm\sqrt{۱+۴\lambda})/۲$ ، و جـواب عمومی (۱۱) به صورت

$$u=c_{۱}\rho^{-۱/۲+\sqrt{\lambda+۱/۴}}+c_{۲}\rho^{-۱/۲-\sqrt{\lambda+۱/۴}} \tag{۱۳}$$

یا

$$u=c_{۳}\rho^{-۱/۲}+c_{۴}\rho^{-۱/۲}\log\rho$$

است. برای حصول اطمینان از اینکه u در نـزدیکی $\rho=۰$ کراندار و تك مقداری است امکان دوم را بکلی کنار می‌گذاریم، و در (۱۳) قرار می‌دهیم $c_{۲}=۰$ و می‌نویسیم

$$-\frac{۱}{۲}+\sqrt{\lambda+۱/۴}=n$$

که درآن n عددی صحیح وغیرمنفی‌است. بنابراین، $\lambda=n(n+۱)$ و (۱۳) به‌صورت

$$u=c_{۱}\rho^{n} \tag{۱۴}$$

ساده می‌شود، و (۱۲) به صورت

$$\frac{d^{۲}v}{d\phi^{۲}}+\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\frac{dv}{d\phi}+n(n+۱)v=۰$$

درمی‌آید. اگرمتغیرمستقل را از ϕ به $x=\cos\phi$ تغییردهیم، آنگاه این‌معادله به‌صورت

$$(۱-x^{۲})\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}}-۲x\frac{dv}{dx}+n(n+۱)v=۰ \tag{۱۵}$$

تبدیل می‌شود که همان معادلهٔ لـژاندر است . با تـوجه به جنبهٔ فیزیکی مسئله، تـابع v

باید در فاصلهٔ $\pi \geqslant \phi \geqslant 0$ و یا درفاصلهٔ معادل آن، یعنی $1 \geqslant x \geqslant 1-$ کراندار باشد؛ واز بخش ۳۲ می‌دانیم‌که تنها جوابهای معادلـه (۱۵) با این ویـژگی، مضارب ثابت چند جمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ هستند. اگر این نتیجه را با (۱۴) ترکیب کنیم، می بینیم که برای هر $n = 0 ، 1 ، 2 ، \ldots$ جوابهای خصوصی معادلهٔ (۸) به صورت زیر هستند

$$a_n \rho^n P_n(\cos\phi) \tag{۱۶}$$

که در آن a_n ها ثابتهای دلخواه هستند. نمی‌توان امیدوار بودکه با استفادهٔ تك‌تك از این جوابها بتوان شرط مرزی (۹) را ارضا نمود. با این حال، معادلهٔ لاپلاس خطی است و هر مجموعی از جوابها نیز خود جوابی از معادله است، لذا طبیعی است‌که از جمع‌جوابهای خصوصی (۱۶) یك سری نامتناهی بسازیم و امیدوار باشیم کـه $T(\rho ، \phi)$ را بتوان به صورت زیر نوشت،

$$T(\rho ، \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n P_n(\cos\phi) \tag{۱۷}$$

حال شرط مرزی (۹) ایجاب می کندکه

$$f(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\phi)$$

و یا معادل آن

$$f(\cos^{-1} x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{۱۸}$$

از بخش ۳۳ می‌دانیم که اگر تابع $f(\cos^{-1}x)$ به حدکافی خوش رفتار باشد، آنگاه آن را می‌توان به‌صورت سری لژاندری به شکل (۱۸) بسط دادکه در آن ضرایب a_n به‌وسیلهٔ رابطهٔ زیر مشخص می‌شوند

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(\cos^{-1}x) P_n(x)\, dx \tag{۱۹}$$

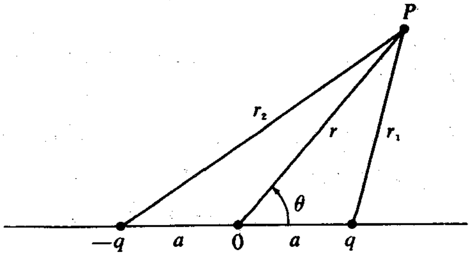
با این ضرایب، (۱۷) همان جواب مطلوب مسئله است.

جواب (۱۷) را با روندهای نسبتاً صوری به دست آوردیم، وباید متذکرشویم که‌در اینجا سؤالاتی مشکل از ریاضیات محض مطرح هستندکه ما به‌آنهاهیچ اشاره‌ای نکرده‌ایم. ممکن است از نظر یك فیزیکدان این مطلب واضح به نظرآید کـه هرجسم صلب که دمای رویهٔ آن مشخص شده است واقعاً به دمای حالت پابـرجا معلوم ومنحصر به فردی در هـر نقطهٔ درونی‌اش می‌رسد. ولی متأسفانه ریاضیدانها آگاه‌اندکه امور بدیهی اغلب نادرست ازکار درمی‌آیند[1]. در مسئله‌ای از نظریه پتانسیل کـه به مسئله دیریکله مشهور است، وجود

---

۱. درصفحهٔ ۲۸۵ کتاب زیرمثالهای نسبتاً ساده‌ای حاکی از نادرست بودن این مطلب آمده است.
O.D. Kellogg, "Foundations of Potential Theory," Springer, New York, 1929.

←



شکل ۳۶

و یگانگی تابع پتانسیلی در سراسر یك ناحیه که شرایط مرزی معینی را بپذیرد، نیاز به اثباتی دقیق دارد. این مسئله را ریاضیدان بزرگ آلمانی، هیلبرت، در اوایل قرن بیستم برای انواع بسیارکلی ولی‌کاملا مشخص ازمرزها وتوابع مرزی حل کرد.

پتانسیل دو قطبی الکتروستاتیکی. رابطهٔ مولد

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{۲۰}$$

برای چند جمله‌ایهای لژاندر در تمرینهای ۳۲-۱، ۳۲-۲، و ۳۲-۳ مورد بحث قرار گرفته است. به عنوان تشریح فیزیکی مستقیمی از ارزش این رابطه، می‌خواهیم پتانسیل ناشی از دوبار نقطه‌ای مساوی q ولی مختلف‌العلامه را به‌کمك آن محاسبه‌کنیم. هرگاه‌این بارها را دریك دستگاه مختصات قطبی قراردهیم (شکل ۳۶)، آنگاه با واحدهای اندازه‌گیری مناسب، پتانسیل در P برابراست با

$$U=\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2} \tag{۲۱}$$

که درآن با توجه به قانون‌کسینوسها خواهیم داشت:

$$r_1=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta} \quad \text{و} \quad r_2=\sqrt{r^2+a^2+2ar\cos\theta}$$

هرگاه $r>a$، به‌کمك (۲۰) داریم

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\theta\,(a/r)+(a/r)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

و همین‌طور

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+2\cos\theta\,(a/r)+(a/r)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

→

اینشتین، یکی ازقصارگویان بزرگ، گفته است: «کمیاب‌ترین و با ارزش‌ترین خصلت متفکران همان‌ظرفیت آنها در شك‌کردن در مورد چیزهای واضح است.»

حال فرمول (۲۱) را می‌توان چنین نوشت

$$U=\frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}[P_n(\cos\theta)-P_n(-\cos\theta)]\left(\frac{a}{r}\right)^n \qquad (۲۲)$$

می‌دانیم که چند جمله‌ای n ام لژاندر، یعنی $P_n(x)$ برای n های زوج و فرد بترتیب زوج و فرد است. بنابراین، عبارت داخل کروشه بسته به اینکه n زوج یا فرد باشد برابر ۰ و یا $2P_n(\cos\theta)$ خواهد بود، و (۲۲) به صورت

$$U=\frac{2q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{2q}{r}\left[P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)+P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3+\cdots\right] \qquad (۲۳)$$

درخواهد آمد. حال اگر فرض کنیم وقتی r در مقایسه با a بزرگ باشد از همهٔ جملات بجز اولی می‌توان صرف‌نظر کرد، و به خاطر بیاوریم که $P_1(x)=x$، آنگاه از (۲۳) نتیجه می‌گیریم که

$$U=2aq\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)$$

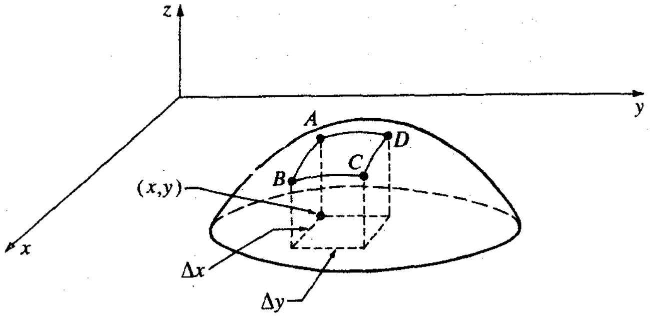
این تقریبی است که فیزیکدانها برای پتانسیل دوقطبی به‌کار می‌برند.

پیوست ب . توابع بسل و غشای مرتعش

یکی از ساده‌ترین کاربردهای فیزیکی توابع بسل، درنظریهٔ اویلر راجع به ارتعاشات غشای مدور ظاهر می‌گردد. در این متن مقصود از غشا ورقه‌ای نازك و یکنواخت از مادهٔ انعطاف‌پذیر است که محکم کشیده شده‌وبه حالت کشش یکنواخت درآمده باشد و در طول منحنی بسته مفروضی در صفحهٔ xy محکم شده باشد. هرگاه این غشا را از وضع تعادلش کمی دور و سپس رها کنیم، نیروهای بازگردانندهٔ ناشی از این تغییرشکل، موجب ارتعاش آن خواهند شد. مسئلهٔ مورد نظر، عبارت از تحلیل این حرکت ارتعاشی است.

معادلهٔ حرکت . دراینجا بحثی شبیه به‌آنچه که دربخش ۲۴ راجع به‌تار مرتعش گفته شد داریم؛ یعنی برای سادگی چندفرض خواهیم کرد تا به ما امکان‌دهند مسئله را به صورت یك‌معادلهٔ دیفرانسیل جزئی بیان کنیم، وامیدواریم که این معادله، حرکت موردنظر را بادقت مناسبی تشریح کند. این شرایط را می‌توان در یك جمله خلاصه کرد: تنها نوسانهای کوچك از غشای دارای ارتعاشات آزاد را در نظرخواهیم گرفت. راههای متعدد استفاده ازاین‌مطلب در ضمن عمل بتدریج روشن خواهند شد.

ابتدا، فرض می‌کنیم که ارتعاشات چنان کوچك باشند که هر نقطه از غشا تنها درجهت



شکل ۳۷

محور z ها حرکت کند، و تغییر مکان آن در لحظهٔ t از تابعی مانند $z=z(x,y,t)$ به دست آید. قطعهٔ کوچکی (شکل ۳۷) از غشا را که به صفحات قائم، ماربر نقاط زیر از صفحهٔxy محدودشده است درنظرمی گیریم: (x,y)، $(x+\Delta x,y)$، $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ و$(x,y+\Delta y)$. هرگاه m مقدار ثابت جرم واحد سطح باشد، آنگاه جرم این قطعه برابر با $m\Delta x\Delta y$ است، و بنابرقانون دوم حرکت نیوتن می بینیم که نیروی وارد بر آن در جهت محور z ها برابر است با

$$F=m\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad (1)$$

وقتی غشا درحالت تعادل خود باشد، کشش ثابت T دارای معنای فیزیکی زیراست: در طول هرقطعه خط به طول Δs، مادهٔ واقع در یك طرف، نیرویی عمود برآن قطعه خط، و به بزرگی $T\Delta s$، برمادهٔ واقع در طرف دیگر اعمال می کند. در این حالت نیروهای وارد برکناره‌های مقابل این قطعهٔ کوچك، موازی صفحه xy هستند و همدیگر را خنثی می کنند. وقتی غشا خمیده باشد، همچون حالت‌نشان داده شده در شکل ۳۷، فرض‌می کنیم، تغییر شکل آنقدر ناچیز باشد که کشش هنوز همان T باشد، منتها این بار به موازات صفحهٔ مماس عمل می کند، و در نتیجه مؤلفهٔ قائم قابل توجهی دارد. انحنای این قطعه است که اندازه‌های متفاوتی برای مؤلفه‌های قائم وارد برلبه‌های متقابل پدید می‌آورد، واین به‌نوبهٔ خود منشأ نیروهای بازگرداننده‌ای است‌که باعث حرکت می‌شوند.

حال این نیروها را با فرض آنکه قطعهٔ $ABCD$ از غشا تنها اندکی از وضعیت‌تعادل خارج شده باشد تحلیل می کنیم. این فرض به ما امکان خواهد داد که به شرح زیر، سینوس بعضی زوایای کوچك را با تانژانت آنها عوض کنیم. در طول لبه‌های DC و AB، نیروها عمود برمحور x ها و تقریباً موازی محور y ها هستند، و مؤلفه‌های کوچك z آنها تقریباً برابر است با

$$-T\Delta x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y \quad و \quad T\Delta x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+\Delta y}$$

در نتیجه، مجموعشان تقریباً برابر است با

$$T\Delta x\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+\Delta y}-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y}\right]$$

حروف زیر این مشتقات جزئی نشان دهندهٔ مقدار آنها در نقاط $(x , y+\Delta y)$ و (x , y) هستند. هرگاه روی لبه‌های BC و AD نیز به‌همین طریق عمل کنیم، درمی‌یابیم که نیروی کل وارده در جهت محور z ها (صرفنظر از همهٔ نیروهای خارجی) تقریباً برابر است با

$$F=T\Delta y\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x}\right]+T\Delta x\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+\Delta y}-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y}\right]$$

بنابراین (۱) را می‌توان چنین نوشت

$$T\frac{(\partial z/\partial x)_{x+\Delta x}-(\partial z/\partial x)_{x}}{\Delta x}+T\,\frac{(\partial z/\partial y)_{y+\Delta y}-(\partial z/\partial y)_{y}}{\Delta y}=m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

حال اگر بنویسیم $a^2=T/m$ و Δx و Δy را به‌سمت صفر میل دهیم، این معادله به‌صورت

$$a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad (۲)$$

نوشته می‌شود که معادلهٔ موج دو بعدی است.

ممکن است خواننده در مورد استدلالی که به معادلهٔ (۲) منجر گردید تردیدهایی داشته باشد. اگرچنین باشد، او همراهان فراوانی دارد؛ زیرا مسئلهٔ یافتن معادلهٔ دیفرانسیلی که دستگاه فیزیکی مفروضی را به صورت مطلوب توصیف کند، به هیچ روی ساده نیست و این امر بخصوص در مورد معادلهٔ موج جدی است. بررسی دقیقتر حدهای مربوطه راه به جایی نخواهد برد، زیرا غشا نهایتاً اتمی است و مطلقاً پیوسته نیست شاید منطقی‌ترین برداشت آن باشد که بحث خود را به منزلهٔ دلیل توجیهی انتخاب معادلهٔ موج فوق‌الذکر به عنوان یك مدل ریاضی بپذیریم. آنگاه می‌توان این معادله را به عنوان اصلی از مکانیك استدلالی پذیرفت که «غشای ایده‌آل» را تشریح می‌کند و رفتار ریاضی آن ممکن است با رفتار واقعی غشاهای حقیقی تطبیق داشته و یا نداشته باشد[1].

غشای مدور. حال توجه خود را متوجه حالت خاص مربوط به غشای مدور می‌کنیم. در این حالت طبیعی است که از دستگاه مختصات قطبی که مبدأ آن منطبق برمرکز غشا باشد استفاده کنیم. فرمول (۶) از پیوست الف نشان می‌دهد که معادلهٔ موج (۲) در این حالت به صورت زیر درمی‌آید:

---

۱. راجع به این سؤال که «مکانیك استدلالی چیست؟» مطالب روشنگر مرجع زیر توصیه می‌شود
C. Truesdell, "Essays in the History of Mechanics," pp. 334–340, Springer, New York, 1968.

$$a^{2}\left(\frac{\partial^{2}z}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}z}{\partial\theta^{2}}\right)=\frac{\partial^{2}z}{\partial t^{2}} \tag{۳}$$

که در آن $z=z(r, \theta, t)$ تـابعی از مختصات قطبی و زمان است. بـرای راحتی فرض می‌کنیم که شعاع غشا ۱ باشد، و بنابراین در طول دایره‌ای به شعاع $r=1$ به‌صفحهٔ تعادل خودمحکم شده باشد. نتیجتاً، شرط مرزی چنین است

$$z(1, \theta, t)=0 \tag{۴}$$

مسئله آن است که جوابی از (۳) را بیابیم که در این شرط مرزی و شرایط اولیهٔ مشخصی که بعداً تعیین خواهند شد صدق کند.

برای به‌کارگیری روش متعارف جداکردن متغیرها، بحث را با جستجوی جوابهای خصوصی به صورت

$$z(r, \theta, t)=u(r)v(\theta)w(t) \tag{۵}$$

آغاز می‌کنیم. اگر (۵) را در (۳) جایگزین و نتیجه را مرتب کنیم، می‌بینیم که

$$\frac{u''(r)}{u(r)}+\frac{1}{r}\frac{u'(r)}{u(r)}+\frac{1}{r^{2}}\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}=\frac{1}{a^{2}}\frac{w''(t)}{w(t)} \tag{۶}$$

چون طرف چپ معادلهٔ (۶) صرفاً تابع r و θ، و طرف راست آن صرفاً تابع t است هر دو طرف باید ثابت باشند. برای آنکه غشا ارتعاش کند، $w(t)$ باید دوره‌ای باشد و طرف راست (۶) نشان می‌دهد که برای تضمین این امر ثابت جداسازی باید منفی باشد. لـذا دو طرف (۶) را برابر $-\lambda^{2}$ با $\lambda>0$ قرار می‌دهیم و دو معادلهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$w''(t)+\lambda^{2}a^{2}w(t)=0 \tag{۷}$$

و

$$\frac{u''(r)}{u(r)}+\frac{1}{r}\frac{u'(r)}{u(r)}+\frac{1}{r^{2}}\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}=-\lambda^{2} \tag{۸}$$

واضح است که جواب عمومی (۷) عبارت است از

$$w(t)=c_{1}\cos\lambda at+c_{2}\sin\lambda at \tag{۹}$$

و (۸) را می‌توان به‌صورت

$$r^{2}\frac{u''(r)}{u(r)}+r\frac{u'(r)}{u(r)}+\lambda^{2}r^{2}=-\frac{v''(\theta)}{v(\theta)} \tag{۱۰}$$

نوشت. در (۱۰) تابعی از r درطرف چپ و تابعی از θ درطرف راست داریم، و درنتیجه این بارهم هردو طرف باید ثابت‌باشند. حال خاطرنشان می‌کنیم که θ، زاویه قطبی هر نقطهٔ صفحه تنها با اختلاف مضرب صحیحی از 2π تعیین می‌شود؛ و با تـوجه به ماهیت مسئلـه

مقدار v در هر نقطه باید مستقل از مقدار θ مربوط به آن نقطه باشد. این امر مستلزم آن است که v ثابت و یا در غیراین صورت دوره‌ای با دورهٔ تناوب 2π باشد. بررسی طرف راست معادلهٔ (۱۰) نشان می‌دهد که این حالات با نوشتن ثابت جداسازی به‌صورت n^2، به ازای $n=0, 1, 2, \dots$، زیر پوشش قرارمی‌گیرند. و دراین‌صورت (۱۰) به

$$v''(\theta)+n^2v(\theta)=0 \tag{11}$$

و

$$r^2u''(r)+ru'(r)+(\lambda^2r^2-n^2)u(r)=0 \tag{12}$$

تجزیه خواهد شد. با توجه به اینکه v یا ثابت و یا دوره‌ای، با دوره تناوب 2π است. از رابطهٔ (۱۱) نتیجه می گیریم که برای هر n

$$v(\theta)=d_1\cos n\theta+d_2\sin n\theta \tag{13}$$

صرف‌نظر ازاین‌که برای $n=0$، عبارت (۱۳) جواب‌عمومی (۱۱) نیست. حال ازتمرین ۳۴-۷ روشن می‌شود که (۱۲) صورت اندکی تغییر یافته از معادلهٔ بسل مرتبهٔ n است که یك جواب کراندار آن $J_n(\lambda r)$ و یك جواب مستقل و بیکران آن $Y_n(\lambda r)$ می‌باشد. از آنجاکه $u(r)$ در نزدیکی $r=0$ لزوماً کراندار است، جواب دوم را کنار می‌گذاریم و می‌نویسیم

$$u(r)=kJ_n(\lambda r) \tag{14}$$

حال شرط مرزی (۴) را می‌توان با شرط $u(1)=0$ یا

$$J_n(\lambda)=0 \tag{15}$$

ارضا نمود. لذا مقادیر مجاز λ همان صفرهای مثبت تابع $J_n(x)$ هستند، و از بخش ۳۵ می‌دانیم که $J_n(x)$ بینهایت از این‌گونه‌صفرها دارد. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که جوابهای خصوصی (۵) حاصل ازاین تحلیل مضارب ثابتی از آرایهٔ دو بینهایتی توابع

$$J_n(\lambda r)(d_1\cos n\theta+d_2\sin n\theta)(c_1\cos\lambda at+c_2\sin\lambda at) \tag{16}$$

هستند که در آن $n=0, 1, 2, \dots$. و برای هر n، λ های مربوطه ریشه‌های مثبت $J_n(\lambda)$ اند.

شرایط اولیهٔ خاص. منظور از بحث فوق آن بود که نشان دهیم توابع بسل ازمرتبهٔ صحیح چگونه در مسائل فیزیکی ظاهرمی‌شوند. این بحث اهمیت صفرهای مثبت این‌توابع را نیز روشن می‌کند. به خاطر سادگی، بررسی بعدی خود را به حالت خاص زیر محدود می‌کنیم: غشا به‌صورت $z=f(r)$ که مستقل‌از θ است تغییرمکان یافته،ودرلحظهٔ $t=0$ از حالت سکون رها شده است. این بدان معناست‌که شرایط اولیهٔ

$$z(r, \theta, 0)=f(r) \tag{17}$$

و

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{۱۸}$$

را اعمال می‌کنیم. مسئله عبارت از تعیین شکل $z(r , \theta , t)$ در هرزمان بعدی، $t>0$ است.

استراتژی ما تطبیق جوابهای خصوصی‌یافته شده باشرایط اولیهٔ مفروض است. اولا، قسمتی از (۱۷) که بیانگر استقلال شکل اولیه از θ است نتیجه می‌دهد که $v(\theta)$ ثابت‌است، لذا (۱۳) به‌ما می‌گوید که $n=0$. هرگاه‌صفرهای‌مثبت $J_0(x)$ را با λ_1، λ_2، ...، λ_n، ... نشان دهیم، آنگاه این نکته آرایهٔ توابع (۱۶) را به

$$J_0(\lambda_n r)(c_1 \cos\lambda_n at + c_2 \sin\lambda_n at) \ , \ n=1 , 2 , \dots$$

تبدیل‌می‌کند. ضمناً (۱۸) نتیجه‌می‌دهد که $c_2=0$، و درنتیجه جوابهای موردقبول،مضارب ثابت توابع

$$J_0(\lambda_n r)\cos\lambda_n at , \quad n=1 , 2 , \dots$$

هستند. تا این مرحله، از این موضوع که مجموعهای جوابهای (۳) نیز جواب‌اند استفاده نکرده‌ایم. نتیجتاً ، کلی‌ترین جوابهای صوری که اینك در دسترس هستند سری‌های‌نامتناهی

$$z=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r)\cos\lambda_n at \tag{۱۹}$$

می‌باشند. آخرین مرحله عبارت ازآن است‌که در (۱۹)، t را مساوی با صفر ونتیجه را با $f(r)$ برابربگیریم تا شرط (۱۷) ارضا شود:

$$f(r)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r)$$

قضیهٔ بسط بسل از بخش ۳۵ تضمین می‌کند که هرگاه $f(r)$ به اندازهٔ کافی خوش‌رفتار باشد و a_n ها به وسیلهٔ رابطهٔ زیر تعریف شوند، نمایش بالا معتبر خواهد بود

$$a_n=\frac{2}{J_1(\lambda_n)^2}\int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\,dr$$

با این ضرایب ، (۱۹) جواب صوری برای (۳) است‌که در شرط مرزی و شرایط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند، و بدین ترتیب این بحث کامل می‌شود[1].

پیوست ج . چند خاصیت دیگر از توابع بسل

در بخشهای ۳۴ و ۳۵ مجالی برای ذکر تعدادی از خواص قابل ملاحظه توابع بسل، که

---

۱ . کاربردهای فراوان دیگری از توابع بسل را می‌توان درفصل ۶ کتاب لیدف یافت. همچنین رجوع‌کنید به

A. Gray and G. B. Mathews, "A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics," Macmillan, New York, 1952.

نباید ناگفته بماند، فراهم نبود، لذا آنها را در اینجا عرضه خواهیم کرد. متأسفانه بررسی کامل این روشها نیازمند چندین قضیه از قسمتهای پیشرفته‌تر آنالیز است، ولی این امر از اعتبار خود نتایج نمی‌کاهد.

تابع مولد. توابع از مرتبهٔ صحیح بسل $J_n(x)$ به وسیله رابطهٔ

$$e^{(x/۲)(t-۱/t)}=J_{\circ}(x)+\sum_{n=۱}^{\infty}J_n(x)[t^n+(-۱)^n t^{-n}] \qquad (۱)$$

به هم مربوط می‌شوند. از آنجاکه $J_{-n}(x)=(-۱)^n J_n(x)$ ، این رابطه را معمولاً به صورت

$$e^{(x/۲)(t-۱/t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n \qquad (۲)$$

می‌نویسند. برای اثبات (۱) دو سری زیر را به‌طور صوری درهم ضرب می‌کنیم

$$e^{-xt^{-۱}/۲}=\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{k!}\frac{x^k}{۲^k}t^{-k} \quad و \quad e^{xt/۲}=\sum_{j=\circ}^{\infty}\frac{۱}{j!}\frac{x^j}{۲^j}t^j \qquad (۳)$$

نتیجه یك سری دوگانه است که جملاتش عبارت از همهٔ حاصلضربهای ممکن یك جمله از سری اول در یك جمله از سری دوم می‌باشند. از آنجاکه هریك ازسری‌های (۳) همگرای مطلق است، این سری دوگانه، صرف‌نظر از ترتیب جملاتش، به‌مقدار مجموع خودهمگرا خواهد بود. برای هرعدد صحیح $n\geqslant\circ$، دقیقاً وقتی یك جمله از سری دوگانه شامل t^n به دست می‌آوریم که $j=n+k$ ؛ و هرگاه تمام مقادیرممکن k درنظرگرفته شود، ضریب کلی t^n عبارت می‌شود از

$$\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{۱}{(n+k)!}\frac{x^{n+k}}{۲^{n+k}}\frac{(-۱)^k}{k!}\frac{x^k}{۲^k}=\sum_{k=\circ}^{\infty}(-۱)^k\frac{(x/۲)^{۲k+n}}{k!(n+k)!}=J_n(x)$$

به همین ترتیب، جملات شامل t^{-n} ($n\geqslant ۱$) دقیقاً وقتی به وجود می‌آیند که $k=n+j$ ، لذا ضریب کلی t^{-n} عبارت می‌شود از

$$\sum_{j=\circ}^{\infty}\frac{۱}{j!}\frac{x^j}{۲^j}\frac{(-۱)^{n+j}}{(n+j)!}\frac{x^{n+j}}{۲^{n+j}}=(-۱)^n\sum_{j=\circ}^{\infty}(-۱)^j\frac{(x/۲)^{۲j+n}}{j!(n+j)!}$$

$$=(-۱)^n J_n(x)$$

وبدین ترتیب اثبات (۱) کامل می‌شود.

یك نتیجهٔ ساده از رابطهٔ (۲)، فرمول جمع

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n-k}(x)J_k(y) \qquad (۴)$$

است. برای اثبات این فرمول، ابتداتوجه می‌کنیم که

$$e^{(x/۲)(t-۱/t)}e^{(y/۲)(t-۱/t)}=e^{[(x+y)/۲](t-۱/t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x+y)t^n$$

ولی، حاصلضرب دو تابع نمایی طرف چپ نیز برابر است با

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}J_j(x)t^j\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(y)t^k\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n-k}(x)J_k(y)\right]t^n$$

و از برابر قراردادن ضرایب t^n در این دو عبارت، رابطهٔ (۴) بلافاصله به‌دست می‌آید.
اگر در (۴) مقدار n را صفر اختیارکنیم داریم

$$\begin{aligned}J_۰(x+y)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{-k}(x)J_k(y)\\&=J_۰(x)J_۰(y)+\sum_{k=۱}^{\infty}J_{-k}(x)J_k(y)+\sum_{k=۱}^{\infty}J_k(x)J_{-k}(y)\\&=J_۰(x)J_۰(y)+\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k[J_k(x)J_k(y)+J_k(x)J_k(y)]\\&=J_۰(x)J_۰(y)+\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k۲J_k(x)J_k(y)\end{aligned}$$

یا

$$J_۰(x+y)=J_۰(x)J_۰(y)-۲J_۱(x)J_۱(y)+۲J_۲(x)J_۲(y)-\ \cdots \qquad (۵)$$

هرگاه y را به $x-$ تبدیل و از این موضوع استفاده‌کنیم که $J_n(x)$ بسته به زوج یا فرد بودن n زوج یا فرد خواهد بود، آنگاه (۵) به‌صورت اتحاد قابل توجه زیر درمی‌آید

$$۱=J_۰(x)^۲+۲J_۱(x)^۲+۲J_۲(x)^۲+\ \cdots \qquad (۶)$$

که نتیجه می‌دهد $|J_۰(x)|\leqslant ۱$ و برای $n=۱\,،\,۲\,،\,\ldots$ ، $|J_n(x)|\leqslant ۱/\sqrt{۲}$.

فرمول انتگرالی بسل. وقتی که $t=e^{i\theta}$ ، نمای چپ (۲) تبدیل به

$$x\,\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{۲}=ix\sin\theta$$

می‌شود و (۲) به‌صورت

$$e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta} \qquad (۷)$$

درمی‌آید.

چون $e^{ix\sin\theta}=\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)$ و $e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$

از مساوی‌گرفتن قسمتهای حقیقی و موهومی (۷) می‌بینیم که

$$\cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos n\theta \qquad (۸)$$

و

$$\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta \qquad (۹)$$

حال با استفاده از روابط $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ، $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$ ، و $\sin(-n\theta) = -\sin n\theta$ روابط (۸) و (۹) بدین صورت درمی‌آیند:

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\theta \qquad (۱۰)$$

و

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta \qquad (۱۱)$$

به عنوان حالت خاصی از (۱۰) ، توجه می‌کنیم که $\theta = 0$ ، سری جالب

$$1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots$$

را به دست می‌دهد. همچنین، با اختیار $\theta = \pi/2$ در (۱۰) و (۱۱) فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند

$$\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \cdots$$

و

$$\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \cdots$$

که باردیگر پیوندهای نزدیك بین توابع بسل و توابع مثلثاتی را روشن می‌سازند.

مهمترین‌کاربرد (۸) و (۹) در اثبات فرمول انتگرالی بسل است:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta \qquad (۱۲)$$

برای اثبات این رابطه، طرفین (۸) را در $\cos m\theta$ و طرفین رابطهٔ (۹) را در $\sin m\theta$ ضرب ونتایج را جمع می‌کنیم:

$$\cos(m\theta - x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(m-n)\theta$$

اگر از دو طرف این رابطه از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ انتگرال بگیریم، طرف راست برابر $\pi J_m(x)$ می‌شود، و از تبدیل m به n فرمول (۱۲) به دست می‌آید. بسل، ضمن‌کارهای نجومی خود به‌توابع $J_n(x)$ به صورت این‌انتگرالها برخوردکرد، و براین اساس‌بسیاری از خواص‌آنها را یافت[1].

---

۱. برای توصیفی از مسئلهٔ اصلی بسل مراجعه‌کنید به Gray and Mathews, pp. 4–7

چندکسر مسلسل . هرگاه اتحاد ۳۵ـ(۷) را به‌صورت

$$J_{p-1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x)-J_{p+1}(x)$$

بنویسیم و آن را بر $J_p(x)$ تقسیم کنیم ، می‌بینیم که

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)}=\frac{2p}{x}-\frac{1}{J_p(x)/J_{p+1}(x)}$$

اگر از خود این فرمول برای مخرج دوم طرف راست، باتغییر p به $p+1$ ، استفاده کنیم، واین روند را بینهایت بار ادامه دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)}=\frac{2p}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{2p+2}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{2p+4}{x}-\cdots}}$$

که بسط ، به صورت کسر مسلسل نامتناهی نسبت $J_{p-1}(x)/J_p(x)$ است. در اینجا قادر به بررسی نظریه چنین بسطهایی نیستیم، ولی ممکن است جالب توجه باشد تذکر دهیم که‌وقتی $p=1/2$ ، از تمرین ۳۴ـ۵ نتیجه می‌شود $J_{-1/2}(x)/J_{1/2}(x)=\cot x$ ، وبنابراین

$$\tan x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cdots}}}$$

این کسر مسلسل درسال ۱۷۶۱ به وسیلهٔ لامبرت کشف شد. وی ازآن برای اثبات گویانبودن π استفاده کرد. او چنین استدلال کرد: هرگاه x عددگویای غیرصفری باشد، آنگاه شکل این کسر مسلسل نتیجه می‌دهد که $\tan x$ نمی‌تواندگویا باشد ولـی $\tan \pi/4=1$ ، پس اعداد $\pi/4$ و π گویـا نیستند . تعدادی از اشکالات جزئی استدلال لامبرت حدود ۳۰ سال بعد توسط لژاندر اصلاح گردید.

۷

دستگاههای معادلات مرتبهٔ اول

۳۶. ملاحظات کلی دربارهٔ دستگاهها

یکی از مفاهیم بنیادی آنالیز، دستگاه n معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول است. اگر $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، … ، $y_n(x)$ توابعی مجهول از یك متغیر مستقل x باشند، آنگاه عمومیترین دستگاه مورد نظر ما آن است که مشتقات y_1' ، y_2' ، … ، y_n' در آن به صورت توابعی صریح از x و y_1 ، y_2 ، … ، y_n داده شده باشند:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

دستگاههای معادلات دیفرانسیل به طور کاملا طبیعی در بسیاری از مسائل علمی مطرح می‌شوند. درمثال زیرخواهیم دید که چطوراین گونه مسائل در رابطه با دستگاههای‌دینامیکی دارای چندین درجهٔ آزادی مطرح می‌شوند، و در بخش ۳۹ آنها را برای تجزیه و تحلیل یك جامعه زیستی سادهٔ متشکل از انواع گوناگون حیواناتی که برهمدیگر تأثیرمتقابل‌دارند به‌کار خواهیم برد.

یك دلیل ریاضی مهم برای مطالعهٔ دستگاهها آن است که هرمعادلهٔ مرتبهٔ n ام

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

را می‌توان حالت خاصی از (۱) تلقی کرد. برای مشاهدهٔ این مطلب می‌نویسیم

$$y_1 = y \text{ ، } y_2 = y' \text{ ، } \ldots \text{ ، } y_n = y^{(n-1)} \tag{۳}$$

و دقت می کنیم که (۲) معادل دستگاه

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{۴}$$

می باشد که آشکارا حالت خاصی از (۱) است. بیان هم‌ارزی (۲) و (۴) به‌مفهوم زیر است: اگر $y(x)$ یك جواب معادلهٔ (۲) باشد، در آن صورت، توابع $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، ... ، و $y_n(x)$ که به کمك(۳) تعریف‌می‌شوند، دستگاه معادلات (۴) را ارضا می کنند و برعکس، اگر $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، ... ، و $y_n(x)$ در (۴) صدق کنند، آنگاه $y(x) = y_1(x)$ جوابی از (۲) است.

این تبدیل معادلهٔ مرتبهٔ n ام به‌دستگاهی متشکل از n معادلهٔ مرتبهٔ اول دارای چندین مزیت‌است. ذیلا رابطهٔ بین‌قضایای اساسی وجود ویگانگی‌را برای‌دستگاه (۱) ومعادلهٔ (۲) شرح می‌دهیم.

اگر یك نقطهٔ ثابت $x = x_0$ را بر گزیده ومقادیر توابع مجهول

$$y_1(x_0) = a_1 \text{ ، } y_2(x_0) = a_2 \text{ ، } \ldots \text{ ، } y_n(x_0) = a_n \tag{۵}$$

به طور دلخواه چنان تعیین گردند که f_1 ، f_2 ، ... ، f_n معین باشند، آنگاه (۱) مقادیر مشتقات $y_1'(x_0)$ ، $y_2'(x_0)$ ، ... ، $y_n'(x_0)$ را به دست می‌دهد. تشابه بین این وضعیت و آنچه در بخش ۲ مورد بحث قرارگرفت، مشابه قضیهٔ پیکار را به صورت زیر مطرح می‌سازد.

قضیهٔ الف. فرض می‌کنیم‌که توابع f_1 ، f_2 ، ... ، f_n و مشتقات جزئی $\partial f_1/\partial y_1$ ، ... ، $\partial f_1/\partial y_n$ ، ... ، $\partial f_n/\partial y_1$ ، ... ، $\partial f_n/\partial y_n$ درناحیهٔ R از فضای $(x, y_1 \ldots, y_n)$ پیوسته باشند. هرگاه $(x_0, a_1, a_2 \ldots, a_n)$ یك نقطهٔ درونی R باشد، دستگاه (۱) دارای جواب منحصر به فردی، چون $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، ... و $y_n(x)$ است که در شرایط اولیهٔ (۵) صدق می‌کند.

ما این‌قضیه را اثبات‌نخواهیم کرد، لیکن درعوض متذکرمی‌شویم که وقتی‌زمینهٔ اثبات به‌نحو مناسبی‌فراهم آید، اثبات آن با اثبات قضیهٔ پیکار به‌شکلی که درفصل ۱۱ عرضه شده است یکسان‌است. بعلاوه، باتوجه به تبدیل فوق‌الذکر، قضیهٔ الف، قضیهٔ متناظر زیر راجع به معادلهٔ (۲) را به عنوان یك حالت خاص شامل می‌شود.

قضیهٔ ب. فرض می‌کنیم که تابع f و مشتقات جزئی $\partial f/\partial y$ ، $\partial f/\partial y'$ ، ... ،

$\partial f/\partial y^{(n-1)}$ در ناحیهٔ R از فضای $(x , y , y' , \ldots , y^{(n-1)})$ پیوسته باشند. هرگاه $(x_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ یک نقطهٔ درونی R باشد، آنگاه معادلهٔ (۲) دارای یک جواب منحصر به فرد $y(x)$ می‌باشد که شرایط اولیهٔ $y(x_0)=a_1$ ، $y'(x_0)=a_2$ ، … ، $y^{(n-1)}(x_0)=a_n$ را ارضا می‌کند.

برای تشریح بیشتر ارزش تبدیل معادلات مرتبهٔ بالا به دستگاههای معادلات مرتبهٔ اول، مسئلهٔ مشهور n جسمی را در مکانیک کلاسیک درنظرمی گیریم.

فرض می کنیم که n ذره با جرمهای m_i در نقاط (x_i , y_i , z_i) قرار گرفته باشند و فرض می کنیم که این ذرات مطابق با قانون گرانش نیوتن همدیگر را جذب کنند. اگر r_{ij} فاصلهٔ بین ذرات m_i و m_j و θ زاویهٔ بین جهت مثبت محور x با خط واصل بین آنها باشد (شکل ۳۸)، در آن صورت مؤلفهٔ x نیروی وارد بر m_i از طرف m_j برابر است با

$$\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^2}\cos\theta=\frac{Gm_im_j(x_j-x_i)}{r_{ij}^3}$$

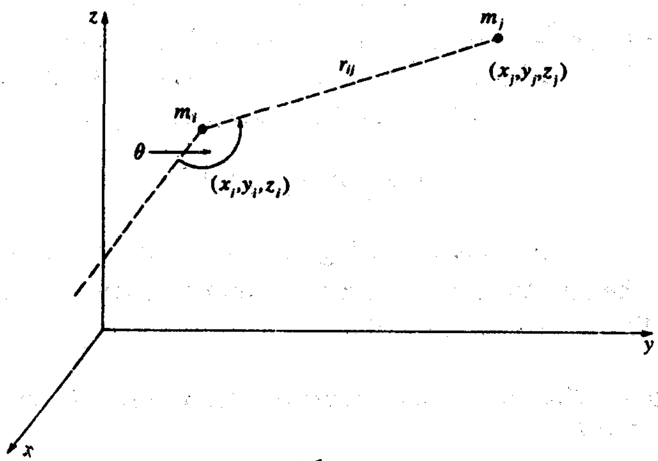
که درآن G ثابت گرانشی است. ازآنجاکه مجموع این‌مؤلفه‌ها برای تمامی مقادیر $j\neq i$ برابر با $m_i(d^2x_i/dt^2)$ می‌باشد، n معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به صورت زیرداریم

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=G\sum_{j\neq i}\frac{m_j(x_j-x_i)}{r_{ij}^3}$$

و همین‌طور می‌توان نوشت

$$\frac{d^2y_i}{dt^2}=G\sum_{j\neq i}\frac{m_j(y_j-y_i)}{r_{ij}^3}$$

و



شکل ۳۸

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2}=G\sum_{j\neq i}\frac{m_j(z_j-z_i)}{r_{ij}^3}$$

اگر بنویسیم $v_{x_i}=dx_i/dt$ ، $v_{y_i}=dy_i/dt$ و $v_{z_i}=dz_i/dt$ و از تبدیل مذکور استفاده کنیم، درآن صورت دستگاهی متشکل از $6n$ معادله به صورت (۱) که درآنها توابع x_1 ، v_{x_1} ، ... ، x_n ، v_{x_n} ، y_1 ، v_{y_1} ، ... ، y_n ، v_{y_n} ، z_1 ، v_{z_1} ، ... ، z_n و v_{z_n} مجهولند به دست‌خواهیم آورد. حال با استفاده از این‌که

$$r_{ij}^3=[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{3/2}$$

نتیجهٔ زیر از قضیهٔ الف به‌دست می‌آید: اگر وضعیتها و سرعتهای اولیهٔ ذرات یعنی مقادیر توابع مجهول در لحظهٔ معین $t=t_0$ در دست باشد، و اگر ذرات تصادم نکنند، یعنی r_{ij}ها صفر نگردند، آنگاه وضعیتها و سرعتهای بعدی به‌طور منحصر به‌فرد تعیین می گردند. این نتیجه ، مبنای فلسفهٔ جبرگرایی مکانیکی است که زمانی رواج داشت و براساس آن ، جهان‌صرفاً ماشین عظیم‌الجثه‌ای بود که آیندهٔ آن به‌وسیلهٔ حالتش در هر لحظهٔ مفروضی تثبیت می گردید[1].

تمرین

۱ــ هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را به یك دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول‌تبدیل کنید :

الف) $y''-x^2y'-xy=0$

ب) $y'''=y''-x^2(y')^2$

۲ــ چنانچه ذره‌ای به جرم m در صفحهٔ xy حرکت‌کند ، معادلات حرکتش بــه صورت

---

۱. همین تفکر ، سرجیمز جینز را برآن داشت تاجهان را به‌عنوان دستگاهی متشکل از $6N$ معادلهٔ دیفرانسیل کــه خود به خود حل می‌شود و در آن N عــدد ادینگتون است تعریف کند. سرآرتور ادینگتون ادعاکرده استکه تعدادکل ذرات مادی جهان برابر با

$$N=\frac{3}{2}\times 136\times 2^{256}$$

که البته این رقم بیشتر از آنکه به واقعیت ربطی داشته باشد جنبه تخیلی دارد. به‌کتاب

Jeans, "The Astronomical Horizon", Oxford University Press, London, 1945;

یا

Eddington, "The Expanding Universe", Cambridge University Press, London, 1952

مراجعه‌کنید.

زیرند:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f(t, x, y) \quad \text{و} \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=g(t, x, y)$$

که در آن f و g ، به ترتیب ، مؤلفه‌های x و y نیروی اعمال شده برذره هستند. این دستگاه دو معادلهٔ مرتبهٔ دوم را بریك دستگاه معادل متشکل ازچهار معادلهٔ مرتبهٔ اول به شکل(۱) تبدیل کنید.

۳۷. دستگاههای خطی

به خاطر سهولت و راحتی، در بقیهٔ این فصل، توجه خود را به دستگاههای متشکل از دو معادلهٔ مرتبهٔ اول برحسب دو تابع مجهول معطوف می‌کنیم. شکل این معادلات به صورت زیر است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(t, x, y)\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=G(t, x, y)\end{cases} \tag{۱}$$

علامت ابرو به منظور تأکید براین امر است که معادلات مرتبط به یکدیگرند ، و در این حالت انتخاب حرف t به عنوان متغیر مستقل و x و y به‌عنوان متغیرهای وابسته، به دلایلی که بعداً روشن خواهد شد، متداول است.

دراین بخش و بخش بعد، حالت حتی خاصتر دستگاههای خطی ، یعنی دستگاههایی به صورت

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y+f_1(t)\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y+f_2(t)\end{cases} \tag{۲}$$

را مورد مطالعه قرارمی‌دهیم. در بحث فعلی و در قضایای زیر فرض خواهیم کرد که توابع $a_i(t)$ ، $b_i(t)$ ، $f_i(t)$ ، $i=1,2$ دریك فاصلهٔ بستهٔ معین $[a, b]$ از محور t پیوسته‌اند. اگر $f_1(t)$ و $f_2(t)$ متحد با صفر باشند ، دستگاه (۲) را همگن می‌نامند و در غیراین صورت آن را ناهمگن می‌گویند. هر جواب دستگاه (۲) در فاصلهٔ $[a, b]$ طبعاً یك جفت تابع $x(t)$ و $y(t)$ است که هر دو معادلهٔ (۲) را در این فاصله ارضا کند. چنین جوابی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

بدین ترتیب، بسهولت می‌توان تحقیق کرد که دستگاه خطی همگن (با ضرایب ثابت)

$$(۳)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y \end{cases}$$

هردو جفت تابع

$$(۴)\qquad \begin{cases} x=e^{3t} \\ y=e^{3t} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=e^{2t} \\ y=2e^{2t} \end{cases}$$

را به عنوان جواب در هرفاصلهٔ بسته می‌پذیرد.

حال طرح خلاصه‌ای از نظریهٔ عمومی دستگاه خطی (۲) ارائه خواهیم کرد. مشاهده خواهد شد که این نظریه خیلی شبیه نظریهٔ معادلات خطی مرتبهٔ دوم است که در بخشهای ۱۴ و ۱۵ مورد بحث قرار گرفت. مطلب را با بیان قضیهٔ وجود و یگانگی بنیادی زیر، که اثبات آن در فصل ۱۱ آمده است، آغاز می‌کنیم.

قضیهٔ الف. اگر t_0 نقطه‌ای دلخواه از فاصلهٔ $[a , b]$ و x_0 و y_0 دو عدد دلخواه باشند، آنگاه معادلهٔ (۲) دارای یك و تنها یك جواب به صورت

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

است که در فاصلهٔ $[a , b]$ معتبر است ودرشرایط $x(t_0)=x_0$ و $y(t_0)=y_0$ صدق می‌کند.

گام بعدی آن است که ساخت جوابهای دستگاه همگن حاصل از (۲)، با حذف جملات $f_1(t)$ و $f_2(t)$، را مورد مطالعه قراردهیم

$$(۵)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y \\ \dfrac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y \end{cases}$$

واضح است که جواب صفر، که در آن $x(t)$ و $y(t)$ هردو متحد با صفرند، در (۵) صدق می‌کند. ابزار اصلی ما در ساختن جوابهای مفیدتر، قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ب. اگر دستگاه همگن (۵) در فاصلهٔ $[a , b]$ دارای دو جواب

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \tag{۶}$$

باشد ، آنگاه

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases} \tag{۷}$$

که در آن c_1 و c_2 دو عدد ثابت هستند، نیز در فاصلهٔ $[a , b]$ جواب است.

اثبات. اثبات این قضیه امر ساده‌ای‌است و به‌خواننده واگذارمی‌شود.

جواب (۷) از دو جفت جواب (۶) و با ضرب اولین جواب در c_1 و دومین جواب در c_2 وجمع آنها به دست می‌آید ؛ بنابراین (۷) را یك ترکیب خطی از جوابهای (۶) می‌نامند. با این اصطلاح، قضیهٔ ب را می‌توان به‌قرار زیر نیز بیان‌کرد: هرترکیب خطی دو جواب دستگاه همگن (۵) خود یك جواب آن است. بنابراین

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} \\ y = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases} \tag{۸}$$

به ازای هرمقدار دلخواه c_1 و c_2 ، یك جواب (۳) است.

سؤال بعدی که باید به‌آن پاسخ‌بگوئیم این‌است که آیا(۷) تمامی جوابهای (۵) را درفاصلهٔ $[a , b]$ دربرمی گیرد، یعنی، آیا (۷) جواب عمومی‌دستگاه (۵) درفاصلهٔ $[a , b]$ است. بـرطبق قضیهٔ الف، (۷) جواب عمومی خواهد بود ، اگـر بتوان c_1 و c_2 را چنان برگزیدکه شرایط دلخـواه $x(t_0) = x_0$ و $y(t_0) = y_0$ در نقطهٔ دلخواه t_0 از $[a , b]$ ارضا شوند ویا به بیان دیگر، اگربتوان دستگاه معادلات خطی جبری

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = x_0$$
$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$

را برحسب‌مجهولهای c_1 و c_2 به‌ازای هرمقدار t_0 در $[a , b]$ وبرای هرجفت‌عدد x_0 و y_0 حل‌کرد. براساس نظریهٔ مقدماتی دترمینانها ، این عمل هنگامی امکان‌پذیراست‌که دترمینان ضرایب

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$$

در فاصلهٔ $[a , b]$ صفر نشود. این دترمینان رونسکیی دو جواب (۶) نام دارد (تمرین ۴ را ببینید)، و نکات بالا قضیهٔ بعد را به‌اثبات می‌رسانند.

قضیهٔ ج. اگر دوجواب (۶) ازدستگاه همگن (۵) دارای رونسکیی $W(t)$ باشند که درفاصلهٔ

$[a , b]$ صفر نشود، آنگاه (۷) جواب عمومی (۵) دراین فاصله است.

این قضیه نتیجه می‌دهد که (۸) جواب عمومی (۳) در هر فاصلهٔ بسته است، زیرا رونسکیی دو جواب (۴)

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^{5t}$$

است که هرگز صفر نمی‌گردد. همچنانکه از این مثال برمی‌آید، مفید است بدانیم که صفر شدن و یا صفرنشدن رونسکیی $W(t)$ دو جواب، به انتخاب t بستگی ندارد. بیان دقیق‌این مطلب چنین است:

قضیهٔ د. اگر $W(t)$ رونسکیی دو جواب (۶) از دستگاه همگن (۵) باشد، آنگاه $W(t)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ یا متحد با صفر است و یا هرگز صفر نمی‌شود.

اثبات. یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $W(t)$ در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$\frac{dW}{dt} = [a_1(t) + b_2(t)]W \tag{۹}$$

صدق می‌کند. از این معادله چنین برمی‌آید که

$$W(t) = ce^{\int [a_1(t)+b_2(t)]dt} \tag{۱۰}$$

که در آن c مقدار ثابتی است. اینک اثبات قضیه از این واقعیت مشهود است که‌عامل‌نمایی موجود در (۱۰) در فاصلهٔ $[a , b]$ هرگز صفر نمی‌شود.

قضیهٔ ج وسیلهٔ مناسبی برای تحقیق اینکه (۷) جواب عمومی (۵) است، عرضه می‌کند، کافیست نشان‌دهید که $W(t)$، رونسکیی دوجواب (۶)، صفر نمی‌شود. حال‌آزمون معادلی راکه اغلب مناسبتر و سر راست‌تر است شرح می‌دهیم.

دو جواب (۶) در فاصلهٔ $[a , b]$ وابسته خطی، نامیده می‌شوند، اگر یکی مضرب ثابتی‌از دیگری باشد، یعنی اگرعدد ثابت k چنان موجود باشدکه روابط

$$x_2(t) = kx_1(t) \qquad x_1(t) = kx_2(t)$$

یا

$$y_2(t) = ky_1(t) \qquad y_1(t) = ky_2(t)$$

برای تمام مقادیر t ازفاصلهٔ $[a , b]$ برقرار باشند. دراین فاصله دو جواب (۶) را مستقل خطی می‌نامند، اگر هیچکدام از آنها مضرب ثابتی از دیگری نباشد. واضح است که وابستگی خطی معادل حالتی است‌که دو ثابت c_1 و c_2 که لااقل یکی از آنها مخالف صفر است، چنان موجود باشندکه روابط

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=0$$
$$c_1y_1(t)+c_2y_2(t)=0 \qquad (11)$$

به ازای تمام مقادیر t در $[a ، b]$ برقرار باشند. بنابراین به قضیهٔ بعد دست می‌یابیم.

قضیهٔ هـ. اگر دو جواب (۶) دستگاه همگن (۵) در فاصلهٔ $[a ، b]$ مستقل خطی باشند، در آن صورت (۷) جواب عمومی (۵) در این فاصله است.

اثبات. با توجه به‌قضایای ج و د کافی‌است نشان دهیم که جوابهای (۶) وابستهٔ خطی هستند، اگر وفقط اگر رونسکیی آنها، $W(t)$، متحد باصفرباشد. مطلب را بااین فرض که جوابها وابستهٔ خطی‌اند آغاز می کنیم، دراین صورت، مثلا، داریم

$$x_1(t)=kx_2(t)$$
$$y_1(t)=ky_2(t) \qquad (12)$$

لذا به ازای تمام مقادیر t درفاصلهٔ $[a ، b]$ داریم:

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} kx_2(t) & x_2(t) \\ ky_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$$
$$=kx_2(t)y_2(t)-kx_2(t)y_2(t)=0$$

چنانچه ثابت k را در طرف دیگرمعادلات (۱۲) قراردهیم بازهمین استدلال به‌کار می‌آید. اینك فرض می‌کنیم‌که $W(t)$ متحد با صفرباشد و نشان خواهیم دادکه جوابهای (۶)، به معنای مذکور درمعادلات (۱۱)، وابستهٔ خطی می‌باشند. فرض می‌کنیم که t_0 یك نقطهٔ ثابت در $[a ، b]$ باشد. از آنجاکه $W(t_0)=0$، دستگاه معادلات جبری خطی

$$c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)=0$$
$$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=0$$

یك جواب c_1 و c_2 داردکه لااقل یکی از آنها مخالف صفر است. بنابراین، جواب

$$\begin{cases} x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t) \\ y=c_1y_1(t)+c_2x_2(t) \end{cases} \qquad (13)$$

وجواب صفر دستگاه (۵) در t_0 برابرند. حال ازقسمت یگانگی قضیهٔ الف استنباط‌می‌شود که (۱۳) باید در فاصلهٔ $[a ، b]$ با جواب صفر برابرباشد، در آن صورت (۱۱) برقرار وبرهان قضیه کامل است.

ارزش‌آزمون فوق دراین‌است که درمسائل خاص معمولا بررسی اینکه دوجواب (۵) مستقل خطی‌اند یا خیر، ساده است.

حال به دستگاه غیرهمگن (۲) بازمی‌گردیم و بحث خود را با قضیهٔ زیر به پایان می‌رسانیم :

قضیهٔ و. اگر دو جواب (۶) دستگاه همگن (۵) در فاصلهٔ $[a , b]$ مستقل خطی باشند واگر

$$\begin{cases} x = x_p(t) \\ y = y_p(t) \end{cases}$$

یك جواب خصوصی (۲) در این فاصله باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x = c_۱ x_۱(t) + c_۲ x_۲(t) + x_p(t) \\ y = c_۱ y_۱(t) + c_۲ y_۲(t) + y_p(t) \end{cases} \qquad (۱۴)$$

جواب عمومی (۲) در فاصله $[a , b]$ خواهد بود.

اثبات. کافی است نشان دهیم که هرگاه

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

یك جواب دلخواه (۲) باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x = x(t) - x_p(t) \\ y = y(t) - y_p(t) \end{cases}$$

یك جواب (۵) است، و این‌کار را به خواننده واگذار می‌کنیم.

بررسی فوق‌الذکر درمورد دستگاه خطی (۲) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان‌جواب عمومی آن، (۱۴)، را به‌کمك قطعات ساده‌تر بنانهاد. ولی چگونه این قطعات را می‌یابیم؟ متأسفانه ــ مانند معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ــ هیچ‌گونه روش عمومی که همواره کارآمد باشد، موجود نیست. در بخش بعد، حالت خاص مهمی راکه این مسئله در آن قابل حل است، مورد بحث قرار خواهیم داد: حالتی که ضرایب $a_i(t)$ و $b_i(t)$ ، $i = ۱،۲$ ثابت باشند.

تمرین

۱ــ قضیهٔ ب را ثابت‌کنید.

۲ــ اثبات قضیهٔ و را به‌اتمام برسانید.

۳ــ درستی معادلهٔ (۹) را تحقیق‌کنید.

۴ـ فرض کنید که معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم

$$\frac{d^2x}{dt^2}+P(t)\frac{dx}{dt}+Q(t)x=0 \qquad (*)$$

به دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-Q(t)x-P(t)y\end{cases} \qquad (**)$$

تبدیل شده است. اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ جوابهایی از معادلهٔ $(*)$، و اگر

$$\begin{cases}x=x_1(t)\\ y=y_1(t)\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x=x_2(t)\\ y=y_2(t)\end{cases}$$

جوابهای مربوطه $(**)$ باشند، نشان‌دهید که رونسکیی اولی براساس تعریف بخش ۱۵ دقیقاً برابر رونسکیی دومی براساس تعریف این بخش است.

۵ـ الف) نشان دهید که توابع

$$\begin{cases}x=e^{4t}\\ y=e^{4t}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x=e^{-2t}\\ y=-e^{-2t}\end{cases}$$

جوابهای دستگاه همگن

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+3y\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=3x+y\end{cases}$$

هستند.

ب) به‌دو طریق‌نشان دهید که‌جوابهای داده شدهٔ دستگاه قسمت الف در هر فاصلهٔ بسته‌ای مستقل خطی هستند، وجواب عمومی این دستگاه را بنویسید.

ج) جواب خصوصی

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

از این دستگاه را با شرایط ۵ $=x(\text{۰})$ و ۱ $=y(\text{۰})$ بیابید.

۶ـ الف) نشان دهید که

$$\begin{cases} x=\text{۲}e^{\text{۴}t} \\ y=\text{۳}e^{\text{۴}t} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=e^{-t} \\ y=-e^{-t} \end{cases}$$

جوابهایی از دستگاه همگن

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+\text{۲}y \\ \dfrac{dy}{dt}=\text{۳}x+\text{۲}y \end{cases}$$

هستند.

ب) به دو طریق نشان دهید که جوابهای داده شدهٔ دستگاه قسمت الف درهر فاصلهٔ بسته مستقل خطی هستند، و جواب عمومی این دستگاه را بنویسید.

ج) نشان دهید که

$$\begin{cases} x=\text{۳}t-\text{۲} \\ y=-\text{۲}t+\text{۳} \end{cases}$$

یك جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+\text{۲}y+t-\text{۱} \\ \dfrac{dy}{dt}=\text{۳}x+\text{۲}y-\text{۵}t-\text{۲} \end{cases}$$

است، و جواب عمومی این دستگاه را بنویسید.

۷ـ جوابهای داده شدهٔ دستگاه همگن تمرین ۶ را از دو راه زیر به دست آورید:

الف) به وسیلهٔ مشتق‌گیری از معادلهٔ اول نسبت به t و حذف y؛

ب) با مشتق‌گیری از معادلهٔ دوم نسبت به t و حذف x.

۸ـ از روش پیشنهادی در تمرین ۷ استفاده کنید و جواب عمومی دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=y\end{cases}$$

را بیابید.

۹ــ الف) جواب عمومی دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\ \dfrac{dy}{dt}=y\end{cases}$$

را بیابید.

ب) نشان دهید که هرمعادلهٔ مرتبهٔ دوم حاصل از دستگاه قسمت الف با آن دستگاه معادل نیست، بدین‌معنا که دارای جوابهایی است که جزو هیچ یك ازجوابهای دستگاه نمی باشند. بنابراین گرچه معادلات مرتبهٔ بالاتر معادل با این دستگاهها هستند، عکس این موضوع صادق نیست، ودستگاهها عمومیترند.

۳۸. دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت

حال در وضعیتی هستیم که می‌توانیم جواب صریح کاملی برای دستگاه سادهٔ

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y\\ \dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y\end{cases}\qquad(1)$$

ارائه کنیم. دراین دستگاه a_1 ، b_1 ، a_2 ، و b_2 ثابتهای داده شده می باشند. بعضی تمرینهای آخر بخش قبل شیوه‌ای را ارائه می کنند که اغلب می‌توان از آنها دراین حالت استفاده نمود: از یکی از معادلات مشتق بگیرید، یکی‌از متغیرهای وابسته را حذف کنید و معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم حاصل را حل کنید. اما روشی راکه اکنون شرح می‌دهیم مبتنی بریافتن یك جفت جواب مستقل خطی است که مستقیماً از خود دستگاه به‌دست آید.

چنانچه به‌یاد آوریم که مشتق تابع نمایی برابر با مضرب ثابتی از خود آن تابع است، درآن‌صورت (درست همانند بخش ۱۷) طبیعی است که به‌دنبال جوابهایی از (۱) به‌شکل

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases} \qquad (۲)$$

بگردیم. اگر (۲) را در (۱) جایگزین کنیم، حاصل چنین می‌شود

$$Ame^{mt} = a_1 Ae^{mt} + b_1 Be^{mt}$$

$$Bme^{mt} = a_2 Ae^{mt} + b_2 Be^{mt}$$

حال طرفین این روابط را بر e^{mt} بخش می‌کنیم تا دستگاه جبری خطی زیر حاصل آید:

$$\begin{aligned} (a_1 - m)A + b_1 B &= 0 \\ a_2 A + (b_2 - m)B &= 0 \end{aligned} \qquad (۳)$$

که درآن A و B مجهول‌هستند. واضح است که (۳) دارای جواب صفر $A = B = 0$ است که (۲) را به‌صورت جواب صفر (۱) درمی‌آورد. ازآنجاکه به‌دنبال جوابهای غیرصفر (۱) هستیم، این جواب صفر هیچ کمکی نمی‌کند. از سوی دیگر، می‌دانیم که وقتی (۳) جوابهای غیرصفر داردکه دترمینان ضرایب صفر گردد، یعنی هنگامی که

$$\begin{vmatrix} a_1 - m & b_1 \\ a_2 & b_2 - m \end{vmatrix} = 0$$

وقتی این دترمینان بسط داده شود، معادلهٔ درجه دوم زیر به‌دست می‌آید:

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \qquad (۴)$$

که درآن m مجهول است. ازلحاظ تشابه با کار قبلی، این معادله را معادلهٔ کمکی دستگاه (۱) می‌نامیم. فرض می‌کنیم که m_1 و m_2 ریشه‌های (۴) باشند. اگر در (۳) به‌جای m، m_1 بگذاریم، درآن‌صورت می‌دانیم که‌معادلات حاصل یك‌جواب غیرصفر A_1 و B_1 خواهند داشت، لذا

$$\begin{cases} x = A_1 e^{m_1 t} \\ y = B_1 e^{m_1 t} \end{cases} \qquad (۵)$$

یك جواب غیرصفردستگاه (۱) است. اگر همین‌کار را با m_2 انجام دهیم، جواب غیرصفر دیگری می‌یابیم:

$$\begin{cases} x = A_2 e^{m_2 t} \\ y = B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \qquad (۶)$$

به‌خاطرآنکه مطمئن شویم که درنتیجهٔ این‌کار دوجواب مستقل خطی (ونتیجتاً جواب‌عمومی)

به‌دست می‌آید، لازم است هر کدام از سه حالت ممکن برای m_1 و m_2 را بتفصیل بررسی کنیم.

ریشه‌های حقیقی متمایز. هنگامی که m_1 و m_2 اعداد حقیقی‌ومتمایز باشند، بسهولت مشاهده می‌شود که (۵) و (۶) مستقل خطی‌اند (چرا؟) و

$$\begin{cases} x=c_1A_1e^{m_1t}+c_2A_2e^{m_2t} \\ y=c_1B_1e^{m_1t}+c_2B_2e^{m_2t} \end{cases} \tag{۷}$$

جواب عمومی (۱) است.

مثال ۱ . درمورد دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=4x-2y \end{cases} \tag{۸}$$

(۳) به‌صورت

$$\begin{aligned} (1-m)A+B&=0 \\ 4A+(-2-m)B&=0 \end{aligned} \tag{۹}$$

درمی‌آید. دراینجا معادلهٔ کمکی چنین است:

$$m^2+m-6=0 \quad \text{یا} \quad (m+3)(m-2)=0$$

بنابراین m_1 و m_2 برابر با -3 و $+2$ هستند. با $m=-3$، معادلات (۹) چنین می‌شود

$$4A+B=0$$

$$4A+B=0$$

یك جواب غیرصفر سادهٔ این دستگاه $A=1$، $B=-4$ است، بنابراین

$$\begin{cases} x=e^{-3t} \\ y=-4e^{-3t} \end{cases} \tag{۱۰}$$

یك جواب غیرصفر (۸) است. با $m=2$، (۹) به‌صورت

$$-A+B=0$$

$$4A-4B=0$$

درمی‌آید و یك جواب غیرصفر سادهٔ آن ۱ = A ، ۱ = B است و این حاکی از آن‌است که

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \qquad (11)$$

جواب دیگری برای (۸) می‌باشد و چون روشن است که (۱۰) و (۱۱) مستقل خطی هستند ،

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ y = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \end{cases} \qquad (12)$$

جواب عمومی (۸) است.

ریشه‌های مختلط متمایز. چنانچه m_1 و m_2 اعدادی مختلط و متمایز باشند، می‌توان آنها را به‌صورت $a \pm ib$ نوشت که a و b اعداد حقیقی هستند و $b \neq 0$. در این‌حالت انتظار داریم که A ها و B های حاصل از (۳) اعداد مختلط باشند و دو جواب مستقل خطی به‌صورت

$$\begin{cases} x = A_1^* e^{(a+ib)t} \\ y = B_1^* e^{(a+ib)t} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = A_2^* e^{(a-ib)t} \\ y = B_2^* e^{(a-ib)t} \end{cases} \qquad (13)$$

داشته باشیم. به‌هرحال اینها جوابهایی با مقادیر مختلط هستند، و برای استخراج جوابهای با مقادیر حقیقی به‌طریق زیر عمل می‌کنیم : اگر A_1^* و B_1^* را به صورت متعارف $A_1^* = A_1 + iA_2$ و $B_1^* = B_1 + iB_2$ بنویسیم و از فرمول اویلر ۱۷-(۷) استفاده کنیم، آنگاه می‌توان اولین جواب (۱۳) را به‌شکل

$$\begin{cases} x = (A_1 + iA_2)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \\ y = (B_1 + iB_2)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x = e^{at}[(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + i(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + i(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \qquad (14)$$

نوشت. بسهولت مشاهده می‌شود که اگر یك جفت تابع با مقادیر مختلط جوابی برای (۱) باشند و ضرایبشان ثابتهای حقیقی باشند، در آن‌صورت قسمت حقیقی و قسمت موهومی آنها، خود جوابهای با مقادیر حقیقی دستگاه خواهند بود. از این امر نتیجه می‌شود که (۱۴) دارای جوابهای حقیقی زیر است

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) \end{cases} \qquad (15)$$

و

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt) \\ y = e^{at}(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt) \end{cases} \qquad (16)$$

می‌توان نشان داد که این جوابها مستقل خطی‌اند (اثبات این موضوع در تمرین ۳ به‌خواننده واگذار شده است)، پس در این‌حالت جواب عمومی چنین می‌شود

$$\begin{cases} x = e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \qquad (17)$$

حال چون جواب عمومی را یافته‌ایم، درنظر گرفتن دومین جواب (۱۳) غیرضروری است.

ریشه‌های حقیقی برابر. هنگامی که‌مقادیر m_1 و m_2 مساوی و برابر با m باشند، (۵) و (۶) مستقل خطی نیستند و اساساً تنها یك جواب زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases} \qquad (18)$$

بنا به تجربهٔ بخش ۱۷ انتظار داریم که

$$\begin{cases} x = Ate^{mt} \\ y = Bte^{mt} \end{cases}$$

جواب مستقل خطی دومی باشد. متأسفانه موضوع به‌این سادگی‌هم نیست و در واقع باید به‌دنبال جواب دومی به‌شکل

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = (B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases} \qquad (19)$$

بگردیم، که درآن‌صورت جواب عمومی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x = c_1 Ae^{mt} + c_2(A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = c_1 Be^{mt} + c_2(B_1 + B_2 t)e^{mt} \text{ *} \end{cases} \qquad (20)$$

*. تنها استثنای این مطلب وقتی اتفاق می‌افتد که $a_1 = b_2 = a$ و $a_2 = b_1 = 0$ به‌طوری‌که معادلهٔ کمکی به‌صورت $m^2 - 2am + a^2 = 0$ یعنی $m = a$ درآید و ثابتهای A و B در (۱۸) کاملا اختیاری شوند. دراین‌حالت جواب عمومی (۱) به‌صورت زیر است:

←

ثابتهای A_1 ، A_2 ، B_1، و B_2 با قرار دادن (۱۹) در دستگاه (۱) به‌دست‌می‌آیند. به‌جای‌آنکه این عملیات را درحالت‌کلی انجام دهیم، چگونگی استفاده از این روش را طی مثال ساده‌ای نشان می‌دهیم.

مثال ۲. درمورد دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-4y \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y \end{cases} \tag{21}$$

(۳) به‌صورت

$$\begin{aligned} (3-m)A-4B&=0 \\ A+(-1-m)B&=0 \end{aligned} \tag{22}$$

درمی‌آید. معادلهٔ کمکی

$$m^2-2m+1=0 \quad \text{یا} \quad (m-1)^2=0$$

می‌باشد، که دارای ریشه‌های حقیقی و برابر ۱ و ۱ است. با $m=1$ ، دستگاه(۲۲)چنین می‌شود

$$2A-4B=0$$
$$A-2B=0$$

یك جواب غیرصفر سادهٔ این دستگاه $A=2$ و $B=1$ است. پس

$$\begin{cases} x=2e^t \\ y=e^t \end{cases} \tag{23}$$

یك‌جواب غیر صفر (۲۱) خواهد بود. حال‌درصدد یافتن‌جواب مستقل خطی دیگری به‌شکل

$$\begin{cases} x=(A_1+A_2t)e^t \\ y=(B_1+B_2t)e^t \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} x=c_1e^{mt} \\ y=c_2e^{mt} \end{cases}$$

و دستگاه غیر زوج (غیرجفت) خوانده می‌شود (چراکه هرکدام از این معادلات را می‌توان مستقل از دیگری حل‌کرد.)

برمی‌آییم. پس‌از گذاشتن این جواب در (۲۱) خواهیم داشت

$$(A_1+A_2t+A_2)e^t=3(A_1+A_2t)e^t-4(B_1+B_2t)e^t$$
$$(B_1+B_2t+B_2)e^t=(A_1+A_2t)e^t-(B_1+B_2t)e^t$$

این روابط بلافاصله به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$(2A_2-4B_2)t+(2A_1-A_2-4B_1)=0$$
$$(A_2-2B_2)t+(A_1-2B_1-B_2)=0$$

چون این روابط باید نسبت به‌متغیر t اتحاد باشند، باید داشته باشیم

$$2A_2-4B_2=0 \qquad 2A_1-A_2-4B_1=0$$
$$A_2-2B_2=0 \qquad A_1-2B_1-B_2=0$$

یك جواب‌غیرصفر سادهٔ دومعادلهٔسمت‌چپ عبارت‌از $A_2=2$ و $B_2=1$ می‌باشد. بادرنظر گرفتن این نتایج، دومعادلهٔ سمت راست به‌صورت زیر درخواهند آمد:

$$2A_1-4B_1=2$$
$$A_1-2B_1=1$$

پس می‌توان جواب $A_1=1$ ، $B_1=0$ را اختیار کرد. حال این اعداد را در (۲۴) درج می‌کنیم و جواب دومی به‌شکل

$$\begin{cases} x=(1+2t)e^t \\ y=te^t \end{cases} \qquad (25)$$

به‌دست می‌آید. روشن است کـه (۲۴) و (۲۵) مستقل خطی هستند، پس جـواب عمومی دستگاه (۲۱) عبارت است از

$$\begin{cases} x=2c_1e^t+c_2(1+2t)e^t \\ y=c_1e^t+c_2te^t \end{cases} \qquad (26)$$

تمرین

۱ـ بااستفاده از روشهایی که دراین‌بخش‌شرح داده شد جواب عمومی‌هریك‌از دستگاههای زیر را بیابید:

الف) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-3x+4y \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+3y \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x \\ \dfrac{dy}{dt}=3y \end{cases}$

ب) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-2y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=5x+2y\end{cases}$ و) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x-2y\end{cases}$

ج) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+4y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x+y\end{cases}$ ز) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=7x+6y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=2x+6y\end{cases}$

د) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-3y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=8x-6y\end{cases}$ ح) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=4x+5y\end{cases}$

۲ـ نشان دهید برای آنکه دستگاه (۱) دارای دوجواب مستقل خطی بامقادیر حقیقی به‌شکل (۲) باشد، شرط $a_2b_1>0$ کافی است ولی لازم نیست.

۳ـ نشان دهید که رونسکیی دوجواب (۱۵) و (۱۶) عبارت‌است از

$$W(t)=(A_1B_2-A_2B_1)e^{2at}$$

و ثابت کنید که $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$.

۴ـ نشان دهید که ثابتهای A_2 و B_2 درفرمول (۲۰) و ثابتهای A و B هردو دریك دستگاه جبری خطی صدق می‌کنند، لذا بدون آنکه از عمومیت مسئله کاسته شود می‌توان نوشت $A_2=A$ و $B_2=B$.

۵ـ دستگاه خطی غیر همگن

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y+f_1(t)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y+f_2(t)\end{cases}\qquad (*)$$

و دستگاه همگن

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y\end{cases}\qquad (**)$$

را که متناظر با (*) است درنظر بگیرید.

الف) اگر

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

دوجواب مستقل خطی (**) باشند، به‌طوری که جواب عمومی آن

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases}$$

باشد، نشان دهیدکه چنانچه توابع $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در دستگاه

$$\begin{cases} v'_1 x_1 + v'_2 x_2 = f_1 \\ v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = f_2 \end{cases}$$

صدق کنند، آنگاه

$$\begin{cases} x = v_1(t) x_1(t) + v_2(t) x_2(t) \\ y = v_1(t) y_1(t) + v_2(t) y_2(t) \end{cases}$$

یك جواب خصوصی (*) خواهد بود. این روش‌برای یافتن‌جوابهای‌خصوصی دستگاه خطی غیرهمگن، به روش تغییر پارامترها مشهور است.

ب) با استفاده از روش‌قسمت (الف) یك جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن

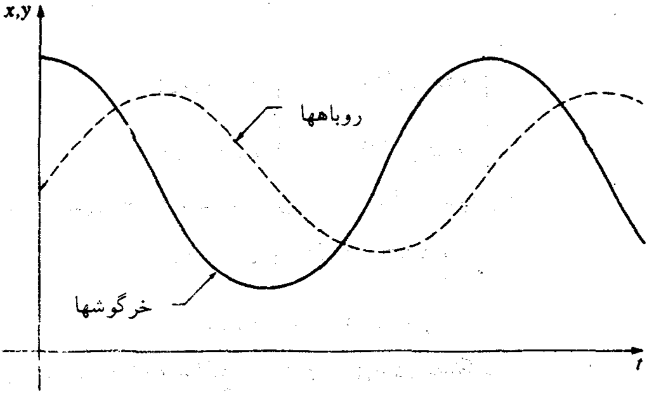
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - 5t + 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y - 8t - 8 \end{cases}$$

راکه دستگاه همگن متناظرش درمثال ۱ حل شده است، بیابید.

۳۹. دستگاههای غیرخطی ـ معادلات شکار و شکارچی ولترا

هر کس می‌داندکه دربین‌گونه‌های مختلف حیواناتی که دریك‌محیط زندگی می کنند، تنازع بقای مداومی وجود دارد. یك‌نوع از این حیوانات با خوردن نوع دیگر به‌حیات خود ادامه می‌دهد؛ نوعی دیگر، با استفاده از روشهای گریز، از خورده شدن اجتناب می‌کند؛ الی‌آخر.

به‌عنوان مثالی ساده ازاین‌کشمکش عمومی بین شکار و شکارچی، جزیره‌ای را تصور کنیدکه درآن تعدادی روباه و خرگوش زندگی می کنند. روباهها خرگوشها را می‌خورند



شکل ۳۹

و خرگوشها از شبدر تغذیه می‌کنند. فرض می‌کنیم که آنقدر شبدر وجود داشته باشد که خرگوشها همواره ذخیرهٔ غذایی کافی داشته باشند. وقتی خرگوشها فراوان باشند، روباهها نیز رشد ونمو می‌کنند وجمعیت آنها فزونی می‌یابد. هنگامی که تعداد روباهها زیاد گردد و تعداد زیادی خرگوش بخورند، وارد یك دورهٔ کم‌غذایی می‌شوند ونفوسشان کاهش می‌یابد. همچنانکه تعداد روباهها روبه کاهش می‌گذارد، خرگوشها نسبتاً درامان می‌مانند و جمعیت آنها مجدداً روبه افزایش می‌گذارد. این افزایش خرگوشها، افزایش جدیدی درجمعیت روباهها را سبب می‌گردد وبا گذشت زمان یك دورهٔ تکراری بی‌انتها از افزایش و کاهش مرتبط باهم، درجمعیت این‌دو نوع حیوان مشاهده می‌کنیم. نمودار این نوسانها درشکل ۳۹ ترسیم شده است که اندازهٔ جمعیتها را نسبت به‌زمان نشان می‌دهد.

مسائلی از این‌نوع، هم به‌وسیلهٔ ریاضیدانان وهم به‌وسیلهٔ زیست‌شناسان مورد مطالعه قرارگرفته، و بسیار جالب است که ببینیم چگونه می‌توان نظرات شهودی مطرح شده دربالا را به کمك نتایج ریاضی تأییدکرد وتعمیم‌داد. دربحث خود راجع به‌اندرکنش بین روباهها و خرگوشها، روش ولترا را دنبال خواهیم کرد. او پایه‌گذار بررسی کمی چنین مسائلی است[1].

اگر x تعداد خرگوشها در زمان t باشد، درآن‌صورت، به‌سبب وجود نامحدود شبدر، درصورتی که تعداد روباهها، یعنی y ، صفر باشد، خواهیم داشت

۱. ویتو ولترا Vito Volterra (۱۸۶۰ـ۱۹۴۰) ریاضیدان برجستهٔ ایتالیایی بود. کار اولیهٔ او دربارهٔ معادلات انتگرالی (همراه‌با کارهای فردهولم وهیلبرت) توسعهٔ تمام عیارآنالیز خطی را شروع‌کردکه درطول نیمهٔ اول قرن بیستم حاکم برریاضیات بود. مطالعات جدی‌اواخر زندگی‌اش، در زمینهٔ زیست‌شناسی ریاضی، هم ریاضیات و هم‌زیست‌شناسی را غنی ساخت. برای توضیحات بیشتر، کتاب

←

$$\frac{dx}{dt}=ax \quad , \quad a>0$$

طبیعی است که تعداد برخوردهای بین خرگوشها و روباهها در واحد زمان را متناسب با x و با y فرض کنیم. چنانچه بعلاوه فرض کنیم که نسبت معینی ازاین برخوردها به‌خورده شدن خرگوش منجر می گردد، داریم:

$$\frac{dx}{dt}=ax-bxy \quad , \quad a \text{ و } b>0$$

به‌همین‌طریق

$$\frac{dy}{dt}=-cy+dxy \quad , \quad c \text{ و } d>0$$

زیرا بدون وجود خرگوشها، روباهها ازبین می‌روند وافزایش آنها به‌تعداد برخوردهایشان با خرگوشها بستگی دارد. بنابراین، دستگاه غیرخطی زیر مبین اندرکنش بین این‌دوگونه حیوان خواهد بود:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-by)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-y(c-dx)\end{cases} \qquad (1)$$

معادلات(۱) به‌معادلات شکار و شکارچی ولترا موسوم‌اند. متأسفانه این دستگاه را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی حل کرد. ازطرف دیگر، چنانچه جواب مجهول

"Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie" (Gauthier-Villars, Paris, 1931)

او را ببینید یا به

A. J. Lotka, "Elements of Mathematical Biology," pp. 88-94, Dover, New York, 1956.

مراجعه‌کنید. یك بحث نوین همراه با داده‌های Hudson's Bay Company مربوط به تعداد سیاه‌گوشها و خرگوشهای صحرایی‌کانادا از سال ۱۸۴۷ تا ۱۹۰۳ را می‌توان درکتاب

E. R. Leigh, The Ecological Role of Volterra's Equations, in "Some Mathematical Problems in Biology," American Mathematical Society. Providence, R. I., 1968

یافت.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

را به‌عنوان معادلات پارامتری یك منحنی از صفحهٔ xy درنظر بگیریم، معادلهٔ دکارتی این منحنی را می‌توانیم بیابیم. باحذف t به‌وسیلهٔ تقسیم روابط (۱) برهم وجداکردن متغیرها، خواهیم داشت

$$\frac{(a-by)dy}{y} = -\frac{(c-dx)dx}{x}$$

انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه به

$$a\log y - by = -c\log x + dx + \log K$$

یا

$$y^a e^{-by} = Kx^{-c}e^{dx} \qquad (۲)$$

منجر می‌شودکه درآن مقدار ثابت K برحسب مقادیر اولیهٔ x و y برابر است با

$$K = x_0^c y_0^a e^{-dx_0 - by_0}$$

گرچه نمی‌توان (۲) را برحسب x یا y حل کرد، لیکن به‌وسیلهٔ یك روش استادانهٔ منسوب به‌ولترا می‌توان نقاطی از منحنی را معین کرد. برای این منظور، طرف چپ وطرف راست (۲) را ، بترتیب، برابر متغیرهای جدید z و w می گیریم، و نمودارهای C_1 و C_2 مربوط به توابع

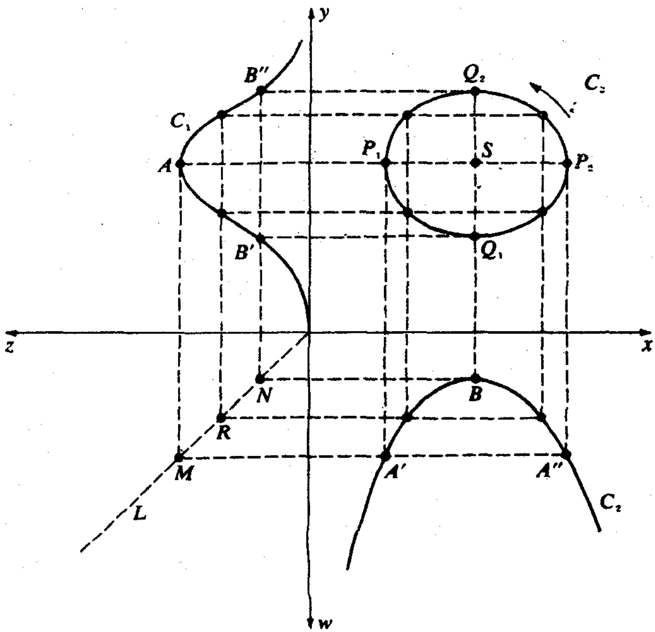
$$z = y^a e^{-by} \quad \text{و} \quad w = Kx^{-c}e^{dx} \qquad (۳)$$

راکه درشکل ۴۰ نشان داده شده است، رسم می کنیم. چون $z = w$ ، در ربع سوم به‌خط نقطه‌چین L مقیدیم. روی منحنی C_1 ، z درنقطهٔ A ماکزیمم می‌شود. به‌وسیلهٔ نقطهٔ A از منحنی C_1 ، یك y ، و — ازطریق M واقع بر L و نقاط متناظر آن A' و A'' واقع بر C_2 — دو x متناظر می‌شوند، و این دومقدار حدودی راکه x می‌تواند بین آنها تغییرکند، مشخص می کنند. به‌طور مشابه، w روی منحنی C_2 درنقطهٔ B مینیمم است. به‌وسیله نقطهٔ B از منحنی C_2 به N واقع بر L و ازآنجا به B' و B'' واقع بر C_1 می‌رسیم و این نقاط حدودی راکه y بین آنها تغییر می کند مشخص می کنند. به‌این‌ترتیب به‌نقاط P_1 ، P_2 و Q_1 و Q_2 واقع‌بر منحنی موردنظر C_3 دست می‌یابیم. به‌سهولت می‌توان نقاط دیگری از C_3 را به‌دست آورد. برای این منظور، از نقطه‌ای مثل R واقع‌بر L وبین M و N شروع می‌کنیم و مطابق شکل ۴۰ ، ابتدا آن‌را به‌طرف بالا روی C_1 و ازآنجا روی C_3 تصویر می‌کنیم، وسپس آن‌را روی C_2 وازآنجا به‌طرف‌بالا روی C_3 تصویر می کنیم. روشن‌است که تغییر مقدار K نقطهٔ B را بالا یا پایین می‌برد و باعث انبساط یا انقباض منحنی C_3

می‌گردد. از این‌رو وقتی K مقادیر متفاوتی به‌خود می‌گیرد یك‌خانواده رویهٔ مرغانه‌ای‌شکل حول نقطهٔ S به‌دست مـی‌آوریم. هر گاه مقدار مینیمم w و مقدار ماکزیمم z برابر گردند، کل‌منحنی C_3 دراین نقطهٔ S خلاصه می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که وقتی t افزایش می‌یابد، نقطهٔ متناظـرش $(x ، y)$ ، روی C_3 درجهت خلاف حرکت عقربه‌های‌ساعت منحنی را می‌پیماید. برای این‌منظور، توجه‌می‌کنیم که معادلات (۱) مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت را دراین نقطه به‌دست می‌دهند. یك محاسبهٔ سادهٔ متکی به‌فرمولهای (۳) نشان می‌دهد کـه مختصات نقطهٔ S ، $x=c/d$ و $y=a/b$ هستند. هنگامی که $x<c/d$ ، از معادلهٔ دوم (۱) نتیجه مـی‌شود که dy/dt منفی است، لذا نقطهٔ مذکور واقع بر C_3 کمان $Q_2P_1Q_1$ را به‌طرف پایین طی می‌کند. به‌طور مشابه، نقطهٔ مذکور کمان $Q_1P_2Q_2$ را به‌طـرف بالا طی می‌کند و بدین‌ترتیب ادعـای ما ثابت می‌شود.

سرانجام، از مسئلهٔ روباه و خرگوش برای ارائهٔ روش خطی‌کردن کـه حائز اهمیت خاصی است، استفاده می‌کنیم. ابتدا مشاهده می‌کنیم که اگر جمعیت خـرگوشها و روباهها به‌ترتیب برابر با



شکل ۴۰

$$x=\frac{c}{d} \quad و \quad y=\frac{a}{b} \tag{۴}$$

باشند، دستگاه(۱) ارضا می‌شود و داریم $dx/dt=0$ و $dy/dt=0$ ، بنابراین افزایش یا کاهشی در x یا y وجود ندارد. جمعیتهای (۴) را جمعیتهای تعادل می‌نامند، زیرا x و y می‌توانند خود را الی‌الابد دراین سطوح ثابت ابقا کنند. واضح است که این حالتی است که مینیمم w با ماکزیمم z برابر است، ومرغانه‌ای C_3 به‌نقطهٔS تبدیل می‌شود. حال‌چنانچه به‌حالت عمومی بازگردیم و x و y را برابر با مقادیر

$$x=\frac{c}{d}+X \quad و \quad y=\frac{a}{b}+Y$$

قرار دهیم ، آنگاه می‌توان X و Y را به‌عنوان انحراف x و y از مقادیر تعادلشان تلقی کرد. یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که اگر x و y در (۱) با X و Y جایگزین گردند [که در واقع انتقال نقطهٔ $(c/d ، a/b)$ به مبدأ مختصات است] ، آنگاه (۱) چنین می‌شود

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=-\dfrac{bc}{d}Y-bXY \\[2ex] \dfrac{dY}{dt}=\dfrac{ad}{b}X+dXY \end{cases} \tag{۵}$$

حال با فرض اینکه اگر X و Y کوچك باشند جملهٔ XY را بدون تولید خطای فاحشی می‌توان حذف کرد ، دستگاه (۵) را ، «خطی می‌کنیم» . این فرض، چندان با واقعیت منطبق نیست و چیزی جز یك امید نیست ، ولیکن (۵) را به یك دستگاه خطی، همچون

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=-\dfrac{bc}{d}Y \\[2ex] \dfrac{dY}{dt}=\dfrac{ad}{b}X \end{cases} \tag{۶}$$

ساده می‌کند. یافتن جواب عمومی (۶) ساده است، ولی حذف t به‌کمك تقسیم روابط بالا برهمدیگر و به‌دست آوردن رابطهٔ

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{ad^2}{b^2c}\quad\frac{X}{Y}$$

ازآن‌هم ساده‌تر است. جواب معادلهٔ اخیر

$$ad^2X^2+b^2cY^2=C^2$$

است. رابطهٔ فوق معادلهٔ یك دسته بیضی حول مبدأ مختصات درصفحهٔ XY است. ازآنجا که بیضی‌ها ازلحاظ کیفی همانند مرغانه‌ای‌های شکل ۴۰ هستند، زمینهٔ معقولی برای این امید وجود دارد که بتوانیم (۶) را به‌عنوان تقریبی برای (۵) بپذیریم. یقین داریم که خواننده می‌پذیرد که مسئلهٔ روباه و خرگوش بالنفسه جالب است. ولی، بعلاوه به‌این نکته پی‌بردیم که دستگاههای غیرخطی، ما را با مسائلی متفاوت با آنچه قبلا دیده‌ایم آشنا می‌سازد. درمطالعهٔ دستگاهی مانند (۱)، آموخته‌ایم که باید توجه خود را به‌رفتار جوابها درنزدیکی نقاطی ازصفحهٔ xy که درآنها طرف راست هردومعادله صفر می‌شود معطوف کنیم؛ همچنین مشاهده کرده‌ایم که چرا جوابهای دوره‌ای (یعنی آنهایی که منحنی‌های بستهٔ ساده‌ای مانند C_3 درشکل ۴۰ به‌دست می‌دهند) مهم ومطلوب‌اند؛ با روش مطالعهٔ دستگاه غیرخطی به‌کمك یك دستگاه خطی که آن‌را تقریب می‌زند، آشنا شده‌ایم. درفصل بعد دستگاههای غیرخطی را به‌طور کاملتر مورد مطالعه قرار خواهیم داد وهریك ازاین مطالب را با تفصیل وعمومیت بیشتری بررسی خواهیم کرد.

تمرین

۱ــ y را از دستگاه (۱) حذف کنید و معادلهٔ مرتبهٔ دوم غیر خطی را که $x(t)$ درآن صدق می‌کند به‌دست آورید.

۲ــ نشان دهید که وقتی $dx/dt>0$ ، خواهیم داشت $d^2y/dt^2>0$. مفهوم این نتیجه از روی شکل ۳۹ چیست؟

۸

معادلات غیرخطی

۴۰. دستگاههای خودگردان
صفحهٔ فاز و پدیده‌های مربوط به آن

در سیر تکامل تاریخی معادلات دیفرانسیل دوگـرایش عمده موجـود بوده است. اولین و قدیمی‌ترین گرایش با سعی دریافتن جوابهای صریح، به‌شکل بسته ــ که بندرت امکان‌پذیر است ــ یا برحسب سریهای‌توانی، مشخص‌می‌گردد. در دومین گرایش، ازحل‌معادلات باهر روش سنتی بکلی قطع امید می‌شود و به‌جای آن توجه روی‌کسب اطلاعات‌کیفی راجع به رفتار عمومی جوابها متمرکز می‌شود. در فصل ۴ این نقطه نظر را در مورد معادلات خطی به‌کارگرفتیم. نظریهٔ‌کیفی معادلات غیرخطی کاملا متفاوت است. این نظریــه در حدود سال ۱۸۸۰ میلادی توسط پوانکاره در رابطه باکارش در زمینهٔ مکانیك سماوی، بنانهاده شد، واز آن زمان به‌بعد مورد توجه روزافزون و مستمر متخصصین ریـاضیات محض و کاربسته بوده است[۱].

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل خطی به‌طورگسترده و عمیق در ۲۰۰ سال گـذشته مورد مطالعه قرارگرفته است، و قسمت نسبتأکامل ومرتبی از پیکر دانش را تشکیل می‌دهد. ولی، اطلاعات‌کلی‌اندکی درمورد معادلات غیرخطی در دست‌است. هدف ما دراین فصل آن‌است که‌بعضی مفاهیم و روشهای اساسی این‌موضوع را بررسی‌کنیم، وهمچنین نشان دهیم‌که این شاخه از ریاضیات انواع‌گوناگونی از پدیده‌های جدید جالب و متمایزی را که در نظریهٔ

---

۱. برای شرح‌کلی کارپوانکاره در ریاضیات و علوم، پیوست الف را ملاحظه‌کنید.

معادلات خطی ظاهر نمی‌شوند، ارائه می کند. خواننده تعجب خواهد کرد که ببیند اکثر این پدیده‌ها را می‌توان خیلی ساده و بدون توسل به ابزار ریاضی خیلی پیچیده مورد بحث و بررسی قرارداد، و در واقع معلومات مورد نیاز چندان بیش از معادلات دیفرانسیل مقدماتی و جبر بردارهای دوبعدی نیست.

چرا باید به‌معادلات دیفرانسیل غیرخطی توجه کرد؟ دلیل اساسی آن است که بسیاری از دستگاههای فیزیکی، ومعادلاتی که این‌دستگاهها را توصیف می کنند، دراصل غیرخطی‌اند. خطی کردنهای عادی ابزارهایی تقریب زننده هستند که تا حدودی حاکی از ناتوانی در مواجهه با مسائل غیرخطی اصلی هستند و تا حدودی دید عملی را که نیمی ازقرص نان به‌از هیچ است، بیان می کنند. بلافاصله باید اضافه کنیم که موارد فیزیکی بسیاری وجود دارند که در آنها تقریب‌خطی، برای اکثرمقاصد، ارزشمند ومناسب است. با این حال، این‌واقعیت همچنان پابرجاست، که دربسیاری از موارد دیگر، خطی کردن قابل توجیه نیست[1].

ارائهٔ مثالهایی ازمسائلی که اساساً غیرخطی هستندکارکاملا ساده‌ای‌است. برای‌نمونه، اگر x زاویهٔ انحراف یك آونگ نامیرا به طول a باشد که جرم گلولهٔ آن m است، درآن صورت مطابق بخش ۵ معادلهٔ حرکت این آونگ چنین است

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{a}\sin x=0 \tag{1}$$

وچنانچه نیروی میرایی متناسب با سرعت گلوله موجود باشد، آنگاه معادلهٔ حرکت آونگ به صورت زیر درخواهد آمد

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{g}{a}\sin x=0 \tag{2}$$

در خطی کردن متداول، به‌جای $\sin x$، x می گذاریم، که درمورد نوسانات کوچك معقول است، ولی برای x های بزرگ این امر به اعوجاج زیادی منجر می گردد. مثالی از نوع دیگر را می‌توان در نظریهٔ لامپ خلأ جستجو کرد، که به معادلهٔ مهم وان درپل[2] منتهی می‌شود

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{3}$$

بعداً ملاحظه خواهد شد که هریك ازاین معادلات غیرخطی خواص جالبی دارند که دردیگر معادلات موجود نیست.

---

۱. حتی اینشتین پیشنهاد کرده است که چون معادلات اساسی فیزیك غیرخطی‌اند، تمامی فیزیك ریاضی باید تجدیدنظر شود. اگر مطلب عنوان شده توسط اینشتین درآن زمان روشن می‌بود، ریاضیات آینده یقیناً با ریاضیات گذشته وحال خیلی تفاوت می‌داشت.

2. Van der Pol

در سراسر این فصل معادلات غیرخطی مرتبهٔ دوم به صورت

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x , \frac{dx}{dt}\right) \qquad (۴)$$

را مورد توجه قرارخواهیم داد، که معادلات (۱) ، (۲) ، و (۳) را به‌عنوان حالتهای‌خاص شامل‌می‌شود. اگر یك‌دستگاه دینامیکی‌ساده متشکل از ذره‌ای به‌جرم واحد رادر نظر بگیریم، که درامتدادمحور x حرکت‌می کند، وچنانچه $f(x , dx/dt)$ نیروی وارد برآن‌ذره باشد، درآن صورت (۴) معادلهٔ حرکت خواهد بود. مقادیر x (موقعیت) و dx/dt (سرعت)، که در هر لحظه حالت دستگاه را مشخص می کنند، فازهـای دستگاه ، و صفحهٔ متغیرهای x و dx/dt صفحهٔ فاز نامیده می‌شود. چنانچه‌متغیر $y=dx/dt$ را به‌کاربریم، آنگاه می توان به‌جای (۴) دستگاه معادل زیررانوشت

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=f(x , y)\end{cases} \qquad (۵)$$

خواهیم دید که به کمك مطالعهٔ جوابهای (۵) می توان مطالب زیادی راجع به جوابهـای (۴) فراگرفت. وقتی t به عنوان یك پارامتر تلقی گردد، عموماً جواب (۵)یك جفت تابع $x(t)$ و $y(t)$ خواهد بودکه‌در صفحهٔ xy ، کـه همان صفحهٔ فاز فوق‌الذکـر است ، یك منحنی تعریف می کنند. توجه ما معطوف به شکل‌کلی حاصل از این منحنیها در صفحهٔ فاز خواهد بود.

به طور کلیتر، دستگاههایی به صورت

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x , y)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=G(x , y)\end{cases} \qquad (۶)$$

را مورد مطالعه قرار خواهیم دادکه در آن F و G پیوسته‌اند و مشتقات جزئی اول آنهادر سرتاسرصفحهٔ فاز پیوسته هستند. دستگاهی از این نوع را ، که درآن متغیرمستقل t درتوابع F و G طرف راست ظاهر نمی‌شود، خودگردان می‌نامند. حال به بررسی دقیق‌تر جوابهای چنین دستگاهی می‌پردازیم.

از فرضهای فوق و از قضیهٔ ۳۶ــ الف چنین برمی‌آید کـه اگر t_0 عددی دلخواه و (x_0 , y_0) نقطهٔ دلخواهی ازصفحهٔ فاز باشد،آنگاه یك‌جواب منحصربه‌فرد (۶) به‌صورت

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases} \qquad (۷)$$

وجود دارد به‌طوری که $x(t_0) = x_0$ و $y(t_0) = y_0$. درصورتی که توابع $x(t)$ و $y(t)$ هردو ثابت نباشند، (۷) یك منحنی در صفحهٔ فاز مشخص می کند که مسیردستگاه نام‌دارد[1]. روشن است که اگر (۷) یك جواب (۶) باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x = x(t+c) \\ y = y(t+c) \end{cases} \tag{۸}$$

نیز به ازای هرعدد ثابت c، جواب (۶) خواهد بود. بنابراین هرمسیر به وسیلهٔ جوابهای متعددی نمایش داده می‌شود، که تنها در انتقالی از پارامتر با هم اختلاف دارند. همچنین بسادگی می‌توان ثابت کرد (به تمرین ۲ مراجعه شود) کـه هرمسیر ماربر نقطهٔ (x_0 , y_0) باید با جوابی به شکل (۸) متناظر باشد. ازاین مطلب نتیجه می‌شود که ازهرنقطه ازصفحهٔ فاز حداکثر یك مسیر می گذرد. بعلاوه، جهت افزایش t در امتداد هرمسیر مفروض، برای تمام جوابهایی که آن مسیر را مشخص می کنند، یکی است. بنابراین هر مسیر، یك منحنی جهت‌دار است، و در شکلها ازعلامت پیکان، برای نشان دادن جهتی که مسیر با افزایش t در آن جهت پیموده می‌شود، استفاده خواهیم کرد.

نکات بالا نشان‌می‌دهند که مسیرهای (۶) عموماً تمامی صفحهٔ فاز را می‌پوشانند و با یکدیگر تلاقی نمی کنند. تنها استثناهای این مورد درنقاطی همچون (x_0 , y_0) است که در آن هردو تابع F و G صفر می‌شوند

$$F(x_0 , y_0) = 0 \quad , \quad G(x_0 , y_0) = 0$$

این نقاط به نقاط بحرانی موسوم‌اند، و در چنین نقطه‌ای جواب منحصر به فرد تضمین شده توسط قضیهٔ ۳۶ـ الف جواب ثابت $x = x_0$ و $y = y_0$ است. یك جواب ثابت مسیری را تعریف نمی کند، وبنابراین هیچ مسیری از نقطهٔ بحرانی نمی گذرد. ما درکار خود، همواره فرض می کنیم که هرنقطهٔ بحرانی (x_0 , y_0) منزوی است، بدین معنا که دایره‌ای به مرکز (x_0 , y_0) وجود دارد که هیچ نقطهٔ‌بحرانی دیگری را دربرنمی گیرد.

برای دستیابی به تعبیر فیزیکی نقاط بحرانی، دستگاه خودگردان خاص (۵) را که از معادلهٔ دینامیکی (۴) ناشی می‌شود درنظرمی گیریم. دراین حالت، نقطهٔ بحرانی نقطه‌ای چون $(x_0 , 0)$ است که در آن $y = 0$ و $f(x_0 , 0) = 0$؛ یعنی، این نقطه با حالتی از حرکت ذره مطابقت دارد که در آن سرعت dx/dt و شتاب $dy/dt = d^2x/dt^2$ هر دو صفر می‌شوند. این بدان معنی است که ذره در حال سکون است و هیچ نیرویی بدان وارد نمی‌شود، وبنابراین ذره‌درحالت تعادل می باشد[2]. بدیهی است که حالات تعادل یك دستگاه فیزیکی یکی از مهمترین کیفیات آن دستگاه به‌شمار می‌آیند، واین بخشی ازعلت علاقهٔ ما به‌نقاط بحرانی را تشکیل می‌دهد.

---

۱. اصطلاحات خط سیر (Trajectory) ومشخصه (Characteristic) نیز توسط بعضی‌مؤلفین به‌کار رفته‌است.

۲. به‌همین‌دلیل، بعضی‌ازمؤلفین به‌جای نقطهٔ بحرانی، عبارت نقطهٔ تعادل را به‌کار می‌برند.

دستگاه خودگردان کلی (۶) الزاماً ازمعادله‌ای‌دینامیکی به‌شکل (۴) ناشی نمی‌شود. در این حالت، چه نوع مفهوم فیزیکی را می‌توان به مسیرها و نقاط بحرانی منسوب کرد؟ در اینجا مناسب است که شکل ۴۱ و میدان برداری دو بعدی تعریف شده به‌صورت

$$\mathbf{V}(x , y)=F(x , y)\mathbf{i}+G(x , y)\mathbf{j}$$

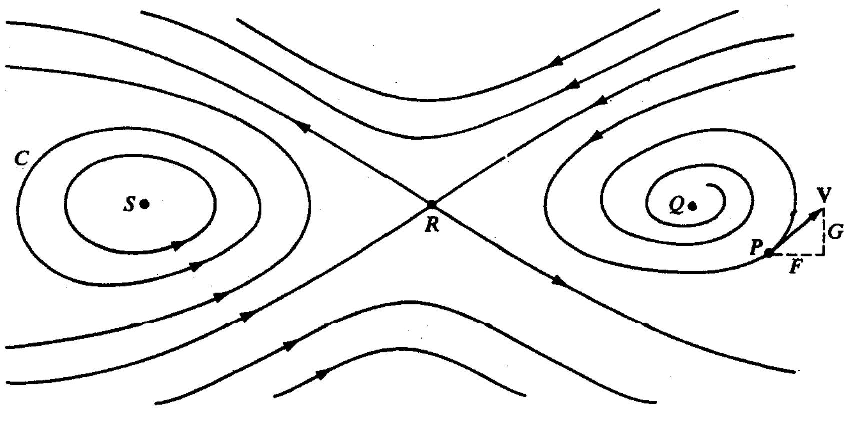
راکه درنقطه‌ای مانند $P=(x , y)$ دارای مؤلفهٔ افقی $F(x , y)$ ومؤلفهٔ قائم $G(x , y)$ است در نظر بگیریم. از آنجاکه $dx/dt=F$ و $dy/dt=G$، این بردار در نقطهٔ P بر مسیر مماس است و متوجه جهت افزایش t می‌باشد. در صورتی کـه t زمان باشد، $\mathbf{V}$ را می‌توان بردار سرعت ذره‌ای توجیه کرد که درامتداد مسیر درحال حرکت است. همین طور، می‌توان پنداشت که تمامی صفحهٔ فاز به وسیلهٔ ذرات پـر شده است و هرمسیر رد پای ذرهٔ متحرکی است که در جلو وعقب آن، ذرات بسیار دیگـری در همان مسیرحرکت می‌کنند و ذراتی همراه آن در مسیرهای مجاور در حرکت هستند. این وضعیت را می‌توان به‌عنوان یك حرکت سیال دو بعدی توصیف کرد، و چون دستگاه (۶) خودگردان است، بدین معنا کـه بردار $\mathbf{V}(x , y)$ درهرنقطهٔ ثابت (x , y) بازمان تغییرنمی‌کند، حرکت سیال \یستا است. مسیرها، گذرگاههای ذرات در حال حرکت‌اند، و نقاط بحرانی Q، R، و S نقاطی بـا سرعت صفرند، که در آنها ذرات به حال سکون هستند (یعنی نقاط رکود حرکت سیال).

بارزترین مشخصه‌های حرکت سیال کـه در شکل ۴۱ نمایش داده شده است بدین قرارند:

الف) نقاط بحرانی؛

ب) آرایش مسیرها در نزدیکی نقاط بحرانی؛

ج) پایداری یا ناپایداری نقاط بحرانی، یعنی اینکه آیا ذره‌ای واقع در مجاورت‌چنین نقطه‌ای نزدیك آن باقی می‌ماند یا به قسمت دیگری ازصفحه منتقل می‌شود؛



شکل ۴۱

د) مسیرهای بسته (مانند C در شکل ۴۱)، که با جوابهای دوره‌ای مطابقت دارند.

این مشخصه‌ها قسمت عمده‌ای از رخسارهٔ فاز (یا تصویری کلی از مسیرهای) مربوط به دستگاه (۶) را تشکیل می‌دهند. چون معمولاً در دستگاهها و معادلات غیرخطی را نمی‌توان به‌طور صریح حل کرد، هدف نظریهٔ کیفی بحث شده در این فصل آن است که با بررسی مستقیم توابع F و G، حداکثر مطالب ممکن را در مورد رخسارهٔ فاز کشف کنیم. برای اینکه برداشتی از نوع اطلاعات قابل دستیابی داشته باشیم، مشاهده می‌کنیم که اگر $x(t)$ یك جواب دوره‌ای معادلهٔ دینامیکی (۴) باشد، آنگاه مشتق آن $y(t)=dx/dt$ نیز دوره‌ای است و بنابراین مسیر متناظرش در دستگاه (۵) بسته خواهد بود. برعکس، چنانچه مسیری از (۵) بسته باشد، (۴) یك جواب دوره‌ای خواهد داشت. به عنوان یك مثال مشخص از کاربرد این موضوع، خاطرنشان می‌کنیم که می‌توان ثابت کرد که معادلهٔ (حل نشدنی) وان درپل دارای یك جواب دوره‌ای منحصر به‌فرد است (اگر $\mu>0$) و برای اثبات این امر باید نشان داد که دستگاه خودگردان معادل آن دارای مسیر بستهٔ منحصر به‌فردی است.

تمرین

۱ـ با به‌کاربردن قانون دوم حرکت نیوتن در مورد گلولهٔ آونگ، معادلهٔ (۲) را به دست آورید.

۲ـ چنانچه (x_0, y_0) نقطه‌ای درصفحهٔ فاز باشد و اگر $x_1(t)$، $y_1(t)$ و $x_2(t)$، $y_2(t)$ جوابهای (۶) باشند به‌طوری که برای مقادیر مناسب t_1 و t_2 داشته باشیم $x_1(t_1)=x_0$، $y_1(t_1)=y_0$ و $x_2(t_2)=x_0$، $y_2(t_2)=y_0$، نشان‌دهید که عدد ثابت c وجود دارد به قسمی که

$$x_1(t+c)=x_2(t) \quad , \quad y_1(t+c)=y_2(t)$$

۳ـ رابطهٔ بین رخساره‌های فاز دستگاههای زیر را توصیف کنید:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x, y)\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=G(x, y)\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-F(x, y)\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-G(x, y)\end{cases}$$

۴ـ رخسارهٔ هریك از دستگاههای زیر را توصیف کنید:

الف) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=0\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=0\end{cases}$ ب) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=0\end{cases}$

ج) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=1 \\ \dfrac{dy}{dt}=2 \end{cases}$ د) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x \\ \dfrac{dy}{dt}=-y \end{cases}$

۵ـ بنا به تعریف، نقاط بحرانی و مسیرهای معادلهٔ (۴) همان نقاط بحرانی و مسیرهای دستگاه معادل آن یعنی (۵) هستند. نقاط بحرانی معادلات (۱) ، (۲) ، و (۳) را بیابید.

۶ـ نقاط بحرانی معادلات زیر را بیابید:

الف) $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-(x^3+x^2-2x)=0$$

ب) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y^2-5x+6 \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y \end{cases}$$

۷ـ تمام جوابهای دستگاه غیرخودگردان

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x \\ \dfrac{dy}{dt}=x+e^t \end{cases}$$

را بیابید و بعضی از منحنیهایی را که توسط این جوابها تعیین می‌شوند در صفحهٔ xy ترسیم کنید.

۴۱. انواع نقاط بحرانی. پایداری

یك دستگاه خودگردان به‌صورت

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=F(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt}=G(x, y) \end{cases} \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. به‌طور معمول، فرض می‌کنیم که توابع F و G در سرتاسر صفحهٔ xy پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته‌اند. نقاط بحرانی (۱)، حداقل به طور نظری ، ازحل دستگاه معادلات $F(x, y)=0$ و $G(x, y)=0$ به دست می‌آیند . چهار

نوع ساده از نقاط بحرانی بسیار پیش می‌آیند، و قصد ما در این بخش تشریح این نقاط برحسب آرایش مسیرهای مجاور آنهاست. ولی، نخست به دو تعریف نیازمندیم.

فرض می کنیم که $(x_\circ , y_\circ)$ یك نقطهٔ بحرانی منزوی (۱) باشد. چنانچه $C=[x(t) , y(t)]$ مسیری از (۱) باشد، در آن صورت می گوییم که، هرگاه $t\to\infty$، C به $(x_\circ , y_\circ)$ میل می‌کند اگر روابط

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=x_\circ \quad \text{و} \quad \lim_{t\to\infty} y(t)=y_\circ \tag{۲}$$

برقرار باشد[1]. از لحاظ هندسی، این بدان معناست که چنانچه $P=(x , y)$ نقطه‌ای باشد که C را مطابق معادلات $x=x(t)$ و $y=y(t)$ بپیماید، در آن صورت وقتی $t\to\infty$، $P\to(x_\circ , y_\circ)$. در صورتی که

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)-y_\circ}{x(t)-x_\circ} \tag{۳}$$

نیزوجود داشته باشد، یا اگر، وقتی $t\to\infty$، خارج قسمت (۳) به بینهایت مثبت یا منفی میل کند، آنگاه می گوییم که وقتی $t\to\infty$، C وارد نقطهٔ بحرانی $(x_\circ , y_\circ)$ می‌شود. خارج قسمت رابطهٔ (۳) شیب خطی است که $(x_\circ , y_\circ)$ را به نقطهٔ P با مختصات $x(t)$ و $y(t)$ متصل می‌کند، لذا شرط اضافی بدین معناست که، وقتی $t\to\infty$، این خط به‌جهت معینی میل کند. درتعریفهای بالا می‌توان حدود را وقتی $t\to-\infty$ نیز درنظر گرفت. روشن است که این خواص، ویژگیهای مسیر C هستند، و به جوابی که برای نمایش این مسیر به‌کار رفته است بستگی ندارند.

بعضی مواقع امکان اینکه جوابهای صریح دستگاه (۱) را بیابیم وجود دارد، و لذا از این جوابها می‌توان در تعیین مسیرها استفاده‌کرد. ولی، در اکثر حالات، برای یافتن مسیرها لازم است t را بین دو معادلهٔ دستگاه حذف کنیم، که منجر به رابطهٔ

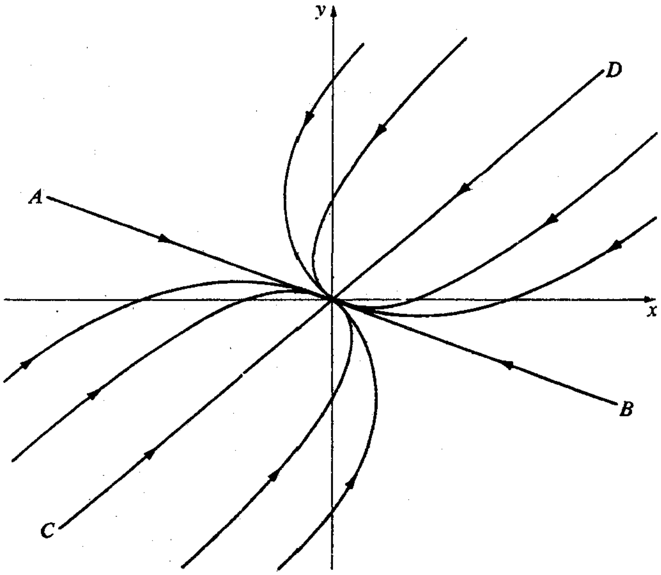
$$\frac{dy}{dx}=\frac{G(x , y)}{F(x , y)} \tag{۴}$$

می‌شود. این معادلهٔ مرتبه اول، شیب مماس برمسیر (۱) را که از نقطهٔ (x , y) می گذرد به دست می‌دهد، مشروط به اینکه توابع F و G هردو با هم دراین نقطه صفر نباشند. البته در این حالت، نقطه یك نقطهٔ بحرانی است و هیچ مسیری از آن نمی گذرد. بنابراین مسیرهای (۱) برخانوادهٔ یك‌پارامتری منحنیهای انتگرال(۴) منطبق می‌شوند، واین خانواده را اغلب می‌توان با روشی که در فصل ۲ ارائه کردیم به دست‌آورد. ولی، باید توجه‌داشت در حالیکه مسیرهای (۱) منحنیهای جهت‌دارند، منحنیهای انتگرال (۴) دارای هیچ جهتی

---

۱. می‌توان ثابت کرد که اگر (۲) برای جوابی همچون $x(t)$ ، $y(t)$ درست باشد، آنگاه $(x_\circ , y_\circ)$ لزوماً یك نقطهٔ بحرانی خواهدبود. مراجعه شود به

F. G. Tricomi, «Differential Equations,» p. 47, Blackie, Glasgow, 1961.



شکل ۴۲

نیستند. در مثالهای زیر هریك از این‌روشهای تعیین مسیرها، شرح داده خواهد شد.

حال به تشریح هندسی چهار نوع اصلی نقاط بحرانی می‌پردازیم. درهرحالت‌فرض می‌کنیم که نقطهٔ بحرانی مورد بحث، مبدأ مختصات $O=(0, 0)$ باشد.

گره‌ها. هر نقطهٔ بحرانی مانند آنچه در شکل ۴۲ آمده است گره نام دارد. وقتی $t \to \infty$ (یاوقتی $t \to -\infty$)، مسیرها به‌چنین نقطه‌ای میل‌می‌کنند و به‌آن واردمی‌شوند. برای گرهی که در شکل ۴۲ نشان داده شده است، چهار مسیر نیمخطی وجود دارد، AO، BO، CO، و DO که همراه بامبدأ مختصات خطوط AB و CD را تشکیل‌می‌دهند. تمام مسیرهای دیگر به قسمتهایی از سهمی شباهت دارند، و وقتی هر یك از این مسیرها به O میل‌کند شیبش به شیب خط AB میل می‌کند.

مثال ۱. دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-x+2y\end{cases} \tag{5}$$

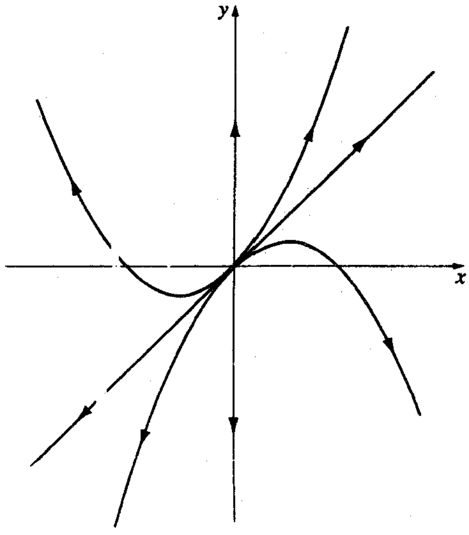
را درنظرمی‌گیریم. روشن است که مبدأ تنها نقطهٔ بحرانی‌آن است، و جواب عمومی را به سهولت می‌توان به‌کمك روشهای مذکور دربخش ۳۸ پیداکرد:

$$\begin{cases} x=c_1e^t \\ y=c_1e^t+c_2e^{2t} \end{cases} \qquad (۶)$$

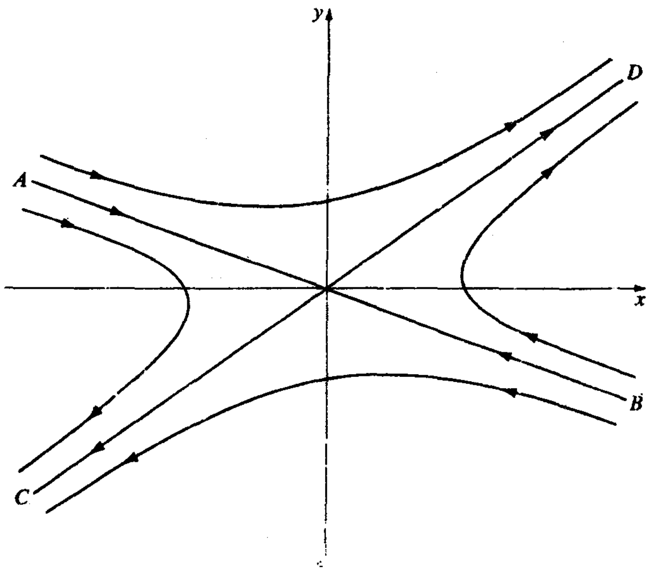
وقتی $c_1=0$ ، داریم $x=0$ و $y=c_2e^{2t}$. دراین حالت مسیر (شکل ۴۳)، وقتی $c_2>0$ قسمت مثبت محور y ، و وقتی $c_2<0$ قسمت منفی محور y خواهد بود، و هریك از این مسیرها، وقتی $t\to-\infty$ ، به مبدأ میل می‌کند و وارد آن می‌شود. هنگامی که $c_2=0$ ، داریم $x=c_1e^t$ و $y=c_1e^t$. این مسیر، وقتی $c_1>0$ نیمخط $y=x$ با $x>0$ ، و وقتی $c_1<0$ نیمخط $y=x$ با $x<0$ خواهد بود، و مجدداً هردو مسیر، وقتی $t\to-\infty$ ، به‌مبدأ میل می‌کنند، وبدان وارد می‌شوند. وقتی c_1 و c_2 هردو مخالف صفر باشند، مسیرها برسهمی‌های $y=x+(c_2/c_1^2)x^2$ واقع می‌شوند، که با شیب ۱ از مبدأ می‌گذرند. باید دانست که هریك از این مسیرها تنها مشتمل بر قسمتی از یك سهمی هستند: قسمت $x>0$ ، اگر $c_1>0$ ؛ وقسمت $x<0$ چنانچه $c_1<0$. وقتی که $t\to-\infty$ ، هریك از این مسیرها نیز به مبدأ میل می‌کنند و بدان وارد می‌شوند ، این را بلافاصله می‌توان از (۶) مشاهده کرد. در صورتی که از (۵) مستقیماً معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2y}{x} \qquad (۷)$$

را تشکیل دهیم که شیب مماس برمسیر ماربر (x, y) [با شرط $(x, y)\neq(0, 0)$] را به دست می‌دهد ، از حل معادلهٔ همگن (۷) ، درمی‌یابیم که $y=x+cx^2$. این روش منحنیهایی را که مسیرها (بجز مسیرهای واقع برمحور y ها) برآنها واقع‌اند به‌دست می‌دهد، لیکن هیچ گونه اطلاعی راجع به‌چگونگی پیموده شدن مسیرها عرضه نمی‌کند. از



شکل ۴۳



شکل ۴۴

این بحث روشن است که نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه (۵) یك گره است.

نقاط زینی . هر نقطهٔ بحرانی‌مانند نقطهٔ بحرانی‌شکل۴۴ را یك‌نقطهٔ زینی می‌نامند. وقتی $t \to \infty$ دو مسیر نیمخطی AO و BO به این نقطه میل می کنند و وارد آن می‌شوند، و این‌دومسیر برخط AB قرارمی گیرند. وقتی $t \to -\infty$، به‌این‌نقطه بازهم دومسیر نیمخطی CO و DO میل می کنند و واردآن می‌شوند، واین دومسیر برخط دیگر CD قرارمی گیرند. بین این چهار مسیر نیمخطی چهار ناحیه وجود دارد، وهر کدام از این نواحی یك خانواده ازمسیرهایی مشابه باهذلولی‌را شامل‌می‌شوند. این‌مسیرها، وقتی $t \to \infty$ یا $t \to -\infty$، به O میل‌نمی کنند، لیکن در عوض هنگامی که $t \to \infty$ و هنگامی که $t \to -\infty$ ، این مسیرها بریکی ازمسیرهای نیمخطی مجانب خواهند بود.

مرکزها. هر مرکز (که بعضی اوقات گرداب نامیده می‌شود) نقطه‌ای بحرانی است که به وسیلهٔ یك دسته از مسیرهای بسته احاطه شده باشد. وقتی $t \to \infty$ یا وقتی $t \to -\infty$ هیچ مسیری به مرکز میل نمی کند.

مثال ۲. تنها نقطهٔ بحرانی دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \qquad (۸)$$

مبدأ ، وجواب عمومی دستگاه

$$\begin{cases} x=-c_1 \sin t+c_2 \cos t \\ y=c_1 \cos t+c_2 \sin t \end{cases} \tag{9}$$

است، جوابی که در شرایط $x(0)=1$ و $y(0)=0$ صدق می‌کند آشکارا عبارت است از

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \tag{10}$$

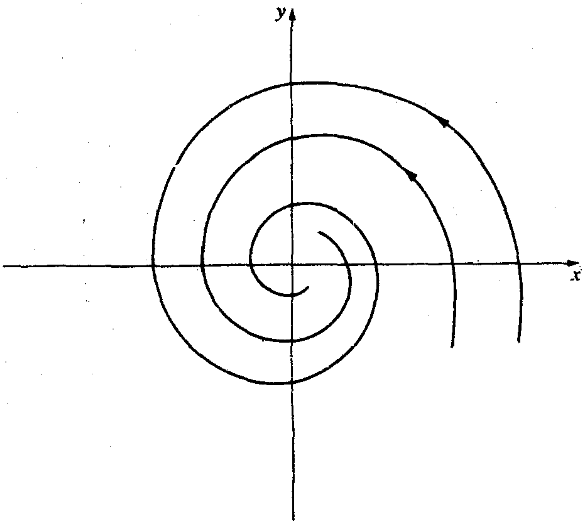
و جوابی که به وسیلهٔ شرایط $x(0)=0$ و $y(0)=-1$ تعیین می‌گردد به صورت

$$\begin{cases} x=\sin t=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \\ y=-\cos t=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{11}$$

است. این‌دو جواب مختلف یك مسیر C را تعریف می‌کنند (شکل ۴۵) ، که بوضوح‌دایرهٔ $x^2+y^2=1$ است. هردوجواب (۱۰) و (۱۱) نشان می‌دهند که این مسیر درجهت‌عکس حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. چنانچه t را بین معادلات دستگاه حذف کنیم ، خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

شکل ۴۵



شکل ۴۶

که جواب عمومی آن، یعنی $x^۲+y^۲=c^۲$ تمام مسیرها را (اما بدون جهت‌هایشان) به دست می‌دهد. بدیهی است که نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه (۸) یك مرکز است

حلزونی‌ها. هر نقطهٔ بحرانی مانند نقطهٔ بحرانی شکل ۴۶ را حلزونی (یا بعضی مواقع کانون) می‌نامند. وقتی $t \to \infty$ (یا وقتی $t \to -\infty$) ، یك دسته مسیر بینهایت بار دور چنین نقطه‌ای به طور حلزونی می‌پیچند و به این نقطه میل می‌کنند. خصوصاً توجه داریم که گرچه مسیرها به O میل می‌کنند، لیکن وارد آن نمی‌شوند. یعنی، نقطه‌ای مانند P که درطول چنین مسیری حرکت می‌کند، وقتی $t \to \infty$ (یا وقتی $t \to -\infty$) به O میل می‌کند، لیکن خط OP به جهت معینی میل نمی‌کند.

مثال ۳. چنانچه a عدد ثابت دلخواهی باشد، تنها نقطهٔ بحرانی دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax-y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=x+ay \end{cases} \tag{۱۲}$$

مبدأ است (چرا؟). معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+ay}{ax-y} \tag{۱۳}$$

را خیلی ساده با استفاده از مختصات قطبی r و θ و روابط $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$،

می‌توان حل کرد. چون

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{و} \qquad r^2=x^2+y^2$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$r^2\frac{d\theta}{dx}=x\frac{dy}{dx}-y \qquad \text{و} \qquad r\frac{dr}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$$

به‌کمك این معادلات، بسهولت می‌توان (۱۳) را به شکل خیلی سادهٔ

$$\frac{dr}{d\theta}=ar$$

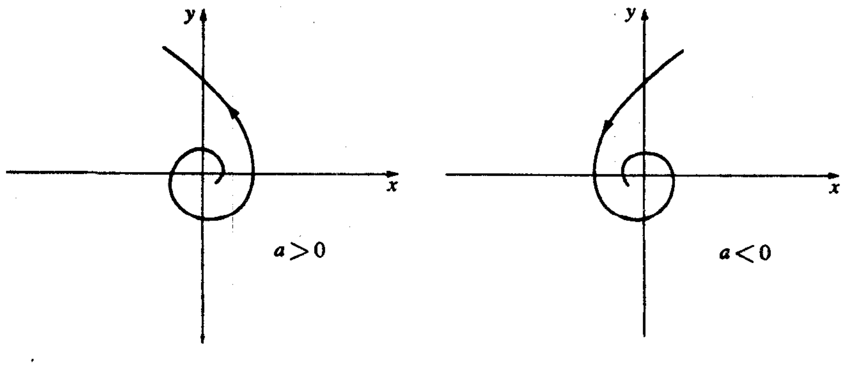
نوشت. بنابراین

$$r=ce^{a\theta} \tag{۱۴}$$

معادلهٔ قطبی مسیرهاست. دو آرایش حلزونی ممکن در شکل ۴۷ نشان داده شده‌اند، وجهت پیموده شدن‌این مسیرها را می‌توان ازاین‌حقیقت‌که وقتی $x=0$ ، داریم $dx/dt=-y$ مشاهده کرد. اگـر $a=0$ ، آنگاه (۱۲) به شکل (۸) درمی‌آید و (۱۴) به $r=c$ تبدیل می‌شود که معادلهٔ قطبی خانوادهٔ تمام دوایر $x^2+y^2=c^2$ است که مراکزآنها مبدأ است. پس این مثال تعمیم مثال (۲) است، و چون مرکز نشان داده شده درشکل ۴۵ برخط مرزی بین حلزونیهای شکل ۴۷ قرار می‌گیرد ، هرنقطهٔ بحرانی راکه مرکـز باشد، اغلب حالت خط مرزی می‌نامند . در بخش آینده با نمونه‌هــای دیگری از حالات خط مــرزی مواجه خواهیم شد.

حال مفهوم پایداری را به‌گونه‌ای‌که درمورد نقاط بحرانی دستگاه (۱) به‌کارمی‌رود مطرح می‌کنیم.

در بخش گذشته اشاره شدکه مهمترین سؤال در مـورد مطالعهٔ هــر دستگاه فیزیکی



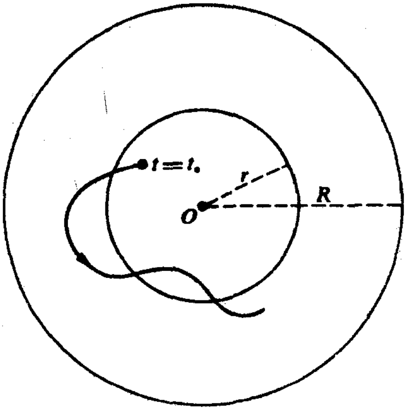
شکل ۴۷

موضوع حالات ماندگار آن است. اما حالت ماندگار اگر از میزان تداوم قابل توجهی برخوردار نباشد یعنی اگر پایدار نباشد، اهمیت فیزیکی کمی دارد. به عنوان مثالی ساده، آونگ شکل ۴۸ را درنظرمی گیریم. دراینجا دوحالت ماندگار ممکن وجود دارد: هنگامی که گلولهٔ آونگ در بالاترین نقطه درحال سکون است، وهنگامی که این گلوله درپایین‌ترین نقطه در حال سکون است. اولین حالت بوضوح ناپایدار، و دومین حالت پایدار است. حال به‌یاد می‌آوریم که حالت پایدار هر دستگاه فیزیکی ساده با یک نقطهٔ تعادل (یا نقطهٔ بحرانی) درصفحهٔ فاز مطابقت دارد. این ملاحظات به‌طورکلی اظهارمی‌دارندکه هراختلال کوچك در نقطهٔ تعادل ناپایدار موجب دورتر و دورترشدن از این نقطه می‌شود، ولی در مورد نقطهٔ تعادل پایدار خلاف این مطالب صحت دارد.

اکنون این مطالب حسی را به‌صورتی دقیقتر بیان می‌کنیم. یك نقطهٔ بحرانی منزوی دستگاه (۱) را درنظرمی گیریم، وبرای سهولت فرض می کنیم که این‌نقطه برمبدأ مختصات $O=(0,0)$ صفحهٔ فاز منطبق باشد. این‌نقطهٔ بحرانی را پایدار می گویند، هرگاه به‌ازای هرعدد مثبت R، عدد مثبت $r \leqslant R$ وجود داشته باشد، به قسمی که هر مسیری‌که در $t=t_0$ درون دایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ واقع‌است، برای‌تمام‌مقادیر $t>t_0$، درون‌دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ باقی بماند (شکل ۴۹). اگرچندان دقیق صحبت نکنیم، هرنقطهٔ بحرانی در صورتی‌پایدار است‌که تمام مسیرهایی‌که به قدرکافی به این نقطه نزدیك می‌شوند در مجاورت آن باقی بمانند. بعلاوه، یك نقطهٔ بحرانی را به طور مجانبی پایدار می گویند، چنانچه پایدار باشد و دایرهٔ $x^2+y^2=r_0^2$ وجود داشته باشد به طوری‌که هر مسیری که برای مقداری از $t=t_0$ درون دایره واقع است، وقتی $t \to \infty$ به مبدأ مختصات میل کند. سرانجام، اگر نقطه بحرانی پایدار نباشد، آن را ناپایدار می‌نامند.

به عنوان مثالهایی در مورد این مفاهیم، اشاره می کنیم که‌گره شکل ۴۳، نقطهٔ زینی شکل ۴۴، و نقطهٔ حلزونی طرف چپ شکل ۴۷ ناپایدارند، حال آنکه مرکز واقع درشکل ۴۵ پایدار است ولی به‌طور مجانبی پایدار نیست. گره شکل ۴۲، حلزونی شکل ۴۶، و حلزونی طرف راست شکل ۴۷ به‌طور مجانبی پایدار هستند.

شکل ۴۸



شکل ۴۹

تمرین

۱ـ برای هریك از دستگاههای غیرخطی زیر: (۱) نقاط بحرانی را بیابید؛ (۲) معادلهٔ دیفرانسیل مسیرها را به دست آورید؛ (۳) این معادله را برای یافتن مسیرها حل کنید؛ و (۴) نمودار چند مسیر را رسم کنید و جهت افزایش t را نشان دهید.

الف) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(x^2+1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy^2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(x^2+1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x(x^2+1) \end{cases}$

ج) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^y \\ \dfrac{dy}{dt} = e^y \cos x \end{cases}$ د) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x^2y^2 \end{cases}$

۲ـ در هریك از دستگاههای خطی زیر، مبدأ یك نقطهٔ بحرانی منزوی است. (۱) جواب عمومی را بیابید. (۲) معادلـهٔ دیفرانسیل مسیرها را پیدا کنید. (۳) معادله‌ای را که در حالت (۲) می‌یابید حل و نمودار چند مسیر را ترسیم کنید و جهت افزایش t را نشان دهید. (۴) در مورد پایداری نقطهٔ بحرانی بحث کنید.

الف) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x\end{cases}$$ (ج

۳ـ رخسارهٔ فاز معادلهٔ $d^2x/dt^2=2x^3$ را رسم کنید، ونشان دهید که این رخساره دارای یك نقطهٔ بحرانی منزوی ناپایدار در مبدأ مختصات است.

۴۲. نقاط بحرانی، و پایداری در دستگاههای خطی

هدف ما دراین فصل آن است که با مطالعهٔ رخساره‌های فاز دستگاههای خودگردان غیرخطی به شکل

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x , y)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=G(x , y)\end{cases}$$

حتی‌المقدور مطالبی راجع به معادلات دیفرانسیل غیرخطی فراگیریم. یك جنبهٔ این کار مسئلهٔ دسته بندی نقاط بحرانی چنین دستگاههایی برحسب ماهیت و پایداری آنهاست. در بخش ۴۴ خواهیم دید که در شرایط مناسب می‌توان این مسئله را برای دستگاه غیرخطی مفروض، با مطالعهٔ دستگاه خطی مربوطه حل کرد. بنابراین همهٔ این بخش را صرف تحلیل کاملی از نقاط بحرانی دستگاههای خودگردان خطی خواهیم کرد.

دستگاه زیررا که مبدأ $(0 , 0)$ نقطهٔ بحرانی آن است درنظرمی گیریم

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y\end{cases} \qquad (1)$$

در سراسر این بخش فرض می کنیم که

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (2)$$

به طوری که $(0 , 0)$ تنها نقطهٔ بحرانی است. در بخش ۳۸ ثابت شد که (۱) دارای یك جواب غیرصفر به شکل

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$$

است، که در آن m یک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \qquad (۳)$$

است. (۳) را معادلهٔ کمکی دستگاه می‌نامند. دقت کنید که با توجه به شرط (۲)، صفر نمی‌تواند ریشهٔ (۳) باشد.

فرض می‌کنیم m_1 و m_2 ریشه‌های (۳) باشند. ثابت خواهیم کرد که ماهیت نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه (۱) به‌وسیلهٔ ماهیت اعداد m_1 و m_2 تعیین می‌گردد. منطقی است که انتظار وقوع سه حالت را داشته باشیم، بسته به آنکه m_1 و m_2 حقیقی ومتمایز، حقیقی و برابر، یا مختلط مزدوج باشند. متأسفانه وضعیت کمی پیچیده‌تر از این است، ولازم است پنج حالت زیر را درنظر بگیریم.

حالات اصلی

حالت الف. ریشه‌های m_1 و m_2 حقیقی، متمایز، و هم‌علامت هستند (گره)؛

حالت ب. ریشه‌های m_1 و m_2 حقیقی، متمایز، و مختلف‌العلامه هستند (نقطهٔ زینی)؛

حالت ج. ریشه‌های m_1 و m_2 مختلط مزدوج‌اند ولی موهومی خالص نیستند (حلزونی)

حالات خط مرزی

حالت د. ریشه‌های m_1 و m_2 حقیقی و برابرند (گره)؛

حالت هـ. ریشه‌های m_1 و m_2 موهومی خالص‌اند (مرکز).

دلیل متمایز کردن حالات اصلی از حالتهای خط مرزی در بخش ۴۴ روشن خواهد شد. درحال حاضر کافی است متذکر شویم که گرچه حالات خط مرزی از نظر ریاضی مورد توجه‌اند، ولی از اهمیت کاربردی کمی برخوردارند، زیرا شرایط معرف آنها در مسائل فیزیکی کمتر ظاهر می‌شوند. اکنون به اثبات احکام ذکرشده در پرانتزها می‌پردازیم.

حالت الف. چنانچه ریشه‌های m_1 و m_2 حقیقی، متمایز، و هم‌علامت باشند، نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) یک گره است.

اثبات. مطلب را با این‌فرض که m_1 و m_2 هردو منفی‌اند آغاز می‌کنیم، و علایم را طوری درنظرمی گیریم که $m_1 < m_2 < 0$. با توجه به بخش ۳۸، جواب عمومی (۱) در این‌حالت عبارت است از

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \qquad (۴)$$

که در آن Aها و Bها اعداد ثابت معینی هستند به طوری که $B_1/A_1 \neq B_2/A_2$ ، و c ها اعداد ثابت دلخواهی هستند. وقتی $c_2=0$ ، جوابهای

$$\begin{cases} x=c_1A_1e^{m_1t} \\ y=c_1B_1e^{m_1t} \end{cases} \tag{5}$$

و وقتی $c_1=0$ ، جوابهای

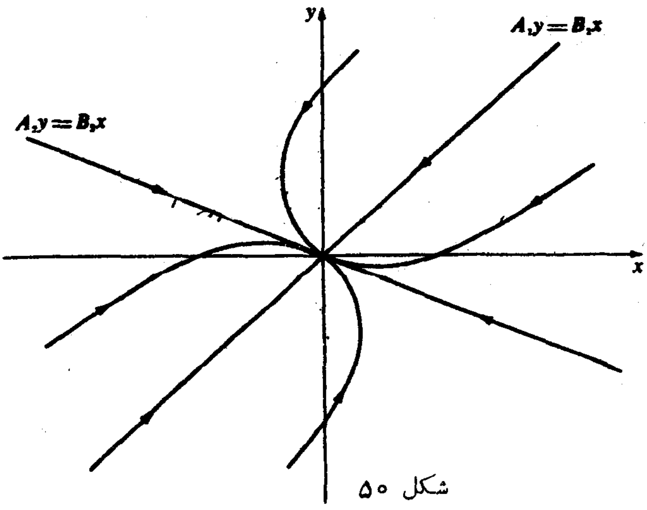
$$\begin{cases} x=c_2A_2e^{m_2t} \\ y=c_2B_2e^{m_2t} \end{cases} \tag{6}$$

را به دست می‌آوریم. برای هر $c_1>0$ ، جواب (۵) نمایشگر مسیری است که نیمی ازخط $A_1y=B_1x$ را با شیب B_1/A_1 دربرمی گیرد؛ وبرای هر $c_1<0$ ، جواب (۵) نمایشگر مسیری است که نیمهٔ دیگر این خط (نیمهٔ واقع در طرف دیگر مبدأ مختصات) را شامل می‌شود. چون $m_1<0$ ، وقتی $t \to \infty$ هردوی این مسیرهای نیمخطی به $(0, 0)$ میل می کنند؛ وچون $y/x=B_1/A_1$ هردو با شیب B_1/A_1 به $(0, 0)$ وارد می‌شوند (شکل ۵۰). دقیقاً به‌همین‌طریق، جوابهای (۶) نمایشگردومسیر نیمخطی واقع برخط $A_2y=B_2x$ باشیب B_2/A_2 هستند. این‌مسیرها نیز وقتی $t \to \infty$ ، به $(0, 0)$ میل می کنند و با شیب B_2/A_2 بدان وارد می‌شوند.

اگر $c_1 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$ ، جواب عمومی (۴) مبین‌مسیرهای منحنی‌الخط است. چون $m_1<0$ و $m_2<0$ ، این مسیرها نیز وقتی $t \to \infty$ ، به $(0, 0)$ میل می کنند. بعلاوه ، چون $m_1-m_2<0$ و

$$\frac{y}{x}=\frac{c_1B_1e^{m_1t}+c_2B_2e^{m_2t}}{c_1A_1e^{m_1t}+c_2A_2e^{m_2t}}=\frac{(c_1B_1/c_2)e^{(m_1-m_2)t}+B_2}{(c_1A_1/c_2)e^{(m_1-m_2)t}+A_2}$$

روشن است که وقتی $t \to \infty$ ، y/x به سمت B_2/A_2 میل می کند، لذا تمام این‌مسیرها



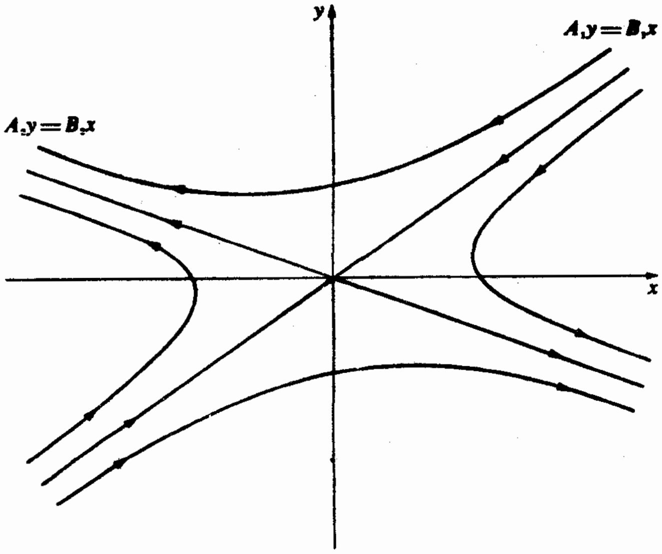
شکل ۵۰

با شیب B_2/A_2 به (۰ ، ۰) وارد می‌شوند. شکل ۵۰ تصویری کیفی از این وضعیت‌را نشان می‌دهد. بدیهی است که نقطهٔ بحرانی مزبور یك گره است، که به طور مجانبی پایدار می باشد.

چنانچه m_1 و m_2 هردو مثبت باشند، وعلایم چنان اختیار شوند که $m_1 > m_2 > 0$، در آن صورت وضعیت دقیقاً مانند قبل است به استثنای اینکه اکنون تمام مسیرهـا وقتی به (۰ ، ۰) میل می کنند و بدان وارد می‌شوند که $t \to -\infty$. تصویر مسیرهایی که‌درشکل ۵۰ نشان داده شده‌اند تغییر نمی کند بجز اینکه پیکانهایی که جهتهای این مسیرهـا را نشان می‌دهند همگی برعکس می‌شوند. در اینجا نیز یك گره‌داریم، که این‌بار ناپایدار است.

حالت ب. اگر ریشه‌های m_1 و m_2 حقیقی، متمایز ، و مختلف‌العلامه باشند، آنگاه نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) یك نقطهٔ زینی است.

اثبات. علایم را طوری اختیار می کنیم که $m_1 < 0 < m_2$. جواب عمومی (۱) را بازهم‌می‌توان به‌شکل (۴) نوشت، و این بار نیزجوابهای خصوصی به شکلهای (۵) و (۶) خواهند بود. دو مسیر نیمخطی کـه به وسیلهٔ (۵) نمایش داده شده‌انـد در اینجا نیز وقتی $t \to \infty$ ، به (۰ ، ۰) میل می کنند وبدان وارد می‌شوند ، لیکن در اینجا دومسیر نیمخطی که توسط (۶) نمایش داده شده‌انـد وقتی $t \to -\infty$ ، به (۰ ، ۰) میل می کنند و بدان وارد می‌شوند. اگر $c_1 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$ ، جواب عمومی (۴) همچنان نمایشگر مسیرهـای منحنی الخط است، اما چون $m_1 < 0 < m_2$ ، هیچکدام از این مسیرها وقتی $t \to \infty$ یا $t \to -\infty$ ، به (۰ ، ۰) میل نمی کنند. در عوض وقتی $t \to \infty$ ، هریك از این‌مسیرها



شکل ۵۱

بریکی از مسیرهای نیمخطی داده شده توسط (۶) مجانب است؛ و وقتی $t \to -\infty$، هریك از این مسیرها مجانب بریکی از مسیرهای نیمخطی است که به وسیلهٔ (۵) نمایش داده شده‌اند. شکل ۵۱ تصویری کیفی از این رفتار را به دست می‌دهد. دراین حالت نقطهٔ بحرانی یك نقطهٔ زینی است، که بوضوح ناپایدار است.

حالت ج. اگر ریشه‌های m_1 و m_2 مختلط مزدوج باشند ولی موهومی خالص نباشند، آنگاه نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ یك حلزونی است.

اثبات. دراین حالت می‌توان m_1 و m_2 را به‌صورت $a \pm ib$ نوشت که درآن a و b اعداد حقیقی غیرصفرند. همچنین، جهت استفادهٔ بعدی، مشاهده می‌کنیم که مبین معادلهٔ (۳) منفی است:

$$D = (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$= (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 < 0 \tag{7}$$

با توجه به بخش ۳۸ ، در این حالت جواب عمومی (۱) عبارت است از

$$\begin{cases} x = e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \tag{8}$$

که در آن Aها و B ها اعداد ثابت معین و c ها اعداد ثابت اختیاری هستند.

ابتدا فرض می‌کنیم که $a < 0$. آنگاه از رابطهٔ (۸) روشن‌است که وقتی $t \to \infty$، x و y به سمت صفرمیل می‌کنند، لذا وقتی $t \to \infty$، تمام مسیرها به $(0, 0)$ میل می‌کنند. حال ثابت می‌کنیم که ، وقتی $t \to \infty$ ، این مسیرها به نقطهٔ $(0, 0)$ وارد نمی‌شوند ، ولی در عوض به طور حلزونی دور این نقطه می‌پیچند . برای این منظور مختص قطبی θ را به‌کار می‌بریم و نشان می‌دهیم که ، در امتداد هرمسیر، $d\theta/dt$ یا برای تمام مقادیر t مثبت و یا به ازای تمام مقادیر t منفی است. مطلب را با این نکته که $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ آغاز می‌کنیم ، پس

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\,dy/dt - y\,dx/dt}{x^2 + y^2}$$

و با استفاده از معادلات (۱) به دست می‌آوریم که

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2}{x^2 + y^2} \tag{9}$$

چون تنها به جوابهایی که نمایشگر مسیرها هستند توجه داریم ، فرض می‌کنیم که $x^2 + y^2 \neq 0$. حال (۷) براین دلالت دارد که a_2 و b_1 مختلف‌العلامه‌اند. حالتی را که

در آن $a_2>0$ و $b_1<0$ در نظر می‌گیریم. وقتی $y=0$، (۹) نتیجه می‌دهد که $d\theta/dt=a_2>0$. اگر $y\neq 0$، $d\theta/dt$ نمی‌تواند صفر باشد؛ زیرا اگر چنین باشد، در آن صورت (۹) نتیجه می‌دهد که

$$a_2x^2+(b_2-a_1)xy-b_1y^2=0$$

یعنی برای یك مقدار حقیقی x/y داریم

$$a_2\left(\frac{x}{y}\right)^2+(b_2-a_1)\,\frac{x}{y}-b_1=0 \qquad (10)$$

و این نمی‌تواند صحیح باشد زیرا مبین معادلهٔ درجهٔ دوم (۱۰) همان D است، که با توجه به (۷) منفی است. این نشان می‌دهد که وقتی $a_2>0$ همواره $d\theta/dt$ مثبت است، و به همین طریق ملاحظه می کنیم که وقتی $a_2<0$، همواره $d\theta/dt$ منفی است. چون با توجه به (۸)، وقتی $t\to\infty$، x و y بینهایت بار تغییر علامت می‌دهند، تمام مسیرها باید مارپیچ‌وار به سمت مبدأ متوجه شوند (درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت یا درجهت حرکت عقربه‌های ساعت بسته به اینکه $a_2>0$ یا $a_2<0$). بنابراین دراین حالت نقطهٔ بحرانی یك نقطهٔ حلزونی است، که به طور مجانبی پایدار است.

چنانچه $a>0$، وضعیت همانند سابق خواهد بود بجز آنکه وقتی $t\to-\infty$، مسیرها به $(0,0)$ میل می کنند و نقطهٔ بحرانی ناپایدار است. شکل ۴۷ آرایش مسیرها را وقتی $a_2>0$ نشان می‌دهد.

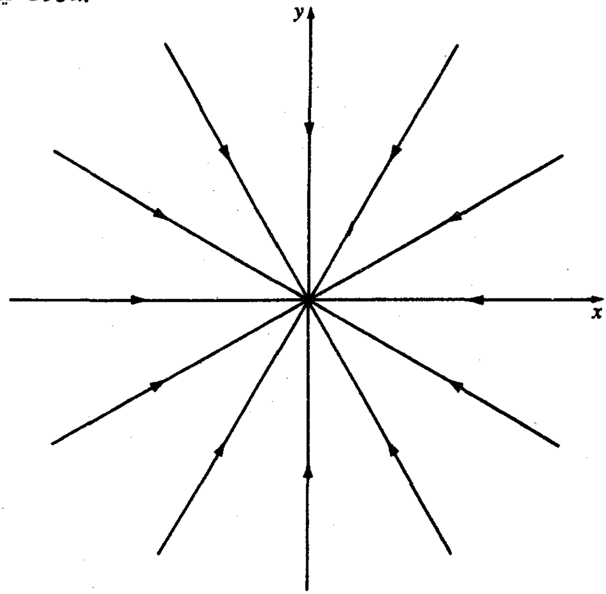
حالت د. در صورتی که m_1 و m_2 حقیقی و برابر باشند، نقطهٔ بحرانی $(0,0)$ یك گره است.

اثبات. فرض می کنیم که $m_1=m_2=m<0$. این حالت به دوحالت فرعی تقسیم می‌شود که باید به طور جداگانه بحث شوند: (۱) $a_1=b_2\neq 0$ و $a_2=b_1=0$؛ (۲) تمام حالات دیگری که به ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۳) منجر می گردند.

نخست حالت فرعی (۱) را در نظر می گیریم، این وضعیتی است که در پانویس صفحهٔ ۳۰۹ تشریح شده است. چنانچه مقدار مشترك a_1 و b_2 را با a نشان دهیم، آنگاه معادلهٔ (۳) به صورت $m^2-2am+a^2=0$ درمی‌آید، پس $m=a$. بنابراین دستگاه (۱) چنین می‌شود

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=ay\end{cases}$$

که دارای جواب عمومی



شکل ۵۲

$$(11)\quad \begin{cases} x = c_1 e^{mt} \\ y = c_2 e^{mt} \end{cases}$$

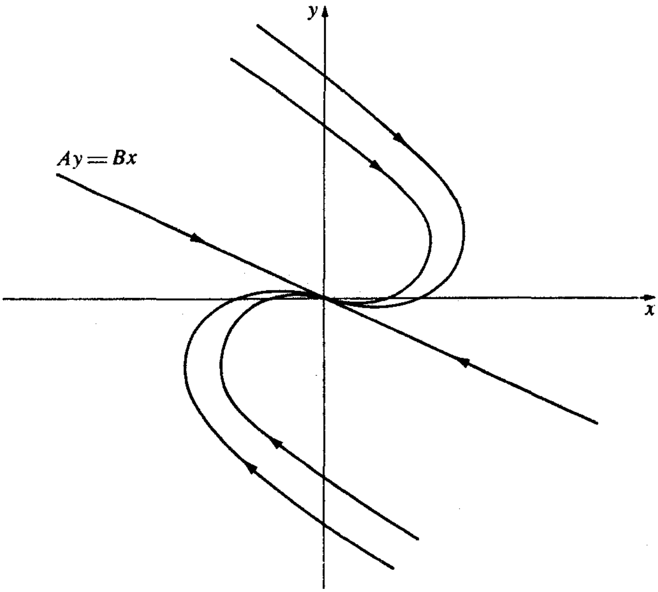
است، که درآن c_1 و c_2 اعداد ثابت اختیاری هستند. مسیرهایی که توسط (۱۱) تعریف می‌شوند نیمخطهایی با تمام شیبهای ممکنه‌اند (شکل ۵۲) ، وچون $m<0$ ملاحظه‌می کنیم که وقتی $t \to \infty$ هرمسیر به (۰ , ۰) میل می کند و بدان وارد می‌شود. بنابراین، نقطهٔ بحرانی یک‌گره است، و به طور مجانبی پایدار است. چنانچه $m>0$ ، با همان وضعیت روبرو هستیم با این تفاوت که مسیرها وقتی به (۰ , ۰) وارد می‌شوند که $t \to -\infty$ ، پیکانهای شکل ۵۲ برعکس می‌شوند، و نقطهٔ (۰ , ۰) ناپایدار است.

اکنون حالت فرعی (۲) را مورد بحث قرارمی‌دهیم. باتوجه به روابط(۲۰)وتمرین ۴ از بخش ۳۸، جواب عمومی (۱) را می‌توان به‌صورت

$$(12)\quad \begin{cases} x = c_1 A e^{mt} + c_2(A_1 + At)e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} + c_2(B_1 + Bt)e^{mt} \end{cases}$$

نوشت که درآن Aها و Bها اعداد ثابت معین و c ها اعداد ثابت‌اختیاری‌اند. وقتی $c_2 = 0$ جوابهای

$$(13)\quad \begin{cases} x = c_1 A e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} \end{cases}$$



شکل ۵۳

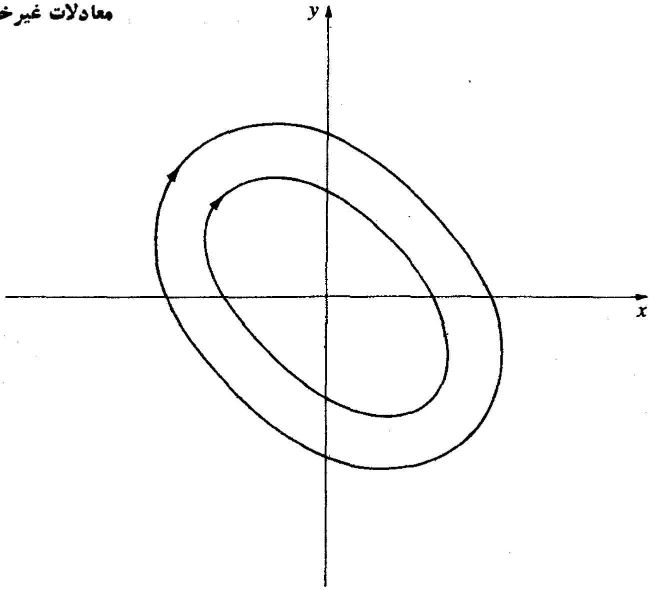
را می‌یابیم. می‌دانیم که این جوابها نمایشگر دو مسیر نیمخطی واقع برخط $Ay=Bx$ با شیب B/A هستند، و چون $m<0$، وقتی $t\to\infty$، هردو مسیر به $(0,0)$ میل می کنند (شکل ۵۳). همچنین، چون $y/x=B/A$، هـر دو مسیر با شیب B/A به $(0,0)$ وارد می‌شوند. اگر $c_2\neq 0$، جوابهای (۱۲) نمایشگر مسیرهای منحنی‌الخطاند، وچون $m<0$ از (۱۲) روشن‌است که این مسیرها، وقتی $t\to\infty$، به $(0,0)$ میل‌می کنند. بعلاوه، از

$$\frac{y}{x}=\frac{c_1Be^{mt}+c_2(B_1+Bt)e^{mt}}{c_1Ae^{mt}+c_2(A_1+At)e^{mt}}=\frac{c_1B/c_2+B_1+Bt}{c_1A/c_2+A_1+At}$$

نتیجه می‌شود کـه وقتی $t\to\infty$، y/x بـه سمت B/A میل می کند، پس تمـامی این مسیرهای منحنی‌الخط با شیب B/A به $(0,0)$ وارد می‌شوند. همچنین مشاهده می کنیم که وقتی $t\to-\infty$، y/x به‌سمت B/A میل می‌کند. شکل۵۳ تصویری کیفی‌ازچگونگی آرایش مسیرها به دست می‌دهد. روشن است که $(0,0)$ گرهی است که به طور مجـانبی پایدار است. چنانچه $m>0$، وضعیت تغییری نمی کند بجز آنکه جهتهای مسیرها معکوس می‌شوند و نقطهٔ بحرانی ناپایدار می‌شود.

حالت هـ . در صورتی که m_1 و m_2 موهومی محض باشند، نقطهٔ بحرانی $(0,0)$ یك مرکز است.

اثبات . دراینجاکافی‌است به‌بحث مربوط به‌حالت ج مراجعه‌کنیم، زیرا اکنون m_1 و m_2 به شکل $a\pm ib$ با $a=0$ و $b\neq 0$ هستند. بنا بـراین جواب عمومی (۱) به وسیلهٔ



شکل ۵۴

(۸) ولی بدون عامل نمایی بیان می‌شود، پس $x(t)$ و $y(t)$ دوره‌ای هستند و هر مسیر، منحنی بسته‌ای حول مبدأ مختصات است. همانطوری که شکل ۵۴ نشان می‌دهد، در واقع این منحنیها بیضی‌اند؛ این مطلب را به‌کمك حل معادلهٔ دیفرانسیل مسیرها

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_2x+b_2y}{a_1x+b_1y} \tag{۱۴}$$

می‌توان به اثبات رساند (مسئله ۵ را ببینید). نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ آشکارا مرکزی پایدار است که به طور مجانبی پایدار نمی‌باشد.

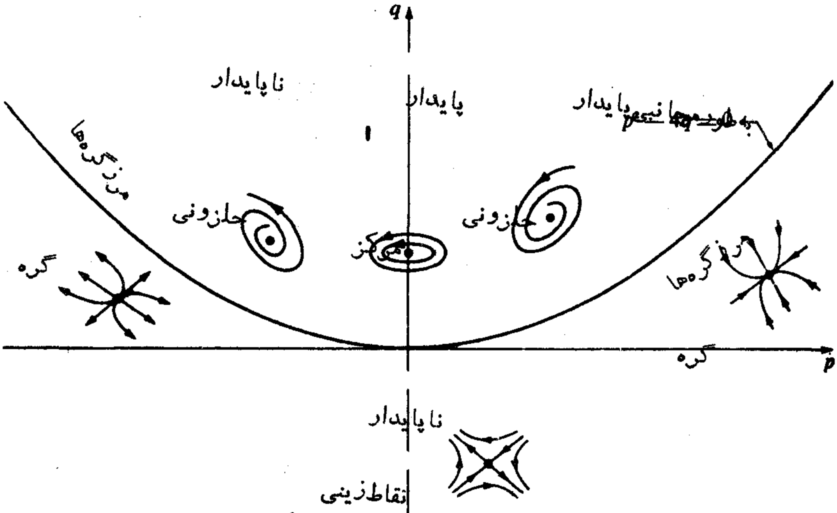
در بخشهای بالا مطالبی راجع به ناپایداری بیان کرده‌ایم. مناسب خواهد بود که این اطلاعات را به‌صورت زیر خلاصه کنیم.

قضیهٔ الف. نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ دستگاه خطی (۱) پایدار است، اگر وتنها اگر هردو ریشهٔ معادلهٔ کمکی (۳) دارای قسمتهای حقیقی غیرمثبت باشند، و به طور مجانبی پایدار است، اگر و تنها اگر هر دو ریشهٔ معادلهٔ (۳) دارای قسمتهای حقیقی منفی باشند.

حال چنانچه معادلهٔ (۳) را به صورت

$$(m-m_1)(m-m_2)=m^2+pm+q=0 \tag{۱۵}$$

بنویسیم، به طوری که $p=-(m_1+m_2)$ و $q=m_1m_2$، آنگاه پنج حالت مذکور را که قبلا برحسب m_1 و m_2 بیان شد می‌توان برحسب p و q نیز بیان کرد. در واقع، چنانچه این‌حالات را درصفحهٔ pq تفسیر کنیم، آنگاه به‌نمودار قابل‌توجه (شکل ۵۵) دست خواهیم یافت که در یك نظر ماهیت وخواص پایداری نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ را روشن‌می‌سازد.



شکل ۵۵

اولین مطلبی که باید بدان توجه کرد آن است که محور p ها یعنی $q=0$ ، مستثنی می‌شود، زیرا باتوجه به شرط (۲) می‌دانیم که $m_1 m_2 \neq 0$. با توجه به آنچه راجع به پنج‌حالت مذکور فراگرفته‌ایم، تمام اطلاعات موجود در نمودار نتیجهٔ مستقیم رابطهٔ زیر است:

$$m_1 , m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

بنابراین، دربالای‌سهمی $p^2 - 4q = 0$ ،داریم $p^2 - 4q < 0$ ،لذا m_1 و m_2 اعدادمختلط مزدوجی‌هستند که،اگروتنها اگر $p = 0$ ، موهومی‌محض‌اند؛ اینها مبین‌حالتهای ج و هـ هستند که شامل‌حلزونیها ومراکزمی‌شوند. در زیر محور p داریم $q < 0$ و این بدان مفهوم است که m_1 و m_2 اعدادی حقیقی، متمایز، و مختلف‌العلامه‌اند؛ این ناحیه نقاط زینی حالت ب را به دست می‌دهد. و سرانجام، منطقهٔ بین این دو ناحیه (به انضمام سهمی و به استثنای محور p ها) به وسیلهٔ روابط $p^2 - 4q \geqslant 0$ و $q > 0$ مشخص می گردد، بنابراین m_1 و m_2 حقیقی و هم‌علامت‌اند؛ دراینجا با گرههای حالات الف و د روبروهستیم. بعلاوه روشن است که دقیقاً یك ناحیهٔ پایداری مجانبی وجود دارد وآن ربع اول است. این‌مطلب را ذیلا به طور دقیق بیان می کنیم.

قضیهٔ ب. نقطهٔ بحرانی $(0 , 0)$ دستگاه خطی (۱) به طور مجانبی پایدار است، اگر و فقط اگر ضرایب $p = -(a_1 + b_2)$ و $q = a_1 b_2 - a_2 b_1$ معادلهٔ کمکی (۳) هر دو مثبت باشند.

سرانجام، باید تأکیدشود که به‌کمك تحلیل جوابهای صریح دستگاه خطی، مسیرهای آن را در حوالی یك نقطهٔ بحرانی مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در دو بخش بعد، با بررسی

مسائل مشابهی در مورد دستگاههای غیرخطی، که عموماً بـه طور صریح قابل حل نیستند، به طور کاملتر وارد اصل مطلب خواهیم شد.

تمرین

۱ـ برای هریك از دستگاههای خودگردان خطی زیـر ، ماهیت و خواص پایـداری نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) را تعیین کنید:

الف)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x \\ \dfrac{dy}{dt}=3y \end{cases}$$

ه)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-4x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x-2y \\ \dfrac{dy}{dt}=4x-5y \end{cases}$$

و)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x-3y \\ \dfrac{dy}{dt}=8x-6y \end{cases}$$

ج)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-3x+4y \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+3y \end{cases}$$

ز)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x-2y \\ \dfrac{dy}{dt}=5x+2y \end{cases}$$

د)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x+2y \\ \dfrac{dy}{dt}=-17x-5y \end{cases}$$

۲ـ در صورتی که $a_1b_2-a_2b_1=0$ ، نشان دهیدکـه دستگاه (۱) دارای بینهایت نقطهٔ بحرانی است، که هیچ کدام منزوی نیستند.

۳ـ الف) چنانچه $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ ، نشان دهید که دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y+c_1 \\ \dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+c_2 \end{cases}$$

تنها دارای یك نقطهٔ بحرانی منزوی (x_0, y_0) است.

ب) نشان‌دهید که با تغییر متغیرهای $\bar{x}=x-x_{\circ}$ و $\bar{y}=y-y_{\circ}$ دستگاه حالت (الف) را می‌توان به صورت دستگاه (۱) درآورد.

ج) نقطهٔ بحرانی دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=۲x-۲y+۱۰\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=۱۱x-۸y+۴۹\end{cases}$$

را بیابید. به وسیلهٔ تغییر متغیرها، این دستگاه را به شکل (۱) درآورید، و ماهیت و خواص پایداری نقطهٔ بحرانی را تعیین کنید.

۴ـ در بخش ۲۵ با حل معادلهٔ

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}+۲b\frac{dx}{dt}+a^۲x=\circ$$

ارتعاشات آزاد جرمی متصل به یك فنر را مطالعه کردیم، که مقادیر ثابت $b\geqslant\circ$ و $a>\circ$ بترتیب، بیانگر چسبندگی محیط و سختی فنر هستند. دستگاه خودگردان معادل آن، یعنی،

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-a^۲x-۲by\end{cases}\qquad(*)$$

راکه $(\circ ,\circ)$ تنها نقطهٔ بحرانیش است، درنظر بگیرید.

الف) معادلهٔ کمکی مربوط به $(*)$ را بیابید. p و q چه هستند؟

ب) برای هریك ازچهار حالت زیر، ماهیت وخواص پایداری نقطهٔ بحرانی‌را تشریح کنید، و به طور خلاصه تفسیری فیزیکی از حرکت مربوط به این جرم را ارائه کنید:

۱) $b=\circ$ ‏ ‏ ‏ ۳) $b=a$

۲) $\circ<b<a$ ‏ ‏ ‏ ۴) $b>a$

۵ـ با فرض مربوط به حالت هـ ، معادلهٔ (۱۴) را حل کنید، و نشان دهید که حاصل یك‌دستهٔ تك پارامتری از بیضی‌هایی است که مبدأ مختصات را احاطه کرده است. راهنمایی: به خاطرآورید که اگر $Ax^۲+Bxy+Cy^۲=D$ معادلهٔ یك‌منحنی حقیقی‌باشد، آنگاه، منحنی مزبور بیضی خواهد بود، اگر وتنها اگرمبین آن، $B^۲-۴AC$ ، منفي باشد.

۴۳. بررسی پایداری با روش مستقیم لیاپونوف

روشن است که چنانچه انـرژی کل یك دستگاه فیزیکی در نقطهٔ تعادل معینی دارای مینیمم موضعی باشد، آن نقطه پایدار است. برای مطالعهٔ مسایل پایـداری در چارچوبی وسیعتر، این مطلب به وسیلهٔ لیاپونوف[1] به صورت روشی ساده ولی مؤثـر تعمیم داده شد. در این بخش و بخش بعد روش لیاپونوف و بعضی‌کاربردهای آن را مورد بحث قرارخواهیم داد.

دستگاه خودگردان

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x , y)\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=G(x , y)\end{cases} \tag{۱}$$

را درنظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم که این دستگاه دارای یك نقطهٔ بحـرانی منزوی باشد، کـه بـرحسب معمول آن را در مبدأ $(0 , 0)$ اختیار می‌کنیم[2]. فـرض می‌کنیم کـه $C=[x(t) , y(t)]$ مسیری از (۱) باشد وتابعی‌مانند $E(x , y)$ را درنظرمی‌گیریم که‌در ناحیه‌ای مشتمل بر این مسیرپیوسته باشد ومشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشد. درصورتی که نقطهٔ (x , y) طبق معادلات $x=x(t)$ و $y=y(t)$، در امتداد این مسیر حرکت کند، $E(x , y)$ را می‌توان به‌عنوان تابعی از t در امتداد C تلقی کرد [این تابع را با $E(t)$ نشان می‌دهیم] و آهنگ تغییرات آن چنین است:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=\frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &=\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G\end{aligned} \tag{۲}$$

این رابطه هستهٔ مرکزی نظرات لیاپونوف است، و برای بهره‌گیری ازآن به چندین‌تعریف نیاز داریم که نوع توابع مورد نظر را مشخص می‌کنند.

---

۱. الکساندر میخایلوویچ‌لیاپونوف Alexander Mikhailovich Liapunov (۱۸۵۷ـ ۱۹۱۸) یك ریاضیدان و مهندس مکانیك روس بود. رسالهٔ دکترای او ارزش جاودانه داردکه حاکی از استعداد کم‌نظیر اوست. این‌کار کلاسیك ابتدا در سال ۱۸۹۲ به زبان روسی به‌چاپ رسید، لیکن در حال حاضر ترجمه انگلیسی آن:

«Stability of Motion» Academic, New York, 1966

در دسترس است. لیاپونوف طی درگیریهایی در اودسا درگذشت، و این برای روشنفکـری از طبقهٔ متوسط در نابسامانیهای بعد از انقلاب روسیه امرعجیبی نبود.

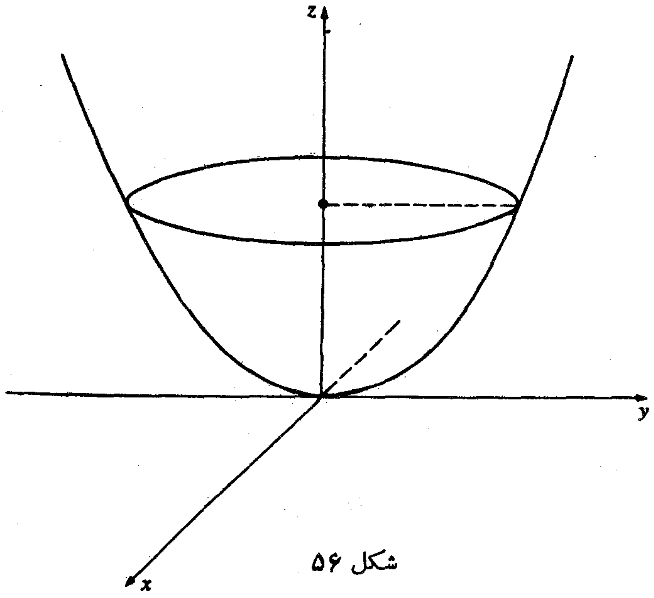
۲. همواره می‌توان هرنقطهٔ بحرانی (x_0 , y_0) را با یك انتقال سادهٔ مختصات $\bar{x}=x-x_0$ و $\bar{y}=y-y_0$ به مبدأ انتقال داد، لذا چنانچه در آغاز فرض کنیم که نقطهٔ بحرانی در مبدأ واقع شده است، از عمومیت مطلب‌کاسته نمی‌شود.

فرض می‌کنیم که $E(x, y)$ و مشتقات جزئی اول آن در ناحیه‌ای مشتمل بر مبدأ پیوسته باشند. اگر E در مبدأ صفر شود، یعنی $E(0, 0) = 0$، آنگاه می‌گویند که $E(x, y)$ مطلقاً مثبت است، اگر برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$، $E(x, y) > 0$، و به آن مطلقاً منفی گویند، اگر برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$، $E(x, y) < 0$. همین طور، E را نیم‌مطلق مثبت گویند، هرگاه $E(0, 0) = 0$ و برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ داشته باشیم، $E(x, y) \geqslant 0$، و اگر $E(0, 0) = 0$ و برای‌هر $(x, y) \neq (0, 0)$، داشته باشیم $E(x, y) \leqslant 0$، E را نیم مطلق‌منفی می‌نامند. روشن است که توابعی به صورت $ax^{2m} + by^{2n}$، که در آنها a و b مقادیر ثابت و مثبت هستند و m و n اعداد صحیح و مثبت‌اند، مطلقاً مثبت هستند. چون $E(x, y)$ مطلقاً منفی است، اگر و تنها اگر $-E(x, y)$ مطلقاً مثبت‌باشد، توابعی به شکل $ax^{2m} + by^{2n}$ با $a < 0$ و $b < 0$ مطلقاً منفی‌اند. توابع x^{2m}، y^{2m} و $(x - y)^{2m}$ مطلقاً مثبت نیستند، ولی با این وجود نیم‌مطلق مثبت‌اند. چنانچه $E(x, y)$ مطلقاً مثبت باشد، آنگاه $z = E(x, y)$ را می‌توان به‌عنوان معادلهٔ سطحی تعبیر کرد که به یك سهمی‌وار شباهت دارد (شکل ۵۶)، که در مبدأ برصفحهٔ xy مماس است و به‌طرف بالا باز می‌شود.

تابع مطلقاً مثبتی مانند $E(x, y)$ را که در آن عبارت

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \tag{۳}$$

نیم مطلق منفی باشد، یك تابع لیاپونوف برای دستگاه (۱) می‌نامند. با توجه به رابطهٔ (۲)،



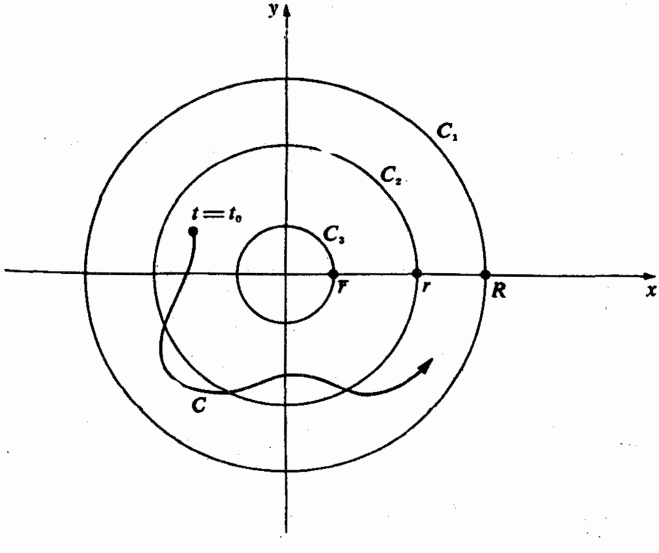
شکل ۵۶

شرط نیم‌مطلق منفی بودن (۳) به معنای آن است که در امتداد مسیر (۱) در حوالی مبدأ، $dE/dt \leqslant 0$ ، و بنابراین E غیرصعودی باشد. این توابع به مفهوم انرژی کل یك‌دستگاه فیزیکی عمومیت می‌بخشند. رابطهٔ این‌توابع با مسائل پایداری درقضیهٔ زیر، که‌کشف‌اصلی لیاپونوف است روشن می گردد.

قضیهٔ الف. چنانکه یك‌تابع لیاپونوف مانند $E(x, y)$ برای دستگاه (۱) وجود داشته‌باشد، آنگاه نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) پایدار است . بعلاوه ، اگر این تابع دارای این خاصیت هم باشد که تابع (۳) مربوطه مطلقاً منفی باشد، در آن صورت نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) به طور مجانبی پایدار است.

اثبات. فرض می کنیم که C_1 دایره‌ای به شعاع $R > 0$ و به مرکزمبدأ مختصات باشد (شکل ۵۷) ، وهمچنین فرض‌می کنیم که C_1 آن قدر کوچك باشد که کاملا در قلمرو تعریف تابع E واقع شود. چون $E(x, y)$ مطلقاً مثبت و پیوسته است، در C_1 دارای‌مینیمم مثبت m است. بعلاوه ، $E(x, y)$ در مبدأ پیوسته است و در این نقطه صفر می‌شود ، لذا عددی مثبت مانند $r < R$ می‌توان یافت به قسمی که وقتی (x, y) درون دایرهٔ C_2 به شعاع r واقع است، $E(x, y) < m$. حال‌فرض می کنیم که $C = [x(t), y(t)]$ مسیری باشد که برای $t = t_0$ ، درون دایرهٔ C_2 واقع است. پس $E(t_0) < m$ ، وچون (۳) نیم مطلق منفی است، داریم $dE/dt \leqslant 0$ و این نتیجه می‌دهد که برای تمام مقادیر $t > t_0$ می‌توان‌نوشت $E(t) \leqslant E(t_0) < m$. در نتیجه ، برای هیچ $t > t_0$ ، مسیر C هرگز نمی‌تواند به C_1 برسد، پس پایداری موجود است .

برای اثبات قسمت دوم قضیه، کافی است نشان دهیم که تحت این‌فرض اضافی‌همچنین



شکل ۵۷

$E(t) \to 0$ ، زیرا چون $E(x, y)$ مطلقاً مثبت است، نتیجه می‌شود کـه مسیر C به نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ میل می‌کند. مطلب را با مشاهدهٔ اینکه چون $dE/dt < 0$ در نتیجه $E(t)$ یك تابع نزولی است، آغاز می‌کنیم؛ وچون بنا به فرض $E(t)$ نمی‌تواند کمتر از صفر شود، نتیجه می‌گیریم که وقتی $t \to \infty$ ، تابع $E(t)$ به حدی مانند $L \geqslant 0$ میل می‌کند. برای اثبات اینکه $E(t) \to 0$ کافی است نشان دهیم که $L = 0$. پس فرض می‌کنیم $L > 0$ واز آن به یك تناقض می‌رسیم. عددمثبتی مانند $\bar{r} < r$ راچنان اختیار می‌کنیم که هرگاه (x, y) درون دایرهٔ C_2 به شعاع $\bar{r}$ واقع باشد ، $E(x, y)$ کوچکتر از L شود. چون تـابع (۳) مطلقاً منفی و پیوسته است، در حلقهٔ متشکل از دوایر C_1 و C_2 و ناحیهٔ بین آنها دارای یك ماکزیمم منفی $-k$ است. این حلقه ، تمامی مسیر C را برای $t \geqslant 0$ دربرمی‌گیرد ، لـذا معادلهٔ

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dE}{dt} dt$$

نامساوی

$$E(t) \leqslant E(t_0) - k(t - t_0) \tag{۴}$$

را برای تمام مقادیر $t \geqslant t_0$ به‌دست می‌دهد. ولی وقتی $t \to \infty$ طرف راست (۴) منهای بینهایت خواهد شد، بنابراین وقتی $t \to \infty$ داریم $E(t) \to -\infty$. این مطلب با این حقیقت که $E(x, y) \geqslant 0$ تناقض دارد ، پس نتیجه می‌گیریم کـه $L = 0$ و اثبات کامل می‌گردد.

مثال ۱. معادلهٔ حرکت جسمی به‌جرم m و متصل به یك فنر را درنظرمی‌گیریم:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{۵}$$

در اینجا عدد ثابت $c \geqslant 0$ نمایشگرچسبندگی محیطی است که جسم درآن حرکت می‌کند، و $k > 0$ ثابت فنراست. دستگاه خودگردان معادل (۵) چنین است

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{c}{m}y \end{cases} \tag{۶}$$

که تنها نقطهٔ بحـرانی آن $(0, 0)$ است. انـرژی جنبشی جسم $my^2/2$ است و انـرژی پتانسیل آن (یا انرژی ذخیره شده درفنر) چنین است

$$\int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

بنابراین انرژی کل دستگاه برابر است با

$$E(x , y)=\frac{1}{2} my^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{۷}$$

بسادگی می‌توان دریافت که (۷) مطلقاً مثبت است؛ و چون

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G&=kxy+my\left(-\frac{k}{m}x-\frac{c}{m}y\right)\\&=-cy^2\leqslant 0\end{aligned}$$

(۷) یك تابع لیاپونوف برای (۶) است و نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) پایدار است. از تمرین ۴۲-۴ می‌دانیم که وقتی $c>0$ ، این نقطهٔ بحرانی به طور مجانبی پایـدار است ، لیکن تابع لیاپونوف خاصی که دراینجا مورد بحث واقع شد، قادر به آشکارسازی ایـن‌حقیقت نیست[1].

مثال ۲. دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2xy\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x^2-y^3\end{cases} \tag{۸}$$

دارای نقطهٔ بحرانی منزوی (۰ ، ۰) است. حال سعی‌می‌کنیم با تشکیل یك تابع لیاپونوف به صورت $E(x , y)=ax^{2m}+by^{2n}$ پایداری این دستگاه را به اثبات برسانیم. روشن است که

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G&=2max^{2m-1}(-2xy)+2nby^{2n-1}(x^2-y^3)\\&=(-4max^{2m}y+2nbx^2y^{2n-1})-2nby^{2n+2}\end{aligned}$$

می‌خواهیم عبارت داخل پرانتز را صفر کنیم، وبررسی و تحقیق نشان می‌دهد کـه این‌کار با انتخاب $m=1$ ، $n=1$ ، $a=1$ ، و $b=2$ عملی است . بـا این انتخـابها داریـم $E(x , y)=x^2+2y^2$ (که یك تابع مطلقاً مثبت است) و

---

۱. معلوم شده است‌که همواره می‌توان‌هردو خاصیت پایداری وپایداری مجانبی را توسط توابع لیاپونوف مناسب آشکار کـرد، ولی اطلاع اصولی از وجود چنین توابعی با دستیابی به یکی‌از آنها تفاوت زیاد دارد. در مورد این نکته می‌توان به مراجع زیر نگاه کرد

L. Cesari, «Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations,» p. 111, Academic, New York, 1963;

یا

G. Sansone and R. Conti, «Non-Linear Differential Equations,» p.481, Macmillan, New York, 1964.

$$(\partial E/\partial x)F+(\partial E/\partial y)G=-4y^4$$

(که نیم مطلق منفی است). بنا بر این نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ دستگاه (۸) پایدار است.

از این مثال روشن‌می‌شود که در وضعیتهای پیچیده ممکن‌است یافتن توابع‌لیاپونوف مناسب واقعاً مشکل باشد. در رابطه با این موضوع، بعضی مواقع قضیهٔ زیر مفید است.

قضیهٔ ب. تابع $E(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$ مطلقاً مثبت است، اگر و تنها اگر $a>0$ و $b^2-4ac<0$ و این تابع مطلقاً منفی خواهد بود، اگر و تنها اگر $a<0$ و $b^2-4ac<0$.

اثبات. اگر $y=0$، داریم $E(x, 0)=ax^2$، پس برای $x\neq 0$، $E(x, 0)>0$ اگر و تنها اگر $a>0$. چنانچه $y\neq 0$، داریم

$$E(x, y)=y^2\left[a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\left(\frac{x}{y}\right)+c\right]$$

و وقتی $a>0$، چند جمله‌ای برحسب x/y داخل کروشه (که برای مقادیر بزرگ x/y مثبت است)، برای تمام مقادیر x/y مثبت است، اگر و فقط اگر $b^2-4ac<0$. به‌این ترتیب قسمت اول قضیه به اثبات می‌رسد، و قسمت دوم قضیه بلافاصله از بررسی تابع $-E(x, y)$ نتیجه می‌شود.

تمرین

۱ـ معین کنید که کدام یك از توابع زیر مطلقاً مثبت و کدام یك مطلقاً منفی‌اند و کدام نه مطلقاً مثبت و نه‌مطلقاً منفی‌اند:

الف) x^2-xy-y^2 ج) $-2x^2+3xy-y^2$

ب) $2x^2-3xy+3y^2$ د) $-x^2-4xy-5y^2$

۲ـ نشان دهید که تابعی به شکل $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ نمی‌تواند مطلقاً مثبت یا مطلقاً منفی باشد.

۳ـ نشان دهید که $(0, 0)$ نقطهٔ بحرانی به طور مجانبی پایدار هریك از دستگاههای زیر است:

الف)
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x^3-y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x^5-2y^3\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+xy^3\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x^2y^2-y^3\end{cases}$$

۴ـ اگر تابعی مانند $E(x, y)$ با خواص زیر وجود داشته باشد، ثابت کنید که نقطهٔ‌بحرانی $(0, 0)$ دستگاه (۱) ناپایدار است.

الف) در ناحیه‌ای مشتمل برمبدأ ، تابع $E(x,y)$ پیوسته است و مشتقات جزئی اول پیوسته دارد؛

ب) $E(0,0)=0$ ؛

ج) هردایره به مرکز $(0,0)$ حداقل حاوی یك نقطه است که درآن $E(x,y)$ مثبت است؛

د) تابع $(\partial E/\partial x)F+(\partial E/\partial y)G$ مطلقاً مثبت است.

۵ـ نشان دهید که $(0,0)$ یك نقطهٔ بحرانی ناپایدار برای دستگاه زیر است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2xy+x^3\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x^2+y^5\end{cases}$$

۶ـ فرض کنید که $f(x)$ تابعی‌است که $f(0)=0$ ، و برای $x\neq 0$ ، $xf(x)>0$ [یعنی، وقتی $x>0$ ، $f(x)>0$ و وقتی $x<0$ ، $f(x)<0$] .

الف) نشان دهید که تابع زیرمطلقاً مثبت است:

$$E(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(x)dx$$

ب) نشان دهید که نقطهٔ $x=0$ ، $y=dx/dt=0$ یك نقطهٔ بحرانی پایدار معادلهٔ زیر است:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0$$

ج) چنانچه دریك همسایگی مبدأ $g(x)\geqslant 0$ ، نشان دهید که برای معادلهٔ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+g(x)\frac{dx}{dt}+f(x)=0$$

نقطهٔ $x=0$ ، $y=dx/dt=0$ یك نقطهٔ بحرانی پایدار است.

۴۴. نقاط بحرانی سادهٔ دستگاههای غیرخطی

دستگاه خودگردان زیر ونقطهٔ بحرانی منزوی $(0,0)$ آن‌را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}dx/dt=F(x,y)\\ dy/dt=G(x,y)\end{cases}\qquad (1)$$

اگر بتوان $F(x , y)$ و $G(x , y)$ را برحسب سریهای توانی از x و y بسط داد، (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 x^2 + d_1 xy + e_1 y^2 + \cdots \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 x^2 + d_2 xy + e_2 y^2 + \cdots \end{cases} \tag{۲}$$

هنگامی که $|x|$ و $|y|$ کوچك باشند ــ یعنی، وقتی (x , y) نزدیك مبدأ مختصات باشد ــ جملات درجهٔ دوم و بالاتر خیلی کوچك‌اند. بنابراین، طبیعی است که این جملات غیرخطی را حذف کنیم و بپنداریم که رفتار کیفی مسیرهای (۲)، درنزدیکی نقطهٔ بحرانی $(0 , 0)$، با رفتار کیفی مسیرهای دستگاه خطی مربوطه، یعنی،

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \tag{۳}$$

شباهت دارد. ملاحظه خواهیم کرد که عموماً واقعیت همین است. معمولا روند قرار دادن دستگاه خطی (۳) به‌جای دستگاه (۲) را خطی کردن می‌نامند.

به‌طور عمومی‌تر، دستگاههایی به‌شکل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f(x , y) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + g(x , y) \end{cases} \tag{۴}$$

و فرض می‌کنیم که

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{۵}$$

بنابراین، دستگاه خطی (۳) دارای نقطهٔ بحرانی منزوی $(0 , 0)$ است. فرض می‌کنیم که $f(x , y)$ و $g(x , y)$ برای تمام نقاط (x , y) پیوسته باشند ومشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشند؛ همچنین فرض می‌کنیم که وقتی $(x , y) \rightarrow (0 , 0)$، داریم

$$\lim \frac{g(x , y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad \text{و} \quad \lim \frac{f(x , y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \tag{۶}$$

مشاهده می‌کنیم که شرایط (۶) نتایج $f(0 , 0) = 0$ و $g(0 , 0) = 0$ را به‌دست می‌دهند،

پس $(\circ, \circ)$ یك نقطهٔ بحرانی (۴) است؛ همچنین اثبات اینکه ایـن نقطهٔ بحرانی منزوی است مشکل نیست (تمرین ۱ را ملاحظه کنید). با شرایط فوق‌الذکر نقطهٔ $(\circ, \circ)$ را یك نقطهٔ بحرانی سادهٔ دستگاه (۴) می‌نامند.

مثال ۱. درمورد دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\text{۲}x + \text{۳}y + xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - \text{۲}xy^{\text{۲}} \end{cases} \tag{۷}$$

داریم،

$$\begin{vmatrix} a_{\text{۱}} & b_{\text{۱}} \\ a_{\text{۲}} & b_{\text{۲}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\text{۲} & \text{۳} \\ -\text{۱} & \text{۱} \end{vmatrix} = \text{۱} \neq \circ$$

پس (۵) برقرار است. بعلاوه، با استفاده از مختصات قطبی درمی‌یابیم که

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}} = \frac{|r^{\text{۲}} \sin\theta \cos\theta|}{r} \leqslant r$$

و

$$\frac{|g(x, y)|}{\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}} = \frac{|\text{۲}r^{\text{۳}} \sin^{\text{۲}}\theta \cos\theta|}{r} \leqslant \text{۲}r^{\text{۲}}$$

پس‌وقتی $(x, y) \to (\circ, \circ)$ (یاوقتی $r \to \circ$)، داریم $f(x, y)/r \to \circ$ و $g(x, y)/r \to \circ$. این نشان می‌دهد که شرایط (۶) نیز ارضا می‌شوند، پس $(\circ, \circ)$ یك نقطهٔ بحرانی سادهٔ دستگاه (۷) است.

حقایق اصلی راجع به‌ماهیت نقاط بحرانی ساده درقضیهٔ زیر (قضیهٔ پوانکاره) که ما آن‌را بدون اثبات بیان می‌کنیم، ارائه شده است.[۱]

---

۱. بحث و بررسی مفصل مربوط به‌این مطلب را می‌توان درکتابهای زیر یافت:

W. Hurewicz, «Lectures on Ordinary Differential Equations,» pp. 86-98, MIT, Cambridge, Mass., 1958; L. Cesari, «Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations,» pp. 157-163, Academic, New York, 1963;

یا

F. G. Tricomi, "Differential Equations," pp. 53-72, Blackie, Glasgow, 1961.

قضیهٔ الف. فرض می‌کنیم‌که (۰ ، ۰) یك نقطهٔ بحرانی سادهٔ دستگاه غیرخطی (۴) باشد، و دستگاه خطی مربوط به‌آن یعنی (۳) را درنظر می‌گیریم. چنانچه نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه (۳) دریکی از سه حالت اصلی مشروحه دربخش ۴۲ قرار گیرد، درآن‌صورت نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه (۴) از همان نوع خواهد بود.

برای روشن شدن موضوع، دستگاه غیرخطی (۷) مربوط به‌مثال ۱ را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دستگاه خطی مربوط به‌آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+3y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x+y\end{cases}\tag{8}$$

معادلهٔ کمکی (۸) عبارت است از $m^2+m+1=0$ ، که ریشه‌های آن

$$m_1 , m_2=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

هستند. چون این ریشه‌ها مختلط مزدوج‌اند ولی موهومی محض نیستند، با حالت ج روبرو هستیم و نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه خطی (۸) یك نقطهٔ حلزونی است. باتوجه به‌قضیهٔ الف، نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه غیرخطی (۷) نیز یك نقطهٔ حلزونی است.

باید توجه داشت‌که درحالی‌که نوع نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) برای دو دستگاه (۴) و (۳) ، درمورد حالاتی‌که زیر پوشش قضیهٔ فوق قرار دارند، یکسان است، ممکن است‌که شکل مسیرها کمی متفاوت باشند. مثلا، شکل ۵۱ یك نقطهٔ زینی نمونه را برای یك دستگاه خطی نشان می‌دهد، درحالی‌که شکل ۵۸ حاکی از شکل ظاهری احتمالی یك نقطهٔ زینی غیرخطی‌است. واضح است‌که مقداری انحراف درشکل۵۸ وجود دارد، لیکن بااین‌وجود، جنبه‌های کیفی هردو آرایش یکسان‌اند.

طبیعی است‌که راجع به‌دوحالت خط مرزی که درقضیهٔ الف ذکر نشد کنجکاو شویم. حقایق بدین‌قرارند: درصورتی‌که دستگاه خطی مربوطهٔ (۳) درمبدأ یك گره خط مرزی داشته باشد (حالت د) ، درآن‌صورت دستگاه غیرخطی (۴) می‌تواند دارای یك‌گره یا یك حلزونی باشد؛ و اگر (۳) درمبدأ یك مرکز داشته باشد (حالت ه) ، آنگاه (۴) می‌تواند دارای یك مرکز یا یك حلزونی باشد. به‌عنوان مثال، (۰ ، ۰) یك‌نقطهٔ بحرانی هریك از دستگاههای غیرخطی زیر است:

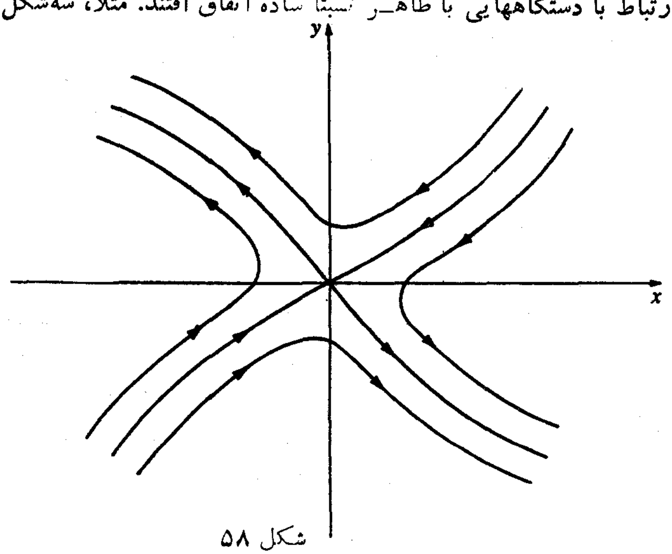
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x^2\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x\end{cases}\quad\text{و}\quad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x^3\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x\end{cases}\tag{9}$$

درهریك از این حالتها ، دستگاه خطی مربوطه چنین است

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \qquad (10)$$

بسادگی درمی‌یابیم که (۰ ، ۰) یك مرکز برای (۱۰) است، ولی می‌توان نشان داد ، درحالی‌که (۰ ، ۰) برای اولین دستگاه (۹) یك مرکز است، برای دومین دستگاه یك حلزونی است.[۱]

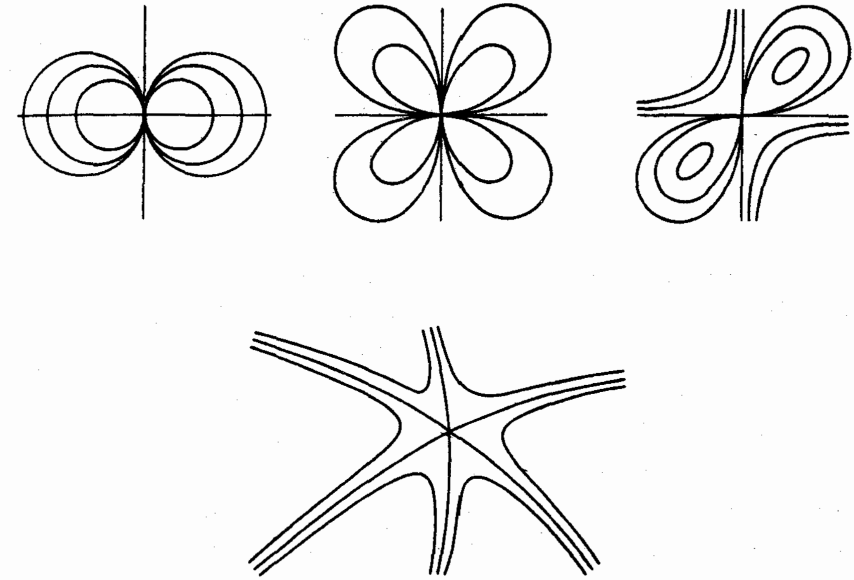
قبلا با آرایشهای گوناگون قابل ملاحظه‌ای درنقاط بحرانی دستگاههای غیرخطی مواجه شده‌ایم ، و نکات بالا نشان می‌دهندکه درنقاط بحرانی سادهٔ دستگاههای غیرخطی هیچ پدیدهٔ جدیدی ظاهر نمی‌شود. راجع به‌نقاط بحرانی غیرساده چه می‌توان گفت؟ با بررسی یك‌دستگاه غیرخطی به‌شکل(۲) می‌توان حالات ممکن دراین‌مورد را به‌بهترین وجه ارزیابی کرد. اگر جملات خطی واقع در (۲) الگوی مسیرها را درنزدیك مبدأ مشخص نکنند، آنگاه باید جملات درجهٔ دوم را درنظر گرفت؛ اگر این‌کار درتعیین الگوی مسیرها نتیجه ندهد، درآن‌صورت باید جملات درجهٔ سوم را به‌حساب آورد، الی‌آخر. این بدان معناست‌که علاوه برآرایشهای مربوط به‌حالت خطی حالتهای متعدد دیگری باتنوع بی‌پایان و پیچیدگی ابهام‌انگیز می‌توانند ظاهر شوند. چند مورد از این حالات درشکل ۵۹ نشان داده شده‌اند. شاید تعجب کنید اگر پی‌ببرید که این‌گونه الگوهای موردبحث می‌توانند درارتباط با دستگاههایی با ظاهر نسبتاً ساده اتفاق افتند. مثلا، سه‌شکل واقع در ردیف



شکل ۵۸

---

۱. صفحهٔ ۹۹ کتاب Hurewicz را ملاحظه کنید.



شکل ۵۹

بالای شکل ۵۹ نشان‌دهندهٔ آرایش مسیرهای دستگاههای زیر است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^3-2xy^2\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=2x^2y-y^3\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2xy\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=y^2-x^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-4y\sqrt{|xy|}\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-y+4x\sqrt{|xy|}\end{cases}$$

درحالت اول، این مطلب را می‌توان با مراجعهٔ مستقیم به‌شکل ۳ و معادلهٔ ۳ـ(۸) مشاهده کرد.

اکنون موضوع پایداری یك نقطهٔ بحرانی‌ساده را موردبحث قرار می‌دهیم. دراینجا نتیجهٔ اصلی مرهون لیاپونوف است: درصورتی‌که (۳) درمبدأ به‌طور مجانبی پایدار باشد، درآن‌صورت (۴) نیز به‌طور مجانبی پایدار خواهد بود. این مطلب را به‌صورت دقیق زیر بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ب. فرض می‌کنیم‌که $(0 , 0)$ یك نقطهٔ بحرانی سادهٔ دستگاه غیرخطی (۴) باشد، و

دستگاه خطی مربوطهٔ (۳) را درنظر می‌گیریم. درصورتی که نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه (۳) به‌طور مجانبی پایدار باشد ، نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) دستگاه (۴) نیز به‌طور مجانبی پایدار است.

اثبات. باتوجه به‌قضیهٔ ۴۳ــ‌الف کافی است تابع لیاپونوف مناسب برای دستگاه (۴) را بسازیم، وهمین‌کار راهم انجام می‌دهیم.

قضیهٔ ۴۲ــب می‌گوید که ضرایب دستگاه خطی (۳) درشرایط زیر صدق می‌کنند:

$$p=-(a_1+b_2)>0 \quad \text{و} \quad q=a_1b_2-a_2b_1>0 \qquad (11)$$

حال تابع $E(x , y)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم

$$E(x , y)=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)$$

که ضرایب a و b و c چنین‌اند

$$a=\frac{a_2^2+b_2^2+(a_1b_2-a_2b_1)}{D} \quad , \quad b=-\frac{a_1a_2+b_1b_2}{D}$$

و

$$c=\frac{a_1^2+b_1^2+(a_1b_2-a_2b_1)}{D}$$

که درآنها

$$D=pq=-(a_1+b_2)(a_1b_2-a_2b_1)$$

به‌کمك (۱۱)، درمی‌یابیم که $D>0$ و $a>0$. همچنین محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} D^2(ac-b^2) &= (a_2^2+b_2^2)(a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2+a_1^2+b_1^2)(a_1b_2-a_2b_1) \\ &\quad +(a_1b_2-a_2b_1)^2-(a_1a_2+b_1b_2)^2 \\ &= (a_2^2+b_2^2+a_1^2+b_1^2)(a_1b_2-a_2b_1)+2(a_1b_2-a_2b_1)^2>0 \end{aligned}$$

پس $b^2-ac<0$. بنابراین ، باتوجه به‌قضیهٔ ۴۳ــب می‌دانیم که تابع $E(x , y)$ مطلقاً مثبت است. بعلاوه ، محاسبهٔ دیگری (که جزئیات آن به‌خواننده واگذار می‌شود) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1x+b_1y)+\frac{\partial E}{\partial y}(a_2x+b_2y)=-(x^2+y^2) \qquad (12)$$

این تابع آشکارا مطلقاً منفی است. پس $E(x , y)$ یك تابع لیاپونوف برای دستگاه‌خطی

(۳) است.[1]

سپس، ثابت می‌کنیم که $E(x , y)$ یك تابع لیاپونوف برای دستگاه غیرخطی (۴) نیز هست. چنانچه F و G به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$F(x , y)=a_1x+b_1y+f(x , y)$$

و

$$G(x , y)=a_2x+b_2y+g(x , y)$$

درآن‌صورت چون می‌دانیم E مطلقاً مثبت است، کافی‌است نشان دهیم که

$$\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G \tag{۱۳}$$

مطلقاً منفی است. اگر (۱۲) را مورد استفاده قرار دهیم، آنگاه (۱۳) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$-(x^2+y^2)+(ax+by)f(x , y)+(bx+cy)g(x , y)$$

و با به‌کار بردن مختصات قطبی، این عبارت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$-r^2+r[(a\cos\theta+b\sin\theta)f(x , y)+(b\cos\theta+c\sin\theta)g(x , y)]$$

حال بزرگترین مقدار بین اعداد $|a|$ ، $|b|$ ، و $|c|$ را با K نشان می‌دهیم. برای تمام مقادیر به‌قدرکافی کوچك $r>0$ ، فرض (۶) نتیجه می‌دهد که

$$|f(x , y)|<\frac{r}{6K} \quad , \quad |g(x , y)|<\frac{r}{6K}$$

پس برای این r ها می‌توان نوشت

$$\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G<-r^2+\frac{4Kr^2}{6K}=-\frac{r^2}{3}<0$$

بنابراین، $E(x , y)$ تابعی مطلقاً مثبت است بااین خاصیت که (۱۳) مطلقاً منفی است. حال قضیهٔ ۴۳ــالف نتیجه می‌دهد که $(0 , 0)$ یك نقطهٔ بحرانی به‌طور مجانبی پایدار دستگاه (۴) است، و اثبات کامل است.

برای روشن کردن این قضیه، مجدداً دستگاه غیرخطی (۷) درمثال ۱ را درنظرمی‌گیریم که (۸) دستگاه خطی مربوط به‌آن است. در (۸) داریم $p=1>0$ و $q=1>0$ ، پس نقطهٔ بحرانی $(0 , 0)$ ، برای دستگاه خطی (۸) و دستگاه غیرخطی (۷) ، هردو ، به‌طور مجانبی پایدار است.

---

۱. اکنون می‌توان به‌دلیل تعریف a ، b ، و c به‌صورت فوق پی‌برد، می‌خواهیم (۱۲) برقرار باشد.

مثال ۲. از بخش ۴۰ می‌دانیم که معادلهٔ حرکت ارتعاشات میرای یک آونگ چنین است

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{g}{a}\sin x=0$$

که در آن c یک عدد ثابت مثبت است. دستگاه غیرخطی معادل با آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{a}\sin x-\dfrac{c}{m}y\end{cases}\qquad (14)$$

اکنون (۱۴) را بدین‌صورت می‌نویسیم

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{a}x-\dfrac{c}{m}y+\dfrac{g}{a}(x-\sin x)\end{cases}\qquad (15)$$

بسادگی می‌توان دید که وقتی $(x,y)\to(0,0)$ ،

$$\frac{x-\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$$

زیرا هرگاه $x\neq 0$ ، می‌توان نوشت

$$\frac{|x-\sin x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|x-\sin x|}{|x|}=\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|\to 0$$

و چون $(0,0)$ آشکارا یک نقطهٔ بحرانی منزوی دستگاه خطی مربوطه یعنی

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{a}x-\dfrac{c}{m}y\end{cases}\qquad (16)$$

است، نتیجه می‌شود که $(0,0)$ یک نقطهٔ بحرانی سادهٔ دستگاه (۱۵) است. بررسی و تحقیق نشان می‌دهد ($p=c/m>0$ و $q=g/a>0$) که $(0,0)$ یک نقطهٔ بحرانی به‌طور مجانبی پایدار دستگاه (۱۶) است، پس با توجه به قضیهٔ ب ، برای دستگاه (۱۵) نیز این نقطه‌ای بحرانی و به‌طور مجانبی پایدار خواهد بود. نتیجهٔ فوق بازتاب این‌حقیقت

مسلم فیزیکی است که اگر آونگ کمی منحرف شود، حرکت حاصله با گذشت زمان از بین خواهد رفت.

تمرین

۱ـ ثابت کنید که اگر (۰ ، ۰) یك نقطهٔ بحرانی سادهٔ (۴) باشد، آنگاه این نقطه الزاماً منزوی است . راهنمایی: شرایط (۶) را به‌صورت $f(x , y)/r=\varepsilon_1 \to 0$ و $g(x , y)/r=\varepsilon_2 \to 0$ بنویسید ، وباتوجه به (۵) و به کمك مختصات قطبی به یافتن تناقضی بااین فرض که هردوطرف راست (۴) درنقاطی به‌دلخواه نزدیك به‌مبدأ ولی متفاوت با آن صفر می‌شوند، بپردازید.

۲ـ دسته منحنیهایی راکه معادلهٔ قطبی آنها $r=a\sin 2\theta$ است ترسیم کنید (شکل ۵۹ را ببینید)، ومعادلهٔ دیفرانسیل این‌دسته منحنی رابه‌شکل $dy/dx=G(x,y)/F(x , y)$ بیان کنید.

۳ـ اگر (۰،۰) یك‌نقطهٔ بحرانی سادهٔ (۴) باشد و $q=a_1b_2-a_2b_1<0$، درآن‌صورت ازقضیهٔ الف چنین برمی‌آیدکه (۰ ، ۰) یك‌نقطهٔزینی دستگاه (۴) و بنابراین ناپایدار است. ثابت کنیدکه اگر $p=-(a_1+b_2)<0$ و $q=a_1b_2-a_2b_1>0$، آنگاه (۰ ، ۰) یك نقطهٔ بحرانی ناپایدار برای (۴) است. راهنمایی: با تغییراتی در اثبات قضیهٔـب نشان دهیدکه یك تابع مطلقاً مثبت مانند $E(x , y)$ وجود داردبه‌طوری که

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1x+b_1y)+\frac{\partial E}{\partial y}(a_2x+b_2y)=x^2+y^2$$

وآن‌را درمورد تمرین ۴۳ـ۴ اعمال کنید. (توجه کنیدکه این حقایق همراه با قضیهٔـب نشان‌می‌دهند که اگردستگاههای غیرخطی‌بانقاط بحرانی‌ساده و دستگاههای‌خطی‌مربوطه رادرنظر بگیریم، تمام اطلاعات شکل (۵۵) راجع به پایداری مجانبی و ناپایداری این دستگاههای خطی مستقیماً به‌دستگاههای غیرخطی منتقل می‌شوند.)

۴ـ نشان‌دهیدکه (۰ ، ۰) یك‌نقطهٔ بحرانی به‌طور مجانبی پایدار دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x^3\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x-y^3\end{cases}$$

است، ولی برای دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x^3\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+y^3\end{cases}$$

یك نقطهٔ بحرانی ناپایدار است.
چگونه این حقایق به‌نکتهٔ مذکور در داخل پرانتز تمرین (۳) مربوط می‌شوند؟

۵ـ تحقیق کنید که (۰ ، ۰) نقطهٔ بحرانی ساده‌ای برای هریك از دستگاههای زیر است، وماهیت و خواص پایداری آن‌را تعیین کنید:

الف) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-۲xy\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-۲x+y+۳y^۲\end{cases}$$

ب) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y-۳x^۲y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-۲x-۴y+y\sin x\end{cases}$$

۶ـ معادلهٔ وان درپل

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}+\mu(x^۲-۱)\frac{dx}{dt}+x=۰$$

معادل دستگاه زیر است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x-\mu(x^۲-۱)y\end{cases}$$

خواص پایداری نقطهٔ بحرانی (۰ ، ۰) را برای حالات $\mu<۰$ و $\mu>۰$ بررسی کنید.

۴۵. مکانیك غیرخطی. دستگاههای پایستار

امری است شناخته شده که وقتی دستگاههای دینامیکی حقیقی کار می‌کنند ، انرژی معمولا ازطریق نوعی اصطکاك به‌هدر می‌رود. ولی، درموارد خاص، این اتلاف انرژی‌آنقدر آهسته انجام می‌گیرد که می‌توان آن‌را درفواصل زمانی نسبتاً کوتاه نادیده گرفت. درچنین حالاتی قانون‌بقای انرژی، یعنی، ثابت بودن مجموع انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل، رامی‌پذیریم. به دستگاههایی ازاین نوع پایستار گفته می‌شود. بنابراین زمین درحال دوران را درفواصل زمانی کوتاه، درحدود چند قرن، می‌توان پایستار درنظر گرفت، ولی اگر مایل باشیم رفتار زمین را درطول میلیونها سال مورد مطالعه قرار دهیم ، باید اتلاف انرژی دراثر اصطکاك جزر و مدی را به‌حساب‌آوریم.

ساده‌ترین دستگاه پایستار عبارت است‌از جسمی به‌جرم m که به‌یك فنر متصل‌باشد و درخلأ درامتداد خط مستقیمی حرکت کند. اگر تغییرمکان m از موقعیت تعادلش را با x و نیروی بازگرداننده راکه به‌وسیلهٔ فنر بر m اعمال می‌شود با $-kx$ (که درآن $k>۰$) نشان دهیم، معادلهٔ حرکت بدین‌صورت خواهد بود

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

این نوع فنر را، که نیروی بازگرداننده‌اش تابعی خطی از x است، فنرخطی می‌نامند. چنانچه m دریك محیط مقاوم حرکت کند و نیروی مقاوم (یا نیروی میرایی) وارد بر m برابر با $-c(dx/dt)$ باشدکه درآن $c>0$ ، آنگاه معادلهٔ حرکت این دستگاه ناپایستار چنین است

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

دراینجا میرایی خطی است، زیرا نیروی میرایی تابعی خطی از dx/dt است. به‌طریق مشابه، اگر f و g توابعی اختیاری با خواص $f(0)=0$ و $g(0)=0$ باشند، آنگاه معادلهٔ کلیتر

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+g\left(\frac{dx}{dt}\right)+f(x)=0 \tag{1}$$

را می‌توان به‌عنوان معادلهٔ حرکت جرم m ، که تحت‌تأثیر نیروی بازگردانندهٔ $-f(x)$ و نیروی میرایی $-g(dx/dt)$ است، تفسیر کرد. عموماً، این نیروها غیرخطی‌اند، و معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌عنوان معادلهٔ اساسی مکانیك غیرخطی تلقی کرد. دراین بخش به بررسی اجمالی حالت خاصی از دستگاه پایستار غیرخطی به‌معادلهٔ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0 \tag{2}$$

می‌پردازیم. دراین‌حالت نیروی میرایی صفر است و درنتیجه اتلاف انرژی وجود ندارد[1].

معادلهٔ (۲) با دستگاه خودگردان زیر معادل است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{f(x)}{m}\end{cases} \tag{3}$$

---

۱. بحثهای گسترده دربارهٔ (۱) ، همراه با کاربردهای آن درمسائل فیزیکی گوناگون را درکتابهای زیر می‌توان یافت؛

J. J. Stoker, «Nonlinear Vibrations,» Interscience - Wiley, New York, 1950;

و

A. A. Andronow and C. E. Chaikin, «Theory of Oscillations,» Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

اگر dt را بین روابط بالا حذف کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای (۳) را درصفحهٔ فاز به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x)}{my} \tag{۴}$$

که می‌توان آن‌را بدین‌صورت نوشت

$$my\,dy=-f(x)dx \tag{۵}$$

اگر وقتی $t=t_0$، داشته باشیم $x=x_0$ و $y=y_0$، آنگاه انتگرال گیری (۵) از t_0 تا t نتیجه می‌دهد که

$$\frac{1}{2}my^2-\frac{1}{2}my_0^2=-\int_{x_0}^{x}f(x)dx$$

یا

$$\frac{1}{2}my^2+\int_0^x f(x)dx=\frac{1}{2}my_0^2+\int_0^{x_0}f(x)dx \tag{۶}$$

برای تفسیر این نتیجه، مشاهده می‌کنیم که $\frac{1}{2}my^2=\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ انرژی جنبشی دستگاه دینامیکی و

$$V(x)=\int_0^x f(x)dx \tag{۷}$$

انرژی پتانسیل آن است. بنابراین، معادلهٔ (۶) بیانگر قانون بقای پایستگی انرژی است،

$$\frac{1}{2}my^2+V(x)=E \tag{۸}$$

که در آن $E=\frac{1}{2}my_0^2+V(x_0)$ انرژی کل ثابت دستگاه است. واضح است که (۸) معادلهٔ مسیرهای (۳) است، زیرا آن‌را ازحل (۴) به‌دست آوردیم. مسیرخاصی که به‌ازای مقدار مشخصی از E تعیین می‌شود، درفضای فاز، یك منحنی با انرژی ثابت خواهد بود. نقاط بحرانی دستگاه (۳) نقاط $(x_c, 0)$ هستندکه درآن x_cها ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند. همان‌طور که‌دربخش ۴۰ یادآورشدیم، اینها نقاط تعادل‌دستگاه‌دینامیکی بیان‌شده توسط (۲) هستند. از دستگاه (۴) روشن است که مسیر، محور xها را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند و درمحل تلاقی با خطوط $x=x_c$ افقی‌اند. معادلهٔ (۸) همچنین نشان می‌دهد که مسیرها نسبت به‌محور x متقارن‌اند،

چنانچه (۸) را به‌شکل زیر بنویسیم

$$y=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]} \tag{۹}$$

آنگاه مسیرها را می‌توان طی مراحل آسان زیر رسم کرد. نخست یك صفحهٔ xz را طوری

مشخص کنید که امتداد محور z ها همان امتداد قائم محور yها درصفحهٔ فاز باشد (شکل ۶۰). بعد، نمودار $z=V(x)$ و چندین خط $z=E$ را درصفحهٔ xz ترسیم کنید، (یکی ازاین خطوط درشکل نشان داده شده است)، و به‌مفهوم هندسی اختلاف $E-V(x)$ توجه کنید. سرانجام، به‌ازای هرمقدار x، مقدار $E-V(x)$ را که درمرحلهٔ قبل به‌دست‌آورده‌اید در $2/m$ ضرب کنید و برای یافتن مقادیر y مربوطه درصفحهٔ فاز که مستقیماً زیر آن است، از رابطهٔ (۹) استفاده کنید. توجه داشته باشید که چون $dx/dt=y$ ، جهت مثبت هرمسیر دربالای محور xها به‌طرف راست و در زیر محور xها به‌طرف چپ است.

مثال ۱. دربخش ۴۰ دیدیم که معادلهٔ حرکت آونگ نامیرا

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\sin x=0 \tag{10}$$

است که درآن k عدد ثابت مثبتی است. چون این معادله به‌شکل (۲) است، آن‌را می‌توان به‌عنوان مبین حرکت مستقیم‌الخط نامیرای جسمی به‌جرم واحد تعبیر کرد که تحت‌تأثیر یك فنر غیرخطی با نیروی بازگردانندهٔ $-k\sin x$ واقع شده است. دستگاه خودگردان‌معادل با (۱۰) چنین است

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-k\sin x \end{cases} \tag{11}$$

ونقاط بحرانی آن عبارت‌اند از $(0,0)$ ، $(\pm\pi,0)$ ، $(\pm 2\pi,0)$ ، .... معادلهٔ‌دیفرانسیل مسیرها چنین‌است

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{k\sin x}{y}$$

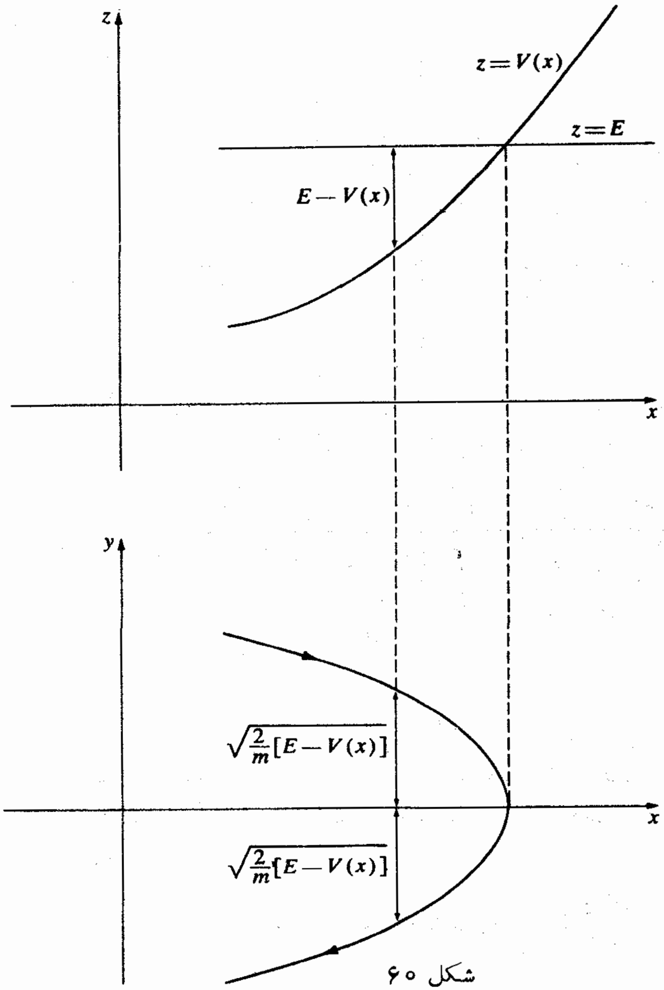
با جداکردن متغیرها و انتگرال‌گیری از رابطهٔ اخیر، مشاهده می‌کنیم که معادلهٔ دستهٔ‌مسیرها به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{2}y^2+(k-k\cos x)=E$$

واضح است که این رابطه به‌صورت (۸) است، دراینجا $m=1$ و انرژی پتانسیل برابر است با

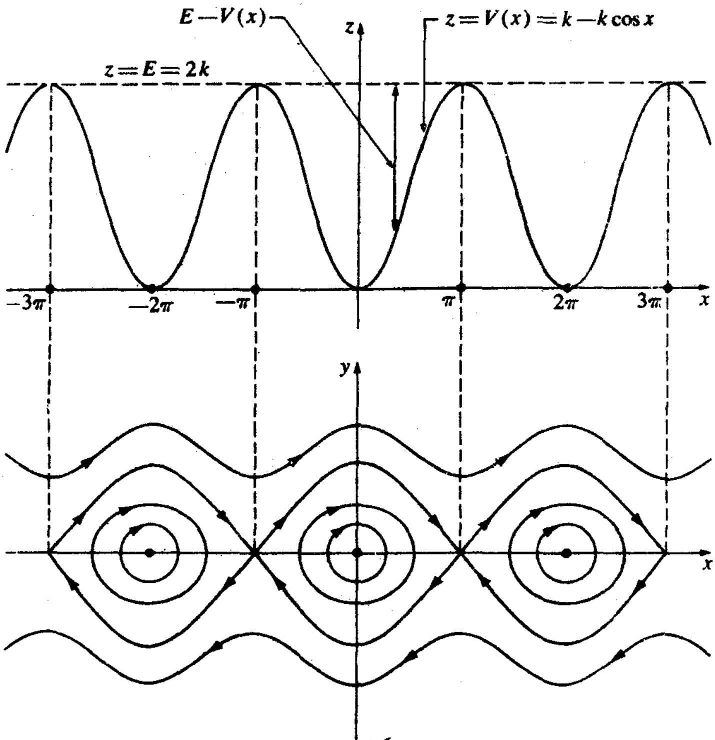
$$V(x)=\int_0^x f(x)dx=k-k\cos x$$

حال، ابتدا با ترسیم نمودار $z=V(x)$ وچندین خط $z=E$ درصفحهٔ xz ، مسیرها رارسم می‌کنیم(شکل ۶۱ ، که درآن فقط خط $z=E=2k$ نشان داده شده است). سپس مقادیر



شکل ۶۰

$E-V(x)$ را ازاینجا می‌خوانیم وبا استفاده از رابطهٔ $y=\pm\sqrt{۲[E-V(x)]}$،مسیرها را درصفحهٔ فاز، که مستقیماً زیر صفحهٔ xz واقع است، ترسیم می‌کنیم. از این رخسارهٔ فاز روشن است که اگر انرژی کل E بین ۰ و $۲k$ باشد، آنگاه مسیرهای مربوطه بسته هستند و معادلهٔ(۱۰) دارای جوابهای‌دوره‌ای است. ازطرف دیگر، چنانچه $E>۲k$ ، درآن‌صورت مسیر بسته نیست و جواب متناظر (۱۰) هم‌دوره‌ای نیست. مقدار $E=۲k$ دونوع حرکت را جدا می‌کند، و بـه‌همین دلیل هـر مسیر متناظر با $E=۲k$ را یـك منحنی جـداکننده می‌نامند. مسیرهای موجی خارج جداکننده‌ها با حرکتهای چرخشی آونگ، و مسیرهـای بستهٔ درون آنها با حرکتهای نوسانی آونگ مطابقت دارند. واضح است که نقاط بحرانی متناوباً نقاط زینی ناپایدار و مرکزهای پایدار ولی نه‌به‌طور مجانب پایدار، هستند. برای



شکل ۶۱

مقایسه، جالب است که باافزودن یك نیروی میرای خطی، اثر تبدیل این دستگاه دینامیکی پایستار را به یك دستگاه ناپایستار درنظر بگیریم. دراین‌صورت معادلهٔ حرکت به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+c\frac{dx}{dt}+k\sin x=0,\quad c>0$$

و آرایش مسیرها در شکل ۶۲ ارائه شده است. درمی‌یابیم که مراکز شکل ۶۱ به حلزونیهای به‌طور مجانبی پایدار تبدیل می‌شوند، وهمچنین همهٔ مسیرها ـ به‌استثنای جداکننده‌ها که وقتی $t\to\infty$ به‌نقاط زینی وارد می‌شوند ـ درنهایت به درون یکی‌از این حلزونیها می‌پیچند.

تمرین

۱ـ درصورتی‌که $f(0)=0$، و برای $x\neq 0$، داشته باشیم $xf(x)>0$، نشان‌دهید که مسیرهای معادلهٔ

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+f(x)=0$$

منحنیهای بسته‌ای‌هستند که مبدأ مختصات درصفحهٔ‌فاز را احاطه‌می کنند؛ یعنی، نشان‌دهید که‌نقطهٔ بحرانی $x=0$ ، $y=dx/dt=0$ یك مرکزپایداراست ولی به‌طور مجانبی پایدار نیست. ماهیت و پایداری این نقطهٔ بحرانی را ، درصورتی‌که $f(0)=0$ و برای $x\neq 0$ داشته باشیم $xf(x)<0$ ، تشریح کنید.

۲ـ اکثر فنرهای واقعی خطی نیستند. یك فنر غیرخطی را سخت یا نرم گویند بسته به اینکه بزرگی نیروی بازگرداننده سریعتر یا کندتر از یك تابع خطی تغییرمکان افزایش یابد. معادلهٔ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+kx+\alpha x^3=0 \quad , \quad k>0$$

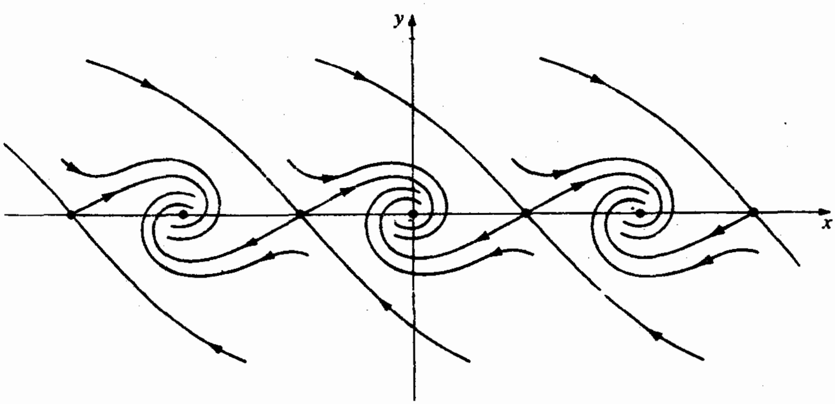
برای $\alpha>0$ حرکت یك فنرسخت و برای $\alpha<0$ حرکت‌یك فنرنرم را تشریح‌می کند. در هرحالت مسیرها را رسم کنید.

۳ـ معادلهٔ مسیرهای

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x+2x^3=0$$

را بیابید و این مسیرها را درصفحهٔ فاز ترسیم کنید. موقعیت نقاط بحرانی را مشخص و ماهیت هریك از این نقاط را تعیین کنید.

۴ـ چون باتوجه به معادلهٔ (۷) داریم $dV/dx=f(x)$، نقاط بحرانی (۳) نقاطی هستند واقع برمحور xها درصفحهٔ فازکه درآنها $V'(x)=0$. اگرمنحنی $z=V(x)$ هموار و خوش رفتار باشد ، برحسب این منحنی سه امکان وجود دارد: ماکزیمم‌ها، می‌نیمم‌ها و نقاط عطف. هرسه امکان را ترسیم کنید، ونوع نقطهٔ بحرانی منسوب به هریك راتعیین کنید (نقطهٔ بحرانی از نوع سوم نقطهٔ بازگشت نامیده می‌شود).



شکل ۶۲

۴۶. جوابهای دوره‌ای
قضیهٔ پوانکاره ـ بندیکسون[1]

دستگاه خودگردان غیرخطی زیر را درنظرمی‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=F(x , y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt}=G(x , y) \end{cases} \qquad (۱)$$

که درآن $F(x , y)$ و $G(x , y)$ درتمام صفحهٔ فاز پیوسته‌اند ومشتقات جزئی اول پیوسته دارند. در بحث ما تا بحال، بجز درهمسایگی انواع خاصی از نقاط بحرانی، عملا چیز دیگری راجع به‌مسیرهای (۱) بیان نشده است. ولی، در بسیاری مسائل، خواص سرتاسری مسیرها خیلی بیشتر از این خواص موضعی‌مورد توجه‌اند. خواص سرتاسری مسیرهاخواصی هستند که رفتار مسیرها را درمحدودهٔ وسیعی از صفحهٔ فاز بیان می کنند، وعموماً خیلی‌مشکل می‌توان به این خواص دست یافت.

مسئلهٔ اساسی نظریهٔ سرتاسری این است که تعیین‌کنیم آیا (۱) دارای مسیرهای بسته هست یا نه. همان طور که در بخش ۴۰ ملاحظه کردیم، اهمیت این مسئله، به خاطر ارتباط نزدیکش با مسئلهٔ وجود جوابهای دوره‌ای (۱) است. یك جواب $x(t)$ و $y(t)$ از (۱) را دوره‌ای گویند، اگر هیچ یك از این دو تابع ثابت نباشد، هردو تابع برای تمام مقادیر t تعریف شده باشند، وعددی مانند $T>0$ موجود باشدبه‌طوری که برای‌تمام مقادیر t روابط $x(t+T)=x(t)$ و $y(t+T)=y(t)$ برقرار باشند. کوچکترین T با این خاصیت را دورهٔ تناوب این جواب می‌نامند.[2] بدیهی است که هرجواب دوره‌ای (۱) مسیربسته‌ای را تعریف می کند که، برای هر t_0، وقتی t از t_0 به t_0+T افزایش می‌یابد، این مسیر یك‌دور پیموده می‌شود. برعکس، بآسانی‌مشاهده می‌شود که اگر $C=[x(t) , y(t)]$ یك مسیر بستهٔ (۱) باشد، آنگاه $x(t)$ ، $y(t)$ یك جواب دوره‌ای است. از این‌رو، جستجو برای جوابهای دوره‌ای (۱) به جستجوی مسیرهای بسته تبدیل می‌شود.

ازبخش ۴۲ می‌دانیم که یك دستگاه خطی دارای مسیرهای بسته است، اگر وفقط اگر ریشه‌های معادلهٔ کمکی موهومی‌محض باشند و دراین حالت همهٔ مسیرها بسته‌اند. بنا براین، برای هردستگاه خطی یا تمام مسیرها بسته‌اند ویا هیچ مسیری بسته نیست. ازطرف دیگر، یك دستگاه غیرخطی بخوبی می‌تواند دارای یك مسیر بستهٔ منزوی باشد، بدین مفهوم که‌در نزدیك این مسیر بسته مسیرهای‌بستهٔ دیگری واقع نباشند. مثالی معروف از چنین دستگاهی، مثال زیر است:

---

1. Bendixson

۲. بدین معنی هرجواب دوره‌ای دارای یك دورهٔ تناوب است. چرا؟

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(1-x^2-y^2)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+y(1-x^2-y^2)\end{cases}\qquad (2)$$

برای حل این دستگاه از مختصات قطبی r و θ، که در آن $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، استفاده می‌کنیم. اگر ازطرفین روابط $x^2+y^2=r^2$ و $\theta=\tan^{-1}(y/x)$ مشتق‌بگیریم، به فرمولهای مفید زیردست می‌یابیم

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=r\frac{dr}{dt}\quad,\qquad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}\qquad (3)$$

با ضرب طرفین اولین معادلهٔ (۲) در x و طرفین دومین معادلهٔ (۲) در y، و جمع نتایج حاصل، داریم

$$r\frac{dr}{dt}=r^2(1-r^2)\qquad (4)$$

همین طور، اگرطرفین اولین معادلهٔ (۲) را در y وطرفین‌دومین معادلهٔ (۲) را در x ضرب و حاصلها را از هم کم کنیم، به دست می‌آوریم

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=r^2\qquad (5)$$

دستگاه (۲) دارای یك نقطهٔ بحرانی در $r=0$ است. چون تنها یافتن مسیرها مورد توجه ماست، می‌توان فرض‌کرد که $r>0$. در این حالت، به‌کمك (۴) و (۵) دستگاه (۲)چنین می‌شود

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(1-r^2)\\[2ex]\dfrac{d\theta}{dt}=1\end{cases}\qquad (6)$$

بآسانی می‌توان این‌معادلات را جداگانه حل‌کرد، وجواب عمومی‌دستگاه (۶) را به‌صورت زیر یافت

$$\begin{cases}r=\dfrac{1}{\sqrt{1+ce^{-2t}}}\\[2ex]\theta=t+t_0\end{cases}\qquad (7)$$

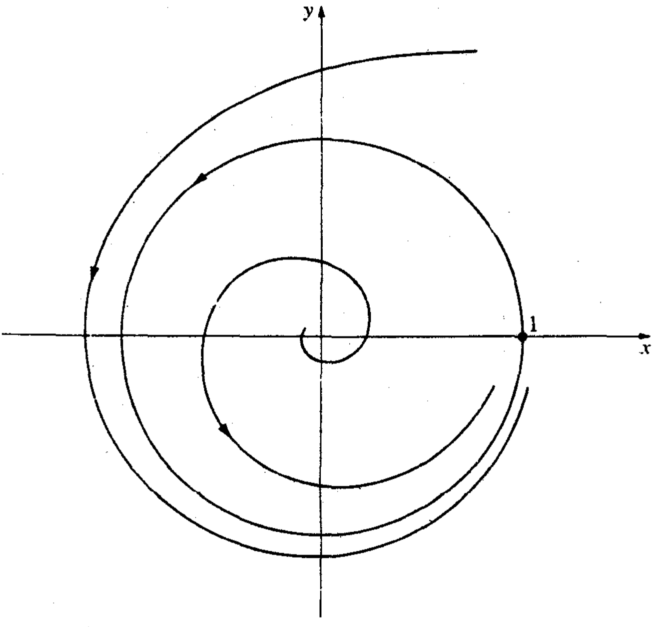
جواب عمومی متناظر دستگاه (۲) چنین است

$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos(t+t_{\circ})}{\sqrt{1+ce^{-2t}}} \\ y=\dfrac{\sin(t+t_{\circ})}{\sqrt{1+ce^{-2t}}} \end{cases} \qquad (8)$$

حال (۷) را از لحاظ هندسی تحلیل می کنیم (شکل ۶۳). اگر $c=0$، جوابهای $r=1$ و $\theta=t+t_{\circ}$ را داریم که مسیر مستدیر بستهٔ $x^2+y^2=1$ را درجهت خلاف حرکت‌عقربه‌های ساعت‌می‌پیمایند. اگر $c>0$، روشن‌است که $r<1$ و وقتی $t\to\infty$ داریم $r\to 1$. همچنین، اگر $c<0$، مشاهده می کنیم که $r>1$، ومجدداً وقتی $t\to\infty$، داریم $r\to 1$. این مشاهدات نشان می‌دهند که یك مسیر بستهٔ واحد ($r=1$) وجود دارد که وقتی $t\to\infty$ تمام مسیرهای دیگر به طور حلزونی از خارج یا از داخل به آن میل می کنند.

در بحث بالا، با یافتن چنین مسیری نشان داده‌ایم که دستگاه (۲) دارای یك‌مسیر بسته است. البته، عموماً قادر به انجام چنین‌کاری نیستیم. چیزی که بدان نیاز داریم آزمونهایی است که به ما امکان این نتیجه‌گیری را بدهد که آیا نواحی معینی از صفحهٔ فاز حاوی مسیرهای بسته‌هستندیا نیستند. نخستین‌آزمون درقضیهٔ پوانکاره در زیر ارائه شده‌است. طرحی از اثبات این قضیه در تمرین (۱) آمده است.

قضیهٔ الف. هرمسیر بستهٔ دستگاه (۱) الزاماً حداقل یك نقطهٔ بحرانی از این دستگاه را دربرمی‌گیرد.



شکل ۶۳

این نتیجه یك محك منفی، با ارزشی نسبتاً محدود، به دست می‌دهد: دستگاهی که در ناحیهٔ مفروضی فاقدنقاط بحرانی باشد، درآن ناحیه نمی‌تواند دارای مسیرهای بسته باشد.

قضیهٔ بعدکه از بندیکسون[1] است، محك منفی دیگری ارائه می‌کند.

قضیهٔ ب. اگر در ناحیهٔ معینی از صفحهٔ فاز، $\partial F/\partial x+\partial G/\partial y$ همواره مثبت یا همواره منفی‌باشد، آنگاه‌دستگاه (۱) درآن ناحیه نمی‌تواند دارای مسیرهای بسته باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم که این ناحیه شامل یك مسیر بستهٔ $C=[x(t), y(t)]$ و R درون آن باشد. آنگاه از قضیهٔ گرین و فرضهای ما چنین نتیجه می‌شود

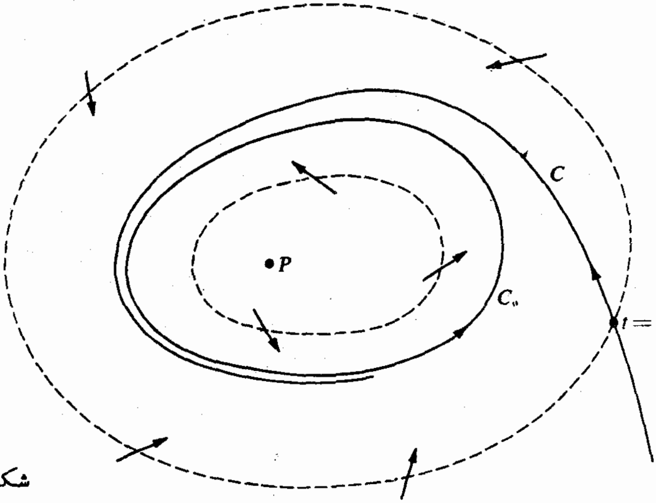
$$\int_C (F\,dy-G\,dx)=\iint_R\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right)dx\,dy\neq 0$$

ولی در امتداد مسیر C داریم $dx=F\,dt$ و $dy=G\,dt$، پس

$$\int_C (F\,dy-G\,dx)=\int_0^T (FG-GF)\,dt=0$$

این تناقض نشان‌می‌دهدکه فرض اولیهٔ ما غلط است، لذا ناحیهٔ مورد بحث نمی‌تواندشامل مسیر بسته‌ای باشد.

بعضی مواقع این‌قضایا مفید واقع می‌شوند، ولی در واقع ما به محکهای مثبتی‌نیاز داریم که شرایطی‌کافی برای وجود مسیرهای بستهٔ (۱) را ارائه‌کنند. یکی از چند قضیهٔ کلی



شکل ۶۴

---

۱. ایوار اوتو بندیکسون Ivar Otto Bendixson (۱۸۶۱ـ۱۹۳۵) یك‌ریاضیدان‌سوئدی بودکه مقالهٔ مهمی در سال ۱۹۰۱ منتشرکرد، که مکمل قسمتی از کار پیشین پوانکاره بود. او به عنوان استاد (و بعداً به عنوان رئیس) در دانشگاه استکهلم خدمت‌کرد، و مدتها عضو فعال شورای شهر استکهلم بود.

ازاین نوع، قضیهٔ کلاسیك پوانکاره ــ بندیکسون است، که آن را بدون اثبات بیان‌می کنیم[۱].

قضیهٔ ج. فرض می‌کنیم که در صفحهٔ فاز، R عبارت از ناحیه‌ای کراندار و مرز آن باشد و R شامل هیچ نقطهٔ بحرانی دستگاه (۱) نباشد. اگر $C=[x(t)\ ,\ y(t)]$ مسیری از (۱) باشد که برای یك مقدار $t_\circ$ در R باشد وبرای تمام مقادیر $t \geqslant t_\circ$ در R باقی بماند، آنگاه‌منحنی C یا خود مسیر بسته است و یا وقتی $t \to \infty$، به طرف مسیر بسته‌ای می‌پیچد. بنابراین در هریك از این حالات دستگاه (۱) دارای مسیری بسته در R است.

برای‌درك این‌مطلب، وضعیت‌مربوط به‌شکل۶۴ را درنظرمی گیریم. دراینجا Rعبارت است‌از دومنحنی نقطه‌چین وناحیه‌ای حلقه‌ای‌شکل واقع دربین‌آنها. فرض‌می کنیم که بردار

$$\mathbf{V}(x\ ,\ y)=F(x\ ,\ y)\mathbf{i}+G(x\ ,\ y)\mathbf{j}$$

در هرنقطهٔ مرزی متوجهٔ درون R باشد. آنگاه هــر مسیری مانند C ماربر یك نقطهٔ مــرزی $(t=t_\circ)$ باید به R وارد شود و هرگز نمی‌تواندآن را ترك کند، و تحت این شرایط‌قضیهٔ فوق می گویدکه C بــاید به طرف مسیر بسته‌ای همچون $C_\circ$ بپیچد. بــرای تشریح قضیه، ناحیهٔ حلقه‌ای شکل R را برگزیده‌ایم، چراکه مسیربسته‌ای مانند $C_\circ$ باید یك نقطهٔ‌بحرانی (نقطهٔ P در شکل) را احاطه‌کند و در R نباید نقاط بحرانی وجود داشته باشند.

دستگاه (۲) کاربرد ساده‌ای از این مطالب را عرضه می کند. روشن است کــه (۲) دارای یك نقطهٔ بحرانی در $(\circ\ ,\ \circ)$ است، و ناحیهٔ Rواقع بین دوایر $r=۱/۲$ و $r=۲$ شامل‌هیچ نقطهٔ بحرانی نیست. در تحلیل پیشین دریافتیم که

$$\frac{dr}{dt}=r(۱-r^۲)\quad،\quad r>\circ \text{ برای}$$

این نشان می‌دهدکه روی دایرهٔ درونی $dr/dt>\circ$ و روی دایره بیرونی $dr/dt<\circ$، لذا بردار $\mathbf{V}$ در تمام نقاط مرزی متوجه درون R است. بنابراین هر مسیر ماربر یك نقطهٔ مرزي به R واردخواهد شد و وقتی $t \to \infty$، در R باقی می‌ماند، وبنابر قضیهٔ پوانکاره‌ـ بندیکسون می‌دانیم که R شامل مسیر بسته‌ای مانند $C_\circ$ است. قبلا ملاحظه‌کرده‌ایم‌که دایرهٔ $r=۱$ مسیری بسته است‌که وجودش بدین طریق تضمین می‌شود.

از لحاظ نظری قضیهٔ پوانکاره ــ بندیکسون کاملا پذیرفتنی است، ولی عموماً کاربرد آن نسبتاً مشکل است. محك عملی‌تری ارائه شده است کــه وجود مسیرهای بسته را بــرای معادلاتی به شکل

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=\circ \tag{۹}$$

---

۱. بــرای جزئیات این قضیه به صفحات ۱۰۲ تا ۱۱۱ کتاب **Hurewicz**، یا به صفحات ۱۶۳ تا ۱۶۷ کتاب **Cesari** مراجعه کنید.

که به معادلهٔ لینار[1] موسوم است، تضمین می کند. هنگامی که از مسیر بسته‌ای برای چنین معادله‌ای صحبت می کنیم، البته منظورمان مسیر بسته‌ای از دستگاه معادلش

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y \end{cases} \qquad (۱۰)$$

است و همان طور که می‌دانیم، هرمسیر بستهٔ (۱۰) با یك جواب دوره‌ای (۹) مطابقت‌دارد. مطلب اساسی راجع به مسیرهای بستهٔ (۹) قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ د. (قضیهٔ لینار.) فرض‌می‌کنیم که توابع $f(x)$ و $g(x)$ شرایط زیر را ارضاکنند: (۱) برای تمام مقادیر x ، هر دو تابع پیوسته ودارای مشتقات پیوسته هستند ؛ (۲) $g(x)$ تابع فردی است‌که برای $x>0$ داریم $g(x)>0$ ، و $f(x)$ یك تابع زوج است ؛ و (۳) تابع فرد $F(x)=\int_0^x f(x)dx$ تنها یك صفرمثبت در $x=a$ دارد، وبرای $0<x<a$ منفی، وبرای $x>a$ مثبت و غیرنزولی است، و وقتی $x\to\infty$ داریم $F(x)\to\infty$. آنگاه معادلهٔ (۹) دارای مسیر بستهٔ منحصر به فردی است که در صفحهٔ فاز مبدأ مختصات را احاطه می‌کند ، و وقتی $t\to\infty$ ، هر مسیر دیگر به طور حلزونی به این مسیر میل می‌کند.

به‌خاطرخوانندهٔ شکاك وسخت گیری که بحق مطالب بی‌پشتوانه را با اکراه می‌پذیرد، اثباتی ازاین قضیه را درپیوست‌ب آورده‌ایم. درکی شهودی از نقش فرضهای فوق‌الذکررا می‌توان بادرنظرگرفتن (۹) از دیدگاه مفاهیم بخش قبل به دست آورد. ازاین دیدگاه، معادلهٔ(۹) معادلهٔ حرکت‌جسمی‌است به‌جرم واحد ومتصل به‌یك‌فنرکه تحت‌تأثیر دوگانهٔنیروی بازگردانندهٔ $-g(x)$ و نیروی میرایی $-f(x)dx/dt$ قراردارد. فرض راجع به $g(x)$ معادل با آن است که بگوییم فنر آنچنانکه انتظار داریم عمل می کند، وگرایش به‌کم کردن اندازهٔ تغییر مکان دارد. از طرف دیگر، فرضهای راجع به $f(x)$ (که اجمالاًمی گوید $f(x)$ برای مقادیرکوچك $|x|$ منفی و برای مقادیر بزرگ $|x|$ مثبت است) بدان معناست که برای مقادیرکوچك $|x|$ حرکت شدیدتر می‌شود وبرای مقادیر بزرگ $|x|$ ، حرکت کندتر می گردد، و بنابراین تمایل به‌برقراری نوسانی ماندگار دارد. این رفتار نسبتاً عجیب $f(x)$

---

۱. آلفرد لینار Alfred Liénard (۱۸۶۹ـ۱۹۵۸) دانشمند فرانسوی بودکه بیشترین اوقات‌کار خودرا وقف تدریس فیزیك‌کاربسته درمدرسهٔ معدن پاریس‌کرد و درسال ۱۹۲۹ مدیر این مدرسه شد. پژوهشهای فیزیکی او عمدتاً در زمینهٔ الکتریسیته و مغناطیس ، کشسانی و هیدرودینامیك‌بود. گهگاهی روی مسائل ریاضی‌که درسایر بررسیهای علمی او ظاهر می‌شدندکار می‌کرد، ودرسال ۱۹۳۳ به‌ریاست انجمن ریاضی فرانسه برگزیده شد. اوفردی مجرد و بی‌ادعا بودکه تمام‌عمر خود را وقف‌کار و دانشجویانش کرد.

را این طور نیزمی‌توان توصیف کرد که این‌دستگاه فیزیکی، وقتی $|x|$ کوچك باشد، انرژی جذب می کند و وقتی $|x|$ بزرگ باشد، انرژی از دست می‌دهد.

کاربرد عمدهٔ قضیهٔ لینار در معادلهٔ وان درپل[1] است

$$\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}+\mu(x^{۲}-۱)\frac{dx}{dt}+x=۰ \qquad (۱۱)$$

که درآن، به‌دلایل فیزیکی، μ عددی ثابت‌ومثبت فرض‌می‌شود. دراینجا $f(x)=\mu(x^{۲}-۱)$ و $g(x)=x$ ، پس شرط (۱) آشکارا ارضا می گردد. شرط (۲) نیز به همان روشنی برقرار است. چون

$$F(x)=\mu\left(\frac{۱}{۳}x^{۳}-x\right)=\frac{۱}{۳}\mu x(x^{۲}-۳)$$

مشاهده می کنیم که تابع $F(x)$ تنها یك صفر مثبت در $x=\sqrt{۳}$ دارد و این تابع برای $۰<x<\sqrt{۳}$ منفی، و برای $x>\sqrt{۳}$ مثبت است ، و وقتی $x\rightarrow\infty$ ، $F(x)\rightarrow\infty$. سرانجام، $F'(x)=\mu(x^{۲}-۱)$ برای $x>۱$ مثبت‌است، لذاتابع $F(x)$، برای $x>\sqrt{۳}$ یقیناً غیرنزولی (و در واقع‌صعودی) است. از این‌رو، کلیهٔ شرایط قضیه ارضا می‌شود، و نتیجه می گیریم که معادلهٔ (۱۱) دارای یك مسیر بستهٔ منحصر به فرد (جواب دوره‌ای) است که هر مسیر دیگری (هرجواب غیرصفر) حلزون‌وار (به طور مجانبی) به‌آن میل می کند.

تمرین

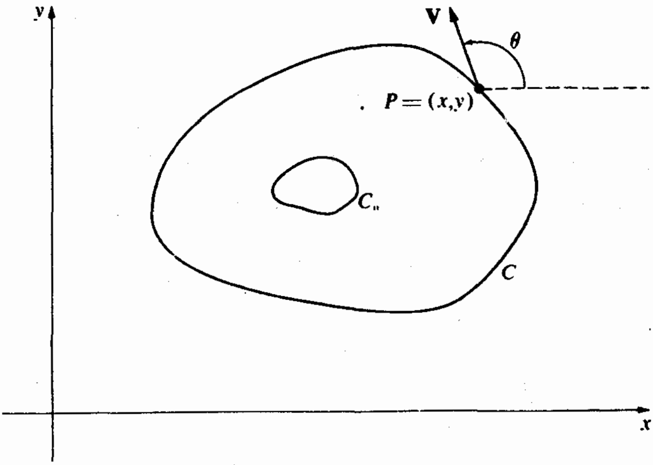
۱ـ اثباتی برای قضیهٔ الف را می‌توان براساس ایده‌های هندسی زیربنانهاد (شکل ۶۵) فرض‌کنید که C یك منحنی بستهٔ ساده (نه الزاماً یك مسیر) در صفحهٔ فاز باشد، وفرض کنید که C از هیچ نقطهٔ بحرانی دستگاه (۱) نگذرد. در صورتی که $P=(x, y)$ نقطه‌ای واقع بر C باشد،

$$\mathbf{V}(x, y)=F(x, y)\mathbf{i}+G(x, y)\mathbf{j}$$

یك بردار غیرصفر است، و بنابراین دارای جهت معینی است که به وسیلهٔ زاویهٔ θ مشخص می گردد. اگر P ، درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، حول C یك دور بزند، زاویهٔ θ به میزان $\Delta\theta=۲\pi n$ تغییر می کند، دراینجا n یك عدد صحیح مثبت، صفر، یایك عدد صحیح منفی‌است. این عدد صحیح n را اندیس C می‌نامند. چنانچه C به طور پیوسته، بدون عبور از یك نقطهٔ بحرانی، به یك منحنی بستهٔ سادهٔ کوچکتر $C_{۰}$ منقبض گردد، آنگاه، اندیس‌آن به‌طور پیوسته تغییرمی کند؛ وچون اندیس عددی‌صحیح

---

۱. بالتازار وان درپل Balthasar van der Pol (۱۸۸۹ــ   ) ، دانشمند دانمارکی ، متخصص درجنبه‌های نظری مهندسی‌رادیو، واولین‌کسی بودکه در دههٔ ۱۹۲۰ میلادی‌معادلهٔ (۱۱) را مورد مطالعه قرارداد، و ازطریق آن لینار و دیگران‌را بدپژوهش درنظریهٔ ریاضی‌نوسانات خود نگهدار در مکانیك غیرخطی برانگیخت.



شکل ۶۵

است، نمی‌تواند تغییر کند.

الف) اگر C مسیر بسته‌ای از (۱) باشد، نشان دهید که اندیس آن ۱ است.

ب) چنانچه C مسیر بسته‌ای از (۱) باشد که شامل هیچ نقطهٔ بحرانی نیست، نشان دهید که یك منحنی کوچك C_0 دارای اندیس ۰ است، واز این مطلب قضیهٔ الف را نتیجه بگیرید.

۲ـ دستگاه خودگردان غیرخطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+4y-x(x^2+y^2)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-4x+4y-y(x^2+y^2)\end{cases}$$

الف) دستگاه را به مختصات قطبی ببرید.

ب) قضیهٔ پوانکاره ـ بندیکسون را به‌کار برید ونشان دهید که یك مسیر بسته بین دوایر $r=1$ و $r=3$ وجود دارد.

ج) جواب غیرثابت عمومی $x=x(t)$ و $y=y(t)$ از دستگاه اولیه را بیابید، وازآن برای به‌دست آوردن یك جواب دوره‌ای متناظر با مسیر بسته‌ای که وجودش در حالت (ب) ثابت شد استفاده کنید.

د) مسیر بسته وحداقل دو مسیر دیگر را درصفحهٔ فاز ترسیم کنید.

۳ـ نشان دهید که دستگاه خودگردان غیرخطی زیردارای یك جواب دوره‌ای است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y-xe^{x^2+y^2}\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+3y-ye^{x^2+y^2}\end{cases}$$

۴ــ درهریك از حالات زیر، قضیه‌ای از این بخش را مورد استفاده قرار دهید و مشخص کنید که آیا معادلهٔ دیفرانسیل مفروض دارای جواب دوره‌ای هست یا نیست:

الف) $$\frac{d^2x}{dt^2}+(5x^4-9x^2)\frac{dx}{dt}+x^5=0$$

ب) $$\frac{d^2x}{dt^2}-(x^2+1)\frac{dx}{dt}+x^5=0$$

ج) $$\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-(1+x^2)=0$$

د) $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^5-3x^3=0$$

ه) $$\frac{d^2x}{dt^2}+x^6\frac{dx}{dt}-x^2\frac{dx}{dt}+x=0$$

۵ــ نشان دهید که هر معادلهٔ دیفرانسیل به‌شکل

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b(x^2-1)\frac{dx}{dt}+cx=0 \quad (a , b , c>0)$$

را می‌توان با یك تغییر متغیر مستقل به معادلهٔ وان درپل تبدیل کرد.

پیوست الف . پوانکاره

ژول هانری پوانکاره[1] (۱۸۵۴–۱۹۱۲) در آغاز قرن بیستم در سطح جهانی به عنوان بزرگترین‌ریاضیدان نسل خود شناخته شد. درسال ۱۸۷۹ دوران دانشگاهی خود را در کان آغاز کرد ، و تنها دو سال بعد به استادی دانشگاه سوربن منصوب شد. بقیهٔ عمر خود را در آنجا به سر برد، و هرسال موضوع متفاوتی را تدریس کرد. در سخنرانیهایش ــ که توسط دانشجویان او ویرایش شد و به‌چاپ رسید ــ با ابتکار و تسلط فنی فراوان، در واقع تمامی زمینه‌های معروف ریاضیات محض وکار بسته ، و بسیاری از زمینه‌هایی را که قبل از کشف توسط وی ناشناخته بودند، مورد بحث قرارداد. روی هم رفته بیش از ۳۰ کتاب فنی‌دربارهٔ فیزیك ریاضی ومکانیك سماوی، شش کتاب درسطح عامه فهم ، وتقریباً ۵۰۰ مقالهٔ پژوهشی

1. Jules Henri Poincaré

در ریاضیات نوشت. وی متفکری سریع‌الانتقال، قوی، وخستگی‌ناپذیر بود که به جزئیات نمی‌پرداخت و به قول یکی از معاصرانش «یك فاتح بود، نه یك استعمارگر». از موهبت حافظهٔ عجیبی نیز برخوردار بود، و برحسب عادت، در حین قدم زدن در اطاق مطالعهٔ خود در مغزش به ریاضیات می‌پرداخت و فقط پس از آنکه آن را در ذهنش تکمیل می‌کرد، بر روی کاغذ می‌آورد. بیش از ۳۲ سال نداشت که به عضویت فرهنگستان علوم برگزیده شد. عضوی از فرهنگستان که او را برای عضویت پیشنهاد کرد گفت که «کارش مافوق تمجید عادی است، ولاجرم آنچه را که یاکوبی دربارهٔ آبل نوشت به‌یادمان می‌آورد: او مسایلی را حل کرده که قبل از خودش به تصور درنیامده بودند».

نخستین دستاورد بزرگ ریاضی پوانکاره در آنالیز بود. او با ابداع نظریهٔ توابع خودریخت، مفهوم دوره‌ای بودن یك تابع را تعمیم داد. توابع مثلثاتی و نمایی مقدماتی، دوره‌ای یگانه و توابع بیضوی دوره‌ای دوگانه هستند. توابع خودریخت پوانکاره تعمیم گسترده‌ای از این توابع را تشکیل می‌دهند، زیرا این توابع تحت یك گروه شمارای نامتناهی ازتبدیلات کسری خطی، پایا هستند و نظریهٔ غنی توابع بیضوی را به عنوان جزء دربرمی‌گیرند. او از آنها برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب جبری استفاده کرد و همچنین نشان داد که چگونه می‌توان از این توابع در یکنواخت‌کردن منحنیهای جبری، یعنی، بیان مختصات هرنقطهٔ واقع بریك چنین منحنی برحسب توابع تك مقداری $x(t)$ و $y(t)$ ازیك پارامتر واحد t، استفاده کرد. در دهه‌های ۱۸۸۰ و ۱۸۹۰ میلادی توابع خودریخت به‌صورت شاخهٔ گسترده‌ای از ریاضیات درآمد که (علاوه برآنالیز) به‌قلمروهای نظریهٔ گروه‌ها، نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، و هندسهٔ غیراقلیدسی راه یافته است.

نکتهٔ اساسی دیگری ازفکر پوانکاره را می‌توان درپژوهشهایش دربارهٔ مکانیك سماوی یافت (روشهای نوین مکانیك سماوی - درسه جلد ۱۸۹۲-۱۸۹۹)[1]. درخلال این کار نظریهٔ بسطهای مجانبی خودرا ارائه کرد (که باعث توجه به‌سریهای واگرا شد)، پایداری مدارها را مطالعه کرد، و نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل غیرخطی را پایه‌گذاری کرد. بررسیهای مشهورش در بررسی تکامل اجسام سماوی اورا به‌مطالعهٔ اشکال تعادل جرم سیال درحال دورانی که ذراتش به‌وسیلهٔ جاذبهٔ ثقلی به‌هم پیوسته‌است، هدایت کرد، وشکلهای گلابی‌واری را کشف کرد که بعداً درکار سر ج. ه. داروین (فرزند چارلز داروین)[2] نقش مهمی ایفا کردند. پوانکاره، در خلاصهٔ این کشفیات، می‌نویسد: «یك جسم سیال در حال دوران را که در اثر سرد شدن منقبض می‌گردد در نظرمی‌گیریم، ولی فرض می‌کنیم که این انقباض آنقدر آهسته صورت می‌گیرد که جسم همگن باقی می‌ماند و دوران کلیهٔ قسمتهای جسم یکسان است. شکل جسم که در ابتدا با تقریب زیادکروی است به یك بیضوی دوار تبدیل می‌گردد که پهن‌تر و پهن‌ترمی‌شود، آنگاه، در لحظهٔ خاصی، به‌یك بیضوی با سه محور نابرابر تبدیل‌می‌شود.

---

1. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste

۲. کتاب زیر را ملاحظه‌کنید:

G. H. Darwin, «The Tides,» chap. XVIII ,Houghton Mifflin, Boston 1899.

سپس، جسم از صورت بیضی‌وار خارج و به‌گلابی‌وار تبدیل می‌شود تا سرانجام جرم‌جسم، که در ناحیهٔ کمر، بیشتر و بیشتر باریك می‌شود، به دوجسم مجزا و نابرابر تجزیه‌می‌شود.» این ایده‌ها در عصر خود ما بیشتر مورد توجه قرار گرفته است، زیرا اخیراً متخصصین ژئوفیزیك به‌کمك اقمار مصنوعی دریافته‌اندکه زمین خود اندکی گلابی شکل است.

بسیاری از مسائلی‌که پوانکاره در این دوره با آنها مواجه گردید بذرهای شیوه‌های جدید تفکر بودند، که در ریاضیات قرن بیستم رشدکردند و شکوفا شدند. سریهای واگرا و معادلات دیفرانسیل غیرخطی را قبلا متذکر شده‌ایم. علاوه برآنها، کوشش او برای درك ماهیت منحنیها و سطوح در فضاهایی با ابعاد بالاتر منجر به مقالهٔ مشهورش تحت عنوان تحلیل موضعی[1] (توپولوژی) (۱۸۹۵) گردید، که همهٔ افراد اهل فن متفقاً آن‌را آغازتاریخ نوین در توپولوژی جبری می‌دانند. همچنین، در مطالعهٔ خود در زمینهٔ مدارهای دوره‌ای، رشتهٔ دینامیك توپولوژیکی (یا کیفی) را بنانهاد. دراینجا نوعی مسئلهٔ ریاضی مطرح‌می‌شود که نمایانگر آن، قضیه‌ای است‌که پوانکاره در سال ۱۹۱۲ میلادی مطرح کرد، ولی عمرش کفاف نداد تاآن‌را ثابت کند: چنانچه تبدیلی یك به‌یك و پیوسته، حلقهٔ محصور بین‌دودایرهٔ متحدالمرکز را چنان در خود تصویر کندکه مساحتها حفظ شود و نقاط دایرهٔ درونی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و نقاط دایرهٔ بیرونی را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به حرکت درآورد، آنگاه، دراین تبدیل حداقل دو نقطه باید ثابت بمانند. این‌قضیه کاربردهای مهمی در مسئلهٔ‌کلاسیك سه جسم (و نیز در حرکت یك توپ بیلیارد برروی میز بیلیارد محدب) دارد. در سال ۱۹۱۳ اثباتی برای این قضیه توسط یك ریاضیدان جوان آمریکایی به نام بیرکهوف[2] یافته شد[3]. کشف قابل ملاحظهٔ دیگر پوانکاره دراین زمینه، که امروزه به قضیهٔ بازگشت پوانکاره معروف است، به رفتار دراز مدت دستگاههای دینامیکی پایستار مربوط می‌شود. به نظر می‌رسدکه این نتیجه، بیهودگی کوششهای اخیر در به‌دست آوردن قانون دوم ترمودینامیك از مکانیك‌کلاسیك را نشان می‌دهد، و مباحثهٔ ناشی از آن مأخذ تاریخی نظریهٔ ارگودیك[4] نوین بوده است.

یکی از برجسته‌ترین خدمات فراوان پوانکاره به‌فیزیك ریاضی، مقالهٔ مشهورش در سال ۱۹۰۶ دربارهٔ دینامیك الکترون بود. او سالهای زیادی راجع به شالوده‌های فیزیك فکر کرده بود، و مستقل از اینشتین بسیاری از نتایج مربوط به نظریهٔ نسبیت خاص را به دست آورده بود[5]. فرق اساسی‌دراین بودکه بررسی اینشتین متکی‌برایده‌های

---

1. Analysis situs
2. Birkhoff

۳. کتاب زیر را ملاحظه‌کنید،
G. D. Birkhoff, «Dynamical Systems,» chap. VI, American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. IX Providence, R.I.,1927.

4. Ergodic theory

۵. بحثی در مورد زمینه‌های تاریخی این مطلب در مقالهٔ زیر آمده است:
Charles Scribner, Jr., Henri Poincaré and the Principle of Relativity, *Am. J. Phys*, vol. 32, p. 672, 1964.

مقدماتی مربوط به علامتهای نوری بود، حال آنکه بررسی پوانکاره برپایهٔ نظریهٔ الکترو-مغناطیس بنا شده بود و بنابراین از نظرکاربردی به پدیده‌های مربوط به این نظریه محدود بود. پوانکاره احترام زیادی برای استعداد اینشتین قایل بـود، و در سال ۱۹۱۱ انتصاب اینشتین را به اولین سمت دانشگاهی‌اش توصیه کرد[1].

در سال ۱۹۰۲ به‌عنوان یك سرگرمی جنبی، وضمن کوششی برای سهیم کردن افراد غیرمتخصص دراشتیاق خود به‌معنا واهمیت‌انسانی ریاضیات وعلوم، به نویسندگی‌وسخنرانی برای اقشار وسیعتری از مردم روی آورد. این‌کارهای سبکتر او در چهار کتاب تحت‌عناوین علم وفرضیه[2] (۱۹۰۳)، ارزش علم[3] (۱۹۰۴)، علم وروش[4] (۱۹۰۸) وآخرین اندیشه‌ها[5] (۱۹۱۳) گردآوری شده‌اند[6]. این کتابها واضح، لطیف، عمیق، و رویهمرفته لـذت‌بخش هستند، و نشان می‌دهند که پوانکاره یکی ازبهترین نثرنویسان فرانسه است. درمشهورترین این مقالات، یعنی مقالهٔ مربوط به‌کشف ریاضی، او به‌خویشتن نگریست و فرایندهای‌مغزی خود را تحلیل کرد، و با انجام این‌کار تصاویر نادری از مغز یك نـابغه در هنگام کار را، عرضه کرد. همانطور که ژوردن[7] درسوگنامهٔ پوانکاره نوشت، «یکی‌از دلایل‌فراوان‌جاودانگی پوانکاره این است که به ما امکان داد تا در عین اینکه اورا می‌ستاییم، وی را بشناسیم.»

گفته می‌شود که در حال حاضر دانش ریاضی هرده سال یا در این حدود، دو برابر می‌شود، هرچند که عده‌ای راجع به‌تداوم این مقدار انباشتگی تردید دارند. عموماً اعتقاد براین‌است که اکنون‌برای هرانسانی امکان درك کامل بیش‌از یك یا دو شاخه از چهار شاخهٔ اصلی ریاضیات، یعنی‌آنالیز، جبر، هندسه ونظریهٔ اعداد، (بدون احتساب فیزیك ریاضی) وجود ندارد. پوانکاره تسلط خلاقی برتمام ریاضیات زمان خود داشت، و احتمالا پس‌از او هرگز کسی به این مقام نخواهد رسید.

پیوست ب. اثبات قضیهٔ لینار

معادلهٔ لینار را در نظر می‌گیریم

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0 \qquad (1)$$

و فرض می‌کنیم که $f(x)$ و $g(x)$ شرایط زیررا ارضا می‌کنند: (آ) توابع $f(x)$ و $g(x)$

---

۱. کتاب زیر را ملاحظه‌کنید،

M. Lincoln Schuster (ed.),«A Treasury of the World' s Great Letters,» p. 453, Simon and Schuster, New York, 1940.

2. La Science et l' Hypothèse 3. La Valeur de la Science

4. Science et Méthode 5. Dernières Pensèes

۶. کلیهٔ این‌کتابها، به‌وسیلهٔ Dover Publications, New York به‌زبان انگلیسی ترجمه و چاپ گردیده‌اند.

7. Jourdain

پیوسته‌اند و مشتقات پیوسته دارند؛ (ء) $g(x)$ تابعی است فرد به طوری که برای $x>0$ داریم $g(x)>0$، و $f(x)$ تابعی زوج است؛ و (ؤ) تابع فرد $F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$ تنها یك صفر مثبت در $x=a$ دارد، و برای $0<x<a$ منفی و برای $x>a$ مثبت وغیرنزولی است و وقتی $x\to\infty$، $F(x)\to\infty$. ثابت خواهیم کرد که معادلهٔ (۱) دارای مسیر بستهٔ منحصر به‌فردی است که مبدأ مختصات را در صفحهٔ فاز احاطه می‌کند، و وقتی $x\to\infty$ هرمسیر دیگری به طور حلزونی به آن میل می‌کند.

در صفحهٔ فاز دستگاه معادل (۱) چنین است

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y\end{cases}\tag{۲}$$

با توجه به شرایط (آ)، قضیهٔ اساسی در مورد وجود و یگانگی جوابها برقرار است. از شرط (ء) نتیجه می‌شود که $g(0)=0$ وبرای $x\neq 0$ داریم $g(x)\neq 0$، لذا مبدأ تنها نقطهٔ بحرانی است. همچنین می‌دانیم که هر مسیر بسته باید مبدأ را احاطه کند. با توجه به

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+f(x)\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}+\int_0^x f(x)\,dx\right]$$

$$=\frac{d}{dt}[y+F(x)]$$

متغیر جدید $z=y+F(x)$ را به‌کار می گیریم به این ترتیب، معادلهٔ (۱) معادل دستگاه زیر از صفحهٔ xz است:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=z-F(x)\\[2ex]\dfrac{dz}{dt}=-g(x)\end{cases}\tag{۳}$$

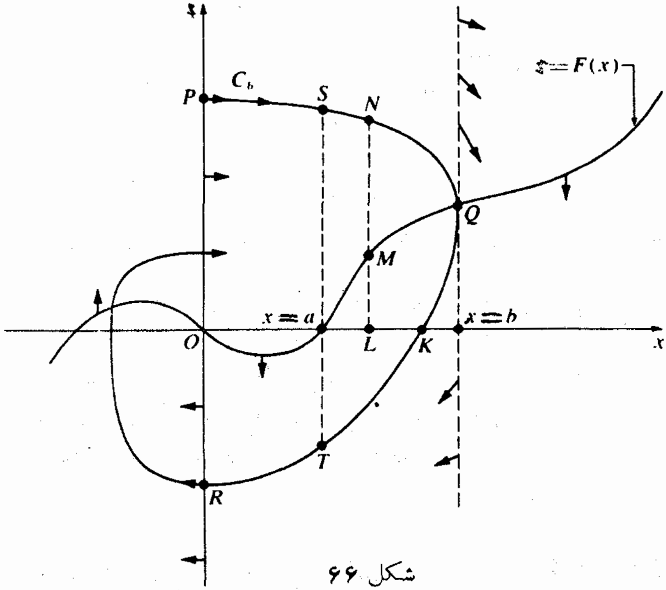
مجدداً، مشاهده می کنیم که قضیهٔ وجود و یگانگی برقرار است، مبدأ تنها نقطهٔ بحرانی است، وهرمسیر بسته‌ای باید مبدأ را احاطه کند. تناظر یك‌به‌یك $(x, y)\to(x, z)$ بین نقاط دو صفحه از هردو سو پیوسته است، لذا مسیرهای بسته متناظر با مسیرهای بسته‌اند و از نظر کیفی، مسیرها در این دو صفحه اشکال مشابه پدید می‌آورند. معادلهٔ دیفرانسیل مسیرمربوط به (۳) چنین است

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-g(x)}{z-F(x)}\tag{۴}$$

بنا به دلایل زیر، این مسیرها را آسانتر ازمسیرهای متناظرشان در صفحهٔ فاز می‌توان تحلیل کرد.

اولا، چون توابع $g(x)$ و $F(x)$ هردو فرد هستند، وقتی x و z را به $-x$ و $-z$ تبدیل کنیم، درمعادلات (۳) و (۴) تغییری به‌وجود نمی‌آید. این بدان معناست که هرمنحنی که قرینهٔ یک مسیر نسبت به‌مبدأ باشد، نیز یک مسیراست. بنابراین‌چنانچه مسیرهای واقع در نیمصفحهٔ راست $(x>0)$ در دست باشند، بیدرنگ می‌توان مسیرهای واقع در نیمصفحهٔ چپ $(x<0)$ را نیز به وسیلهٔ تقارن نسبت به مبدأ به دست آورد.

ثانیاً، معادلهٔ (۴) نشان می‌دهد که مسیرها تنها در نقاط تلاقیشان با محور zها افقی می‌شوند، و تنها در نقاط تلاقیشان با منحنی $z=F(x)$ قائم می‌شوند، همچنین، بررسی علایم طرف‌راست معادلات (۳) نشان می‌دهد که تمام مسیرها، دربالای منحنی $z=F(x)$، به طرف راست، و درپایین این منحنی، به طرف چپ متوجه‌اند، و بسته به اینکه $x>0$ یا $x<0$ به‌طرف پایین یا بالا می‌روند. این نکات بدین مفهوم‌اند که منحنی $z=F(x)$، محور zها، و خط قائمی که از هرنقطه‌ای مانند Q واقع در نیمهٔ راست منحنی $z=F(x)$ عبور می‌کند تنها می‌توانند در جهتهایی که به وسیلهٔ پیکانها در شکل ۶۶ نشان داده شده‌اند قطع‌شوند. فرض کنید که جوابی‌از(۳) که مسیر C ماربر Q را مشخص‌می‌کندطوری برگزیده شده باشد که نقطهٔ Q با مقدار صفر پارامتر t مطابقت داشته باشد. پس همچنانکه t به مقادیر مثبت افزایش می‌یابد، نقطه‌ای با مختصات $x(t)$ و $y(t)$ واقع بر C رو به پایین و به‌طرف چپ حرکت می‌کند تااینکه محور z را درنقطه‌ای مانند R قطع کند؛ وهمچنانکه t به‌مقادیر منفی کاهش می‌یابد، نقطهٔ واقع بر C رو به‌بالا و به‌طرف چپ؛ حرکت می‌کند



شکل ۶۶

تا با محور zها در نقطه‌ای مانند P تلاقی کند. برای راحتی طول نقطهٔ Q را با b و مسیر C را با C_b نمایش می‌دهیم.

به کمك خاصیت تقارن بسادگی می‌توان مشاهده کرد که وقتی مسیر C_b را درماورای نقاط P و R به طرف نیمهٔ چپ صفحه ادامه دهیم ، نتیجه مسیر بسته‌ای خواهد بود ، اگر و تنها اگر فواصل OP و OR با هم برابر باشند. بنابراین برای اینکه نشان دهیم یك مسیر بستهٔ منحصر به‌فرد وجود دارد ، کافی است نشان‌دهیم که یك‌مقدار منحصر به فرد b وجود دارد به قسمی که $OP=OR$.

برای اثبات این مطلب، تابع $G(x)$ را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$G(x)=\int_{0}^{x} g(x)dx$$

و تابع

$$E(x \text{،} z)=\frac{1}{2}z^{2}+G(x)$$

راکه مقدار آن در هنگام تلاقی با محور z ها برابـر با $z^{2}/2$ است، در نظر می‌گیریم. در طول هرمسیر داریم

$$\frac{dE}{dt}=g(x)\frac{dx}{dt}+z\frac{dz}{dt}$$

$$=-[z-F(x)]\frac{dz}{dt}+z\frac{dz}{dt}$$

$$=F(x)\frac{dz}{dt}$$

پس

$$dE=Fdz$$

اگرانتگرال خطی Fdz را از P تا R در امتداد مسیر C_b محاسبه‌کنیم، خواهیم داشت

$$I(b)=\int_{PR} Fdz=\int_{PR} dE=E_R-E_P=\frac{1}{2}(OR^{2}-OP^{2})$$

پس‌کافی است نشان دهیم که یك مقدار منحصر به‌فرد b وجود دارد به قسمی که $I(b)=0$.

چنانچه $b\leqslant a$ ، آنگاه F و dz منفی‌اند، پس $I(b)>0$ و C_b نمی‌تواند مسیر بسته باشد. حال، مطابق شکل ۶۶، فرض می‌کنیم که $b>a$. عبارت $I(b)$ را به‌دو قسمت تجزیه می‌کنیم

$$I_{2}(b)=\int_{ST} Fdz \quad \text{و} \quad I_{1}(b)=\int_{PS} Fdz+\int_{TR} Fdz$$

به‌طوری که

$$I(b)=I_{\text{۱}}(b)+I_{\text{۲}}(b)$$

چون وقتی C_b از P تا S و از T تا R پیموده می‌شود، F و dz منفی‌اند. روشن‌است که $I_{\text{۱}}(b)>\text{۰}$. از طرف دیگر، اگر درامتداد C_b از S به T برویم داریم $F>\text{۰}$ و $dz<\text{۰}$، پس $I_{\text{۲}}(b)<\text{۰}$. هدف مستقیم ما آن است که با بررسی جداگانهٔ توابع $I_{\text{۱}}(b)$ و $I_{\text{۲}}(b)$ نشان‌دهیم که $I(b)$ تابعی‌نزولی از b است. نخست، توجه‌می کنیم که معادلهٔ (۴) به ما امکان می‌دهد که بنویسیم

$$F\,dz=F\frac{dz}{dx}dx=\frac{-g(x)F(x)}{z-F(x)}dx$$

تأثیرافزایش b بالابردن کمان PS و پایین آوردن کمان TR است، که برای x مفروضی بین ۰ و a اندازهٔ $[-g(x)F(x)]/[z-F(x)]$ راکاهش می‌دهد. چون‌حدود انتگرال گیری برای $I_{\text{۱}}(b)$ ثابت‌است، نتیجهٔ این‌امر کاهشی در $I_{\text{۱}}(b)$ خواهدبود. بعلاوه‌چون $F(x)$ مثبت ودر طرف راست a غیرنزولی است، مشاهده می کنیم که افزایشی در b منجر به افزایشی در عددمثبت $-I_{\text{۲}}(b)$، و بنابراین منجر به کاهشی در $I_{\text{۲}}(b)$ خواهد شد. بنابراین، تابع $I(b)=I_{\text{۱}}(b)+I_{\text{۲}}(b)$، برای $b\geqslant a$، نزولی است. اکنون نشان می‌دهیم که وقتی $b\to\infty$ داریم $I_{\text{۲}}(b)\to-\infty$. اگر درشکل ۶۶، L ثابت و K در طرف راست L باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$I_{\text{۲}}(b)=\int_{ST}F\,dz<\int_{NK}F\,dz\leqslant-(LM)\cdot(LN)$$

و چون وقتی $b\to\infty$ داریم $LN\to\infty$، پس داریم $I_{\text{۲}}(b)\to-\infty$.

ازاین‌رو، برای $b\geqslant a$، $I(b)$ تابعی‌پیوسته ونزولی از b است، $I(a)>\text{۰}$، و وقتی $b\to\infty$ داریم $I(b)\to-\infty$. از اینجا نتیجه می‌شود که برای یك وفقط یك مقدار $b=b_{\text{۰}}$ داریم $I(b)=\text{۰}$، پس یك وتنها یك مسیر بستهٔ $C_{b_{\text{۰}}}$ وجود دارد.

سرانجام، مشاهده می کنیم که برای مقادیر $b<b_{\text{۰}}$ داریم $OR>OP$؛ و به کمك این مطلب و با توجه به تقارن نتیجه می گیریم که مسیرهای درون $C_{b_{\text{۰}}}$ به طرف بیرون و به صورت حلزونی به $C_{b_{\text{۰}}}$ میل می کنند. به طور مشابه، ازاین‌حقیقت که‌برای $b>b_{\text{۰}}$، داریم $OR<OP$ نتیجه می‌شود که مسیرهای‌بیرون $C_{b_{\text{۰}}}$ به‌طرف درون و به‌صورت حلزونی‌به $C_{b_{\text{۰}}}$ میل می کنند.

۹

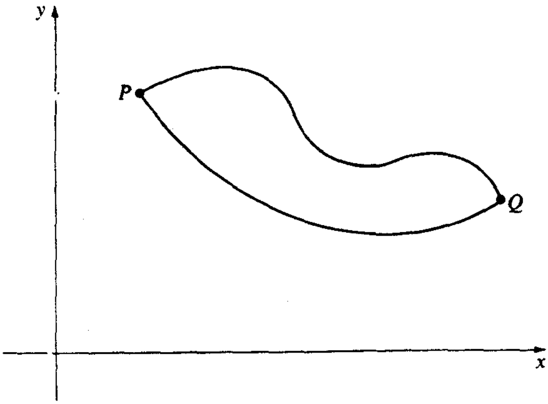
حساب تغییرات

۴۷. مقدمه. برخی از مسائل نمونهٔ مطلب موردبحث

درطول بیش‌از دوقرن گذشته، حساب‌تغییرات یکی‌از شاخه‌های‌اصلی آنالیز بوده است. این شاخه وسیلهٔ بسیار نیرومندی است که می‌تواند درطیف گسترده‌ای از مسایل ریاضی محض به‌کار رود. همچنین می‌تواند بـرای بیان اصول اساسی فیزیك‌ریاضی به‌اشکالی بسیار ساده و دقیق مورد استفاده قرار گیرد.

با بررسی و مطالعهٔ چند مسئلهٔ نمونه از موضوع، بسادگی می‌توان برداشتی از کم و کیف آن داشت. فرض می‌کنیم کـه دونقطهٔ P و Q درصفحه‌ای داده شده‌اند (شکل ۶۷) بینهایت منحنی موجودندکه این دونقطه را به‌هم وصل می‌کنند، ومـی‌توان پرسید کدام‌یك از این منحنیها از همه‌کوتاهتر است. پاسخ حسی، البته خط مستقیم است. همچنین‌می‌توانیم بپرسیم کدام منحنی،دراثر دوران حول محور xها،رویه‌ای با مساحت می‌نیمم ایجاد خواهد کرد. دراین حالت پاسخ به‌هیچ‌وجه روشن نیست. هر گاه یك منحنی نوعی، به‌عنوان سیمی بدون اصطکاك فرض شودکه درصفحهٔ قائم قـرارگرفته است، آنگاه مسئلهٔ قابل‌توجه دیگـر یافتن یك منحنی است‌که P را به Q وصل‌کند و زمان لغزش مهره‌ای روی‌آن به‌طرف‌پایین کمترین باشد. این‌همان‌مسئلهٔ مشهور کوتاهترین‌زمان‌یوهان برنولی است، که‌آن‌را دربخش ۶ بررسی کردیم. بندرت می‌توان به‌چنین سؤالهایــی پاسخهای حسی داد، وحساب تغییرات روش تحلیلی یکنواختی را دربرخورد بااین‌گونه مسایل تأمین می‌کند.

هردانشجوی حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با مسئلهٔ یـافتن نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم تابع یك متغیره، آشناست. مسائل بـالا نشان می‌دهندکه درحساب تغییرات، کمیتی



شکل ۶۷

(مثلا طول قوس، مساحت رویه، زمان سقوط) را درنظر می‌گیریم که به‌تمامی منحنی بستگی داشته باشد، و به‌دنبال یافتن آن منحنی هستیم که کمیت مورد سؤال را می‌نیمم کند. حساب تغییرات با مسایل می‌نیمم مربوط به رویه‌ها نیزسروکار دارد . برای مثال، هرگاه یك سیم سیمی به شکل دلخواهی خم شود، و درمحلول صابون فروبرده شود، آنگاه لایهٔ صابونی که‌سطح حلقه را می‌پوشاند به‌صورت رویه‌ای خواهد بود باکمترین مساحت که توسط حلقهٔ محدود می‌گردد. مسئلهٔ ریاضی، یافتن این رویه با استفاده از این خاصیت می‌نیمم و شکل داده شدهٔ سیم است.

بعلاوه، حساب تغییرات به‌عنوان عامل وحدت‌بخش درمکانیك و به‌عنوان راهنمایی درتعبیرریاضی بسیاری ازپدیده‌های فیزیکی، نقش مهمی‌را ایفا کرده است. مثلاً، معلوم‌شده که هرگاه آرایش دستگاهی از ذرات متحرك از جاذبهٔ متقابل بین آنان پیروی کند ، آنگاه مسیر واقعی آنها منحنیهای می‌نیمم کنندهٔ انتگرال تفاضل انرژیهای جنبشی و پتانسیل دستگاه نسبت به زمان خواهدبود. این‌قضیهٔ پرکاربرد از مکانیك کلاسیك به‌افتخار یابنده‌اش به اصل همیلتن شهرت دارد. درفیزیك نوین نیز، اینشتین دراثر خود راجع به‌نسبیت عام از حساب تغییرات استفادهٔ گسترده‌ای کرد، و شرودینگر آن را برای یافتن معادلهٔ موج مشهورش، که یکی از پایه‌های مکانیك کوانتومی است، به‌کارگرفت.

تعدادی از مسائل حساب تغییرات بسیار قدیمی‌اند، و توسط یونانیان باستان مورد بررسی قرارگرفته ودرمواردی حل شده‌اند. پیدایش حساب دیفرانسیل وانتگرال معمولی توسط نیوتن و لایب‌نیتس‌انگیزهٔ مطالعهٔ تعدادی از مسایل تغییراتی شد و برخی از این مسایل با روشهای ویژهٔ هوشمندانه‌ای حل شدند. ولی، این مبحث باکشف معادلهٔ‌دیفرانسیل اساسی اویلر برای منحنی می‌نیمم کننده،درسال ۱۷۴۴، به‌عنوان شاخه‌ای منسجم ازآنالیز، وارد صحنه گردید.

دربخش آینده معادلهٔ اویلر را بررسی خواهیم کرد، اما نخست مشاهده می‌کنیم که هریك از مسائلی که در دومین پاراگراف این بخش آمده‌اند، حالتی خاص از مسئلهٔ‌کلیتر

زیر هستند. فرض می‌کنیم P و Q دارای مختصات $(x_۱ , y_۱)$ و $(x_۲ , y_۲)$ باشند و دستهٔ توابع

$$y = y(x) \tag{۱}$$

را درنظر می‌گیریم، که درشرایط مــرزی $y(x_۱) = y_۱$ و $y(x_۲) = y_۲$ صدق مــی‌کنند. یعنی، منحنی نمایش (۱) باید نقاط P و Q را به‌هم بپیوندد. آنگاه منظوریافتن تابعی از این دسته است‌که انتگرالی به‌صورت زیر را می‌نیمم کند

$$I(y) = \int_{x_۱}^{x_۲} f(x , y , y')dx \tag{۲}$$

برای مشاهدهٔ اینکه این مسئله براستی دربرگیرندهٔ سایر مسایل است، تـوجه می‌کنیم کـه طول منحنی (۱) برابر است با

$$\int_{x_۱}^{x_۲} \sqrt{۱ + (y')^۲}\, dx \tag{۳}$$

و مساحت رویهٔ حاصل از دوران آن، حول محور xها عبارت‌است‌از:

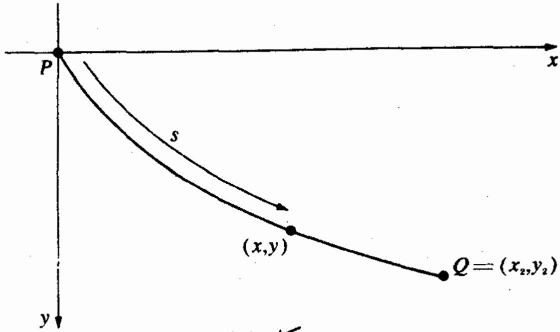
$$\int_{x_۱}^{x_۲} ۲\pi y\sqrt{۱ + (y')^۲}dx \tag{۴}$$

در مورد منحنی بـا سریعترین سقوط، بهتر است مطابق شکل ۶۸ دستگاه مختصات را تغییر دهیم و P را به‌عنوان مبدأ اختیار کنیم. چـون سرعت $v = ds/dt$ از رابطهٔ $v = \sqrt{۲gy}$ به‌دست می‌آید، زمان‌کل سقوط انتگرال ds/v است و انتگرال زیر باید می‌نیمم شود

$$\int_{x_۱}^{x_۲} \frac{\sqrt{۱ + (y')^۲}}{\sqrt{۲gy}}dx \tag{۵}$$

از این‌رو، تابع $f(x , y , y')$ که در (۲) ظاهرشده‌است درسه مسئلهٔ فوق‌بترتیب‌شکلهای $\sqrt{۱ + (y')^۲}$ ، $۲\pi y\sqrt{۱ + (y')^۲}$ ، و $\sqrt{۱ + (y')^۲}/\sqrt{۲gy}$ را دارد.

دربیان مسئلهٔ اساسی می‌نیمم‌کردن انتگرال (۲) بایــد تا حدودی دقیقتر باشیم. اولا، همواره فرض‌می‌کنیم‌که تابع $f(x , y , y')$ دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته‌نسبت به x ، y ، و y' است. سؤال بعدی این‌است‌که، چه نوع از تــوابع (۱) می‌توانند مجاز باشند؟ انتگرال (۲) یك عدد حقیقی خوش تعریف است،هــرگاه تابع زیر انتگرال تابعی پیوسته از x باشد، وبرای این‌امر فرض پیوستگی $y'(x)$ کفایت می‌کند. اما برای تضمین اعتبار عملیاتی که‌می‌خواهیم انجام‌دهیم، بهتراست یك بار وبرای همیشه خودرا تنها به‌توابع مجهــول $y(x)$ کــه دارای مشتقات دوم پیوسته هستند و شــرایط مــرزی $y(x_۱) = y_۱$ و $y(x_۲) = y_۲$ را ارضا می‌کنند، محدودکنیم. این نــوع توابع را پذیرفتنی خواهیم نامید. می‌توانیم رقابتی را درنظرآوریم که صرفاً توابع پذیرفتنی مــی‌توانند درآن شرکت کنند، ومسئله، انتخاب تابع یــا توابعی ازاین دسته است کــه کــوچکترین مقدار I را به‌دست



شکل ۶۸

می‌دهند.

باوجود این تذکرات، بطور جدی وارد نکات دقیق ریاضی نخواهیم شد. دیدگاه ما تعمداً ساده است، وتنها قصد ما رسیدن هرچه سریع‌تر و ساده‌تر به‌موارد استعمال جالب موضوع است. خواننده‌ای که مایل به‌تفحص درنظریهٔ بسیار گستردهٔ این‌مبحث باشد می‌تواند به‌آثار مدون دراین‌باره رجوع کند.[۱]

۴۸. معادلهٔ دیفرانسیل اویلر برای تابع اکسترمال

فرض‌کنیدکه تابع پذیرفتنی $y(x)$ چنان باشدکه انتگرال

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \tag{1}$$

را می‌نیمم‌کند، چگونه می‌توان این‌تابع را یافت؟ بامقایسهٔ مقادیر I که باتوابع‌پذیرفتنی درهمسایگی $y(x)$ متناظر هستند، معادلهٔ دیفرانسیلی بــرای $y(x)$ به‌دست خواهیم آورد. ایدهٔ اصلی این‌است‌که چون $y(x)$ مقدار می‌نیمم I را به‌دست می‌دهد، هــرگاه در $y(x)$ انــدکی «اختلال» ایجادکنیم، مقدار I افــزایش خــواهد یافت. ایــن توابع تغییر یافته، به‌طریق زیر ساخته می‌شوند:

فرض می‌کنیم‌که $\eta(x)$ تابعی بااین خواص باشد: $\eta''(x)$ پیوسته است و

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \tag{2}$$

---

۱. برای مثال می‌توان به‌منابع زیر مراجعه‌کرد،

I. M. Gelfand and S. V. Fomin, "Calculus of Variations," Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J., 1963; G. M. Ewing. "Calculus of Variations with Applications," Norton, New York, 1969; or C. Carathéodory, "Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part II: Calculus of Variations, Holden-Day, San Francisco, 1967.

هرگاه α پارامتر کوچکی باشد، آنگاه

$$\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x) \qquad (۳)$$

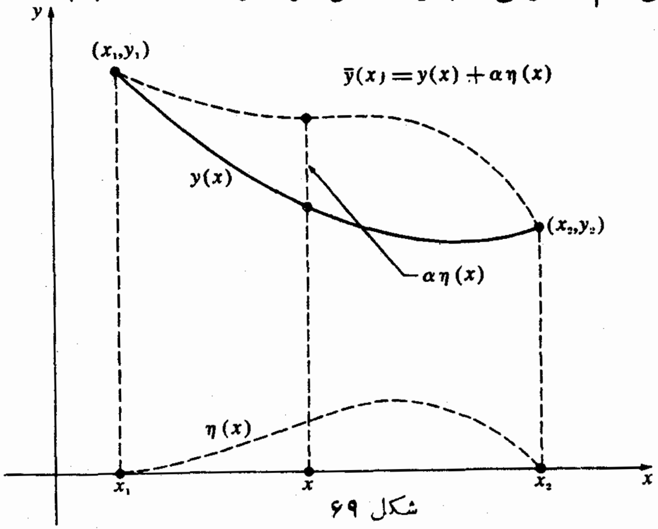
نمایشگر یك خانوادهٔ یك پارامتری از توابع پذیرفتنی است. همچنانکه درشکل ۶۹ نشان داده شده است، انحراف قائم یکی از منحنیهای این خانواده از منحنی می‌نیمم کننده، $y(x)$، برابر با $\alpha\eta(x)$ است.[۱] اهمیت (۳) ناشی‌از این‌است که برای هرخانواده از این نوع، یعنی، باهرانتخاب تابع $\eta(x)$، تابع می‌نیمم کنندهٔ $y(x)$ به‌این خانواده متعلق‌است وبامقدار $\alpha=0$ مطابقت دارد.

اکنون با انتخاب یك $\eta(x)$ ثابت، مقادیر $\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$ و $\bar{y}'(x)=y'(x)+\alpha\eta'(x)$ را درانتگرال (۱) قرار می‌دهیم، و تابعی از α به‌دست می‌آوریم

$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\bar{y},\bar{y}')dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} f[x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x)]dx \qquad (۴)$$

هرگاه $\alpha=0$، از رابطهٔ (۳) داریم $\bar{y}(x)=y(x)$ و چون $y(x)$ می‌نیمم کنندهٔ انتگرال است، می‌دانیم که $I(\alpha)$ باید می‌نیممی در $\alpha=0$ داشته باشد. ازحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی می‌دانیم که شرطی لازم برای این امر صفر شدن مشتق، $I'(\alpha)$، برای $\alpha=0$



شکل ۶۹

۱. اختلاف $\bar{y}-y=\alpha\eta$ را تغییر تابع y می‌نامند و آن را با δy نمایش می‌دهند. این نماد قابل تبدیل به‌یك تبیین صوری مفید (که درباره‌اش بحث نخواهیم کرد) و منشأ نام حساب تغییرات است.

است: $I'(\circ)=\circ$. مشتق $I(\alpha)$ ، $I'(\alpha)$ ، را می‌توان بامشتق گیری از زیر علامت‌انتگرال در (۴) به‌دست آورد

$$I'(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x, \bar{y}, \bar{y}')dx \qquad (۵)$$

براساس قاعدهٔ زنجیری برای مشتق گیری از توابع چند متغیره، داریم

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x, \bar{y}, \bar{y}')=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\frac{\partial\bar{y}'}{\partial\alpha}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\eta'(x)$$

بنابراین (۵) را می‌توان به‌شکل

$$I'(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\eta'(x)\right]dx \qquad (۶)$$

نوشت. اما $I'(\circ)=\circ$ ، بنابراین با قرار دادن $\alpha=\circ$ در (۶) داریم

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx=\circ \qquad (۷)$$

دراین معادله، تابع $\eta(x)$ و مشتق آن $\eta'(x)$ ظاهر می‌شوند. با انتگرال گیری جزءبه‌جزء از دومین عبارت زیر انتگرال و استفاده از (۲) می‌توان $\eta'(x)$ را حذف کرد

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)dx=\left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$
$$=-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

بنابراین می‌توان (۷) را به‌صورت

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]dx=\circ \qquad (۸)$$

نوشت. استدلال ما تا این‌جا برانتخاب مشخصی برای تابع $\eta(x)$ مبتنی بود. اما چون انتگرال (۸) باید برای همهٔ این نوع توابع صفر گردد، بلافاصله به‌این‌نتیجه می‌رسیم که عبارت داخل کروشه نیز باید صفر شود. این منجر به‌رابطهٔ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=\circ \qquad (۹)$$

می‌گردد، که معادلهٔ اویلر است.[۱]

مهم است که درك روشنی از ماهیت دقیق نتیجه‌گیری خود داشته باشیم: یعنی هرگاه $y(x)$ یك تابع پذیرفتنی باشد که انتگرال (۱) رامی‌نیمم کند، آنگاه $y(x)$ درمعادلهٔ اویلر صدق خواهد کرد. فرض کنید تابعی پذیرفتنی مانند y وجود دارد که این معادله را ارضا می‌کند. آیا این به‌معنی این‌است که y ، I را می‌نیمم می‌کند؟ لزوماً چنین نیست. این‌حالت شبیه به‌حالتی درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی است، که درآن تابعی مانند $g(x)$ که مشتقش درنقطه x_0 صفر است، می‌تواند دراین نقطه دارای ماکزیمم، می‌نیمم، ویانقطهٔعطف باشد. هنگامی که نخواهیم تمایزی بین این حالات قائل شویم، این حالات را معمولا مقادیر ایستی $g(x)$ می‌نامیم،ونقاط x_0 راکه درآنها این‌حالات‌پیش‌می‌آیند نقاط ایستی می‌گوییم. به‌همین‌ترتیب، شرط $I'(0)=0$ ممکن است بـه‌جای می‌نیمم، بیانگر یك ماکزیمم یانقطهٔ عطـف $I(\alpha)$ در $\alpha=0$ بـاشد. متداول است کـه هـرجواب پذیرفتنی معادلـهٔ اویلر را تابع ایستی یا منحنی ایستی ، ومقدار متناظر انتگرال (۱) را مقدار ایستی ایـن انتگرال نامند (بدون اینکه خودرا به‌یکی‌از حالات ممکن، مقیدکرده باشیم). بعلاوه، جوابهایی از معادلهٔ اویلر راکه مقید به‌شرایط مرزی نیستند، توابع اکسترمال گوییم.

درحساب دیفرانسیل وانتگرال برای ارائهٔ شرایط‌کافی جهت تشخیص یك‌نوع مقدار ایستی از دیگری، مشتق دوم را به‌کار مـی‌گیریم. شرایط‌کافی مشابه درحساب تغییرات نیز وجود دارد، ولی چون‌کاملا پیچیده هستند، آنهارا دراینجا مورد بررسی قرار نخواهیم داد. درکاربردهای واقعی، کیفیت هندسی یا فیزیکی مسئلهٔ مـورد بحث غالباً ما را قادر می‌سازد تعیین‌کنیم که آیا تابع ایستی خاص انتگرال را ماکزیمم می‌کند یامی‌نیمم (یا هیچ‌کدام). خوانندهٔ علاقمند به‌شرایط‌کافی و دیگر مسایل نظری می‌تواند مباحث‌کافی دراین زمینه‌ها را درکتابهایی که دربخش ۴۷ معرفی کرده‌ایم بیابد.

معادلهٔ اویلر (۹) ، به‌شکلی که ارائه‌گردید، چندان روشنگر نیست. برای تفسیر آن‌و تبدیلش به‌یك وسیلهٔ مفید، مطلب را با تأکید بـراین نکته آغاز می‌کنیم که مشتقات جـزئی $\partial f/\partial y$ و $\partial f/\partial y'$ با احتساب x ، y و y' به‌عنوان متغیرهای مستقل محاسبه شده‌انـد. اما، درحالت‌کلی $\partial f/\partial y'$ تابعی صریح از x است، و ازطریق y و y' نیز تـابعی ضمنی از x می‌باشد، بنابراین، اولین عبارت در (۹) را می‌توان به‌شکل بسط یافتهٔ زیرنوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{dx}$$

---

۱. مشروح استدلال غیرمستقیمی‌که به (۹) منجر می‌گردد به‌قرار زیر است. فرض می‌کنیم کـه تابع داخل‌کروشهٔ رابطهٔ (۸)، درنقطه‌ای مانند $x=a$ از فاصلهٔ مزبور صفر نباشد (مثلاً مثبت باشد). چون این تابع پیوسته است ، درسرتاسر یك زیرفاصله حول $x=a$ مثبت خواهد بود. یك تابع $\eta(x)$ چنان برگزینید که در داخل ایـن زیـرفاصله مثبت و درخارج آن صفر بـاشد. برای ایـن $\eta(x)$ ، انتگرال (۸) مثبت خواهد بود، که این یك تناقض است. بیان دقیق این استدلال ، قضیه‌ای است‌که به لم اساسی حساب تغییرات شهرت دارد.

به‌این‌ترتیب معادلهٔ اویلر به‌صورت زیر درخواهدآمد:

$$f_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2}+f_{y'y}\frac{dy}{dx}+(f_{y'x}-f_y)=0 \qquad (10)$$

به‌غیراز حالت $f_{y'y'}=0$ ، معادلهٔ‌بالا ازمرتبهٔ دوم است، پس‌عموماً توابع اکسترمال (جوابهای این معادله) یك خانــوادهٔ دوپارامتری از منحنیها را تشکیل مــی‌دهند، و دربین اینها، توابع ایستی توابعی‌هستندکه درآنها این‌دوپارامتر چنان انتخاب‌شده‌اندکه درشرایط مرزی داده شده صدق می‌کنند. حل معادلهٔ مرتبهٔ دوم غیرخطی مانند (۱۰) عموماً امکان‌پذیر نیست، ولی خوشبختانه بسیاری از کاربردها منجر به حالتهای خاصی می‌شوند که قابل حل هستند:

حالت الف. هرگاه x و y درتابع f ظاهر نشوند، معادلهٔ اویلر به

$$f_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

تبدیل می‌شود، و اگر $f_{y'y'}\neq 0$ ، آنگاه $d^2y/dx^2=0$ و $y=c_1x+c_2$ و بنابراین ، توابع اکسترمال همگی خطوط مستقیم هستند.

حالت ب. هرگاه y درتابع f ظاهر نگردد، معادلهٔ اویلر به

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

ـدیل می‌شود و ازاین رابطه می‌توان بلافاصله انتگرال گرفت وبه‌معادلهٔ مرتبهٔ اول

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=c_1$$

برای توابع اکسترمال دست یافت.

حالت ج. هرگاه x در f موجود نباشد، آنگاه انتگرال‌گیری از معادلهٔ اویلر به

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f=c_1$$

منجر می‌شود. این مطلب از اتحاد

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f\right)=y'\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right]-\frac{\partial f}{\partial x}$$

نتیجه می‌شود، زیرا $\partial f/\partial x=0$ وجملهٔ داخل‌کروشهٔ طرف راست، بنابر معادلهٔ اویلر،صفر است.

اکنون ازاین ابزار درمورد سه مسئله‌ای که دربخش ۴۷ بیان کردیم، استفاده‌می کنیم.
مثال ۱. برای پیدا کردن کوتاهترین‌منحنی‌واصل بین دونقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) ـ که به‌طور حسی می‌دانیم یك خط مستقیم است ـ باید انتگرال طول قوس را می‌نیمم کنیم

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

متغیرهای x و y در $f(y')=\sqrt{1+(y')^2}$ ظاهر نشده‌اند. بنابراین، این مسئله به‌حالت الف مربوط می‌شود. چون

$$f_{y'y'}=\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=\frac{1}{[1+(y')^2]^{3/2}}\neq 0$$

از حالت الف داریم که اکسترمال‌ها یك دستهٔ دوپارامتری از خطوط مستقیم به‌صورت $y=c_1x+c_2$ هستند. شرایط مرزی، خط

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \tag{11}$$

را به‌عنوان منحنی ایستی به‌دست می‌دهد، و البته این همان خط مستقیمی است که دونقطهٔ مزبور را به‌هم وصل می‌کند. باید توجه کرد که این بررسی تنها نمایشگر این مطلب است که اگر I دارای یك مقدار ایستی‌باشد، آنگاه منحنی‌ایستی مربوطه باید خط مستقیم(۱۱) باشد. ولی، از هندسه می‌دانیم که I هیچ منحنی ماکزیمم کننده‌ای ندارد ولی یك منحنی می‌نیمم کننده دارد، پس به‌این‌طریق نتیجه می گیریم که (۱۱) عملاً کوتاهترین منحنی‌متصل‌کنندهٔ دونقطه است.

دراین مثال ازطریق تحلیلی به‌نتیجهٔ واضحی دست یافتیم. یك مسئلهٔ بمراتب مشکل‌تر و جالب‌تر یافتن کوتاهترین منحنی بین دونقطهٔ ثابت از یك رویهٔ مفروض است به طوری که این منحنی به‌طورکامل برویه واقع‌باشد. این منحنیها ژئودزیك خوانده می‌شوند، و بررسی خواص آنان یکی از موضوعات اصلی شاخه‌ای از ریاضیات، موسوم به هندسهٔ دیفرانسیل است.

مثال ۲. برای‌یافتن‌منحنی‌واصل‌بین نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) که سطح‌حاصل‌از دوران آن حول محور xها دارای مساحت می‌نیمم باشد، باید انتگرال

$$I=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \tag{12}$$

رامی نیمم کنیم. متغیر x در $f(y, y')=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$ ظاهر نشده است. بنابراین از حالت ج می‌دانیم که، معادلهٔ اویلر به‌صورت

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}-y\sqrt{1+(y')^2}=c_1$$

درمی‌آید، که بعداز ساده شدن به

$$c_1 y' = \sqrt{y^2 - c_1^2}$$

تبدیل می‌شود. با جداکردن متغیرها و انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

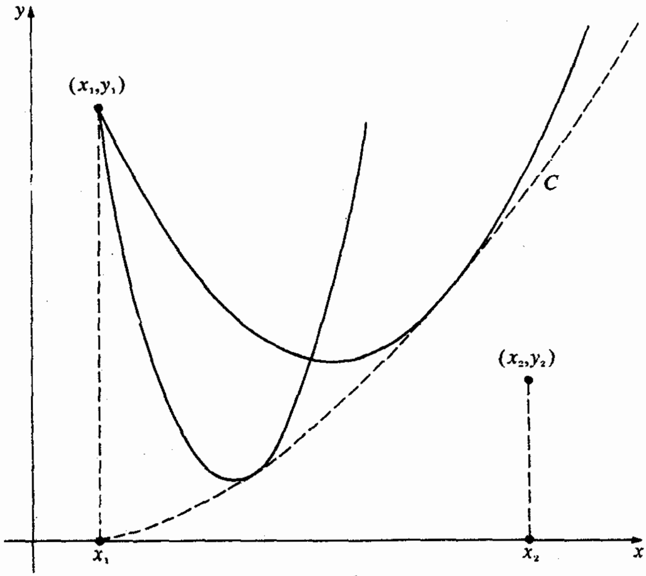
$$x = c_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = c_1 \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1}\right) + c_2$$

که با حل آن برحسب y خواهیم داشت

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) \tag{۱۳}$$

بنابراین اکسترمال‌ها به‌صورت منحنیهای زنجیری خواهند بود، و رویهٔ با سطح می‌نیمم اگر موجود باشد از دوران منحنی زنجیری حاصل می‌گردد. مسئلهٔ بعدی این است که ببینیم آیا پارامترهای c_1 و c_2 را در واقع می‌توان چنان یافت که منحنی (۱۳) نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را به‌هم متصل نماید یا نه.

انتخاب این پارامترها به‌گونهٔ غیرمنتظره‌ای مشکل است. هرگاه منحنی (۱۳) از اولین نقطه، یعنی (x_1, y_1)، عبورکند، آنگاه یك پارامتر آزاد باقی می‌ماند. دوعضو از این خانوادهٔ یك پارامتری درشکل ۷۵ نشان داده شده‌اند. می‌توان ثابت کرد که این منحنیها همگی برمنحنی نقطه‌چین C مماس هستند و بنابراین هیچ‌یك از منحنیهای این خانواده نمی‌تواند C را قطع کند. به‌این‌ترتیب هنگامی که دومین نقطه (x_2, y_2) زیر C قرار داشته



شکل ۷۵

باشد، همان‌طوری که درشکل ۷۰ نشان‌داده شده است، هیچ منحنی زنجیری ماربرهردونقطه موجود نیست و هیچ گونه تابع ایستی وجود ندارد. دراین حالت می‌توان دریافت که سطوح کوچکتر وکوچکتری توسط منحنیهایی ایجاد می گردند، که به‌خط نقطه‌چینی که نقطهٔ (x_1, y_1) را به $(x_1, 0)$ و این نقطه را به $(x_2, 0)$ و بالاخره نقطهٔ اخیر را به (x_2, y_2) وصل می کند، میل می کنند وبنابراین هیچ‌منحنی پذیرفتنی که یك رویهٔ می‌نیمم تولیدکند وجود ندارد. درحالتی که نقطهٔ دوم بالای منحنی C قرار گیرد، دومنحنی زنجیری از این دونقطه می گذرند، وبنابراین دوتابع ایستی موجودند لیکن تنها منحنی زنجیری بالایی، رویهٔ با سطح می‌نیمم را ایجاد می کند. سرانجام، زمانی که نقطهٔ دوم روی C قرار گیرد تنها یك تابع ایستی موجود است، ولی رویهٔ ایجاد شده به‌وسیلهٔ آن دارای سطح می‌نیمم نخواهد بود.[1]

مثال ۳. برای پیدا کردن منحنی با کوتاهترین زمان سقوط مربوط به‌شکل ۶۸، باید انتگرال

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{\sqrt{2gy}}}\,dx$$

رامی‌نیمم کنیم. این‌بار نیز متغیر x در $f(y,y')=\sqrt{1+(y')^2}/\sqrt{2gy}$ ظاهر نشده‌است، بنابراین باتوجه به‌حالت ج ، معادلهٔ اویلر به

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}-\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}=c_1$$

واین خود به

$$y[1+(y')^2]=c$$

ساده می‌شود، که دقیقاً همان معادلهٔ دیفرانسیل ۶ـ(۴) است که دربحث قبلی درمورد این مسئلهٔ مشهور حاصل شد. جواب این معادله دربخش۶ داده شده است. منحنی ایستی‌حاصل، چرخزاد است:

$$y=a(1-\cos\theta) \quad \text{و} \quad x=a(\theta-\sin\theta) \qquad (14)$$

که از غلتیدن دایره‌ای به‌شعاع a در زیر محور xها تولید می‌شود*، مقدار a چنان اختیار شده است که اولین قوس وارونهٔ ایجاد شده از نقطه (x_2, y_2) شکل ۶۸ بگذرد. همچون

---

۱. بحث کاملی از این احکام را همراه با اثباتهای مربوطه، می‌توان درمرجع زیر یافت،

G. A. Bliss, "Calculus of Variations," chap. IV, Carus Monograph no. 1, Mathematical Association of America, 1925.

* بیان کاملتر مطلب چنین است، این چرخزاد به‌وسیلهٔ حرکت نقطهٔ مشخص واقع بردایره‌ای به‌شعاع a که در زیر محور xها می‌غلتد حاصل می‌شود. (مترجمان)

گذشته، این استدلال تنها نشان می‌دهد که وقتی I دارای مینیموم باشد، درآن‌صورت منحنی ایستی مربوطه باید چرخزاد (۱۴) باشد. ولی، از ملاحظات فیزیکی بخوبی روشن است که I هیچ منحنی ماکزیمم کننده‌ای ندارد درحالی که منحنی می نیمم کننده دارد، پس چرخزاد زمان سقوط را واقعاً می‌نیمم می کند.

این بخش را با تعمیمی ساده ولی مهم از بررسی خود درمورد انتگرال (۱) به‌پایان می‌رسانیم. این انتگرال نمایش دهندهٔ ساده‌ترین نوع مسایل حساب تغییرات است، زیرا فقط شامل یك تابع مجهول است. ولی، برخی ازمسایلی که در زیر با آنها روبرومی‌شویم این‌قدر ساده نیستند، زیرا این مسایل به انتگرالهایی منجر می‌شوند که وابسته به دویا چند تابع مجهول هستند.

برای مثال فرض کنید بخواهیم شرایط لازمی را بیابیم که توابع $y(x)$ و $z(x)$ باید درآنها صدق کنند تا انتگرال زیر مقدار ایستی داشته باشد:

$$I=\int_{x_۱}^{x_۲} f(x، y، z، y'، z')\, dx \qquad (۱۵)$$

که درآن شرایط مرزی $y(x_۱)$ ، $z(x_۱)$ ، $y(x_۲)$ ، و $z(x_۲)$ ازقبل تعیین شده‌اند. درست همچون گذشته، توابع $\eta_۱(x)$ و $\eta_۲(x)$ راکه دارای مشتقات دوم پیوسته هستند و درنقاط انتهایی صفر می‌شوند معرفی می کنیم. ازاین‌جا توابع نزدیك به‌توابع y و z را به‌صورت $\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta_۱(x)$ ، $\bar{z}(x)=z(x)+\alpha\eta_۲(x)$ تشکیل می‌دهیم، و سپس تابعی‌از α راکه توسط رابطهٔ

$$I(\alpha)=\int_{x_۱}^{x_۲} f(x ، y+\alpha\eta_۱ ، z+\alpha\eta_۲ ، y'+\alpha\eta'_۱ ، z'+\alpha\eta'_۲)dx \qquad (۱۶)$$

تعریف می‌شود درنظر می گیریم. دراینجا نیز، درصورتی که $y(x)$ و $z(x)$ توابع ایستی باشند باید داشته باشیم $I'(۰)=۰$ ، بنابراین با محاسبهٔ مشتق (۱۶) و قرار دادن $\alpha=۰$ خواهیم داشت

$$\int_{x_۱}^{x_۲}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta_۱+\frac{\partial f}{\partial z}\eta_۲+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'_۱+\frac{\partial f}{\partial z'}\eta'_۲\right)dx=۰$$

یا ، هرگاه درعباراتی که شامل $\eta'_۱$ و $\eta'_۲$ هستند جزء‌به‌جزء انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_{x_۱}^{x_۲}\left\{\eta_۱(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]+\eta_۲(x)\left[\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right]\right\}dx=۰ \qquad (۱۷)$$

سرانجام، چون رابطهٔ (۱۷) باید برای هرانتخاب توابع $\eta_۱(x)$ و $\eta_۲(x)$ برقرار باشد ، بلافاصله به معادلات اویلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=۰ \quad و \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)-\frac{\partial f}{\partial z}=۰ \qquad (۱۸)$$

دست می‌یابیم. بنابراین، برای دستیابی به اکسترمال‌های این مسئله، باید دستگاه (۱۸) را حل کنیم. ناگفته پیداست که حل یك دستگاه معادلات مشکل، ازحل تنها یـك معادلهٔ مشکل، دشوارتر است؛ ولی اگر بتوان (۱۸) راحل کرد، آنگاه توابع ایستی را می‌توان باانتخاب جوابهایی که درشرایط مرزی مفروض صدق می‌کنند به‌دست آورد. همین ملاحظات را، بدون تغییر مهمی ، می‌توان درمورد انتگرالهایی مانند (۱۵) کـه شامل بیش‌از دو تابع مجهول باشند به‌کار برد.

تمرین

۱ـ مطلوب است تعیین اکسترمالهای انتگرال (۱) وقتی کـه تابع زیـر انتگرال عبارت باشد از

الف) $\dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}$

ب) $y^2-(y')^2$

۲ـ تابع ایستی انتگرال

$$\int_0^4 [xy'-(y')^2]\,dx$$

راکه باشرایط مرزی $y(0)=0$ و $y(4)=3$ مشخص می‌شود، به‌دست آورید.

۳ـ هرگاه تابع زیر انتگرال (۱) به‌صورت

$$a(x)(y')^2+2b(x)yy'+c(x)y^2$$

باشد، نشان‌دهید که معادلهٔ اویلر مربوطه، یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم است.

۴ـ هرگاه P و Q دونقطه از صفحه‌ای باشند، آنگاه طـول قوس یك منحنی از P بـه Q برحسب مختصات قطبی عبارت خواهد بود از

$$\int_P^Q ds=\int_P^Q \sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}$$

معادلهٔ قطبی خط مستقیم را با می‌نیمم کردن این انتگرال به‌دست آورید،

الف) درصورتی که θ متغیر مستقل فرض شود؛

ب) درحالتی که r متغیر مستقل فرض شود.

۵ـ دونقطهٔ P و Q را روی رویهٔ کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ درنظر بگیریـد، و ایـن رویه را بـه‌وسیلـهٔ مختصات کـروی θ و ϕ ، کـه در آنـها $x=a\sin\phi\cos\theta$ و $y=a\sin\phi\sin\theta$ و $z=a\cos\phi$، نشان‌دهید. فرض کنید $\theta=F(\phi)$ یك‌منحنی واقع بررویه باشد که نقاط P و Q را به‌هم وصل کند. نشان دهید که کوتاهترین این

منحنیها (منحنی‌ژئودزیك) قوسی از یك دایرهٔ عظیمه است، یعنی درصفحه‌ای که از مرکز می‌گذرد، قرار دارد. راهنمایی: طول قوس منحنی را به‌صورت

$$\int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$
$$= a\int_P^Q \sqrt{1 + \left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 \sin^2\phi}\, d\phi$$

نشان دهید، معادلهٔ اویلر را برحسب θ حل کنید، و نتیجه را مجدداً بـه مختصات قائم برگردانید.

۶ـ ثابت کنید هر ژئودزیك واقع برمخروط دوار قائم $z^2 = a^2(x^2+y^2)$، با $z \geqslant 0$، دارای خاصیت زیراست: هرگاه مخروط را درامتداد یك مولدش ببریم و به‌شکل صفحه‌ای مسطح درآوریم، آنگاه هرژئودزیك به‌خط مستقیمی تبدیل می‌شود. راهنمایی: مخروط را توسط روابط زیر به‌شکل پارامتری نمایش دهید.

$$x = \frac{r\cos(\theta\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}},\quad y = \frac{r\sin(\theta\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}},\quad z = \frac{ar}{\sqrt{1+a^2}}$$

نشان دهید که پارامترهای r و θ مختصات قطبی معمولـی روی صفحهٔ تسطیح مخروط هستند، ونشان دهید که هـر ژئودزیك $r = r(\theta)$ یك خط مستقیم دراین مختصات قطبی خواهد بود.

۷ـ هرگاه منحنی $y = g(z)$ را حول محور zها دوران دهیم، آنگاه رویهٔ حاصل از دوران دارای معادلـه‌ای به‌صورت $x^2 + y^2 = g(z)^2$ خـواهد بـود. یك نمایش پارامتری مناسب این رویه به‌صورت

$$x = g(z)\cos\theta,\quad y = g(z)\sin\theta,\quad z = z$$

است که درآن، θ زاویهٔ قطبی درصفحهٔ xy است. نشان دهید کـه معادلهٔ هـر ژئودزیك $\theta = \theta(z)$ دراین رویه به‌صورت زیر است

$$\theta = c_1 \int \frac{\sqrt{1 + [g'(z)]^2}}{g(z)\sqrt{g(z)^2 - c_1^2}}\, dz + c_2$$

۸ـ هرگاه رویهٔ دوار درمسئلهٔ ۷ استوانهٔ مدور قائمی باشد، نشان‌دهید کـه هر ژئودزیك به‌صورت $\theta = \theta(z)$ یك مارپیچ یا یك مولد است.

۴۹. مسائل هم‌پیرامونی

یونانیان باستان مسئلهٔ یافتن منحنی‌مسطح بسته‌ای باطول مفروض را، که‌دارای بیشترین‌سطح محصور باشد، مطرح کردند. آنان این مسئله را مسئله هم‌پیرامونی نـامیدند و تـوانستند

به گونه‌ای کم‌وبیش دقیق نشان دهند که جواب بدیهی، یعنی دایره، صحیح است.[۱] اگر منحنی به‌صورت پارامتری $x=x(t)$ و $y=y(t)$ نمایش داده شود، و با ازدیاد t از t_1 به t_2 یك‌بار درجهت عکس عقربه‌های ساعت طی شود، آنگاه مساحت محصور عبارت خواهد بود از

$$A=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt \tag{1}$$

که انتگرالی وابسته به دوتابع مجهول است.[۲] چون طول قوس منحنی برابر است با

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{2}$$

مسئله عبارت از ماکزیمم کردن (۱) است با این شرط جانبی که انتگرال (۲) باید مقدار ثابتی باشد. عبارت مسئلهٔ هم‌پیرامونی عموماً به‌حالت کلیتری اطلاق می‌شود که یافتن اکسترمالهای یك انتگرال، مشروط به‌این که انتگرالی دیگرمساوی بامقداری مفروض گردد، را دربر گیرد.

همچنین شرایط جنبی متناهی را، که شامل انتگرالها و یا مشتقها نمی‌شوند درنظر خواهیم گرفت. مثلاً، اگر

$$G(x, y, z)=0 \tag{3}$$

رویهٔ مفروضی باشد، دراین‌صورت هرمنحنی واقع براین رویه به طور پارامتری به وسیلهٔ سه‌تابع $x=x(t)$، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ که درمعادلهٔ (۳) صدق می کنند، تعیین‌می‌شود، ومسئلهٔ پیدا کردن ژئودزیکها، به مسئلهٔ می نیمم کردن انتگرال طول قوس

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \tag{4}$$

مشروط به‌شرط جانبی (۳)منتهی می‌شود.

ضرایب لاگرانژ. لازم است‌مطلب را با بررسی برخی مسائل‌حساب‌دیفرانسیل مقدماتی که کاملا شبیه مسائل هم‌پیرامونی‌اند آغاز کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید بخواهیم نقاط

---

۱. مراجعه شود به

B. L. Van der Waerden, "Science Awakening," pp. 268–269, Oxford University Press, London, 1961;

ونیز به

G. Polya, "Induction and Analogy in Mathematics," chap. 10, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

۲. فرمول (۱) حالت خاصی ازقضیهٔ گرین است. تمرین ۱ را نیز ببینید.

(x , y) را چنان بیابیم که مقادیر ایستی تابعی مانند $z=f(x , y)$ را بـه‌دست دهند، مشروط به‌اینکه x و y مستقل نباشند بلکه به‌وسیلهٔ رابطهٔ

$$g(x , y)=0 \tag{۵}$$

به‌هم‌مربوط شوند. روش معمول این‌است که یکی از متغیرهای x و y ، مثلا x، را بدلخواه به‌عنوان متغیرمستقل در رابطهٔ (۵) فرض کنیم، و متغیر دوم را به‌عنوان تابعی از آن درنظر بگیریم، به‌طوری‌که dy/dx را بتوان از رابطهٔ زیر محاسبه‌کرد:

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}=0$$

سپس ازاین‌حقیقت‌استفاده می‌کنیم که‌z اکنون تابعی‌صرفاً از‌x است. بنابراین $dz/dx=0$ یك شرط لازم برای این است که z دارای مقدار ایستی باشد، پس

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}=0$$

یا

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0 \tag{۶}$$

باحل دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی (۵) و (۶) ، نقاط (x , y) موردنظر را خواهیم‌یافت.[۱]

یك نقص این روش این است کـه متغیرهای x و y به‌شکل متقارنی ظاهر می‌شونـد ولی‌باآنها به‌طور غیرمتقارن رفتارمی‌شود. همین مسئله رامی‌توان‌باروش دیگری حل‌کردکه ظریفتر است و امتیازات کاربردی متعددی نیز دارد.

تابع

$$F(x , y , \lambda)=f(x , y)+\lambda g(x , y)$$

را تشکیل می‌دهیم و مقادیر ایستی نامقید آن‌را توسط شرایط لازم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0\\
\frac{\partial F}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda}&=g(x , y)=0
\end{aligned} \tag{۷}$$

---

۱. البته درحالتهای خیلی ساده می‌توانیم (۵) را برحسب y به‌صورت تابعی‌از x حـل کنیم و آن‌را در $z=f(x , y)$ بگذاریم، که z رابه‌صورت تابعی صریح از x به‌دست دهد؛ آنچه‌باقی می‌ماند محاسبهٔ dz/dx است، سپس معادلهٔ $dz/dx=0$ را حل می‌کنیم و yهای مربوطه را می‌یابیم.

بررسی می‌کنیم. هرگاه λ از دومعادلهٔ اول حذف شود، دستگاه آشکارا به

$$g(x , y)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0$$

یعنی همان دستگاهی که آن‌را درپاراگراف بالا به‌دست آوردیم، تبدیل می‌شود. باید توجه داشت که این شیوه ــحل دستگاه (۷) بــرحسب x و yــ مسئلهٔ مورد نظر را به‌طریقی حل می‌کند که از دو نظرعمده برای‌کارنظری مهم‌است: تقارن مسئله با انتخاب دلخواه یك متغیر مستقل به‌هم نمی‌خورد؛ وشرط جانبی را به‌بهای ناچیز معرفی λ به‌عنوان یك متغیر دیگــر حذف‌می‌کند. پارامتر λ ضریب لاگرانژ خوانده می‌شود، واین‌روش به روش ضرایب‌لاگرانژ معروف است[1]. این مبحث، بروشنی، به‌مسائلی شامل توابعی با بیش‌از دومتغیر و با چندین شرط جانبی تعمیم می‌پذیرد.

شرایط جانبی انتگرالی. دراینجامی‌خواهیم معادلهٔ دیفرانسیلی‌پیداکنیم که تابعی‌مانند $y(x)$، که مقداری ایستی به انتگرال زیر می‌دهد، درآن صدق کند

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x , y , y')\,dx \tag{8}$$

که درآن ، y مقید به‌شرط جانبی

$$J=\int_{x_1}^{x_2} g(x , y , y')\,dx=c \tag{9}$$

است ومقادیر مفروض $y(x_1)=y_1$ و $y(x_2)=y_2$ را درنقاط انتهایی می‌پذیرد. همچون گذشته، فرض‌می‌کنیم که $y(x)$ تابع ایستی موردنظرباشد وآن‌راکمی تغییر می‌دهیم تاشرط تحلیلی موردنظر به دست‌آید. اما، به‌این مسئله نمی‌توان باروش قبلی،که درآن توابع‌نزدیك به $y(x)$ را به صورت $\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$ درنظر می‌گرفتیم، برخورد کرد، زیــرا بااین توابع درحالت‌کلی انتگرال J ثابت نمی‌ماند. درعوض ، یك خانوادهٔ دو پارامتری از توابع نزدیك y را درنظر خواهیم گرفت

$$\bar{y}(x)=y(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x) \tag{10}$$

که درآن $\eta_1(x)$و$\eta_2(x)$ دارای‌مشتقات‌پیوستهٔ مرتبهٔ دوم‌اند و درنقاط انتهایی‌صفرمی‌شوند. پارامترهای α_1 و α_2 مستقل نیستند بلکه باشرط

$$J(\alpha_1 , \alpha_2)=\int_{x_1}^{x_2} g(x , \bar{y} , \bar{y}')\,dx=c \tag{11}$$

به‌هم مربوط می‌شوند. به‌این‌ترتیب مسئله به‌یافتن شرایط لازم برای‌آنکه تابع

---

۱. شرح مختصری دربارهٔ لاگرانژ درپیوست الف آورده شده است.

$$I(\alpha_1 , \alpha_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x , \bar{y} , \bar{y}')dx \qquad (12)$$

دارای یک‌مقدار ایستی در $\alpha_1=\alpha_2=0$ باشد منجر می‌گردد، که در آن α_1 و α_2 درشرط (۱۱) صدق می‌کنند. این وضعیت برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ مهیا شده است، بنابراین، تابع زیر را معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned} K(\alpha_1 , \alpha_2 , \lambda) &= I(\alpha_1 , \alpha_2)+\lambda J(\alpha_1 , \alpha_2) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x , \bar{y} , \bar{y}')dx \end{aligned} \qquad (13)$$

که درآن

$$F=f+\lambda g$$

و با استفاده از شرایط لازم

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial K}{\partial \alpha_2}=0 \qquad \text{برای } \alpha_1=\alpha_2=0 \text{ ،} \qquad (14)$$

مقادیر ایستی غیرمقید آن‌را در $\alpha_1=\alpha_2=0$ بررسی می‌کنیم. هرگاه از تابع زیرعلامت انتگرال (۱۳) مشتق بگیریم و از رابطهٔ (۱۰) استفاده کنیم، داریم

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}\eta_i(x)+\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'}\eta_i'(x)\right]dx \qquad \text{برای } i=1 \text{ و } 2 \text{ ،}$$

و با قرار دادن $\alpha_1=\alpha_2=0$ ، براساس (۱۴) خواهیم داشت

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta_i(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta_i'(x)\right]dx=0$$

این رابطه، بعداز انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء دومین عبارت، به

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta_i(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx=0 \qquad (15)$$

تبدیل می‌شود. چون $\eta_1(x)$ و $\eta_2(x)$ هردو دلخواه هستند، دوشرط نهفته در (۱۵) تنها به‌یک شرط منتهی می‌شوند، وطبق معمول نتیجه می‌گیریم که تابع ایستی $y(x)$ باید در معادلهٔ اویلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad (16)$$

صدق کند. جوابهای این معادله (اکسترمال‌های مسئله) شامل سه پارامتر نامعین هستند:

دو ثابت انتگرال‌گیری، وضریب لاگرانژ λ. سپس تابع ایستی از بین این اکسترمال‌ها چنان انتخاب می‌شود که در دو شرط مرزی صدق کند و مقدار انتگرال J را برابر با مقدار مفروض c گرداند.

درمورد انتگرال‌هایی که بستگی به دو یا چند تابع داشته‌باشند، به همان روش بخش گذشته می‌توان این نتیجه را تعمیم داد. مثلا هرگاه انتگرال

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z')dx$$

دارای مقدارایستی،مشروط به شرط جانبی

$$J=\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, z, y', z')dx=c$$

باشد، توابع‌ایستی $y(x)$ و $z(x)$ باید در دستگاه معادلات

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}=0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{۱۷}$$

صدق کنند، که درآن $F=f+\lambda g$. استدلال دراین مورد به استدلالی که قبلا عرضه‌شده، شبیه است، و جزئیات آن را حذف می‌کنیم.

مثال ۱. منحنی باطول ثابتL رابیابیدکه دونقطهٔ $(0, 0)$و$(1, 0)$ را به هم وصل می‌کند،بالای محور xها واقع است وسطح‌محصور بین‌آن ومحور xها ماکزیمم است. این صورت خاصی از مسئلهٔ اولیهٔ هم‌پیرامونی است‌که درآن بخشی از منحنی محصور کنندهٔ مساحت موردنظر قطعه خط مستقیمی باطول یك است. مسئله عبارت است از ماکزیمم کردن $\int_0^1 y\,dx$ با شرط جانبی

$$\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx=L$$

و شرایط مرزی $y(0)=0$ و $y(1)=0$. دراینجا داریم $F=y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}$ ، بنابراین، معادلهٔ اویلر عبارت خواهد بود از

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)-1=0 \tag{۱۸}$$

که ، بعداز مشتق‌گیری به صورت

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{1}{\lambda} \tag{۱۹}$$

درمی‌آید. دراین حالت،انتگرال‌گیری لازم نیست، زیرا (۱۹) بلادرنگ بیان می‌کند که

انحنا ثابت و برابر $1/\lambda$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که منحنی ماکـزیمم‌کنندهٔ مطلوب، قوسی از دایره‌ای به شعاع λ است (همان طور که انتظار می‌رفت). به عنوان روشی دیگر، می‌توانیم از رابطهٔ (۱۸) انتگرال بگیریم تا رابطهٔ

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{x-c_1}{\lambda}$$

حاصل شود. با حل این رابطه برحسب y' و انتگرال‌گیری مجدد، خواهیم داشت

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2 \tag{۲۰}$$

که البته این معادلهٔ دایره‌ای به‌شعاع λ است.

مثال ۲. درمثال ۱ ضرورت $L>1$ روشن‌است. همچنین اگر $L>\pi/2$، قوس‌دایرهٔ تعیین شده به‌وسیلهٔ (۲۰) تابع $y>0$ را به‌عنوان تابعی تك‌مقداری از x تعریف نمی‌کند. برای‌اجتناب ازاین مطالب مصنوعی، می‌توان منحنیها را به‌صورت پارامتری $x=x(t)$ و $y=y(t)$ درنظر گرفت و به‌مسئلهٔ هم‌پیرامونی اولیه که ماکزیمم کردن

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y}-y\dot{x})dt$$

(که درآن $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ و $\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}$) با شرط جانبی

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=L$$

است، توجه‌کرد. دراینجا داریم

$$F=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

بنابراین معادلات اویلر (۱۷) عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y+\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)-\frac{1}{2}\dot{y}=0$$

و

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)+\frac{1}{2}\dot{x}=0$$

از این معادلات می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت و به‌دست آورد

$$x+\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=c_2 \quad \text{و} \quad -y+\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=-c_1$$

اگر مقادیر $x-c_2$ و $y-c_1$ را بیابیم، به توان دو برسانیم، وجمع کنیم ، آنگاه نتیجه به صورت

$$(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\lambda^2$$

خواهد بود، بنابراین، منحنی ماکزیمم‌کننده دایره است. این‌نتیجه را می‌توان به طریق زیر بیان‌کرد: هرگاه L طول منحنی بستهٔ مسطح و A مساحت سطح محصور به آن باشد، آنگاه $A\leqslant L^2/4\pi$ ، و تساوی وقتی وفقط وقتی برقرار است که منحنی دایره باشد. رابطه‌ای ازاین نوع را نامساوی هم‌پیرامونی گوییم.[1]

شرایط جانبی متناهی. درآغاز این بخش مسئلهٔ یافتن ژئودزیک‌های رویهٔ مفروض

$$G(x , y , z)=0 \tag{۲۱}$$

را بیان کردیم. حال مسئلهٔ کمی عمومی‌تر را درنظر می‌گیریم و آن عبارت است از یافتن یك منحنی فضایی $x=x(t)$ و $y=y(t)$ و $z=z(t)$ که مقدار ایستی به انتگرال

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\dot x , \dot y , \dot z)dt \tag{۲۲}$$

می‌دهد، بااین شرط که این منحنی باید روی رویهٔ (۲۱) قرار داشته باشد.

روشی که به‌کار می گیریم، حذف شرط جانبی (۲۱) است، و برای این‌کار به‌طریق زیر عمل می‌کنیم. فرض‌اینکه منحنی دربخشی از رویه واقع باشد، که درآن $G_z\neq 0$ ، به‌هیچ وجه ازکلیت مسئله نمی‌کاهد. دراین‌بخش از رویه، معادلهٔ (۲۱) رامی‌توان برحسب z حل‌کرد، که $z=g(x , y)$ را به‌دست می‌دهد و

$$\dot z=\frac{\partial g}{\partial x}\dot x+\frac{\partial g}{\partial y}\dot y \tag{۲۳}$$

هنگامی‌که (۲۳) را در (۲۲) قرار دهیم، مسئله به یافتن توابع ایستی غیرمقید برای انتگرال

$$\int_{t_1}^{t_2} f\left(\dot x , \dot y , \frac{\partial g}{\partial x}\dot x+\frac{\partial g}{\partial y}\dot y\right)dt$$

منجر می‌شود. از بخش گذشته می‌دانیم که معادلات اویلر ۴۸-(۱۸) برای این مسئله عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot x}+\frac{\partial f}{\partial \dot z}\ \frac{\partial g}{\partial x}\right)-\frac{\partial f}{\partial \dot z}\ \frac{\partial \dot z}{\partial x}=0$$

---

۱. دانشجویان فیزیك می‌توانند از مطالب بحث شده درمرجع زیر بهره جویند

G. Polya and G. Szegö, "Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

و

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}+\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\ \frac{\partial g}{\partial y}\right)-\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial y}=0$$

از (۲۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial y}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \quad و \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

بنابراین، معادلات اویلر را می‌توان به شکل

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)+\frac{\partial g}{\partial y}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right)=0 \quad و \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right)=0$$

نوشت. حال اگر تابع $\lambda(t)$ را به صورت

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right)=\lambda(t)G_z \tag{۲۴}$$

تعریف کنیم، و از روابط $\partial g/\partial x=-G_x/G_z$ و $\partial g/\partial y=-G_y/G_z$ استفاده کنیم، معادلات اویلر به شکل

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)=\lambda(t)G_x \tag{۲۵}$$

و

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)=\lambda(t)G_y \tag{۲۶}$$

درخواهند آمد. بنابراین یك شرط لازم برای یك مقدار ایستی وجود تابعی همچون $\lambda(t)$ است که در روابط (۲۴) ، (۲۵) ، و (۲۶) صدق کند. با حذف $\lambda(t)$ ، معادلات متقارن زیر حاصل می‌شوند

$$\frac{(d/dt)(\partial f/\partial \dot{x})}{G_x}=\frac{(d/dt)(\partial f/\partial \dot{y})}{G_y}=\frac{(d/dt)(\partial f/\partial \dot{z})}{G_z} \tag{۲۷}$$

که همراه با (۲۱) اکسترمال‌های مسئله را به دست خواهند داد. ذکر این نکته جالب است که معادلات (۲۴) ، (۲۵) ، و (۲۶) را می‌توان به‌عنوان معادلات اویلر برای یافتن توابع ایستی غیر مقید انتگرال

$$\int_{t_1}^{t_2}[f(\dot{x},\dot{y},\dot{z})+\lambda(t)G(x,y,z)]dt$$

تلقی کرد. این بسیار شبیه به نتیجه‌ای است که درمورد شرایط جانبی انتگرالی به دست آوردیم با این تفاوت که در اینجا ضریب، به جای یك ثابت نامعین، تابعی نامعین از t است.

اگر درحالت مربوط به تعیین ژئودزیک‌های رویهٔ (۲۱) از این نتایج استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

معادلات(۲۷) به صورت

$$\frac{(d/dt)(\dot{x}/f)}{G_x} = \frac{(d/dt)(\dot{y}/f)}{G_y} = \frac{(d/dt)(\dot{z}/f)}{G_z} \qquad (۲۸)$$

درمی‌آیند، ومسئله عبارت از استخراج اطلاعات از این دستگاه است.

مثال ۳. اگـر رویـهٔ (۲۱) را کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ انتخاب کنیم، آنگاه $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$، و رابطهٔ (۲۸) به صورت

$$\frac{f\ddot{x} - \dot{x}\dot{f}}{2xf^2} = \frac{f\ddot{y} - \dot{y}\dot{f}}{2yf^2} = \frac{f\ddot{z} - \dot{z}\dot{f}}{2zf^2}$$

درمی‌آید، که می‌توان آن‌را به شکل

$$\frac{x\ddot{y} - y\ddot{x}}{x\dot{y} - y\dot{x}} = \frac{\dot{f}}{f} = \frac{y\ddot{z} - z\ddot{y}}{y\dot{z} - z\dot{y}}$$

نوشت . اگر از جملهٔ وسطی چشم‌پوشی کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{(d/dt)(x\dot{y} - y\dot{x})}{x\dot{y} - y\dot{x}} = \frac{(d/dt)(y\dot{z} - z\dot{y})}{y\dot{z} - z\dot{y}}$$

با یك بار انتگرال‌گیری داریم $x\dot{y} - y\dot{x} = c_1(y\dot{z} - z\dot{y})$ یا

$$\frac{\dot{x} + c_1\dot{z}}{x + c_1 z} = \frac{\dot{y}}{y}$$

ویك انتگرال‌گیری دیگر، معادلهٔ $x + c_1 z = c_2 y$ را به دست می‌دهد. این‌معادلهٔ صفحه‌ای ماربر مبدأ است، بنابراین‌ژئودزیکها روی کره، کمانهایی از دوایر عظیمه‌اند. روش دیگری برای رسیدن به همین‌نتیجه، درتمرین ۴۸ــ۵ ارائه شده است.

دراین مثال توانستیم معادلات (۲۸) را بسادگی حل‌کنیم، ولی درحالت‌کلی این‌کار فوق‌العاده مشکل است. اهمیت اصلی این معادلات درارتباط آنها با ایـن نتیجهٔ بسیار مهم فیزیك‌ریاضی نهفته است‌که: هرگاه ذره‌ای ، بدون اعمال هیچ‌گونه نیروی خـارجی بدان، روی رویه‌ای بلغزد، مسیرآن ژئودزیك خواهدبود. این قضیهٔ دینامیکی را درپیوست ب ثبت خواهیم‌کرد. برای این بحث بهتر است فرض‌کنیم پارامتر t طول قوس s از منحنی است، به طوری‌که $f = 1$ ومعادلات (۲۸) به‌صورت

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x} = \frac{d^2y/ds^2}{G_y} = \frac{d^2z/ds^2}{G_z} \qquad (۲۹)$$

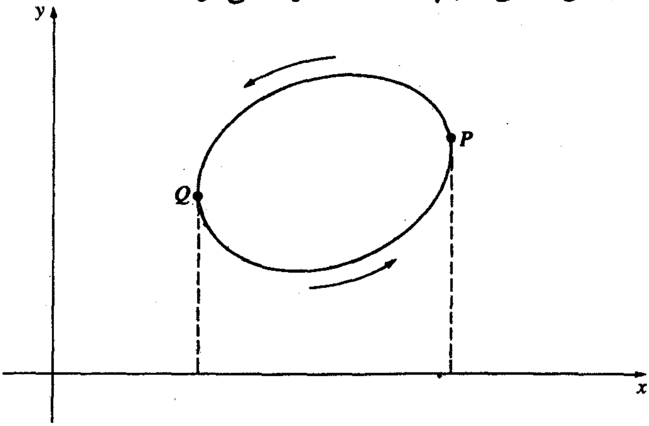
درمی‌آیند.

تمرین

۱ـ برای یك منحنی محدب بسته همانند آنچه درشکل ۷۱ نشان داده‌ایم، خود را درمورد اعتبار رابطهٔ (۱) قانع کنید. راهنمایی: معنای هندسی حاصل‌جمع

$$\int_P^Q y dx + \int_Q^P y dx$$

چیست؟درا ینجا، اولین‌انتگرال‌درقسمت بالایی‌منحنی از راست به چپ و دومین‌انتگرال روی قسمت پایینی منحنی ازچپ به راست گرفته می‌شود.



شکل ۷۱

۲ـ رابطهٔ (۱) را برای دایره‌ای که معادلهٔ پارامتری آن به‌صورت $x = \mathrm{a}\cos \mathrm{t}$ ، $y = \mathrm{a}\sin \mathrm{t}$ ، و $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ است، تحقیق کنید.

۳ـ مسائل زیر را به روش ضرایب‌لاگرانژ حل کنید:

الف) نزدیکترین نقطه ازصفحهٔ $ax+by+cz=d$ به مبدأ را پیدا کنید. راهنمایی: تابع $w=x^2+y^2+z^2$ را با شرط جانبی $ax+by+cz-d=0$ می‌نیمم کنید.

ب) نشان‌دهید ازمیان‌مثلثهایی که دارای‌محیط ثابت‌مفروضی‌هستند مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین‌مساحتA را دارد. راهنمایی: اگر x ، y و z طول‌اضلاع باشند دراین صورت $A=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ ، که درآن $s=(x+y+z)/2$.

ج) هرگاه حاصل‌جمع اعداد مثبت x_1 ، x_2 ، ... ، x_n مقدار ثابت s باشد، ثابت کنید ماکزیمم حاصل‌ضرب آنان ، $x_1x_2 \dots x_n$ ، برابر با s^n/n^n است و از این نتیجه بگیرید که میانگین هندسی n عدد مثبت نمی‌تواند از میانگین حسابی آنها تجاوز کند:

$$\sqrt[n]{x_1x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

۴ـ سطح زیر یك منحنی واقع در ربع اول که نقاط (۰ ، ۰) و (۱ ، ۰) را به هم وصل می‌کند مقدار ثابت مفروضی است. نشان دهید کوتاهترین منحنی ازاین نوع، قوسی از دایره است.

۵ـ یك زنجیر یکنواخت انعطاف‌پذیر باطول معین بین دونقطه آویزان شده است، شکل آن‌را با فرض اینکه زنجیر چنان آویزان شود که انرژی پتانسیل آن مینیمم شود، به دست آورید.

۶ـ مسئلهٔ اصلی هم‌پیرامونی (مثال ۲) را با به‌کاربردن مختصات قطبی حل‌کنید. راهنمایی: مبدأ مختصات را نقطهٔ دلخواهی از منحنی، ومحور قطبی را خط مماس برمنحنی درآن نقطه فرض کنید، آنگاه مقدار

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi r^2 d\theta$$

را بااین شرط جانبی که انتگرال

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$$

مقدار ثابتی باشد ماکزیمم کنید.

۷ـ نشان دهید که ژئودزیکهای استوانه‌ای به معادلهٔ $g(x, z) = 0$ زاویهٔ ثابتی با محور yها می‌سازند.

پیوست الف. لاگرانژ

ژوزف لویی لاگرانژ[1] (۱۷۳۶ـ۱۸۱۳) از هندسه بیزار بود ولی کشفیات برجسته‌ای درحساب تغییرات و مکانیك تحلیلی دارد. وی همچنین در تدوین نظریهٔ اعداد و جبر سهم داشت، و به‌آن جریان فکری که بعداً توسط گاوس و آبل تقویت گردید، کمك کرد. زندگی ریاضی وی‌را می‌توان گسترش طبیعی کارهای هم‌عصر مسن‌تر ومهمتر وی یعنی اویلر دانست، که در بسیاری جهات کارهای اورا به پیش راند و آنها را پالایش کرد.

لاگرانژ در تورینو از نیاکان مختلط فرانسوی ـ ایتالیایی به‌دنیا آمد. در دوران کودکی به هنر و ادبیات بیش‌از علوم علاقه داشت. اما هنوز در مدرسه بود که علاقهٔ وی به‌ریاضی، باخواندن مقاله‌ای از ادموند هالی در موردکاربردهای جبر درنورشناسی، شعله‌ور گردید. وی آنگاه یك دوره مطالعات مستقل را آغاز کرد، و آنچنان بسرعت پیشرفت کرد که درسن ۱۹ سالگی درمدرسهٔ سلطنتی نظام شهر تورینو به‌سمت استادی منصوب گردید.[2]

---

1. Joseph Louis Lagrange

۲. به‌مقالهٔ پرارزش زیر مراجعه‌کنید:

George Sarton, Lagrange's Personality, *Proc. Am. Phil. Soc.*, vol. 88, pp. 457-496, 1944.

آثار لاگرانژ در حساب تغییرات از اولین و مهمترین کارهای اوست. درسال ۱۷۵۵ وی روش ضرایب خود را برای حل مسئلهٔ هم‌پیرامونی به اطلاع اویلر رساند. این مسائل سالها ذهن اویلر را بعبث مشغول کرده بود، چرا که از حد روشهای نیمه هندسی او فراتر بودند. اویلر بلافاصله پاسخ بسیاری از سؤالاتی راکه در اندیشه‌اش بود دریافت؛ ولی به لاگرانژ با مهربانی و گذشت قابل ستایش پاسخ گفت، و از انتشار کارهای خود صرف‌نظر کرد، چنانکه در نامه به‌لاگرانژ می‌نویسد «ازانتشار آنها خودداری‌کردم تا شما را ازهیچ بخشی ازافتخاراتی که به‌شما تعلق‌دارد محروم نکرده‌باشم.» لاگرانژچندسال دیگر به مطالعهٔ تحلیلی خود در حساب تغییرات ادامه داد، و هم او و هم اویلر آن را در مورد بسیاری از انواع جدید مسائل، بخصوص در مکانیك، به‌کار بردند.

درسال ۱۷۶۶ هنگامی که اویلر برلین را به قصد سن‌پترزبورگ ترك می‌کرد، به‌فردریك کبیر پیشنهادکردکه از لاگرانژ برای جانشینی وی دعوت به عمل آید. لاگرانژ این‌دعوت را پذیرفت وتا هنگام مرگ فردریك درسال ۱۷۸۶ به مدت ۲۰ سال دربرلین به سر برد. دراین مدت وی به طور گسترده در جبر و نظریهٔ اعدادکار می‌کرد، و شاهکار خود، رسالهٔ مکانیك تحلیلی (۱۷۸۸) را، تحریر کرد، و در آن مکانیك عمومی را یکپارچه کرد، و همچنانکه همیلتن بعدها گفت، ازآن «نوعی شعر علمی» ساخت. از میراثهای جاویدان این اثر می‌توان از معادلات حرکت لاگرانژ، مختصات تعمیم یافته، و مفهوم انرژی پتانسیل نام برد (که همگی درپیوست ب، مورد بحث‌قرار می‌گیرد).[1]

بعداز مرگ فردریك، فضای دربار پروس برای دانشمندان نسبتاً نامطبوع شد، از این رو لاگرانژ دعوت لویی شانزدهم را برای‌عزیمت به‌پاریس پذیرفت، و درآنجا به وی آپارتمانی در لوور واگذارکردند. لاگرانژ باوجود آنهمه نبوغ‌عظیم، متواضع و بی‌تعصب بود. وگرچه همنشین اشراف و در واقع خود نیز یکی از آنها بود، در طول ناآرامیهای انقلاب فرانسه مورد احترام و توجه همهٔ احزاب بود. مهم‌ترین‌کار وی در این دوران نقش هدایت کننده و پیشتازش درایجاد دستگاه متریك در مورد اوزان و مقادیر است. در ریاضیات، وی سعی کرد پایه‌ای قابل قبول برای فرایندهای اساسی آنالیز عرضه کند، ولی این‌تلاشها عمدتاً بی‌ثمر ماند. دراواخر عمر، حس‌کردکه ریاضیات به بن‌بست رسیده است و فیزیك، شیمی، زیست‌شناسی، و دیگر علوم تواناترین مغزهای آینده را به خود جلب خواهند کرد. این بدبینی ممکن بودکه از بین رود، اگر وی می‌توانست ورود گاوس و آیندگانش را به صحنه پیش‌بینی کند، کسانی که قرن نوزدهم‌را به غنی‌ترین‌مرحلهٔ تاریخ طولانی ریاضیات تبدیل کردند.

پیوست ب. اصل همیلتن و نتایج آن

یکی از اهداف ریاضیدانان قرن ۱۸ کشف یك اصل عمومی بود که از آن بتوان مکانیك

---

۱. برای‌آشنایی باجنبه‌های جالبی ازمکانیك لاگرانژی (وبسیاری مطالب دیگر) نگاه‌کنید به: S. Bochner, "The Role of Mathematics in the Rise of Science," pp. 199–207, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1966.

نیوتنی را استنتاج کرد. درجستجوی یافتن رشتهٔکار، آنان به‌یك رشته از حقایق دقیق فیزیك مقدماتی توجه کردند: مثلا ، اینکه پرتو نور سریعترین مسیررا دریك محیط نوری‌می‌پیماید، اینکه شکل یك زنجیر آویخته درحالت تعادل انرژی پتانسیلش را می‌نیمم می‌کند ، و اینکه حبابهای‌کف صابون، شکلی با کمترین مساحت را برای یك حجم ثابت به خود می‌گیرند. این حقایق ونظایر آنها این فکررا به اویلر القاکردند که طبیعت اهداف گوناگون خودرا به پربازده‌ترین واقتصادی‌ترین وجه انجام می‌دهد ، اینکه درپشت پدیده‌های درهم وآشفته، سادگیهای پنهانی وجود دارد. این ایدهٔ ماوراءالطبیعه بودکه وی‌را به‌ایجاد حساب‌تغییرات به‌عنوان وسیلهٔ بررسی این چنین مسائلی رهنمون‌کرد. رویای اویلر تقریباً یك‌قرن بعد توسط همیلتن تحقق یافت.

اصل همیلتن. فرض می‌کنیم که ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی

$$\mathbf{F}=F_1\,\mathbf{i}+F_2\,\mathbf{j}+F_3\,\mathbf{k}$$

در فضا حرکت می‌کند ، و فرض می‌کنیم که این نیرو پایستار باشد ، به این معنی که کار انجام شده توسط این نیرو برای انتقال ذره ازیك نقطه به نقطهٔ دیگر ، مستقل ازمسیرباشد. بسادگی می‌توان نشان‌داد کــه تابع عددی $U(x,y,z)$ موجود است بـه قسمی کـه $\partial U/\partial x=F_1$ ، $\partial U/\partial y=F_2$ و $\partial U/\partial z=F_3$ باشند[1]. تـابع $V=-U$ انرژی پتانسیل ذره نامیده می‌شود، زیرا تغییر مقدار آن ازنقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر برابر باکاری‌است که باید در قبال $\mathbf{F}$ انجـام‌گیرد تا ذره از نقطهٔ اول به نقطهٔ دوم انتقال یابد. بعلاوه ، اگر $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ بردار موقعیت ذره باشد به طوری‌که

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

بترتیب سرعت و تندی ذره باشند ، آنگاه $T=mv^2/2$ انرژی جنبشی ذره خواهد بود.

اگر این ذره درزمانهای t_1 و t_2 درنقاط P_1 و P_2 باشد ، درآن صورت می‌خواهیم مسیری راکه ذره از P_1 به‌P_2 می‌پیماید بیابیم. عمل (یا انتگرال همیلتن) بـه این ترتیب تعریف می‌شود

$$A=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)\,dt$$

و در حالت‌کلی مقدار آن به مسیری‌کـه ذره هنگام عبور از P_1 به P_2 طی می‌کند بستگی دارد. نشان خواهیم دادکه مسیرواقعی ذره ، مسیری است‌که برای عمل A یك مقدار ایستی به‌دست می‌دهد.

تابع $L=T-V$ را لاگرانژی می‌نامند ، و درحالت مورد بحث توسط رابطهٔ

---

۱. به‌زبان آنالیز برداری، F گرادیان U است.

$$L=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-V(x,y,z)$$

بیان می‌شود. به این ترتیب تابع زیر انتگرال عمل، به صورت

$$f(x,y,z,dx/dt,dy/dt,dz/dt)$$

است، و هرگاه عمل دارای مقدار ایستی باشد، معادلات اویلر باید برقرار باشند. این معادلات عبارت‌است از:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial x}=0\,,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial y}=0\,,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

و می‌توانند به شکل زیر نوشته شوند

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}=\mathbf{F}$$

این دقیقاً همان دومین قانون حرکت نیوتن است. به‌این ترتیب قانون دوم نیوتن شرطی‌لازم برای این‌است که عمل ذره دارای مقداری‌ایستی باشد. چون قانون‌نیوتن برحرکت ذره‌حاکم است، نتیجهٔ زیررا به دست می‌آوریم.

اصل همیلتن. هرگاه ذره‌ای‌ازنقطهٔ P_1 به نقطهٔ P_2 درفاصلهٔ زمانی $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ تغییر مکان دهد، آنگاه مسیرواقعی ذره مسیری‌است‌که برای آن عمل مقداری ایستی بپذیرد.

ارائهٔ مثالهای ساده‌ای که در آنها مسیر واقعی ذره عمل را ماکزیمم کند، بسیار ساده است. ولی، هرگاه فاصلهٔ زمانی به اندازهٔکافی کوتاه‌باشد، می‌توان ثابت‌کرد که عمل‌لزوماً می‌نیمم خواهد بود. این شکل، از اصل همیلتن گاهی اصل‌کمترین عمل نامیده می‌شود، و می‌تواند به طور غیردقیق چنین تعبیر گردد که طبیعت تمایل دارد که انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی را در طول حرکت برابر کند.

درمبحث بالا قانون نیوتن را پذیرفتیم و اصل همیلتن را به‌عنوان نتیجه‌ای به دست آوردیم. همان استدلال نشان می‌دهد که قانون نیوتن نیز از اصل همیلتن نتیجه می‌شود، بنابراین، این دو روش برخورد با حرکت ذره ـ برداری و حساب تغییرات ـ با یکدیگر معادل‌اند. این نتیجه برمشخصهٔ اساسی اصول تغییرات در فیزیك تأکید دارد: این اصول، قوانین فیزیکی را تنها برحسب انرژی، و بدون توسل به دستگاه مختصات خاصی بیان می‌کنند.

استدلال ارائه شده را می‌توان مستقیماً به دستگاه متشکل از n ذره با جرمهای m_i و بردارهای موقعیت $\mathbf{r}_i(t)=x_i(t)\mathbf{i}+y_i(t)\mathbf{j}+z_i(t)\mathbf{k}$ که تحت تأثیر نیروهای پایستار $\mathbf{F}_i=F_{i1}\mathbf{i}+F_{i2}\mathbf{j}+F_{i3}\mathbf{k}$ قراردارند تعمیم داد. دراین حالت انرژی پتانسیل دستگاه تابعی مانند $V(x_1,y_1,z_1,\dots,x_n,y_n,z_n)$ است، به‌طوری که

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=-F_{i1}\,,\quad \frac{\partial V}{\partial y_i}=-F_{i2}\,,\quad \frac{\partial V}{\partial z_i}=-F_{i3}$$

و انرژی جنبشی آن برابر است با

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]$$

و عمل آن درفاصلهٔ زمانی $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ عبارت‌است از

$$A=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt$$

درست به همان روش بالا، مشاهده می‌شود که معادلات حرکت نیوتن

$$m_i\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}=\mathbf{F}_i$$

شرط لازمی است برای دستگاه که عمل دارای مقدار ایستی باشد. بنابراین، اصل همیلتن برای هردستگاه متناهی از ذرات که نیروها در آن پایستار باشند، درست است. این اصل همچنین در مورد دستگاههای کلیتر دینامیکی شامل قیود واجسام سخت ونیز برای محیط‌های پیوسته، به‌کار می‌رود.

بعلاوه، اصل همیلتن می‌تواند برای استنتاج قوانین بنیادی الکتریسیته و مغناطیس، نظریهٔ کوانتومی و نسبیت به‌کار رود. نفوذ این اصل آنچنان عمیق و گسترده است که بسیاری از دانشمندان آن را به عنوان قویترین اصل فیزیك ریاضی قلمداد کرده‌ودررأس هرم علوم فیزیکی جای داده‌اند. ماکس پلانك، پایه‌گذار نظریهٔ کوانتومی، دراین باره چنین می‌گوید: «عالیترین و آرمانیترین هدف دانش فیزیکی این است که همهٔ پدیده‌های طبیعی راکه تاکنون مشاهده شده‌اند یامشاهده خواهند شد، دریك اصل ساده متمرکزکند.... در بین قوانین‌کم وبیش عمومی‌که از دستاوردهای علوم فیزیکی طی قرون گذشته به شمار می‌روند، شاید بتوان گفت‌که اصل کمترین عمل، چه از نظر شکل وچه‌ازنظر محتوا، به‌این ایده‌آل نهایی پژوهشهای نظری بیش ازهمه نزدیك شده‌باشد.»

مثال ۱. هرگاه ذره‌ای‌به جرم m مقید به حرکت‌روی رویهٔ مفروض $G(x,y,z)=0$ باشد، وهیچ نیروی خارجی برآن اثر نکند، درآن صورت این ذره درامتداد یك ژئودزیك آن‌خواهد لغزید. برای‌اثبات این‌حکم، نخست مشاهده می‌کنیم که چون هیچ‌نیرویی وجود ندارد $V=0$، وبنابراین لاگرانژی، $L=T-V$، برابر با T می‌شود، که درآن

$$T=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

اکنون از اصل همیلتن استفاده می‌کنیم و می‌خواهیم عمل

$$\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}T\,dt$$

باشرط جانبی $G(x , y , z) = 0$ ایستی شود. طبق بخش ۴۹، این امر، معادل ایستی‌بودن انتگرال

$$\int_{t_1}^{t_2}[T+\lambda(t)G(x , y , z)]dt$$

بدون هیچ شرط جانبی است، که درآن $\lambda(t)$ تابع نامعینی از t است. معادلات اویلر برای این مسئلهٔ تغییرات غیرمقید، عبارت‌اند از

$$m\frac{d^2x}{dt^2}-\lambda G_x=0 , \ m\frac{d^2y}{dt^2}-\lambda G_y=0 , \ m\frac{d^2z}{dt^2}-\lambda G_z=0$$

هرگاه m و λ حذف شوند، این معادلات به‌صورت

$$\frac{d^2x/dt^2}{G_x}=\frac{d^2y/dt^2}{G_y}=\frac{d^2z/dt^2}{G_z}$$

درمی‌آیند. اکنون با توجه به اینکه انرژی کلی ذره، $T+V=T$، مقدار ثابتی است (این‌را در زیرثابت می‌کنیم)، تندی ذره نیز ثابت است، و بنابراین برای ثابتی مانند k داریم $s=kt$، مشروط به اینکه s، طول کمان، از نقطهٔ مناسبی اندازه‌گیری شود. پس می‌توانیم معادلات بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x}=\frac{d^2y/ds^2}{G_y}=\frac{d^2z/ds^2}{G_z}$$

این‌معادلات‌دقیقاً معادلات ۴۹ـ(۲۹) هستند، بنابراین‌چنانچه گفته شد مسیرذره‌یك ژئودزیك رویه است.

معادلات لاگرانژ. درمکانیك کلاسیك، اصل همیلتن را می‌توان منشأ معادلات حرکت لاگرانژ دانست‌که در این مبحث مقام اول را دارد.برای اینکه این ارتباط را بیابیم، باید نخست بدانیم که مقصود از درجهٔ آزادی ومختصات تعمیم یافته چیست.

ذره‌ای که به طور آزاد در فضای سه بعدی حرکت می‌کند دارای سه درجهٔ آزادی خوانده می‌شود، زیرا موقعیت‌آن می‌تواند به وسیلهٔ سه عدد مستقل x ، y ، z مشخص‌شود. با مقیدکردن ذره به حرکت روی رویهٔ $G(x , y , z)=0$ ، درجهٔ آزادی آن به دوکاهش می‌یابد، چراکه یکی از مختصات آن می‌تواند برحسب دوتای دیگر بیان‌گردد. به طریق مشابه، هردستگاه غیرمقید متشکل از n ذرهٔ مادی، دارای $3n$ درجهٔ آزادی است، ومعرفی قیود اضافی موجب‌کاهش تعداد مختصات مستقلی می‌شودکه برای توصیف آرایش دستگاه لازم‌اند. هرگاه مختصات‌متعامد ذرات x_i ، y_i ، و z_i باشند($i=1 , 2 , \dots , n$)، وهرگاه قیود به وسیلهٔ k معادلهٔ مستقل و سازگار به صورت

$$G_j(x_1 , y_1 , z_1 , \dots , x_n , y_n , z_n)=0 , j=1 , 2 , \dots , k$$

توصیف شوند، درآن صورت تعداد درجات آزادی برابر با $m=3n-k$ است. در اصل

ازاین معادلات می‌توان برای‌کاهش تعداد مختصات از $3n$ به m با بیان $3n$ عدد x_i ، y_i، و z_i،$(i=1, 2, \ldots, n)$ برحسب m تا از این اعداد استفاده کرد. ولی ساده‌تر آن است که مختصات تعمیم یافتهٔ q_1، q_2، ...، q_m لاگرانژ را معرفی کنیم، که می‌توانند هر m مختص مستقلی باشند که مقادیرشان آرایش دستگاه را معین می‌سازد. این کار به ما آزادی کامل می‌دهد تا هردستگاه مختصاتی را که مناسب با مسئلهٔ موردنظر باشد ـمتعامد، استوانه‌ای، کروی، وغیره ـ انتخاب کنیم وتحلیل ما را ازهردستگاه مختصات بخصوصی مستقل می کند. اکنون مختصات متعامد ذرات را برحسب این مختصات تعمیم یافته بیان می کنیم و توجه داریم که روابط حاصل خود به خود قیود را دربردارند: $x_i=x_i(q_1, \ldots, q_m)$ ، $y_i=y_i(q_1, \ldots, q_m)$ و $z_i=z_i(q_1, \ldots, q_m)$ که درآن $i=1, 2, \ldots, n$.

اگر m_i جرم ذرهٔ i ام باشد، دراین صورت انرژی جنبشی دستگاه، برابر است با

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]$$

که می‌توان آن را برحسب مختصات تعمیم یافته به صورت زیرنوشت:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2\right] \qquad (1)$$

که درآن $\dot{q}_j=dq_j/dt$. به منظور استفادهٔ بعدی، تذکر می‌دهیم که T تابع همگن درجهٔ دوم نسبت به $\dot{q}_j$ هاست. فرض می‌شود که انرژی پتانسیل V صرفاً تابعی از q_j ها باشد، بنابراین، لاگرانژی $L=T-V$ تابعی به شکل زیراست

$$L=L(q_1, q_2, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m)$$

اصل همیلتن می گوید حرکت بەطریقی انجام می گیرد که عمل $\int_{t_1}^{t_2}Ldt$ درهر فاصلهٔ زمانی $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ ایستی می‌شود، وبنابراین معادلات اویلر باید برقرار باشند. در این حالت، معادلات مزبور عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad j=1, 2, \ldots, m \qquad (2)$$

که به معادلات لاگرانژ شهرت دارند. این معادلات، یك دستگاه m معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم تشکیل می‌دهند که حل آن q_jها را به صورت توابعی از t به دست می‌دهد.

ما دراینجا تنها یك نتیجهٔ عمومی از معادلات لاگرانژ، یعنی اصل پایستگی انرژی، را به دست می‌آوریم.

اولین‌گام دراین اثبات، توجه به اتحاد زیراست که برای هر تابع L از متغیرهای t و q_1، ...، q_m و $\dot{q}_1$، $\dot{q}_2$، ...، $\dot{q}_m$ صادق است:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right] = \sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right] - \frac{\partial L}{\partial t} \qquad (۳)$$

چون L ، لاگرانژی دستگاه ، درمعادلات (۲) صدق می کند و بـه طور صریح به t بستگی ندارد، طرف راست معادلهٔ (۳) صفرمی‌شود و درنتیجه رابطهٔ

$$\sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = E \qquad (۴)$$

برای یك مقدار ثابت E برقرار است. سپس مشاهده می کنیم که $\partial V/\partial \dot{q}_j = 0$ ، بنابراین داریم $\partial L/\partial \dot{q}_j = \partial T/\partial \dot{q}_j$. همچنانکه قبلا ذکر شد، رابطهٔ (۱) نشان‌می‌دهد که T تابع همگن درجهٔ دومی از $\dot{q}_j$ هاست، بنابراین، طبق قضیهٔ اویلر در مورد توابع همگن داریم.[1]

$$\sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

با این نتیجه، معادلهٔ (۴) به صورت $2T - L = E$ یا $2T - (T - V) = E$ درمی‌آیـد. بنابراین ،

$$T + V = E$$

که بیان می کند که در طول حرکت، مجموع انرژیهای جنبشی وپتانسیل ثابت است.

در مثال زیرنحوهٔ به‌کارگیـری معادلات لاگرانژ را در حل مسائل دینامیکی مشخص نشان می‌دهیم.

مثال ۲. هرگاه‌ذره‌ای به‌جرم m تحت‌تأثیریك‌نیروی گرانشی به بزرگی km/r^2 ومتوجه به‌طرف مبدأ، دریك‌صفحه حرکت کند، آنگاه‌انتخاب‌مختصات‌قطبی به عنوان مختصات‌تعمیم‌یافته،طبیعی‌است: $q_1 = r$ و $q_2 = \theta$. بسادگی‌مشاهده می کنیم که $T = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ و $V = -km/r$ پس لاگرانژی برابر است با

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{km}{r}$$

---

۱. به‌یاد آورید که تابعی مانند $f(x, y)$ را همگن ازدرجهٔ n نسبت به x و yگویند هرگاه $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$. چنانچه از هردو طرف این رابطه نسبت به k مشتق بگیریم و سپس k را برابر با ۱ قرار دهیم ، خواهیم داشت

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

که قضیهٔ اویلر برای تابع مذکور است وهمین نتیجه درمورد یك تابع‌همگن با بیش‌از دومتغیر نیز برقرار است.

ومعادلات لاگرانژ عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \qquad (۵)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \qquad (۶)$$

چون L به‌طور صریح به θ بستگی ندارد، معادلهٔ (۶) نشان می‌دهد که $\partial L/\partial\dot{\theta}=mr^2\dot{\theta}$ مقدار ثابتی است، بنابراین برای ثابتی مانند h که مثبت فرض می‌شود داریم

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h \qquad (۷)$$

سپس مشاهده می‌کنیم که (۵) را بسادگی می‌توان به شکل

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{k}{r^2}$$

نوشت. این دقیقاً معادلهٔ ۲۱ــ(۱۲) است، که آن‌را در بخش ۲۱ حل کـردیم و به دست آوردیم که مسیر حرکت ذره یك مقطع مخروطی است.

مسائل تغییراتی درمورد انتگرالهای دوگانه. روش عمـومی یـافتن شرایط لازم را برای آنکه یك انتگرال ایستی باشد، می‌توان برای انتگرال‌های چندگانه نیز به‌کار بـرد. مثلا ناحیه‌ای مانند R از صفحهٔ xy را در نظر می گیریـم که به وسیلـهٔ یك منحنی بستهٔ C محدود شده باشد (شکل ۷۲) . فرض می کنیم $z=z(x \text{،} y)$ تابعی باشد که در R تعریف شده باشد و روی C مقادیر مرزی مفروضی را بپذیرد ولی درسایر جاها مقدارش دلخـواه باشد (ولی شرایط عادی مشتق‌پذیری را داشته باشد). این تابع را می‌توان معرف یك‌رویهٔ متغیر تصورکرد که در طول مرز خود درفضا ثابت باشد. انتگرالی به صورت

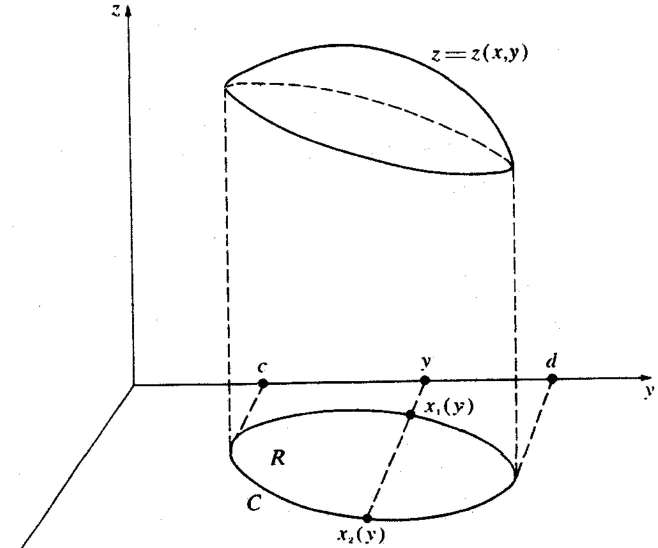
$$I(z)=\iint_R f(x \text{،} y \text{،} z \text{،} z_x \text{،} z_y)dxdy \qquad (۸)$$

دارای مقادیری است کـه به انتخاب تابع z بستگی دارد، و می‌توانیم مسئلهٔ یافتن تابع z (تابع ایستی) را که به این‌انتگرال مقدار ایستی بدهد، طرح کنیم.

ما با الگوی استدلال آشنا هستیم. فرض می کنیم که $z(x \text{،} y)$ تـابع ایستی مطلوب باشد و تابع تغییر یافتهٔ $\bar{z}(x \text{،} y)=z(x \text{،} y)+\alpha\eta(x \text{،} y)$ را تشکیل می‌دهیم، کـه در آن، تابع $\eta(x \text{،} y)$ روی C صفر می‌شود. اگرتابع $\bar{z}$ را در انتگرال (۸) بگذاریم، تابع $I(\alpha)$ از پارامتر α به دست می‌آید، و درست مثل گذشته، ازشرط لازم $I'(0)=0$ ، رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\iint_R\left(\frac{\partial f}{\partial z}\eta+\frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x+\frac{\partial f}{\partial z_y}\eta_y\right)dxdy=0 \qquad (۹)$$

حال، برای ساده کردن عمل حذف η_x و η_y ، فرض می کنیم که منحنی C دارای این خاصیت باشدکه هرخط موازی با یکی از محورها در صفحهٔ xy ، حداکثر C را در دو نقطه قطع کند.[۱] پس با درنظر گرفتن انتگرال دوگانهٔ دومین عبارت داخل پرانتز در (۹)، به عنوان یك انتگرال تکراری (شکل ۷۲ را ببینید)،خواهیم داشت



شکل ۷۲

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x dx\,dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x dx\,dy$$

و چون η روی C صفر می‌شود، خواهیم داشت

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x dx = \eta\frac{\partial f}{\partial z_x}\Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)dx$$

و درنتیجه داریم

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x dxdy = -\iint_R \eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)dxdy$$

عبارت شامل η_y را نیز می توان به روشی مشابه تغییرشکل داد، و رابطهٔ (۹) به صورت زیر

۱. این محدودیت غیرضروری است ، و در صورت تمایل به استفاده از قضیهٔ گرین ، می توان آن را حذف کرد.

درمی‌آید

$$\iint_R \eta\left[\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z_y}\right)\right]dxdy=0 \qquad (10)$$

اکنون از دلخواه بودن η نتیجه می‌گیریم که عبارت داخل کروشه در رابطهٔ (۱۰) باید صفر باشد، بنابراین،

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)+\frac{\partial}{\partial_y}\left(\frac{\partial f}{\partial z_y}\right)-\frac{\partial f}{\partial z}=0 \qquad (11)$$

معادلهٔ اویلر برای تابع اکسترمال دراین حالت است. همچون گذشته، تابع ایستی (اگر موجود باشد) تابع اکسترمالی است که در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کند.

مثال ۳. مسئلهٔ رویهٔ کمترین مساحت درساده‌ترین شکلش، برای اولین بار توسط اویلر به این ترتیب طرح شد: مطلوب است تعیین رویه‌ای که به منحنی بستهٔ مفروضی محدود و دارای کمترین مساحت باشد. هرگاه فرض کنیم که تصویر این منحنی درصفحهٔ xy یك منحنی بستهٔ C باشد که ناحیهٔ R ازاین صفحه را احاطه کند، و نیز اگر رویه به صورت $z=z(x, y)$ قابل نمایش باشد، آنگاه مسئله عبارت می‌شود ازمی‌نیمم کردن انتگرال مساحت رویه

$$\iint_R \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

مشروط به این شرط جانبی که $z(x, y)$، روی منحنی C، مقادیر داده شده را اختیار کند. معادلهٔ اویلر(۱۱) برای این انتگرال عبارت‌است از

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)=0$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$z_{xx}(1+z_y^2)-2z_xz_yz_{xy}+z_{yy}(1+z_x^2)=0 \qquad (12)$$

این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی توسط لاگرانژ کشف شد. اویلر نشان داد که هر رویهٔ کمترین مساحت که بخشی از یك صفحه نباشد باید شکل زینی داشته باشد، وانحنای میانگین آن در هر نقطه صفر باشد[1]. مسئلهٔ ریاضی اثبات وجود رویه‌های کمترین مساحت، و به عبارت دیگر اثبات اینکه (۱۲) دارای جوابهایی است که در شرایط مرزی مناسب صدق می‌کنند، فوق‌العاده مشکل است. حلی کامل ازاین مسئله تنها در ۱۹۳۰ و ۱۹۳۱ به طور جداگانه توسط

---

۱. انحنای میانگین رویه در یك نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود: خط قائم بر رویه در آن نقطه، و صفحه‌ای شامل این خط قائم را در نظر می‌گیریم. همچنانکه این صفحه حول این خط می‌چرخد، انحنای منحنی حاصل ازتقاطع آن بارویه، تغییر می‌کند، و انحنای میانگین نصف مجموع مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم آن است.

ت. رادو[1](مجارستانی، ۱۸۹۵–۱۹۶۵) و ج. داگلاس[2] (آمریکایی،۱۸۹۷–۱۹۶۵) به دست آمد. روشی تجربی برای یافتن رویه‌های کمترین مساحت به وسیلهٔ فیزیکدان کور بلژیکی ج. پلاتو[3] (۱۸۰۱–۱۸۸۳) ابداع شد، که آن را در رسالهٔ سال ۱۸۷۳ خود در خصوص نیروهای مولکولی موجود درمایعات، تشریح کرد. اصل مطلب این است که هرگاه قطعه سیمی را به شکل یك منحنی بسته خم کنیم و در محلول صابون فروبریم، آنگاه حباب صابونی که سیم را می‌پوشاند باید به شکل رویهٔ باکمترین سطح باشد، تا بتواند انرژی پتانسیل ناشی ازکشش سطحی را می‌نیمم کند. پلاتو آزمایشهای جالب متعددی از این نوع انجام داد، و از زمان وی مسئلهٔ رویه‌های کمترین مساحت به مسئلهٔ پلاتو شهرت یافته‌است.[4]

مثال ۴. دربخش ۲۴،معادلهٔ یك بعدی‌موج را ازقانون دوم نیوتن به دست‌آوردیم. در این بخش آن‌را از اصل همیلتن و به کمك معادلهٔ (۱۱) نتیجه خواهیم گرفت. مطالب زیر را فرض می کنیم: تاری با چگالی جرمی خطی ثابت m ، با نیروی کشش T کشیده شده و در دونقطهٔ $x=\circ$ و $x=\pi$ محکم شده است. آن‌را از حالت تعادل خارج می کنیم و به‌آن امکان می‌دهیم تا درصفحهٔ xy ارتعاش کند؛ تغییر مکانهای $y(x\,،\,t)$ آن نسبتاً کوچك‌اند، به طوری که کشش آن اساساً ثابت باقی می‌ماند و از توانهایی از شیب که از دو بیشترند صرف‌نظر می‌شود. هرگاه تار جا به جا شود،عنصری به طول dx در اثر کشش طولش ds می‌شود و

$$ds=\sqrt{۱+y_x^۲}\,dx\cong\left(۱+\frac{۱}{۲}y_x^۲\right)dx$$

این تقریب از بسط $\sqrt{۱+y_x{}^۲}=(۱+y_x^۲)^{۱/۲}$ به سری دو جمله‌ای $...+۱+y_x{}^۲/۲$ و حذف y_x هایی که توانشان بیش‌از دو است ، حاصل می‌شود.کار انجام شده روی عنصر موردنظر برابر است‌با $T(ds-dx)=(۱/۲)Ty_x{}^۲\,dx$، بنابراین انرژی پتانسیل تمامی تار برابر است با

$$V=\frac{۱}{۲}T\int_\circ^\pi y_x{}^۲dx$$

این عنصر دارای جرم $m\,dx$ وسرعت y_t است ، بنابراین انرژی جنبشی آن برابر است با $(۱/۲)my_t{}^۲dx$ و برای تمامی تار داریم

$$T=\frac{۱}{۲}m\int_\circ^\pi y_t{}^۲dx$$

---

1. T. Rado 2. J. Douglas 3. J. Plateau

۴. اثر ریاضی مأخذ در خصوص این موضوع مرجع زیر است؛

R. Courant, «Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces,» Interscience-Wiley, New York, 1950.

پس لاگرانژی عبارت می‌شود از

$$L=T-V=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(my_t^2-Ty_x^2)dx$$

و عمل ، که بنا بر اصل همیلتن باید ایستی باشد، به صورت

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{\pi}(my_t^2-Ty_x^2)dx\,dt$$

در می‌آید. دراین حالت ، معادلهٔ (۱۱) به صورت

$$\frac{T}{m}y_{xx}=y_{tt}$$

است که می‌دانیم همان معادلهٔ موج ۲۴ـ(۸) است.

یادداشت دربارهٔ همیلتن. ویلیام رووان همیلتن[1] (۱۸۰۵-۱۸۶۵)، دانشمند فیزیک ریاضی و ریاضیدان ایرلندی، یك بچه اعجوبهٔ واقعی بود و توسط عموی‌عجیبش که روحانی‌ باسوادی‌ بود آموزش‌دید. درسه سالگی قادر به خواندن‌انگلیسی بود؛ درچهار سالگی فراگیری زبانهـای یونانی . لاتین و عبری را آغاز کرد ؛ در هشت سالگی ایتالیایی و فرانسوی را بدانها افزود ؛ در ده سالگی سانسکریت و عربی آموخت و گفته‌شده‌است که درسیزده سالگی به‌ازای هرسال ازعمرش دریك‌زبان تبحر پیدا کرده بود. این‌شکوفایی اجباری درزبانها، درسن‌چهارده‌سالگی ، هنگامی که به ریاضیات، نجوم ، و نور شناسی روی آورد ، قطع گردید. در هجده سالگی مقاله‌ای به چاپ رساند و در آن اشتباهی از مکانیك سماوی لاپلاس را تصحیح کـرد ، و درحالـی که هنوز دانشجوی دورهٔ لیسانس‌کالج‌ترینیتی شهر دابلین بود ، به استادی نجوم آن مؤسسه منصوب شد و در نتیجه منجم سلطنتی ایرلندگردید.

اولین اثر مهم وی در نورشناسی هندسی بـود. در بیست و هفت سالگی به خاطر پیش‌بینی ریاضی خود در خصوص شکست مخروطی نور مشهور شد. حتی مهمتر ازاین ، وی اثبات کرد که همهٔ مسائل نور را به روش واحدی که اصل حداقل زمان فرما را به‌عنوان‌حالتی‌خاص دربرمی‌گیرد، می‌توان‌حل کرد. وی‌آنگاه این‌روش را به مسائل مکانیك تعمیم داد ، و تا قبل‌از سن سی سالگی به اصل واحـدی دست یافت (که امروزه به اصل همیلتن مشهور است) کـه نورشناسی و مکانیك را صرفاً به عنوان دو صورت از حساب تغییرات نمایان می‌سازد.

در سال ۱۸۳۵ به جبر روی آورد ، و نظریـه‌ای دقیق از اعداد مختلط را براساس این فکر که هرعدد مختلط زوجی‌مرتب از اعداد حقیقی است بنا نهاد. ایـن کار را مستقل از گاوس انجام داد ، گاوس همین مطالب را با تأکید بر تعبیر اعداد

---

1. William Rowan Hamilton

مختلط به عنوان نقاط صفحهٔ مختلط در سال ۱۸۳۱ به چاپ رسانده بود. همیلتن متعاقباً سعی‌در تعمیم‌ساختمان جبری اعداد مختلط داشت، و این‌را می‌توان به‌عنوان تعمیم بردارهای دو بعدی به سه‌بعدی تصور کرد. این طرح باشکست مواجه شد، ولی این تلاشها در۱۸۴۳ وی را به‌کشف کواترنیون‌ها نایل ساخت. کواترنیون‌ها بردارهایی چهار بعدی‌هستند که اعداد مختلط را به‌منزلهٔ یك زیر دستگاه دربر می گیرند. به زبان امروزی، آنها ساده‌ترین جبرخطی غیرجا به‌جایی را تشکیل می‌دهند که درآن تقسیم امکان‌پذیر است.[1] بقیهٔ عمر همیلتن وقف بررسی جزئیات نظریه وکاربردهای کواترنیون‌ها، و تهیهٔ مقالات مفصل و پیچیده در این مورد گردید. این کار تأثیری جزئی بر فیزیك وهندسه داشت، وبه وسیلهٔ آنالیز برداری عملیتر ویلارد گیبز[2] وجبر چندخطی گراسمان و ا. کارتان[3] جایگزین شد. چیز مهمی که از زحمات همیلتن در مورد کواترنیون‌ها باقی ماند اثبات وجود دستگاه اعداد سازگاری‌است که در آن قانون جابه‌جایی عمل ضرب برقرار نیست. این‌کار جبر را از برخی تصورات قبلی نابجا که آن را فلج کرده بود رهایی داد، و دیگر ریاضیدانان اواخر قرن نوزدهم وقرن بیستم را تشویق کرد تا بررسی جامعی از انواع جبرهای خطی به عمل آورند.

همیلتن همچنین شاعری ضعیف، و دوست وردزورت[4] و کالریج[5] بود و با آنها مکاتبات گسترده‌ای در مورد علوم، ادبیات، و فلسفه داشت.

---

۱. خوشبختانه همیلتن هرگز مطلع نشد که گاوس کواترنیون‌ها را در سال ۱۸۱۹ کشف کرده ولی‌آن‌را بروز نداده بود. مراجعه‌کنیدبه Gauss, «Werke» vol. VIII, pp. 357–362

2. Willard Gibbs 3. Grassmann & E.Cartan

4. Wordsworth 5. Coleridge

۱۰

تبدیلات لاپلاس

۵۰. مقدمه

در سالهای اخیر علاقه به استفاده از تبدیلات لاپلاس به عنوان روشی سودمند برای حل انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل ومعادلات انتگرالی رشد چشمگیری یافته است. علاوه بر این کاربردها ، تبدیلات لاپلاس ارتباط نزدیکی با بعضی از بخشهای مهم ریاضیات محض نیز دارد. سعی خواهیم کرد خواننده را با بعضی از این مطالب به‌قدرکافی آشنا کنیم، بدون آنکه خود را زیاد با نکات تحلیلی دقیق و روشهای محاسباتی که برای بررسیهای مفصلتر مناسب‌اند درگیر کنیم.

قبل از آنکه وارد جزئیات شویم، به منظور قرار دادن اصول مطالب این فصل در زمینهٔ مناسب خود، به عرضهٔ چند تذکرعمومی می‌پردازیم. با ذکر این مطلب شروع می‌کنیم که عمل مشتق گیری، تابعی‌مانند $f(x)$ را به تابع دیگری تبدیل می‌کند، که همان $f'(x)$ ، یعنی مشتق آن است. اگر از حرف D برای نمایش مشتق گیری استفاده کنیم، این تبدیل را می‌توان به‌صورت

$$D[f(x)]=f'(x) \qquad (۱)$$

نوشت. تبدیل مهم دیگری برای توابع، انتگرالگیری است :

$$I[f(x)]=\int_0^x f(t)dt \qquad (۲)$$

یك تبدیل از این هم ساده‌تر، عبارت است ازعمل ضرب همهٔ توابع دریك تابع مشخص،

مانند $g(x)$:

$$M_g[f(x)]=g(x)f(x) \tag{۳}$$

خاصیت اساسی مشترك دراین مثالها آن است که هرتبدیل روی توابعی عمل می‌کند و توابع دیگری‌تولید می‌کند. روشن‌است که دراغلب موارد باید محدودیتهایی برای توابع $f(x)$ که تبدیل‌روی آنها عمل می‌کند منظورشود. مثلا تابع $f(x)$ باید در (۱) مشتق‌پذیر و در (۲) انتگرال‌پذیر باشد. در هریك از این مثالها، تابع طرف راست را تبدیل $f(x)$ تحت تأثیر تبدیل مربوطه گویند.

در حالت‌کلی تبدیل T از توابع را خطی گویند هرگاه رابطهٔ

$$T[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha T[f(x)]+\beta T[g(x)] \tag{۴}$$

برای‌کلیهٔ توابع قابل‌قبول $f(x)$ و $g(x)$ وکلیهٔ اعداد ثابت α و β برقرارباشد. به‌عبارت دیگر، معادلهٔ (۴) می‌گوید‌که تبدیل هرترکیب خطی دو تابع، برابر است با همان ترکیب خطی از تبدیلاتشان. خوب است توجه‌کنیم که (۴) با انتخاب $\alpha=\beta=۱$ و $\beta=۰$، بترتیب، به

$$T[f(x)+g(x)]=T[f(x)]+T[g(x)]$$

و

$$T[\alpha f(x)]=\alpha T[f(x)]$$

ساده می‌شود . بسادگی می‌توان دید که تبدیلات تعریف شده توسط (۱) ، (۲) ، و (۳) همگی خطی‌اند.

دسته‌ای ازتبدیلات خطی، تبدیلات انتگرالی‌هستندکه ازاهمیت خاصی برخوردارند. برای‌آنکه تصوری ازاین تبدیلات داشته باشیم، توابعی راکه روی‌فاصلهٔ متناهی یا نامتناهی $a\leqslant x\leqslant b$ تعریف شده‌اند درنظرمی گیریم، و تابع معینی مانند $K(p, x)$ از متغیر x و پارامتر p انتخاب می‌کنیم. آنگاه تبدیل انتگرالی کلی به صورت زیراست

$$T[f(x)]=\int_a^b K(p, x)f(x)dx=F(p) \tag{۵}$$

تابع $K(p, x)$ را هستهٔ تبدیل T گویند، و روشن است که T ، صرف‌نظر از ماهیت K ، خطی است. مفهوم تبدیل خطی‌انتگرالی به صورت تعمیم یافته‌اش، منشأ برخی از مفیدترین ایده‌های‌آنالیزنوین بوده است. در آنالیز کلاسیك نیز، حالتهای خاص گوناگونی از (۵) دقیقاً مورد مطالعه قرارگرفته‌اند، وبه تبدیلات خاصی منجرشده‌اندکه برای حل انواع خاصی از مسائل مفیدند.

وقتی $a=۰$ ، $b=\infty$ ، و $K(p, x)=e^{-px}$ ، حالت خاصی از (۵) به دست می‌آیدکه مورد نظرماست و تبدیل لاپلاس L نام دارد و به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$L[f(x)]=\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx=F(p) \tag{۶}$$

بنابراین، تبدیل لاپلاس L برهرتابعی که انتگرال مربوط به‌آن موجود باشد عمل می‌کند و

تبدیل لاپلاس آن یعنی $L[f(x)]=F(p)$ را که تابعی از پارامتر p است، تولید می‌کند.[1]
یادآور می‌شویم که انتگرال ناسرهٔ (۶) حدی است که در زیر تعریف می‌شود وتنها هنگامی وجود دارد که این حد وجود داشته باشد:

$$\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-px}f(x)dx \tag{۷}$$

وقتی حد طرف راست موجود باشد، انتگرال ناسره طرف چپ را همگرا گویند.
تبدیلات لاپلاس زیر را می‌توان بسادگی محاسبه کرد:

$$f(x)=1\,,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}dx=\frac{1}{p} \tag{۸}$$

$$f(x)=x\,,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}x\,dx=\frac{1}{p^2} \tag{۹}$$

$$f(x)=x^n\,,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}x^n dx=\frac{n!}{p^{n+1}} \tag{۱۰}$$

$$f(x)=e^{ax}\,,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}e^{ax}dx=\frac{1}{p-a} \tag{۱۱}$$

$$f(x)=\sin ax\,,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}\sin ax\,dx=\frac{a}{p^2+a^2} \tag{۱۲}$$

$$f(x)=\cos ax\,,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}\cos ax\,dx=\frac{p}{p^2+a^2} \tag{۱۳}$$

انتگرال (۱۱) برای $p>a$، و همهٔ انتگرالهای دیگر برای $p>0$ همگرا هستند.

خواننده بایدمحاسبات‌لازم را خودانجام دهد، تاعلت این محدودیتهای p کاملا روشن گردد (به تمرین ۱ مراجعه شود). به‌عنوان نمونه، جزئیات محاسبات درمورد (۱۰) را که درآن n عددی است صحیح ومثبت، ارائه می کنیم:

$$\begin{aligned} L[x^n]&=\int_0^\infty e^{-px}x^n\,dx=-\frac{x^n e^{-px}}{p}\Big]_0^\infty+\frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px}x^{n-1}dx \\ &=\frac{n}{p}L[x^{n-1}]=\frac{n}{p}\left(\frac{n-1}{p}\right)L[x^{n-2}] \\ &=\dots=\frac{n!}{p^n}L[1]=\frac{n!}{p^{n+1}} \end{aligned}$$

---

۱. همان طورکه در اینجا آمده است، همواره از حروف‌کوچك برای نمایش توابع بامتغیر x و از حروف بزرگ نظیرآنها برای نمایش تبدیلات این توابع استفاده خواهیم‌کرد.

باید توجه داشت که دراینجا ازاین حقیقت که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{px}}=0 \quad ، p>0 \text{ برای }$$

استفادهٔ اساسی شده است. فرمول فوق در جدول ۱ بخش ۵۲ داده شده است . تبدیلات لاپلاس سادهٔ دیگری را می‌توان بسهولت با استفاده از خطی بودن L، بدون انتگرال‌گیری به دست آورد ، مانند

$$L[2x+3]=2L[x]+3L[1]=\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p}$$

در بخشهای بعد، روشهایی برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابع پیچیده‌تر ارائه خواهیم کرد.

همان‌طور که در بالا تذکردادیم با انتخاب $a=0$ ، $b=\infty$، و $K(p, x)=e^{-px}$ می‌بینیم که تبدیل لاپلاس‌حالت خاصی از تبدیل انتگرالی عمومی (۵) است. چرا این‌حدود و این هستهٔ خاص را انتخاب‌کرده‌ایم ؟ بـرای مشاهدهٔ آنکه چرا این انتخاب می‌تواند با ارزش باشد، بهتر است‌که شباهت‌گویای آن با سری توانی را بررسی‌کنیم .

اگر سری توانی را به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$$

بنویسیم، آنگاه مشابه طبیعی آن، انتگرال ناسرهٔ

$$\int_0^\infty a(t)x^t dt$$

است. حال با نوشتن $x=e^{-p}$ علایم راکمی تغییر می‌دهیم، واین انتگرال را به‌صورت:

$$\int_0^\infty e^{-pt}a(t)dt$$

درمی آوریم ، که دقیقاً همان تبدیل لاپلاس تابع $a(t)$ است. لذا تبدیلات لاپـلاس مشابه پیوستهٔ سری‌های توانی هستند، وچون مجموع سری‌توانی درآنالیز مهم است، انتظار اینکه تبدیل‌لاپلاس نیز دارای اهمیت باشد امری منطقی است.

یادداشت مختصری راجع به لاپلاس در پیوست الف آمده است.

تمرین

۱ـ انتگرالهای (۸) ، (۹) ، (۱۱) ، (۱۲) ، و (۱۳) را محاسبه‌کنید.

۲ـ بدون انتگرال‌گیری نشان دهید که

الف) $$L[\sinh ax]=\frac{a}{p^2-a^2} ,\quad p>|a|$$

ب) $$L[\cosh ax]=\frac{p}{p^{2}-a^{2}}, \quad p>|a|$$

۳ـ بدون انتگرال‌گیری $L[\sin^{2} ax]$ و $L[\cos^{2} ax]$ را به دست آورید. این دو تبدیل چگونه به یکدیگر مربوطاند؟

۴ـ با استفاده از فرمولهای متن، تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست‌آورید:

الف) 10 د) $4\sin x\cos x+2e^{-x}$

ب) $x^{5}+\cos 2x$ ه) $x^{6}\sin^{2} 3x+x^{6}\cos^{2} 3x$

ج) $2e^{3x}-\sin 5x$

۵ـ مطلوب است تعیین تابع $f(x)$ به طوری که تبدیل لاپلاس آن برابر باشد با

الف) $\frac{30}{p^{4}}$ د) $\frac{1}{p^{2}+p}$

ب) $\frac{2}{p+3}$ ه) $\frac{1}{p^{4}+p^{2}}$

ج) $\frac{4}{p^{3}}+\frac{6}{p^{2}+4}$

۶ـ یك تعریف منطقی برای $(1/2)!$ ارائه کنید.

۵۱. چند نکته در مورد نظریهٔ لاپلاس

قبل از آنکه به‌کاربردها بپردازیم خوب است شرایطی راکه تابع باید دارا باشد تا تبدیل لاپلاس داشته باشد دقیقتر مورد توجه قراردهیم. یك بررسی دقیق ومفصل از این مسئله نیاز به‌آشنایی با نظریهٔ کلی انتگرالهای ناسره دارد، که مورد نظر ما نیست. از طرف دیگر، متداول است که مقدماتی از این مبحث در درس حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی گفته شود، و درك مطالب سادهٔ ذیل برای منظور ما کافی است.

اولا، انتگرال

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx \tag{1}$$

را همگرا گویند هرگاه حد

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

وجود داشته باشد، و دراین حالت مقدار (۱) بنابر تعریف برابرمقدار این حد است:

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

ثانیاً ، هرگاه انتگرال

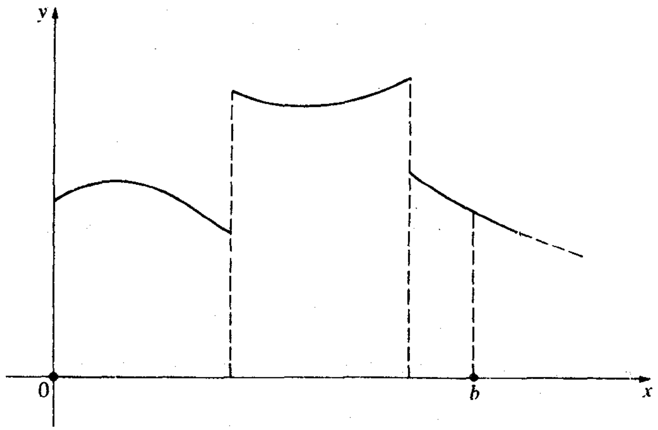
$$\int_{0}^{\infty}|f(x)|dx$$

همگرا باشد، انتگرال(۱) نیزهمگرا خواهد بود ودراین حالت(۱) راهمگرای مطلق نامند. ونهایتاً اینکه ، چنانچه تابعی مانند $g(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $|f(x)|\leqslant g(x)$ و انتگرال

$$\int_{0}^{\infty}g(x)dx$$

همگرا باشد، آنگاه انتگرال (۱) همگرای مطلق ونتیجتاً همگراست (این مطلب مشهور به آزمون مقایسه است).

از این‌رو، اگر تابع $f(x)$ برای $0 \leqslant x$ تعریف شده باشد، همگـرایی (۱) قبل از هرچیز مستلزم آن است که انتگرال $\int_{0}^{b}f(x)dx$ ، بـرای هر b محدود ومثبتی وجود داشته باشد. برای تضمین این مطلب، کافی است فرض کنیم که $f(x)$ پیوسته، و یا لااقل قطعه به قطعه پیوسته است. مقصود از عبارت اخیر آن است که تابع $f(x)$ در هـر فاصلهٔ متناهی $0 \leqslant x \leqslant b$ پیوسته است، مگر احتمالا در تعدادی متناهی نقطه که دارای ناپیوستگی جهشی است، یعنی تابع درآن نقاط حدهای چپ و راست متفاوتی دارد. شکل۷۳ یك تابع قطعه به قطعه پیوسته را به‌عنوان نمونه نشان می‌دهد؛ انتگرال آن از ۰ تا b برابر است با مجموع انتگرالهای بخشهای پیوستهٔ آن در زیرفاصله های متناظرشان. ایـن دسته از توابع در واقع شامل تمام توابعی است که محتملا در عمل ظاهر می‌شوند. بخصوص توابع پله‌ای ناپیوسته و توابع دندانه اره‌ای، که بیانگراعمال یاحذف ناگهانی نیروها و ولتاژها درمسائل فیزیك و مهندسی است، از این جمله‌اند.



شکل ۷۳

اگر $f(x)$ برای $x \geqslant 0$ قطعه به قطعه پیوسته باشد، آنگاه تنهامسئله‌ای که برای وجود تبدیل لاپلاس

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$$

باقی می‌ماند رفتارتابع زیرعلامت انتگرال، یعنی $e^{-px}f(x)$، برای x های بزرگ است. برای آنکه مطمئن‌شویم تابع زیرعلامت انتگرال با سرعت‌کافی کوچك می‌شود (ویا $f(x)$ با سرعت بیش از حد رشد نمی کند) تا انتگرال موجود باشد، علاوه براین، فرض‌می کنیم که $f(x)$ از مرتبهٔ نمایی باشد . این بدان معناست که اعداد ثابت M و c وجود دارند چنانکه :

$$|f(x)| \leqslant Me^{cx} \tag{۲}$$

لذا ، با آنکه، وقتی $x \to \infty$ ، $f(x)$ می‌تواند بینهایت بزرگ شود ، ولی سرعت رشد آن باید کمتر از مضربی از تابع e^{cx} باشد. روشن است‌که هرتابع کراندار ، از مرتبهٔ نمایی است با $c = 0$. به عنوان مثالهایی دیگر، می‌توان e^{ax} (با $c=a$) و x^n (با هرعدد مثبتی برای c) را نام برد. از طرف دیگر، e^{x^2} ازمرتبهٔ نمایی نیست. هرگاه $f(x)$ در(۲) صدق کند، آنگاه داریم

$$|e^{-px}f(x)| \leqslant Me^{-(p-c)x}$$

و چون انتگرال تابع طرف راست برای $p>c$ همگراست . تبدیل لاپلاس $f(x)$ برای $p>c$ همگرای مطلق خواهد بود. علاوه براین، توجه می کنیم که

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-px}f(x)\, dx\right| \leqslant \int_0^\infty |e^{-px}f(x)|\,dx$$

$$\leqslant M\int_0^\infty e^{-(p-c)x}dx = \frac{M}{p-c}\ ,\quad p>c$$

بنابراین :

$$F(p) \to 0 \quad ، \quad p \to \infty \ \text{وقتی} \tag{۳}$$

در واقع، می‌توان نشان دادکه هروقت $F(p)$ موجود باشد (۳) صحیح است، خواه $f(x)$ قطعه به قطعه پیوسته واز مرتبهٔ نمایی‌باشد خواه نباشد. لذا، اگر $\phi(p)$ چنان تابعی از p باشد که، وقتی $p \to \infty$ ، یا حد نداشته باشد و یا حدش برابربرصفرنشود ، آنگاه $\phi(p)$ نمی‌تواند تبدیل لاپلاس هیچ تابعی باشد. بخصوص ، چند جمله‌ایهای برحسب p ، $\sin p$، $\cos p$ ، e^p و $\log p$ نمی‌توانند تبدیل لاپلاس باشند. از طرف دیگر ، هرتابع گویایی که درجهٔ صورتش کمتر از مخرج باشد یك تبدیل لاپلاس است.

مطالب فوق نشان می‌دهدکه هرتابع قطعه به قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی دارای تبدیل لاپلاس است، لذا این شرایط برای وجود $L[f(x)]$ کافی است. ولی، همان‌طورکه

ازمثال $f(x)=x^{-1/2}$ روشن‌می‌شود، این شرایط لازم نیستند. این تابع در $x=0$ دارای یك ناپیوستگی از نوع بینهایت است، و بنابراین قطعه به قطعه پیوسته نیست ، ولی با این وجود انتگرالش از ۰ تا b وجود دارد وازآنجاکه برای x های بزرگ کراندار نیزهست، تبدیل لاپلاس آن وجود دارد. در واقع، برای $p>0$ ، داریم:

$$L[x^{-1/2}]=\int_0^{\infty}e^{-px}x^{-1/2}dx$$

و تغییر متغیر $px=t$ نتیجه می‌دهد

$$L[x^{-1/2}]=p^{-1/2}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-1/2}dt$$

یك تغییر متغیر دیگر ، $t=s^2$ ، به‌دست می‌دهد

$$L[x^{-1/2}]=2p^{-1/2}\int_0^{\infty}e^{-s^2}ds \tag{4}$$

در اغلب درسهای حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی‌نشان می‌دهندکه انتگرال اخیربرابر است با $\sqrt{\pi}/2$ (مراجعه شود به تمرین ۱)، لذا داریم:

$$L[x^{-1/2}]=\sqrt{\frac{\pi}{p}} \tag{5}$$

از این نتیجه در یکی از بخشهای بعد استفاده خواهد شد.

درباقیماندهٔ این فصل توجه خود را به‌موارد استعمال تبدیل لاپلاس متمرکزمی کنیم، و به بررسی نظریهٔ صرفاً ریاضی مربوط به این روشها نخواهیم پرداخت. طبعاً این روشها محتاج‌اثبات است، و خواننده‌ای که ازمسائل غیردقیق ناراضی است می‌تواند برای ارضای خودبه بررسیهای جامعتری در این موضوع رجوع کند.

تمرین

۱ــ هرگاه I نمایشگرانتگرال (۴) باشد (که درآن s متغیری ظاهری است)،آنگاه می‌توان نوشت :

$$I^2=\left(\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy\right)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

با تغییر این انتگــرال دوگانه به مختصات قطبی آن را محاسبه کنید، و نشان دهیدکــه $I=\sqrt{\pi}/2$.

۲ــ در هریك از حالات زیر، شکل تابع را رسم کنید و تبدیل لاپلاس آن را بیابید.

الف) $f(x)=u(x-a)$ که درآن a عددی مثبت و $u(x)$ تابع پله‌ای‌واحد تعریف‌شده در زیراست

$$u(x)=\begin{cases} \text{۰} \ ، \ x<\text{۰} & \text{اگر} \\ \text{۱} \ ، \ x\geqslant\text{۰} & \text{اگر} \end{cases}$$

ب) $f(x)=[x]$ ، که در آن $[x]$ نشانهٔ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x یا مساوی با آن است.

ج) $f(x)=x-[x]$

د)
$$f(x)=\begin{cases} \sin x \ ، \ \text{۰}\leqslant x\leqslant\pi & \text{اگر} \\ \text{۰} \ ، \ x>\pi & \text{اگر} \end{cases}$$

۳ـ به روش مستقیم نشان دهید که $L[e^{x^\text{۲}}]$ وجود ندارد. راهنمایی:

$$x^\text{۲}-px=(x-p/\text{۲})^\text{۲}-p^\text{۲}/\text{۴}$$

۴ـ به روش مستقیم نشان دهید که $L[x^{-\text{۱}}]$ وجود ندارد.

۵ـ فرض کنید ε عدد مثبتی باشد و تابع $f_\varepsilon(x)$ زیر را درنظر بگیرید.

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases} \text{۱}/\varepsilon \ ، \ \text{۰}\leqslant x\leqslant\varepsilon & \text{اگر} \\ \text{۰} \ ، \ x>\varepsilon & \text{اگر} \end{cases}$$

نمودار این تابع درشکل ۷۴ نشان داده شده است. واضح است که برای هر $\varepsilon>\text{۰}$ داریم $\int_\text{۰}^\infty f_\varepsilon(x)dx=\text{۱}$. نشان دهید که

$$L[f_\varepsilon(x)]=\frac{\text{۱}-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$$

و

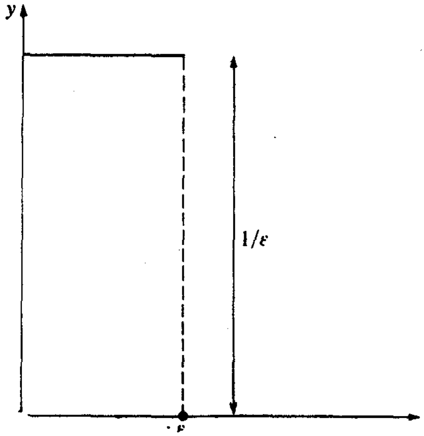
$$\lim_{\varepsilon\to\text{۰}} L[f_\varepsilon(x)]=\text{۱}$$

به بیان دقیقتر، $\lim_{\varepsilon\to\text{۰}} f_\varepsilon(x)$ به عنوان یك تابع وجود ندارد ، و لـذا $L[\lim_{\varepsilon\to\text{۰}} f_\varepsilon(x)]$ تعریف نشده است، ولی اگر احتیاط را کنار بگذاریم، آنگاه

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to\text{۰}} f_\varepsilon(x)$$

نوعی شبه تابع است که برای $x=\text{۰}$ بینهایت و بـرای $x>\text{۰}$ صفر است، و خواص زیر را دارد

$$\int_\text{۰}^\infty \delta(x)dx=\text{۱} \quad \text{و} \quad L[\delta(x)]=\text{۱}$$



شکل ۷۴

این شبه تابع را تابع دلتای دیراك یا تابع ضربه‌ای واحد می‌نامند[1].

۵۲. موارد استعمال در معادلات دیفرانسیل

فرض کنید بخواهیم جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+ay'+by=f(x) \qquad (۱)$$

راکه در شرایط اولیهٔ $y(\circ)=y_\circ$ و $y'(\circ)=y'_\circ$ صدق می‌کند، بیابیم. روشن است که می‌توان به‌کمك روشهای فصل ۳ به‌جستجوی جواب عمومی معادله پرداخت وسپس ثابتهای دلخواه را با توجه به شرایط اولیه محاسبه‌کرد. ولی استفاده از تبدیل لاپلاس راه دیگری برای حل این مسئله است که مزایای متعددی دارد.

برای آنکه متوجه شویم این روش چگونه عمل می‌کند، از طرفین (۱) تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y''+ay'+by]=L[f(x)]$$

با توجه به خطی بودن L ، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

---

۱. پ. آ. م. دیراك P. A. M. Dirac (۱۹۰۲–   ) یك‌متخصص‌فیزیك نظری‌انگلیسی است‌که در سی‌ویك سالگی جایزهٔ نوبل را به‌خاطر کارش روی نظریهٔ کوانتومی ازآن خودساخت. چندین‌راه جالب برای تعبیرمناسب تابع دلتای دیراك از نظر ریاضی وجود دارد. به‌عنوان مثال مراجعه کنید به:

I. Halperin, «Introduction to the Theory of Distributions,» University of Toronto Press, Toronto, 1952; or A. Erdélyi, «Operational Calculus and Generalized Functions,» Holt, New York, 1962.

$$L[y'']+aL[y']+bL[y]=L[f(x)] \tag{۲}$$

گام بعدی عبارت خواهد بود از یافتن $L[y']$ و $L[y'']$ برحسب $L[y]$. اولا، با یك انتگرالگیری جزء به جزء خواهیم دیدکه:

$$\begin{aligned} L[y'] &= \int_0^\infty e^{-px} y' dx \\ &= ye^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} y dx \\ &= -y(0)+pL[y] \end{aligned}$$

بنابراین

$$L[y'] = pL[y]-y(0) \tag{۳}$$

و

$$L[y''] = L[(y')'] = pL[y']-y'(0)$$

پس

$$L[y''] = p^2L[y]-py(0)-y'(0) \tag{۴}$$

حال اگر شرایط اولیه داده شده را در (۳) و (۴) قرار دهیم، و این عبارات را در (۲) جایگزین کنیم، به یك معادلهٔ جبری برحسب $L[y]$ می‌رسیم

$$p^2L[y]-py_0-y_0'+apL[y]-ay_0+bL[y]=L[f(x)]$$

که اگر آن را برحسب $L[y]$ حل کنیم داریم:

$$L[y] = \frac{L[f(x)]+(p+a)y_0+y_0'}{p^2+ap+b} \tag{۵}$$

تابع $f(x)$ معلوم است، لذا تبدیل لاپلاس آن $L[f(x)]$ تابع‌مشخصی از p است؛ وچون a، b، y_0، و y_0' ثابتهای معلومی هستند، $L[y]$ تابع‌کاملا معلومی از p است. حال‌اگر بتوانیم تابعی مانند $y(x)$ بیابیم که تبدیل لاپلاس آن همان طرف راست (۵) باشد، آنگاه این‌تابع جوابی از مسئله است‌که درشرایط اولیهٔ ما نیز صدق می‌کند. این روشها بخصوص برای حل معادلاتی به صورت (۱) مناسب است‌که تابع $f(x)$ درآنها ناپیوسته است. زیرا در این حالت ممکن است به‌کاربردن روشهای فصل ۳، مشکل باشد.

دراین بحث یك مشکل‌آشکار وجود دارد: برای‌آنکه (۲) معنایی داشته باشد، توابع $f(x)$، y، y' و y'' باید تبدیل لاپلاس داشته باشند. این مشکل را می‌توان با فرض‌آنکه تابع f قطعه به قطعه پیوسته و از رتبهٔ نمایی است بسادگی برطرف‌کرد. وقتی چنین فرض شود، آنگاه می‌توان نشان داد (ما از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم) که y، y'، y'' نیز

لزوماً دارای همان خواص‌اند، لـذا تبدیل لاپلاس آنها نیز موجود می‌باشد. مشکل دیگـر اینکه درمحاسبهٔ (۳) و (۴) این مطلب مسلم فرض شده بود که:

$$\lim_{x\to\infty} y'e^{-px}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} ye^{-px}=0$$

درهرحال، چون y و y' خود به‌خود ازمرتبهٔ نمایی هستند، این‌احکام برای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ p معتبرند.

مثال ۱. مطلوب است جوابی برای

$$y''+4y=4x \tag{6}$$

که در شرایط اولیهٔ $y(0)=1$ و $y'(0)=5$ صدق کند.

وقتی از طرفین معادلهٔ (۶) تبدیل L بگیریم، خواهیم داشت

$$L[y'']+4L[y]=4L[x] \tag{7}$$

اگر به خاطرآوریم که $L[x]=1/p^2$ ، با استفاده از (۴) وشرایط اولیه، (۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$p^2L[y]-p-5+4L[y]=\frac{4}{p^2}$$

یا

$$(p^2+4)L[y]=p+5+\frac{4}{p^2}$$

لذا

$$\begin{aligned} L[y]&=\frac{p}{p^2+4}+\frac{5}{p^2+4}+\frac{4}{p^2(p^2+4)}\\ &=\frac{p}{p^2+4}+\frac{5}{p^2+4}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\\ &=\frac{p}{p^2+4}+\frac{4}{p^2+4}+\frac{1}{p^2} \end{aligned} \tag{8}$$

بامراجعه به تبدیلاتی که در بخش ۵۰ به دست‌آوردیم، می‌بینیم که (۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L[y]=L[\cos 2x]+L[2\sin 2x]+L[x]$$

$$=L[\cos 2x+2\sin 2x+x]$$

لذا جواب مطلوب عبارت است از:

$$y=\cos 2x+2\sin 2x+x$$

این نتیجه را می‌توان بسادگی امتحان کرد، زیرا جواب عمومی (۶) را می‌توان با جستجو پیدا کرد:

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+x$$

و شرایط اولیه بلافاصله نتیجه می‌دهند که $c_1=1$ و $c_2=2$.

اعتبار این روش متکی براین فرض است که تنها یك تابع $y(x)$ موجود است که تبدیل لاپلاسش برابر باطرف راست معادلهٔ (۸) باشد. این مطلب بافرض پیوستگی $y(x)$ صحیح است، وهرجواب یك معادلهٔ دیفرانسیل لزوماً پیوسته است. اگر $f(x)$ پیوسته باشد، معادلهٔ $L[f(x)]=F(p)$ را اغلب به صورت زیر می‌نویسند

$$L^{-1}[F(p)]=f(x)$$

مرسوم است که L^{-1} را تبدیل لاپلاس معکوس، و $f(x)$ را تبدیل لاپلاس معکوس $F(p)$ بنامیم. چون L خطی است، واضح است که L^{-1} نیزخطی است. در مثال ۱ ازتبدیلهای معکوس زیر استفاده کردیم:

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right]=\cos 2x, \quad L^{-1}\left[\frac{2}{p^2+4}\right]=\sin 2x, \quad L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=x$$

این مثال همچنین ارزش تجزیه به‌کسرهای جزئی را به‌عنوان روشی برای محاسبهٔ تبدیلهای معکوس روشن می‌کند.

برای راحتی خواننده، فهرست مختصری از جفتهای مفید ازتبدیلات را درجدول ۱ نوشته‌ایم. جداول خیلی مفصلتری برای کسانی که استفادهٔ فراوان ازتبدیل لاپلاس را در کارشان مفید بیابند وجود دارد.

جدول ۱. جفتهای تبدیلی ساده

$f(x)$	$F(p)=L[f(x)]$
1	$\frac{1}{p}$
x	$\frac{1}{p^2}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\sinh ax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

برخی خواص عمومی تبدیلات لاپلاس را کـه باعث افزایش استفاده از جدول ۱ خواهد شد بررسی می‌کنیم. نخستین خاصیت دستور انتقالی است:

$$L[e^{ax}f(x)]=F(p-a) \tag{۹}$$

برای اثبات، کافی است توجه کنیم که

$$L[e^{ax}f(x)]=\int_0^\infty e^{-px}e^{ax}f(x)dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-(p-a)x}f(x)dx$$

$$=F(p-a)$$

از فرمول (۹) می‌توان برای یافتن تبدیل حاصلضربهایی به صورت $e^{ax}f(x)$ ، وقتی کـه $F(p)$ معلوم باشد وهمچنین برای یافتن تبدیل‌معکوس توابعی به‌صورت $F(p-a)$،وقتی

$f(x)$ معلوم باشد، استفاده کرد.

مثال ۲.

$$L[\sin bx]=\frac{b}{p^2+b^2}$$

لذا

$$L[e^{ax}\sin bx]=\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$$

مثال ۳.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=x$$

بنابراین

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-a)^2}\right]=e^{ax}x$$

روشهای این بخش را می‌توان در مورد دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت وهمچنین درمورد بعضی‌انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار برد. برای مباحث مربوط به این کاربردها می‌توانید به‌کتابهایی‌که راجع به تبدیلات لاپلاس با تفصیل بیشتری بحث‌کرده است رجوع کنید[1].

تمرین

۱ــ مطلوب است تعیین تبدیل لاپلاس توابع زیر

الف) x^5e^{-2x} ب) $(1-x^2)e^{-x}$ ج) $e^{3x}\cos 2x$

۲ــ تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید:

الف) $\frac{6}{(p+2)^2+9}$ ب) $\frac{12}{(p+3)^4}$ ج) $\frac{p+3}{p^2+2p+5}$

۳ــ هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را با روش تبدیل لاپلاس حل‌کنید:

الف) $y'+y=3e^{2x}$ ، $y(0)=0$

ب) $y''-4y'+4y=0$ ، $y(0)=0$ و $y'(0)=3$

---

۱. برای مثال، مراجعه‌کنید به:
R. V. Churchill, «Operational Mathematics,» 2d. ed., McGraw–Hill, NewYork, 1958.

ج) $y''+2y'+2y=2$ ، $y(0)=0$ و $y'(0)=1$

د) $y''+y'=3x^2$ ، $y(0)=0$ و $y'(0)=1$

ه) $y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x$ ، $y(0)=0$ و $y'(0)=3$

۴ـ جوابی از معادلهٔ $y''-2ay'+a^2y=0$ را بیابید که در آن شرایط اولیهٔ $y(0)=y_0$ و $y'(0)=y'_0$ مشخص نشده باشند. (این راهی دیگر برای یافتن جوابی است که در بخش ۱۷ به دست آمد، برای حالتی که در آن معادلهٔ کمکی دارای ریشهٔ مضاعف است.)

۵ـ با استفاده از (۳) فرمول مربوط به تبدیل لاپلاس انتگرال، یعنی

$$L\left[\int_0^x f(x)\,dx\right]=\frac{F(p)}{p}$$

را ثابت کنید و صحت آن را با محاسبهٔ

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right]$$

از دو راه تحقیق کنید.

۵۳. مشتق و انتگرال تبدیل لاپلاس

دستور کلی تبدیل لاپلاس

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx$$

را در نظر می‌گیریم. مشتق‌گیری از این فرمول نسبت به p را می‌توان به داخل علامت انتگرال برد و نتیجه چنین می‌شود:

$$F'(p)=\int_0^\infty e^{-px}(-x)f(x)dx \tag{1}$$

یا

$$L[-xf(x)]=F'(p) \tag{2}$$

با مشتق‌گیری از (۱) مشاهده می‌کنیم که

$$L[x^2f(x)]=F''(p) \tag{3}$$

و به طور کلیتر رابطهٔ

$$L[(-1)^n x^n f(x)]=F^{(n)}(p) \tag{4}$$

برای هرعدد صحیح مثبت n برقراراست. ازاین فرمولها می‌توان برای یافتن تبدیل توابعی به

صورت $x^n f(x)$ برحسب $F(p)$ استفاده کرد.

مثال ۱. چون $L[\sin ax]=a/(p^۲+a^۲)$ ، داریم:

$$L[x\sin ax]=-\frac{d}{dp}\left(\frac{a}{p^۲+a^۲}\right)=\frac{۲ap}{(p^۲+a^۲)^۲}$$

مثال ۲. از بخش ۵۱ می‌دانیم که $L[x^{-۱/۲}]=\sqrt{\pi/p}$ ، لذا

$$L[x^{۱/۲}]=L[x(x^{-۱/۲})]=-\frac{d}{dp}\left(\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)=\frac{۱}{۲p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

هرگاه (۲) را درمورد $y(x)$ ومشتقاتش به‌کاربریم، وفرمولهای ۵۲-(۳) و ۵۲-(۴) را به خاطرآوریم، آنگاه خواهیم دید که

$$L[xy]=-\frac{d}{dp}L[y]=-\frac{dY}{dp} \qquad (۵)$$

$$L[xy']=-\frac{d}{dp}L[y']=-\frac{d}{dp}[pY-y(۰)]=-\frac{d}{dp}[pY] \qquad (۶)$$

و

$$L[xy'']=-\frac{d}{dp}L[y'']=-\frac{d}{dp}[p^۲Y-py(۰)-y'(۰)]$$

$$=-\frac{d}{dp}[p^۲Y-py(۰)] \qquad (۷)$$

بعضی اوقات می‌توان ازاین فرمولها برای حل آن دسته از معادلات دیفرانسیل خطی، که ضرایبشان چند جمله‌ایهای درجهٔ اول ازمتغیر مستقل‌اند، استفاده کرد.

مثال ۳. معادلهٔ بسل ازمرتبهٔ صفرعبارت است از

$$xy''+y'+xy=۰ \qquad (۸)$$

می‌دانیم که این‌معادله تنها یک‌جواب $y(x)$ داردکه در شرط اولیهٔ $y(۰)=۱$ صدق‌می کند. برای یافتن این جواب، L را به طرفین (۸) اعمال می کنیم و بـا استفاده از (۵) و (۷) خواهیم داشت:

$$-\frac{d}{dp}[p^۲Y-p]+pY-۱-\frac{dY}{dp}=۰$$

یا

$$(p^{۲}+۱)\frac{dY}{dp}=-pY \tag{۹}$$

هرگاه متغیرهای (۹) را جدا کنیم واز آن انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$Y=\frac{c}{\sqrt{p^{۲}+۱}}=c(p^{۲}+۱)^{-۱/۲}$$

$$=\frac{c}{p}\left(۱+\frac{۱}{p^{۲}}\right)^{-۱/۲} \tag{۱۰}$$

اگر فاکتور آخر را به کمك سری دو جمله‌ای

$$(۱+z)^{a}=۱+az+\frac{a(a-۱)}{۲!}z^{۲}+\frac{a(a-۱)(a-۲)}{۳!}z^{۳}+\cdots$$

$$+\frac{a(a-۱)\cdots(a-n+۱)}{n!}z^{n}+\cdots$$

بسط دهیم، (۱۰) به صورت زیر درمی‌آید:

$$Y=\frac{c}{p}\left[۱-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{p^{۲}}+\frac{۱}{۲!}\cdot\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۲}\cdot\frac{۱}{p^{۴}}-\frac{۱}{۳!}\cdot\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۲}\cdot\frac{۵}{۲}\cdot\frac{۱}{p^{۶}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{۱\cdot۳\cdot۵\cdots(۲n-۱)}{۲^{n}n!}\;\frac{(-۱)^{n}}{p^{۲n}}+\cdots\right]$$

$$=c\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۲n)!}{۲^{۲n}(n!)^{۲}}\;\frac{(-۱)^{n}}{p^{۲n+۱}}$$

هرگاه به‌طور صوری[۱] عمل کنیم و تبدیل معکوس این سری را جمله به جمله محاسبه کنیم، خواهیم دید که

$$y(x)=c\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۲^{۲n}(n!)^{۲}}x^{۲n}$$

$$=c\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲^{۲}}+\frac{x^{۴}}{۲^{۲}\cdot۴^{۲}}-\frac{x^{۶}}{۲^{۲}\cdot۴^{۲}\cdot۶^{۲}}+\cdots\right)$$

چون $y(۰)=۱$، می‌بینیم که $c=۱$، وجواب مطلوب عبارت است از:

---

۱. «به‌طور صوری» یعنی بدون تحقیق در وجود شرایط کافی‌که صحت نتیجهٔ عملیات را تضمین می‌کنند. بنابراین‌هرگاه به‌طور صوری عمل‌کنیم صحت نتیجه‌ای‌که به‌دست می‌آید، نیاز به‌تحقیق دارد. مترجمین

$$y(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots$$

این‌سری، تابع‌مهم بسل $J_0(x)$ را تعریف‌می‌کند که دیدیم تبدیل‌لاپلاس آن $1/\sqrt{p^2+1}$ است. فصل۶ شامل بحث مفصلی راجع به $J_0(x)$ از دیدگاهی‌کاملا متفاوت است، وجالب است ببینیم به چه سادگی می‌توان آن را از روشهای تبدیل لاپلاس به دست آورد.

حال به مسئلهٔ انتگرال‌گیری از تبدیلات لاپلاس برمی‌گردیم، و نتیجهٔ اصلی رابطهٔ زیر است:

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_p^\infty F(p)\,dp \tag{11}$$

برای اثبات می‌نویسیم $L[f(x)/x]=G(p)$. استفاده از رابطهٔ (۲) به:

$$\frac{dG}{dp}=L\left[(-x)\frac{f(x)}{x}\right]=-L[f(x)]=-F(p)$$

منجر می‌شود. لذا برای مقداری از a خواهیم داشت

$$G(p)=-\int_a^p F(p)\,dp$$

چون می‌خواهیم وقتی p به سمت بینهایت میل می‌کند، $G(p)$ به صفر میل کند، a را برابر ∞ قرارمی‌دهیم و چنین به دست می‌آوریم

$$G(p)=\int_p^\infty F(p)\,dp$$

که همان (۱۱) است. ازاین فرمول برای یافتن تبدیل توابعی به‌صورت $f(x)/x$ برحسب $F(p)$ استفاده می‌شود. علاوه براین، اگر (۱۱) را به صورت

$$\int_0^\infty e^{-px}\frac{f(x)}{x}\,dx=\int_p^\infty F(p)\,dp$$

بنویسیم و p را به سمت صفرمیل دهیم، می‌بینیم که

$$\int_0^\infty\frac{f(x)}{x}\,dx=\int_0^\infty F(p)\,dp \tag{12}$$

این رابطه در شرایطی که انتگرال طرف چپ موجود باشد، معتبر است. بعضی اوقات از این فرمول می‌توان برای محاسبهٔ انتگرالهایی، که حساب‌کردن آنها باروشهای دیگردشوار است، استفاده کرد.

مثال ۴. چون $L[\sin x]=1/(p^2+1)$، از (۱۲) درمی‌یابیم که

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{\circ}^{\infty}\frac{dp}{p^{۲}+۱}=\tan^{-۱}p\Big]_{\circ}^{\infty}=\frac{\pi}{۲}$$

برای سهولت مراجعه، خواص عمده و عمومی تبدیلات لاپلاس را در جدول زیر فهرست می‌کنیم. توجه کنید که آخرین فرمول جدول، جدید است. این فرمول و کاربردهایش را در بخش بعد مطالعه خواهیم کرد.

جدول ۲. خواص عمومی $L[f(x)]=F(p)$

$$L[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha F(p)+\beta G(p)$$

$$L[e^{ax}f(x)]=F(p-a)$$

$$L[f'(x)]=pF(p)-f(\circ);$$
$$L[f''(x)]=p^{۲}F(p)-pf(\circ)-f'(\circ)$$

$$L\left[\int_{\circ}^{x}f(x)dx\right]=\frac{F(p)}{p}$$

$$L[-xf(x)]=F'(p);$$
$$L[(-۱)^{n}x^{n}f(x)]=F^{(n)}(p)$$

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_{p}^{\infty}F(p)dp$$

$$L\left[\int_{\circ}^{x}f(x-t)g(t)dt\right]=F(p)G(p).$$

تمرین

۱ــ نشان دهید که:

$$L[x\cos ax]=\frac{p^{۲}-a^{۲}}{(p^{۲}+a^{۲})^{۲}}$$

و با استفاده از این نتیجه، حاصل

$$L^{-۱}\left[\frac{۱}{(p^{۲}+a^{۲})^{۲}}\right]$$

را بیابید.

۲ــ تبدیلات لاپلاس زیر را بیابید:

الف) $L[x^{۲}\sin ax]$

ب) $L[x^{3/2}]$

۳ـ معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید:

الف) $xy''+(3x-1)y'-(4x+9)y=0$ ، $y(0)=0$

ب) $xy''+(2x+3)y'+(x+3)y=3e^{-x}$ ، $y(0)=0$

۴ـ اگر $y(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+x^2y=0$$

وشرایط اولیهٔ $y(0)=y_0$ و $y'(0)=y'_0$ صدق کند، نشان دهید که تبدیل آن $Y(p)$ در معادلهٔ

$$Y''+p^2Y=py_0+y_0'$$

صدق خواهد کرد. توجه کنید که معادلهٔ دوم ازهمان نوع اولی است، لذا پیشرفتی انجام نگرفته است. روش مثال ۳ فقط درحالتی که ضرایب ، چند جمله ایهای درجهٔ یك باشند مفیداست.

۵ـ مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر، به‌فرض آنکه a و b اعداد ثابت ومثبتی باشند:

الف) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ ب) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}dx$

۶ـ به‌طور صوری نشان دهید که

الف) $\int_0^\infty J_0(x)dx=1$ ب) $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(x\cos t)dt$

۷ـ به فرض $x>0$، به‌طور صوری ثابت کنید که

الف) $$f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

ب) $$f(x)=\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

۸ـ الف) اگر $f(x)$ متناوب، بـا دورهٔ تناوب a باشد ، یعني $f(x+a)=f(x)$، نشان دهید که

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a e^{-px}f(x)dx$$

ب) مطلوب است تعیین $F(p)$ اگر $f(x)$ در فاصله‌های ۰ تا ۱، ۲ تا ۳ ، ۴ تا ۵ ، و غیره، برابر یك و دربقیهٔ فاصله‌ها برابر با صفرباشد.

۵۴. کنولوسیون و مسئلهٔ مکانیکی آبل

اگر $L[f(x)]=F(p)$ و $L[g(x)]=G(p)$ ، تبدیل معکوس $F(p)G(p)$ چه خواهد بود؟

برای آنکه به‌این سؤال به‌طور صوری جواب دهیم درانتگرالهای معرف تبدیلها، از متغیرهای ظاهری s و t استفاده می کنیم ومی‌نویسیم

$$F(p)G(p)=\left[\int_{0}^{\infty}e^{-ps}f(s)ds\right]\left[\int_{0}^{\infty}e^{-pt}g(t)dt\right]$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-p(s+t)}f(s)g(t)ds\,dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-p(s+t)}f(s)ds\right]g(t)dt$$

در اینجا انتگرالگیری روی ربع اول ($s\geqslant 0$ ، $t\geqslant 0$) صفحهٔ st انجام می‌شود. حال در انتگرال درونی آخرین فرمول، متغیرجدید x را توسط رابطهٔ $s=x-t$ وارد می کنیم ، پس $s+t=x$. (دراین انتگرالگیری t ثابت است) و $ds=dx$.

$$F(p)G(p)=\int_{0}^{\infty}\left[\int_{t}^{\infty}e^{-px}f(x-t)dx\right]g(t)dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{t}^{\infty}e^{-px}f(x-t)g(t)dx\,dt$$

در این انتگرال، میدان انتگرالگیری نیمهٔ اول ربع اول ($x-t\geqslant 0$) ازصفحهٔ xt است و هر گاه ترتیب انتگرالگیری را با توجه به شکل ۷۵ عوض کنیم ، می بینیم که:

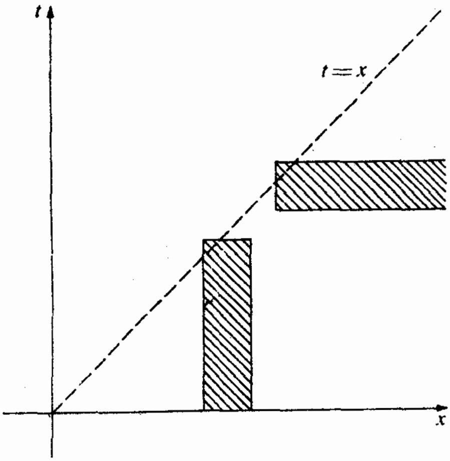
$$F(p)G(p)=\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{x}e^{-px}f(x-t)g(t)dt\right]dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-px}\left[\int_{0}^{x}f(x-t)g(t)dt\right]dx$$

$$=L\left[\int_{0}^{x}f(x-t)g(t)dt\right]$$

انتگرال آخرین عبارت تابعی از حد بالایی آن، یعنی x است وجواب سؤال ما را به‌دست می‌دهد. این‌انتگرال‌را کنولوسیون توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌نامند. آن را می‌توان به‌عنوان «حاصلضرب تعمیم یافتهٔ» این توابع تلقی کرد.

کنولوسیون را می‌توان برای یافتن تبدیل معکوس به کاربرد. به عنوان مثال ، چون $L[x]=1/p^{2}$ و $L[\sin x]=1/(p^{2}+1)$ ، داریم



شکل ۷۵

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^{2}(p^{2}+1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{p^{2}}\left(\frac{1}{p^{2}+1}\right)\right]$$
$$=\int_{0}^{x}(x-t)\sin t\,dt$$
$$=x-\sin x$$

که با روش کسرهای جزئی نیز بآسانی به دست می‌آید. دستهٔ جالبتری از کاربردها به طریق زیرظاهر می‌شود. اگر $f(x)$ و $k(x)$ توابع مفروضی باشند، آنگاه معادلهٔ

$$f(x)=y(x)+\int_{0}^{x}k(x-t)y(t)dt \qquad (1)$$

راکه درآن، تابع مجهول $y(x)$ در زیر علامت انتگرال ظاهـر می‌شود، معادلهٔ انتگرالی می‌نامند. به علت شکل خاص این معادله که انتگرال موجود درآن کنولوسیون توابع $k(x)$ و $y(x)$ است، حل آن متکی بر تبدیل لاپلاس است. در واقع، هرگاه ازطرفین معادلهٔ (۱) تبدیل لاپلاس بگیریم، می‌بینیم که

$$L[f(x)]=L[y(x)]+L[k(x)]L[y(x)]$$

لذا

$$L[y(x)]=\frac{L[f(x)]}{1+L[k(x)]} \qquad (2)$$

طرف راست (۲) تابع معلومی‌از p است، و اگر این تابع، تبدیل قابـل تشخیصی باشد، جواب $y(x)$ به دست آمده است.

مثال ۱. معادلهٔ انتگرالی

$$y(x)=x^{3}+\int_{0}^{x}\sin(x-t)y(t)dt \qquad (۳)$$

ازاین نوع است، وبا اعمال L برطرفین آن خواهیم داشت

$$L[y(x)]=L[x^{3}]+L[\sin x]L[y(x)]$$

و پس از حل آن برحسب $L[y(x)]$ داریم:

$$L[y(x)]=\frac{L[x^{3}]}{1-L[\sin x]}=\frac{3!/p^{4}}{1-1/(p^{2}+1)}$$

$$=\frac{3!}{p^{4}}\left(\frac{p^{2}+1}{p^{2}}\right)=\frac{3!}{p^{4}}+\frac{3!}{p^{6}}$$

لذا

$$y(x)=x^{3}+\frac{1}{20}x^{5}$$

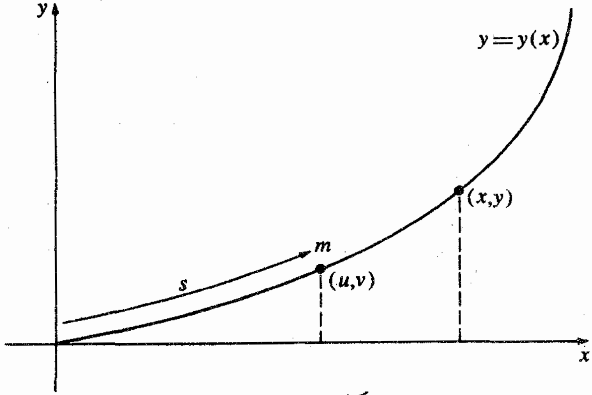
جواب معادلهٔ (۳) است.

برای تشریح بیشتر این روش، یك مسئلهٔ کلاسیك از مکانیك را،که به این‌گونه معادلهٔ انتگرالی منجرمی‌شود، تجزیه و تحلیل می‌کنیم. فرض‌کنید سیمی به‌صورت منحنی همواری خم شده باشد (شکل ۷۶) ومهره‌ای به جـرم m روی سیم از حالت سکون به سمت مبدأ شروع به لغزیدن‌کند. همچنین فرض‌کنید این حرکت بدون اصطکاك وتنها تحت تأثیرنیروی وزن مهره انجام پذیرد. فرض‌کنید $(x ، y)$ نقطهٔ شروع حرکت و $(u ، v)$ هرنقطهٔ واقع‌در بین راه باشد. هرگاه شکل سیم به وسیلهٔ منحنی $y=y(x)$ مشخص گردد، آنگاه مدت‌زمان فرود این‌مهره تابع معینی چون $T(y)$ از ارتفاع اولیهٔ y خواهد بود. مسئلهٔ مکانیکی آبل عکس این مطلب است: تابع $T(y)$ ازقبل داده شده است، و منظور تعیین شکل سیم است به طوری‌که $T(y)$ مدت زمان فرود آن باشد.

برای آنکه این مسئله را به زبان ریاضی بیان‌کنیم، از اصل پایستگی (بقای) انرژی

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^{2}=mg(y-v) \quad \text{یا} \quad -\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g(y-v)}$$

شروع می‌کنیم، این رابطه را می‌توان به صورت زیر بیان‌کرد:



شکل ۷۶

$$dt=-\frac{ds}{\sqrt{۲g(y-v)}}$$

با انتگرالگیری از این رابطه از $v=y$ تا $v=۰$، می‌بینیم که

$$T(y)=\int_{v=y}^{v=۰}dt=\int_۰^y\frac{ds}{\sqrt{۲g(y-v)}}=\frac{۱}{\sqrt{۲g}}\int_۰^y\frac{s'(v)\,dv}{\sqrt{y-v}} \qquad (۴)$$

حال وقتی منحنی $y=y(x)$ معلوم باشد، عبارت زیر نیز معلوم خواهد بود

$$s=s(y)=\int_۰^y\sqrt{۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲}\,dy$$

لذا مشتق آن نیز معلوم است:

$$f(y)=s'(y)=\sqrt{۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲} \qquad (۵)$$

هرگاه (۵) را در (۴) بگذاریم، خواهیم دید که

$$T(y)=\frac{۱}{\sqrt{۲g}}\int_۰^y\frac{f(v)\,dv}{\sqrt{y-v}} \qquad (۶)$$

به وسیلهٔ این رابطه می‌توان $T(y)$ را از روی منحنی داده شده به دست آورد. در مسئلهٔ آبل می‌خواهیم منحنی را به‌کمك $T(y)$ داده شده به دست آوریم. از این دیدگاه، در معادلهٔ (۶) تابع $f(y)$ مجهول است و خود معادلهٔ (۶) معادلهٔ انتگرالی آبل نامیده

می‌شود. دقت کنید که انتگرال معادلهٔ (۶) کنولوسیون توابع $y^{-1/2}$ و $f(y)$ است، لذا هرگاه ازطرفین (۶) تبدیل لاپلاس بگیریم، می‌بینیم که

$$L[T(y)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}L[y^{-1/2}]L[f(y)]$$

حال اگر به خاطر آوریم که $L[y^{-1/2}]=\sqrt{\pi/p}$ ، آنگاه

$$L[f(y)]=\sqrt{2g}\,\frac{L[T(y)]}{\sqrt{\pi/p}}$$

$$=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}p^{1/2}L[T(y)] \qquad (7)$$

وقتی $T(y)$ معلوم باشد، طرف‌راست معادلهٔ (۷) تابع معلومی از p خواهد بود، لذا امید است که با یافتن تبدیل معکوس‌بتوان $f(y)$ را به دست آورد. وقتی $f(y)$ معلوم شد، خود منحنی را می‌توان ازحل معادلهٔ دیفرانسیل (۵) به دست آورد.

به عنوان مثالی مشخص، بحث خود را روی حالتی متمرکز می‌کنیم که $T(y)$ برابر با مقدار ثابت T_0 باشد. این فرض بدان معناست که زمان نزول باید مستقل از نقطهٔ شروع باشد. منحنی تعریف شده با این خاصیت، منحنی همزمان نامیده می‌شود. لذا مسئلهٔ ما تعیین منحنی همزمان است. دراین حالت، (۷) به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$L[f(y)]=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}p^{1/2}L[T_0]=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}p^{1/2}\frac{T_0}{p}=b^{1/2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

که درآن $b=2gT_0^2/\pi^2$. تبدیل معکوس $\sqrt{\pi/p}$ برابر $y^{-1/2}$ است، پس

$$f(y)=\sqrt{\frac{b}{y}} \qquad (8)$$

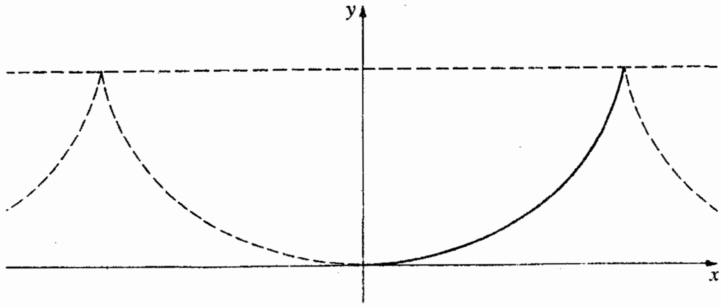
با این $f(y)$ ، معادلهٔ (۵)، یعنی معادلهٔ دیفرانسیل منحنی مورد نظر، به‌صورت

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{b}{y}$$

نوشته می‌شود، لذا داریم

$$x=\int\sqrt{\frac{b-y}{y}}dy$$

که با تغییر متغیر $y=b\sin^2\phi$ به‌صورت زیردرمی‌آید:



شکل ۷۷

$$x = ۲b\int \cos^۲ \phi \, d\phi = b\int (۱ + \cos ۲\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{b}{۲}(۲\phi + \sin ۲\phi) + c$$

بنابراین

$$y = \frac{b}{۲}(۱ - \cos ۲\phi) \quad \text{و} \quad x = \frac{b}{۲}(۲\phi + \sin ۲\phi) + c \qquad (۹)$$

منحنی باید از مبدأ (۰ ، ۰) عبور کند لذا $c = ۰$ ؛ واگر $a = b/۲$ و $\theta = ۲\phi$ انتخاب شوند، (۹) به‌صورت ساده‌تر زیر درخواهد آمد:

$$y = a(۱ - \cos\theta) \quad \text{و} \quad x = a(\theta + \sin\theta)$$

اینها معادلات پارامتری چرخزاد (شکل ۷۷)هستند، که توسط نقطهٔ ثابتی ازدایره‌ای به‌شعاع a که زیرخط‌چین‌افقی $y = ۲a$ می‌چرخد تولید شده است. چون $۲a = b = ۲gT_۰^۲/\pi^۲$، قطر دایرهٔ مولد به وسیلهٔ مقدار ثابت مدت زمان سقوط تعیین می‌شود.

نتیجتاً ، منحنی همزمان یك چرخزاد است. درتمرینهای ۶ـ۲ و ۱۱ـ۴ این خاصیت چرخزاد را به روشهای دیگری تحقیق کردیم. بحث فعلی دارای این مزیت است که به ما امکان می‌دهد تا بدون اطلاع قبلی ازجواب، منحنی همزمان را پیدا کنیم.

تمرین

۱ـ مطلوب است تعیین $L^{-۱}[۱/(p^۲ + a^۲)^۲]$ به کمك کنولوسیون (مراجعه شود به تمرین ۱ـ۵۳)

۲ـ معادلات انتگرالی زیر را حل کنید:

الف) $$y(x)=1-\int_0^x (x-t)y(t)dt$$

ب) $$y(x)=e^x\left[1+\int_0^x e^{-t}y(t)dt\right]$$

ج) $$e^{-x}=y(x)+2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$$

د) $$3\sin 2x=y(x)+\int_0^x (x-t)y(t)dt$$

۳ــ رابطهٔ

$$f(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{T(t)dt}{\sqrt{y-t}}$$

را ازمعادلهٔ (۷) به دست‌آورید، و به‌کمك آن، درستی (۸) را وقتی که $T(y)$ مقدار ثابت T_0 باشد تحقیق کنید.

۴ــ مطلوب است تعیین معادلهٔ منحنی فرود، هرگاه $T(y)=k\sqrt{y}$ باشد، دراینجا k مقدار ثابتی است.

۵ــ نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+a^2y=f(x)\quad,\qquad y(0)=y'(0)=0$$

دارای جواب زیراست:

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)dt$$

پیوست الف . لاپلاس

پیرسیمون دو لاپلاس[1] (۱۷۴۹ــ۱۸۲۷) ریاضیدان ومنجم نظری‌فرانسوی‌ودر زمان خود آنچنان مشهور بود که نیوتن فرانسه خوانده می‌شد. علاقهٔ‌اصلی‌او در طول زندگیش مکانیك سماوی، نظریهٔ احتمال، وارتقاء مقام بود.

در سن بیست وچهار سالگی عمیقاً درگیر جزئیات‌کاربرد قانون گرانش نیوتن درکل منظومهٔ شمسی بودکه در آن، سیارات واقمار آنها تنها تحت تأثیر خورشید نیستند، بلکه به اشکال درهم وپیچیده‌ای در یکدیگر تأثیر دارند. حتی نیوتن معتقد بود که گاهی مداخلهٔ الهی لازم است تا از پیدایش بی‌نظمی در این سازوکار پیچیده جلوگیری شود. لاپلاس تصمیم گرفت که دلایل علمی این موضوع را جستجوکند، و موفق شد ثابت‌کند که یك

1. Pierre Simon de Laplace

منظومهٔ شمسی ایده‌آل در ریاضیات عبارت است از دستگاه دینامیکی پایداری که همواره بدون تغییر بماند. این دستاورد تنها یکی از پیروزیهـای فراوان اوست که در اثر بزرگ و تاریخیش تحت عنوان مکانیک سماوی[1] (که در پنج مجلد از سال ۱۷۹۹ تا ۱۸۲۵ انتشار یافت)، آمده است. دراین اثرکارهای چندین نسل از ریاضیدانان برجسته راجع به گرانش گردآوری شده است. متأسفانه به‌خاطر شهرت آینده‌اش، همهٔ مراجع مربـوط به اکتشافات پیشینیان ومعاصران خود را حذف کرد، وامکان این‌توهم را به‌وجود آورد که همهٔ این مطالب ونظرات متعلق به خود اوست. حکایات زیادی در رابطه با این‌کارش ذکرشده است. یکی‌از مشهورترین آنها حاکی از زمانی است که ناپلئون برای نشان دادن نقطهٔ ضعفی از لاپلاس، به او اعتراض کرد که چراکتاب قطوری راجع به‌دستگاه جهان نوشته است بدون اینکه‌حتی یکبارهم‌درآن به‌خدا به‌عنوان‌خالق‌جهان اشاره‌ای کرده باشد. میراث‌اصلی‌لاپلاس که در کتاب مکانیک سماوی اوبرای نسلهای بعدی به‌جا ماند توسعهٔ همه‌جانبهٔ نظریهٔ پتانسیل است، که‌در رشته‌های متعددی از علـوم فیزیکی، ازگرانش ومکانیک سیالات گرفته تا الکترومغناطیس و فیزیك اتمی ، وسیعاً مطرح می‌باشد. با وجود اینکه لاپلاس انـدیشهٔ پتانسیل‌را از لاگرانـژ گرفت‌بدون اینکه ذکری از این امر به‌میان آورد، ولی این نظریـه را مورد استفادهٔ آنچنان گسترده‌ای قرارداد که ازآن زمان، معادلهٔ دیفرانسیل نظریهٔ پتانسیل همواره به‌معادلهٔ اساسی لاپلاس مشهور بوده است.

شاهکاردیگراو رسالهٔ نظریهٔ تحلیلی احتمالات[2] (۱۸۱۲) بود، که‌درآن کشفیات‌چهل‌سالهٔ خود را درمورد احتمال تنظیم کرد. وی بازهم فراموش‌کرد از نظرات فراوان دیگران که بانظرات خود درآمیخته بود، ذکری به‌میان‌آورد، ولی با این‌وجود عموماً متفق‌القول‌اند که کتابش دراین زمینه بزرگترین اثری است‌که دراین قسمت از ریاضی نوشته شده است. وی درمقدمهٔ این‌کتاب می‌گوید: «نظریهٔ احتمال اساساً چیزی نیست مگر برداشت معمولی که به‌صورت محاسبه درآمده است.» ممکن‌است چنین باشد، ولی ۷۰۰ صفحهٔ آنالیزبغرنج بعدی، که درآن آزادانه از تبدیلات لاپلاس، توابـع مولد، وبسیاری ابزار غیرابتدایی‌دیگر استفاده‌کرده است، به‌گفتهٔ بعضی، از نظر پیچیدگی حتی ازکتاب مکانیك سماوی‌نیز فراتر می‌رود.

بعد از انقلاب فرانسه، استعداد سیاسی وحرص لاپلاس برای‌کسب مقام به اوج‌خود رسید. هم‌میهنانش از بی‌ثباتی و اطاعت وی در امـر سیاست به تمسخر یـاد می‌کنند. این بدان معناست‌که هروقت تغییری درحکومت پیش می‌آمد (که در آن زمان زیاد رخ می‌داد) لاپلاس باتغییراصول معتقدات خود بآرامی بامحیط سازگار می‌شد ــ اوبین جمهوریخواهی شدید ومداحی ازسلطنت درنوسان بود ــ وهر بار به شغلی بهتروعنوانی مهمتردست‌می‌یافت. مناسب است‌که اورا بانمایندهٔ قلابی پاپ در بری[3] که درادبیات انگلیسی‌آمده است مقایسه

1. Mécanique Céleste
2. Théorie Analytique des Probabilités

۳. شهرکی ساحلی درایرلند

کنیم، که دوبار کاتولیك ودوبار پروتستان شد. می گویند نمایندهٔ پاپ درجواب اتهام رنگ‌ـ عوض کردن گفته است که : «نه، این طور هم نیست، زیرا گرچه مذهب خودرا تغییر می‌دادم ولی یقیناً به‌اصل خود پای‌بند بوده‌ام، اصلی که حکم می کند من باید تا پایان عمر اسقف در بری باقی بمانم.»

لاپلاس برای جبران خطاهایش، همواره درکمك وتشویق دانشمندان جوانتر دست و دل باز بود. اوگاه وبیگاه به‌مردانی‌مانندگیلوساك[1] شیمیدان، هامبولد[2] جهانگرد وطبیعی‌دان، پواسون فیزیك‌دان، وخصوصاً ، کوشی جوان، که یکی ازبـزرگترین سازندگان ریاضیات قرن نوزدهم شد، درپیشبرد کارشان کمك می کرد.

پیوست ب . آبل

نیلس هنریك آبل[3] (۱۸۰۲–۱۸۲۹)یکی ازپیشروترین ریاضیدانان قرن نوزدهم واحتمالا بزرگترین نابغهٔ برخاسته ازکشورهای اسکاندیناوی‌است. آبل‌همراه با معاصرانش، گاوس و کوشی، یکی‌ازپیشگامان‌ابداع ریاضیات نوین‌بوده است، که مشخصهٔ‌آن تأکید براثبات‌دقیق است.زندگیش‌آمیزهٔ تندی بود ازخوشبینی شوخ‌طبعانه درهنگامی که تحت فشار فقروگمنامی قرارداشت، ودرقبال دستاوردهای درخشان برجستهٔ فراوانش‌درعنفوان جوانی، متواضع بود ودررویارویی با مرگی زودرس به آرامی تسلیم بود.

آبل یکی ازشش فرزند خانوادهٔ‌کشیش فقیری دریکی از روستاهای نروژ بود. بیش از شانزده سال نداشت‌که استعداد عظیمش آشکار شد و مورد تشویق یکی از معلمینش قرار گرفت، وچیزی نگذشت‌که به خواندن وفهمیدن‌کارهای نیوتن، اویلر، ولاگرانـژ پرداخت. وی به عنوان تفسیری درمورد این تجربه، نکتهٔ زیر را بعدها دریکی از یادداشتهای ریاضی خودنوشت: «به‌نظرمن اگرکسی بخواهد در ریاضی پیشرفت‌کند، بایدبه مطالعهٔ‌آثار اساتید و نه شاگردان بپردازد.» هجده سال‌بیش نداشت‌که پدرش‌مرد وخانواده را درتنگدستی به‌ـ جاگذاشت. آنها باکمك دوستان وهمسایگان امرار معاش می کردند و باکمك مالی چندتن از استادان، این پسر توانست در سال ۱۸۲۱ به طریقی وارد دانشگاه اسلـو شود. نخستین پژوهشهای او، که شامل حل مسئلهٔ‌کلاسیك منحنی همزمان به وسیلهٔ معادلهٔ انتگرالی (مورد بحث دربخش۵۴) بود، درسال ۱۸۲۳ منتشرشد. این‌اولین جواب معادله‌ای ازاین‌نوع‌بود، وراه‌گشایی برای پیشرفت وسیع معادلات انتگرالی دراواخر قرن نوزدهم واوایل‌قرن‌بیستم شد. اوهمچنین ثابت‌کردکه معادلهٔ درجهٔ‌پنجم $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ را در حالت‌کلی نمی‌توان مانند معادلات درجهٔ پایینتر، برحسب رادیکال حل‌کـرد ، و بدین ترتیب مسئله‌ای را حل کردکه ریاضیدانان را ۳۰۰ سال گرفتار کرده بود. او اثباتش را به خرج خود درجزوهٔ‌کوچکی منتشر کرد.

---

1. Gay-Lussac
2. Humboldt
3. Niels Henrik Abel

دراین رشد علمی، آبل بزودی از نروژ فراتر رفته و تصمیم به دیدار از فـرانسه و آلمان گرفت. با حمایت دوستان واستادانش تقاضایی به دولت داد، کـه پس از تشریفات و تأخیرهای متعارف، بورسی برای یك مسافرت طولانی علمی در قارهٔ اروپـا دریافت کرد. سال اول مسافرت خود به خارج را بیشتر در برلین گذراند. در آنجـا این خوش شانسی بزرگ را داشت که با ریاضیدان آماتور جوان و پرشوری به نام اگوست لئوپولدکرل[1]، که بعدها دوست نزدیك، مشاور، وحامی او شد، آشنا گردد. در مقابل، آبل کرل را به‌انتشار مجلهٔ مشهورش به‌نام مجلهٔ ریاضیات محض وکاربردی[2] برانگیخت. این اولین مجلهٔ ادواری جهان بود که کلاً به پژوهشهای ریاضی اختصاص داشت. سه جلد اول آن شامل ۲۲ مقاله‌از آبل بود.

مطالعات اولیهٔ آبل در ریاضیات منحصر به سنت قدیم قرن هجدهم بود که نمونه‌اش اویلراست. دربرلین تحت تأثیر مکتب فکری جدیدی قرارگرفت که توسط گاوس وکوشی رهبری می‌شد، وبیشتر تأکیدش براستنتاج دقیق بود تابرمحاسبات مشروح. درآن زمان بجز کار عظیم گاوس روی‌سریهای فوق هندسی، کمتراثباتی درآنالیز بود که امروزه نیز معتبر به‌شمارآید. همان طورکه آبل درنامه‌ای به‌یکی از دوستانش تشریح می کند: «اگرساده‌ترین حالات راکنار بگذاریم، در تمام ریاضیات حتی یك سری بینهایت هم نمی‌توان یافت کـه مجموع آن دقیقاً تعیین شده باشد. به عبارت دیگر، مهمترین بخشهـای ریاضیات فاقد مبنا هستند.» دراین دوران‌وی نتیجهٔ مطالعات کلاسیك خود را درمورد سریهای‌دوجمله‌ای نوشت و درآن نظریهٔ عمومی همگرایی را بنانهاد واولین اثبات قانع‌کننده ازصحت بسط این‌سری را ارائه کرد.

آبل جزوهٔ مربوط به معادلات درجهٔ پنجم‌خودرا، به امیدآنکه به‌مثابهٔ یك جواز عبور علمی به‌کار رود، برای گاوس به‌گوتینگن فرستاده بود. ولی، گاوس به دلیلی‌که روشن‌نیست بدون‌آنکه به‌آن حتی نظری بیاندازد آن راکنارگذاشت، زیرا ۳۰ سال بعد، پس ازمرگش آن‌را سربسته دربین اوراقش یافتند. با تأسف برای هردو نفر، آبل احساس‌کردکه درمورد او کارشکنی شده است، وتصمیم گرفت بدون ملاقات باگاوس به پاریس برود.

در پاریس باکوشی، لژاندر، دیریکله، و دیگـران ملاقات کرد، ولی این ملاقاتهـا سرسری بود و او آن طورکه می‌بایست شناخته نشد. وی درآن زمان چندین مقالـهٔ مهم در مجلهٔ کرل منتشرکرده بود ولی فرانسویان کمتر از وجود این مجلهٔ ادواری مطلع بودند و آبل خجالتیتر ازآن بودکـه با افراد تازه‌آشنا راجع به‌کارهای خود صحبت کند. انـدکی پس از ورودش، اثربرجستهٔ خود را تحت عنوان یادداشتی دربارهٔ یك خاصیت کلـی دستهٔ وسیعی از توابع متعالی[3] که آن‌را شاهکار خود دانست، به پایان رساند. این اثرشامل کشفی

---

1. August Leopold Crelle

2. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik

3. Mémoire sur une Propriété Générale d'une Classe Très Etendue des Fonctions Transcendantes

در مورد انتگرال توابع جبری است که امروزه به نام قضیهٔ آبل مشهور است، و پایه‌ای برای نظریهٔ بعدیش راجع به انتگرال آبل، توابع آبل، وقسمت زیادی از هندسهٔ جبری به شمار می‌رود. گفته می‌شود که دهها سال بعد، هرمیت ضمن اشاره به این یادداشت، گفته است: «از آبل آنقدر کار به‌جامانده است که ریاضیدانان را تا ۵۰۰ سال مشغول کند.» ژاکوبی قضیهٔ آبل را بزرگترین کشف حساب انتگرال درقرن نوزدهم توصیف کرد. آبل دستنوشتهٔ خود را به فرهنگستان فرانسه ارائه کرد. وی امیدوار بود که این اثر بتواند توجه ریاضیدانان فرانسه را به‌او جلب کند، ولی او بیهوده صبر کرد تا کیسه‌اش خالی شد ومجبور شد به‌برلین برگردد. جریانی که اتفاق افتاد از این قرار بود: دستنوشتهٔ مزبور برای بررسی به‌کوشی و لژاندر داده شد؛ کوشی آن‌را به‌خانه برد و درجای نامربوطی گذاشت وآن‌را بکلی فراموش کرد؛ وتا سال ۱۸۴۱ اقدام به‌انتشار این اثر نشد، و درآن زمان نیز قبل ازآن که نمونه‌های چاپی آن‌خوانده‌شود گم شد. بالاخره نسخهٔ اصلی مقاله درسال ۱۹۵۲ از فلورانس سردرآورد[۱]. آبل در برلین اولین مقالهٔ انقلابی خود را در مورد توابع بیضوی، موضوعی که سالها روی آن کار کرده بود، به پایان رساند، و درحالی‌که سخت مقروض شده بود به نروژ برگشت.

او انتظار داشت در بازگشت، به استادی دانشگاه منصوب شود، ولی بازهم آرزوهایش نقش برآب شد. با تدریس خصوصی به امرار معاش پرداخت، و مدت کوتاهی نیز به‌عنوان معلم کمکی در یك مؤسسه گمارده شد. دراین دوران یکسره مشغول کار بود و اغلب اوقات روی نظریهٔ توابع بیضوی که آن را به عنوان عکس انتگرالهای بیضوی کشف کرده بود، کار می‌کرد. این نظریه بسرعت جای خودرا به عنوان یکی از رشته‌های اصلی آنالیز قرن نوزدهم، باکاربردهای فراوانی درنظریهٔ اعداد، فیزیك ریاضی، وهندسهٔ جبری، باز کرد. دراین اثنا، آوازهٔ شهرت آبل به‌همهٔ مراکز ریاضی اروپا رسید و در ردیف بزرگان ریاضی جهان قرارگرفت، ولی‌وی به‌خاطر گوشه‌گیریش‌ازاین ماجرا بی‌خبرماند. دراوایل سال ۱۸۲۹ مرض سلی که طی مسافرت به آن مبتلا شده بود چنان پیشروی کرد که اورا از کار کردن بازداشت، و در بهار همان سال، آبل در سن بیست و شش سالگی درگذشت. کمی پس از مرگش، کرل در یادنامه‌ای به طعنه نوشت که تلاشهای آبل موفقیت‌آمیز بوده است، و آبل باید به‌کرسی ریاضی دانشگاه برلین منصوب شود.

کرل در مجلهٔ خود آبل را چنین می‌ستاید: «تمام آثارش حاوی نشانه‌هایی از نبوغ و قدرت فکری حیرت‌انگیز است. می‌توان گفت که او می‌توانست با قدرتی مقاومت‌ناپذیر از همهٔ موانع بگذرد وبه‌عمق مسئله نفوذکند... وجه تمایزاوخلوص ونجابت ذاتی‌وی و نیز تواضع کم‌نظیری‌بود که ارزش اورا به‌میزان‌نبوغ غیرعادیش‌بالامی برد.» ولی، ریاضیدانان،

---

۱. مشروح این داستان حیرت‌انگیز درکتاب زیرآمده است،

O. Ore, «Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary,» University of Minnesota Press, Minneapolis, 1957.

برای یادآوری مردان بزرگ ریاضی روشهای مختص به خود دارند، و با گفتن معادلهٔ انتگرالی آبل، انتگرالها و توابع آبل، گروههای آبلی، سری آبل، فرمول مجموع جزئی آبل، قضیهٔ حد آبل در نظریهٔ سریهای توانی، و جمع‌پذیری آبلی از او یاد می‌کنند. کمتر کسی است که اسمش به این همه موضوع و قضیه در ریاضیات نوین پیوند خورده باشد و آنچه وی در دوران یک زندگی عادی می‌توانست انجام دهد مافوق تصور است.

۱۱

وجود و یگانگی جوابها

۵۵. روش تقریبات متوالی

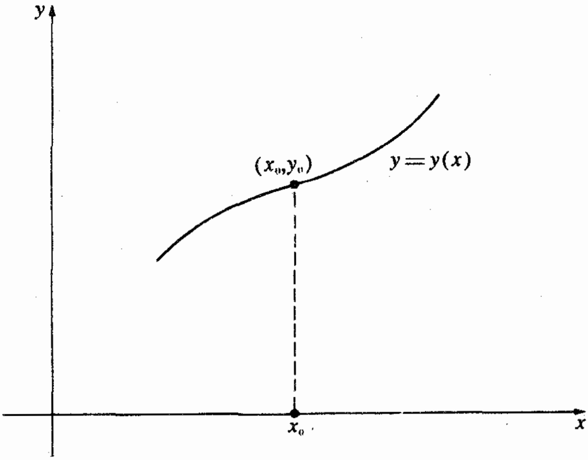
یکی‌از موضوعهای عمده‌ای که دراین‌کتاب کراراً به‌آن اشاره شده این است‌که تنها تعداد قلیلی از انواع سادهٔ معادلات دیفرانسیل رامی‌توان صریحاً برحسب توابع مقدماتی شناخته شده حل کرد. بعضی از این معادلات را درسه فصل اول بررسی کردیم، و فصل۵ شامل‌شرح مبسوط معادلات مرتبهٔ دومی است‌که جوابهایشان را می‌توان برحسب سریهای توانی بیان کرد. لیکن، معادلات دیفرانسیل فراوانی خارج از این دسته‌ها قرار می‌گیرند، وهیچ‌یك از کارهایی‌که تاکنون انجام داده‌ایم، روشی برای حل این‌گونه معادلات ارائه نمی‌کند.

کار خودرا با بررسی مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیرکه دربخش ۲ مطرح شده است شروع می‌کنیم:

$$y'=f(x, y) \quad , \quad y(x_0)=y_0 \tag{۱}$$

که درآن $f(x, y)$ تابع دلخواهی است‌که دریك همسایگی از نقطهٔ (x_0, y_0) تعریف شده وپیوسته است. به‌زبان‌هندسی، منظور ما طرح روشی‌برای رسم تابعی مانند $y=y(x)$ است‌که نمودار آن از نقطهٔ (x_0, y_0) بگذرد و دریك همسایگی x_0 درمعادلهٔ دیفرانسیل $y'=f(x, y)$ صدق کند (شکل ۷۸). باتوجه به‌مطالب فصول گذشته، روشن است‌که روشهای مقدماتی دراینجا به‌کار نمی‌آید و درحالت‌کلی مستلزم نوعی روند نامتناهی است.

روشی که تشریح می‌کنیم متضمن راهی برای حل معادلات دیفرانسیل است که با راههایی که قبلا دیده‌ایم، کاملا تفاوت دارد. نکتهٔ‌کلیدی این روش، در تبدیل مسئلهٔ مقدار



شکل ۷۸

اولیهٔ (۱) به معادلهٔ انتگرال معادل آن، یعنی

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t , y(t)]\, dt \qquad (۲)$$

نهفته است . این معادله را بدین دلیل معادلهٔ انتگرال می‌نامند که تابع مجهول، زیر علامت انتگرال واقع شده است. برای آنکه دریابیم که (۱) و (۲) واقعاً معادل یکدیگرند، فرض می‌کنیم که $y(x)$ جوابی برای (۱) باشد . آنگاه $y(x)$ خودبه‌خود پیوسته است و طرف راست رابطهٔ

$$y'(x)=f[x , y(x)]$$

تابع پیوسته‌ای از x خواهد بود؛ و وقتی از این رابطه از x_0 تا x انتگرال بگیریم و از $y(x_0)=y_0$ استفاده کنیم، رابطهٔ (۲) به‌دست خواهدآمد. در رابطهٔ (۲) طبق‌معمول به‌جای x از متغیر ظاهری t استفاده شده است، تا از اشتباه با x که حد بالایی انتگرال است جلوگیری شود. پس هرجواب (۱) جواب پیوسته‌ای برای (۲) خواهد بود. برعکس، اگر $y(x)$ جواب پیوسته‌ای برای(۲) باشد، آنگاه $y(x_0)=y_0$ است، زیرا انتگرال، به‌ازای $x=x_0$ ، صفر می‌شود، و با مشتق‌گیری از (۲) معادلهٔ دیفرانسیل$y'(x)=f[x , y(x)]$ به‌دست می‌آید. این استدلال ساده نشان می‌دهد که (۱) و (۲) معادلند، به‌این معنا که جوابهای (۱) ــ اگر جوابی وجود داشته باشد ــ دقیقاً جوابهای پیوستهٔ (۲) می‌باشند. بویژه ، اگر بتوانیم جواب پیوسته‌ای برای (۲) بیابیم، خودبه‌خود جوابی برای (۱) به‌دست آورده‌ایم.

حال توجه خود را به چگونگی حل معادلهٔ (۲) ، با روشی مبتنی برتکرار ، معطوف می‌کنیم. لذا ، کار را باتقریبی اولیه از جواب شروع می‌کنیم و آن‌را گام‌به‌گام بااستفاده

از عملی تکرارپذیر بهبود می‌بخشیم بدین قصد که بتوانیم تا حد موردنظر به‌جـواب دقیق نزدیك شویم. همانطور که ذیلا خواهیم دید، نخستین مزیت (۲) نسبت به (۱) آن‌است که معادلهٔ انتگرال دستورالعمل مناسبی برای انجام این روند، ارائه می‌کند.

یك تقریب مقدماتی برای جواب موردنظر، تابع ثابت $y_{\circ}(x)=y_{\circ}$ است، که‌همان خط افقی ماربر نقطهٔ $(x_{\circ}, y_{\circ})$ می‌باشد. برای دستیابی به‌تقریب جـدید و احیاناً بهتری مانند $y_{۱}(x)$ ، این تقریب را به‌صورت زیر، درطرف راست معادلهٔ (۲) وارد می‌کنیم:

$$y_{۱}(x)=y_{\circ}+\int_{x_{\circ}}^{x} f(t, y_{\circ})dt$$

قدم بعدی، استفاده از $y_{۱}(x)$ به‌منظور دست یافتن بـه‌تقریب جدید و شایـد بهتری مانند $y_{۲}(x)$ ، توسط همان روش می‌باشد:

$$y_{۲}(x)=y_{\circ}+\int_{x_{\circ}}^{x} f[t, y_{۱}(t)]dt$$

درمرحلهٔ n ام این روند، خواهیم داشت

$$y_{n}(x)=y_{\circ}+\int_{x_{\circ}}^{x} f[t, y_{n-۱}(t)]dt \qquad (۳)$$

این روش را روش تقریبات متوالی پیکار[1] می‌نامند. طرز به‌کار بستن ایـن روش را به‌کمك چند مثال نشان می‌دهیم.

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ سادهٔ

$$y'=y, \quad y(\circ)=۱$$

دارای جواب بدیهی $y(x)=e^{x}$ می‌باشد. معادلهٔ انتگرال معادل آن، به‌صورت

$$y(x)=۱+\int_{\circ}^{x} y(t)dt$$

است و (۳) به‌صورت

$$y_{n}(x)=۱+\int_{\circ}^{x} y_{n-۱}(t)dt$$

---

۱. امیل پیکار Émile Picard (۱۸۵۶ـ۱۹۴۱) ، یکی‌از برجسته‌ترین ریاضیدانان قرن گذشتهٔ فرانسه بود و دوکار مهم در آنالیز انجام داد، روش تقریبات متوالی وی، که او را قادر به تکمیل نظریهٔ معادلات دیفرانسیلی نمود که کوشی درسالهای ۱۸۲۰ پایه‌گذاری کرده بود؛ و قضیهٔ مشهورش (که قضیهٔ مهم پیکار خوانده می‌شود) راجع به مقادیری‌که تابع تحلیلی‌مختلط درحوالی یك نقطهٔ غیرعادی اساسی‌اش اختیار می‌کند، که تاامروز پژوهشهای زیادی را موجب شده است. او، همچون یك فرانسوی واقعی، خبره درغذاهای عالی و بخصوص شیفتهٔ نوعی ماهی آب‌پز بود.

درمی‌آید. با $y_0(x)=1$ ، بسادگی می‌توان دید که

$$y_1(x)=1+\int_0^x dt=1+x$$

$$y_2(x)=1+\int_0^x(1+t)dt=1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x)=1+\int_0^x\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)dt=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\times 3}$$

و به‌طور کلی

$$y_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

دراین حالت خیلی روشن است که تقریبات متوالی واقعاً به‌سمت جواب دقیق میل می‌کنند، زیرا این تقریبات همان مجموعهای جزئی سری توانی مربوط به e^x هستند.

اکنون مسئلهٔ

$$y'=x+y \quad , \quad y(0)=1 \tag{4}$$

را درنظر می‌گیریم. این یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی‌مرتبهٔ اول است، وبآسانی معلوم‌می‌شود که جوابی که درشرایط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند ، $y(x)=2e^x-x-1$ است. معادلهٔ انتگرال معادل آن به‌صورت

$$y(x)=1+\int_0^x[t+y(t)]dt$$

و (۳) برای آن به‌صورت

$$y_n(x)=1+\int_0^x[t+y_{n-1}(t)]dt$$

است. باتوجه به $y_0(x)=1$ و استفاده از روش پیکار خواهیم داشت

$$y_1(x)=1+\int_0^x(t+1)dt=1+x+\frac{x^2}{2!}$$

$$y_2(x)=1+\int_0^x\left(1+2t+\frac{t^2}{2!}\right)dt=1+x+x^2+\frac{x^3}{3!}$$

$$y_3(x)=1+\int_0^x\left(1+2t+t^2+\frac{t^3}{3!}\right)dt$$

$$=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4!}$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4!}\right) dt$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3\times 4} + \frac{x^5}{5!}$$

و به‌طور کلی

$$y_n(x) = 1 + x + 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

این‌عبارت بوضوح به سمت عبارت

$$1 + x + 2(e^x - x - 1) + 0 = 2e^x - x - 1$$

میل می‌کند که بازهم همان جواب دقیق معادله است.

باوجود ارائهٔ این مثالها ، ممکن است خـواننده درمورد ارزش عملی روش پیکار کاملا متقاعد نشده باشد. برای مثال، اگر انتگرال‌گیریهای متوالی بسیار پیچیده و یا ــ جز به‌صورت‌نظری ــ امکان‌ناپذیر باشند، چکار باید کرد؟ این تردیدبجاست، زیرا قدرت واقعی روش پیکار عمدتاً درنظریهٔ معادلات دیفرانسیل برای اثبات وجـود و یگانگی جواب مسئلهٔ مقدار اولیه تحت شرایط بسیارکلی نهفته است (ونه واقعاً دریافتن‌جوابها). قضایایی حاوی احکام دقیقی از این نوع را قضایای وجود و یگانگی مـی‌نامند. در دوبخش بعد به‌بیان و اثبات تعدادی از این قضایا می‌پردازیم.

تمرین

۱ــ جواب دقیق مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را بیابید:

$$y' = y^2 \quad , \quad y(0) = 1$$

با $y_0(x) = 1$ شروع کنید و با استفاده از روش پیکار $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، و $y_3(x)$ را محاسبه‌کنید، واین نتایج را با جواب دقیق مقایسه نمایید.

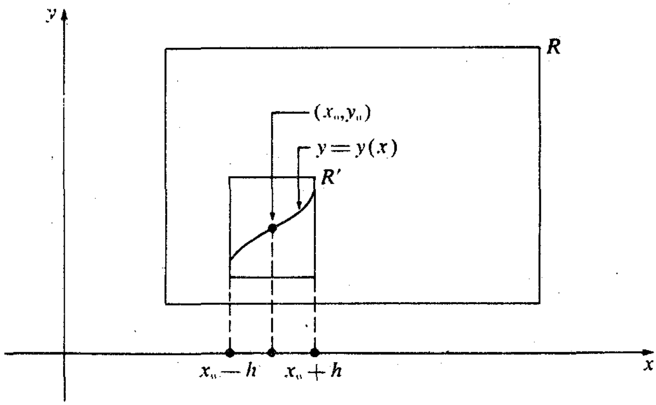
۲ــ جواب دقیق مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را بیابید:

$$y' = 2x(1+y) \quad , \quad y(0) = 0$$

با $y_0(x) = 0$ شروع کنید و $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، $y_3(x)$ ، و $y_4(x)$ را محاسبه واین نتایج را با جواب دقیق مقایسه‌کنید.

۳ــ برای آنکه به کارآیی روش پیکار پی‌ببریم، آموزنده خواهد بود اگر کار را با تقریب اولیه‌ای غیراز تابع‌ثابت $y_0(x) = y_0$ شروع کنیم. باانتخاب تقریب اولیهٔ زیر، روش پیکار را برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۴) به‌کار بگیرید

الف) $y_0(x) = e^x$ ، ب) $y_0(x) = 1 + x$ ، ج) $y_0(x) = \cos x$



شکل ۷۹

۵۶. قضیهٔ پیکار

همان‌طور که درآخر بخش قبل اشاره کـردیم، ارزش واقعی روش تقریبات متوالـی پیکار در نقشی است که این روش درنظریهٔ معادلات دیفرانسیل ایفا می کند. این نقش دراثبات قضیهٔ بنیادی زیر بخوبی روشن می گردد.

قضیهٔ الف. (قضیهٔ پیکار.) فرض می‌کنیم‌که $f(x, y)$ و $\partial f / \partial y$ درمستطیل بسته‌ای مانند R ، کـه اضلاعش موازی محورها هستند، (شکل ۷۹) تـوابعی پیوسته از x و y بـاشند. چنانچه (x_0, y_0) یك نقطهٔ درونی R باشد، آنگاه عدد مثبت h وجود دارد، به‌طوری‌کـه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{۱}$$

درفاصلهٔ $|x - x_0| \leqslant h$ یك وتنها یك جواب به‌صورت $y = y(x)$ دارد.

اثبات. برهان قضیه نسبتاً طولانی وپیچیده است و بهترین راه فهم آن، شکستن اثبات به مراحل ساده می باشد.

نخست، می‌دانیم که هرجواب (۱) ، جواب پیوستهٔ معادلهٔ انتگرال

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt \tag{۲}$$

نیز هست، وبرعکس. این به ما امکان می‌دهد تا به‌این نتیجه برسیم که معادلهٔ (۱) درفاصلهٔ $|x - x_0| \leqslant h$ دارای جوابی منحصر به‌فرد است، اگر وتنها اگر معادلهٔ (۲) درهمان‌فاصله دارای جوابی پیوسته ومنحصر به‌فرد باشد. دربخش ۵۵ شواهدی ارائه نمودیم‌مبنی‌براین که دنبالهٔ توابع $y_n(x)$ که به صورت زیر تعریف شود، به‌جوابی از (۲) میل می کند:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t , y_0(t)]dt \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t , y_1(t)]dt \\
&\cdots \\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t , y_{n-1}(t)]dt
\end{aligned} \tag{۳}
$$

حال توجه می‌کنیم که $y_n(x)$ همان n امین مجموع جزئی سری تابعی زیر است:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] &= y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] \\
&+ [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \cdots
\end{aligned} \tag{۴}
$$

لذا همگرایی دنبالهٔ (۳) معادل با همگرایی این سری می‌باشد. برای تکمیل اثبات، عدد مثبتی مانند h می‌یابیم تا فاصلهٔ $|x - x_0| \leqslant h$ را معین کند، و آنگاه نشان می‌دهیم که روی این فاصله احکام زیر صادق‌اند: (الف) سری (۴) بـه تابعی مانند $y(x)$ میل مـی‌کند؛ (ب) $y(x)$ جواب پیوسته‌ای از (۲) است؛ (پ) $y(x)$ تنها جواب پیوستهٔ (۲) می‌باشد.

از فرضهای مسئله برای یافتن h، به طریق زیر استفاده می‌شود. فرض کرده‌ایم که $f(x , y)$ و $\partial f/\partial y$ درمستطیل R توابعی پیوسته‌اند. ولی R بسته (یعنی مرز خود را نیز شامل است) و کراندار است، لذا هریك از این توابع لزوماً در R کراندار می‌بـاشند. این بدان معناست که اعداد M و K وجود دارند به‌قسمی که نامساویهای

$$|f(x , y)| \leqslant M \tag{۵}$$

و

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x , y)\right| \leqslant K \tag{۶}$$

برای کلیه‌نقاط (x , y) در R برقراراند. حال‌توجه می‌کنیم که اگر (x , y_1) و (x , y_2) نقاط متمایزی از R باشندکه مختص x شان مشترك است، آنگاه بنا برقضیهٔ مقدار میانگین، عددی مانند y^* بین y_1 و y_2 وجود دارد بطوریکه

$$|f(x , y_1) - f(x , y_2)| = \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x , y^*)\right| |y_1 - y_2| \tag{۷}$$

از (۶) و (۷) نتیجه می‌گیریم که بـرای هردو نقطهٔ (x , y_1) و (x , y_2) در R، واقـع بریك خط قائم، نامساوی

$$|f(x , y_1) - f(x , y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2| \tag{۸}$$

(چه این‌دونقطه متمایز باشند وچه‌نباشند) برقرار است. حال h راعدد مثبتی انتخاب می کنیم به‌طوری که

$$Kh<1 \tag{9}$$

و مستطیل R' کـه توسط $|x-x_0|\leqslant h$ و $|y-y_0|\leqslant Mh$ مشخص مـی‌شود، درون R واقع شود. ازآنجا که (x_0 , y_0) یك نقطهٔ داخلی R است، وجـود چنین hای به‌آسانـی دیده می‌شود. البته دلایل انتخاب این شرایط ظاهـراً نامأنوس، ضمن ادامهٔ اثبات روشن خواهد شد.

ازاین به‌بعد، توجه خود را به‌فاصلهٔ $|x-x_0|\leqslant h$ محدود مـی کنیم. بـرای اثبات (الف)، کافی است نشان دهیم که سری

$$|y_0(x)|+|y_1(x)-y_0(x)|+|y_2(x)-y_1(x)| \\ +\cdots+|y_n(x)-y_{n-1}(x)|+\cdots \tag{10}$$

همگراست؛ و برای نیل به‌این هـدف، جملات $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$ را تخمین می‌زنیم. نخست، لازم است توجه کنیم که نمودار هریك ازتوابع $y_n(x)$ در R' ونتیجتاً در R واقع است. این‌مطلب درمورد $y_0(x)=y_0$ واضح است، لذا نقاط $[t , y_0(t)]$ در R' واقع‌اند اما باتوجه به (۵) داریم $|f[t , y_0(t)]|\leqslant M$ ، و درنتیجه

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t , y_0(t)]dt\right|\leqslant Mh$$

که حکم را درمورد $y_1(x)$ ثابت می کند. از این نامساوی به‌نوبهٔ خود نتیجه می‌شود که نقاط $[t , y_1(t)]$ در R' واقع‌اند، لذا $|f[t , y_1(t)]|\leqslant M$ و داریم

$$|y_2(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t , y_1(t)]dt\right|\leqslant Mh$$

به طریق مشابه، نامساوی

$$|y_3(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t , y_2(t)]dt\right|\leqslant Mh$$

نتیجه می‌شود، الی آخر. حال برای دستیابی به تخمین‌های فوق‌الذکر چنین عمل می کنیم: چون هرتابع پیوسته درفاصلهٔ بسته دارای ماکزیمم است، و $y_1(x)$ پیوسته است، عددثابت a را می‌توان به صورت $a=\max|y_1(x)-y_0|$ تعریف کرد و نوشت

$$|y_1(x)-y_0(x)|\leqslant a$$

حال، چون نقاط $[t , y_1(t)]$ و $[t , y_0(t)]$ در R' واقع‌اند، از (۸) نتیجه می‌شود که

$$|f[t , y_1(t)]-f[t , y_0(t)]|\leqslant K|y_1(t)-y_0(t)|\leqslant Ka$$

و داریم

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}(f[t, y_1(t)]-f[t, y_0(t)])dt\right|$$
$$\leqslant Kah=a(Kh)$$

همینطور،

$$|f[t, y_2(t)]-f[t, y_1(t)]|\leqslant K|y_2(t)-y_1(t)|\leqslant K^2ah$$

لذا

$$|y_3(x)-y_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}(f[t, y_2(t)]-f[t, y_1(t)])dt\right|$$
$$\leqslant(K^2ah)h=a(Kh)^2$$

اگر به‌همین‌ترتیب ادامه دهیم، می بینیم که نامساوی

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant a(Kh)^{n-1}$$

برای هرعدد صحیح و مثبت n برقرار است. بنابراین هریك از جملات سری (۱۰) کمتر از (یا مساوی با) جمله متناظرش درسری عددی زیر است:

$$|y_0|+a+a(Kh)+a(Kh)^2+\cdots+a(Kh)^{n-1}+\cdots$$

ولی نامساوی (۹) همگرایی این سری را تضمین می کند. پس، باتوجه به‌آزمـون مقایسه، سری(۱۰) نیزهمگراست، بنابراین سری(۴) به‌تابعی میل می کند که آن‌را $y(x)$ می‌نامیم، و $y_n(x)\to y(x)$. چون نمودار همهٔ $y_n(x)$ها در R' واقع‌اند، بدیهی است که نمودار $y(x)$ نیز دارای چنین خاصیتی است.

حال به‌اثبات (ب) می‌پردازیم. اثبات بالا نه‌تنها همگرایی $y_n(x)$ به $y(x)$ درفاصلهٔ مورد بحث را نشان می‌دهد، بلکه ثابت می کند کـه این همگرایـی یکنواخت است. ایـن بدان‌معناست که می‌توان مقدار n را به‌قدر کافی بزرگ اختیار نمود به‌طوری‌که برای همهٔ xهای این فاصله ، $y_n(x)$ به‌اندازهٔ دلخواه به $y(x)$ نزدیك باشد؛ یا دقیقتر آنکه، برای $\varepsilon>0$ مفروض عدد صحیح و مثبتی چون n_0 وجود دارد به‌طوری که‌برای $n\geqslant n_0$ نامساوی $|y(x)-y_n(x)|<\varepsilon$ برای همهٔ xهای این فاصله برقرار می‌باشد. ازآنجا کـه هریك از $y_n(x)$ها آشکارا پیوسته است، ازیکنواختی این همگرایی نتیجه‌می‌شود کـه تابع حـدی $y(x)$ نیز پیوسته است.[1] برای آنکه ثابت کنیم که $y(x)$ واقعاً جواب معادلهٔ (۲) است، باید نشان دهیم که

---

۱. به‌بحث درجزئیات این مطلب نمی‌پردازیم، ولی دلیل آن خیلی ساده و مبتنی بر نامساوی زیر است:

$$|y(x)-y(\bar{x})|=|[y(x)-y_n(x)]+[y_n(x)-y_n(\bar{x})]+[y_n(\bar{x})-y(\bar{x})]|$$
$$\leqslant|y(x)-y_n(x)|+|y_n(x)-y_n(\bar{x})|+|y_n(\bar{x})-y(\bar{x})|$$

$$y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt=0 \qquad (11)$$

ولی می‌دانیم که

$$y_n(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt=0 \qquad (12)$$

پس اگر طرف چپ (۱۲) را ازطرف چپ (۱۱) کم کنیم، می بینیم که

$$y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt$$
$$=y(x)-y_n(x)+\int_{x_0}^{x}(f[t, y_{n-1}(t)]-f[t, y(t)])dt$$

و در نتیجه

$$\left|y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt\right|$$
$$\leqslant |y(x)-y_n(x)|+\left|\int_{x_0}^{x}(f[t, y_{n-1}(t)]-f[t, y(t)])dt\right|$$

چون نمودار $y(x)$ در R' و درنتیجه در R واقع است، از (۸) نتیجه می‌شود که

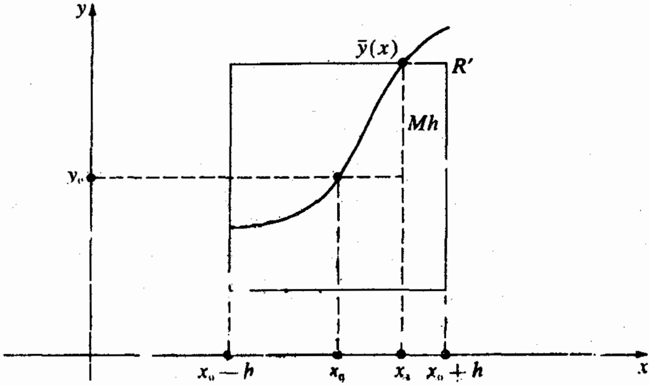
$$\left|y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt\right|$$
$$\leqslant |y(x)-y_n(x)|+Kh\max|y_{n-1}(x)-y(x)| \qquad (13)$$

حال همگرایی یکنواخت $y_n(x)$ به $y(x)$ به ما امکان می‌دهد تا با بزرگ کردن n به‌اندازهٔ کافی، طرف راست (۱۳) را به‌اندازهٔ دلخواه کوچك کنیم. بنابرایــن طرف راست (۱۳) بایدصفر باشد، و اثبات (۱۱) کامل است.

برای اثبات (پ)، فرض می کنیم کــه $\bar{y}(x)$ نیز جواب پیوسته‌ای از (۲) درفاصلهٔ $|x-x_0|\leqslant h$ باشد، ونشان می‌دهیم که برای همهٔ xهای این فاصله $\bar{y}(x)=y(x)$. برای اثباتی که ارائه می کنیم، لازم است بدانیم کــه نمودار $\bar{y}(x)$ در R' و نتیجتاً در R واقــع است، لذا اولین قدم ما اثبات همین امر است. فــرض می کنیم کــه نمودار $\bar{y}(x)$ از R' خارج شود (شکل ۸۰). آنگاه خواص این تابع [پیوستگی و رابطهٔ $\bar{y}(x_0)=y_0$] نتیجه می‌دهد که عددی‌مانند x_1وجود داردبه‌طوری که $|x_1-x_0|<h$ ، $|\bar{y}(x_1)-y_0|=Mh$]، وبعلاوه اگر $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ ، $|\bar{y}(x)-y_0|<Mh$، از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{|\bar{y}(x_1)-y_0|}{|x_1-x_0|}=\frac{Mh}{|x_1-x_0|}>\frac{Mh}{h}=M$$

ولی، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، عددی مانند x^* بین x_0 و x_1 وجود دارد به‌طوری که



شکل ۸۰

$$\frac{|\bar{y}(x_1)-y_0|}{|x_1-x_0|}=|\bar{y}'(x^*)|=|f[x^*,\bar{y}(x^*)]|\leqslant M$$

زیرا نقطهٔ $[x^*, \bar{y}(x^*)]$ در R' واقع است. این تناقض نشان می‌دهد که هیچ نقطه‌ای با مشخصات x_1 نمی‌تواند وجود داشته باشد. پس نمودار $\bar{y}(x)$ در R' واقع است.

برای تکمیل اثبات (پ)، از اینکه توابع $y(x)$ و $\bar{y}(x)$ هردوجواب (۲) هستند، استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$|\bar{y}(x)-y(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f[t, \bar{y}(t)]-f[t, y(t)]\}dt\right|$$

چون نمودار $\bar{y}(x)$ و $y(x)$ هردو داخل R' واقع‌اند، (۸) نتیجه می‌دهد که

$$|\bar{y}(x)-y(x)|\leqslant Kh\max|\bar{y}(x)-y(x)|$$

لذا

$$\max|\bar{y}(x)-y(x)|\leqslant Kh\max|\bar{y}(x)-y(x)|$$

این‌رابطه نشان می‌دهد که $\max|\bar{y}(x)-y(x)|=0$، زیرا درغیراین‌صورت باید داشته باشیم $Kh\geqslant 1$ که این با (۹) متناقض است. بنا براین برای هر x درفاصلهٔ $|x-x_0|\leqslant h$ داریم $\bar{y}(x)=y(x)$، وقضیهٔ پیکار به‌طورکامل ثابت شده است.

تبصرهٔ ۱ این‌قضیه رامی‌توان باتضعیف فرضهایش، درجهات مختلف تقویت‌نمود. مثلاً، فرض پیوستگی $\partial f/\partial y$ در R قویتر از چیزی است که دراثبات به‌آن نیاز داریم، وازآن تنها برای دستیابی به نامساوی (۸) استفاده شده است. لذا می‌توان این نامساوی را به‌جای فرض مربوط به $\partial f/\partial y$ وارد فرضهای مسئله نمود. بدین‌ترتیب به‌شکل قویتری از قضیه می‌رسیم، زیرا توابع زیادی موجودند که مشتق جزئی پیوسته ندارند ولی درعین حال

به‌ازای Kی مناسبی درنامساوی (۸) صدق می‌کنند. این نامساوی را، که برطبق آن کسر

$$\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}$$

در R کراندار است، شرط لیپشیتس[1] نسبت به متغیر y می‌نامند.

تبصره ۲. اگر شرط لیپشیتس‌را حذف کنیم، وفقط پیوستگی $f(x,y)$ در Rرا بپذیریم، هنوز وجود جواب برای مسئلهٔ مقدار اولیه را می‌توان ثابت کرد. این نتیجه به قضیهٔ پئانو[2] مشهور است. اثباتهای شناخته شدهٔ این قضیه به بحثهایی پیچیده‌تر از آنچه دربالا آوردیم، متکی‌اند.[3] بعلاوه، جوابی که وجودش توسط این قضیه تضمین می‌شود، لزوماً منحصر به‌فرد نیست. به‌عنوان مثال، مسئلهٔ

$$y'=3y^{2/3}\ ,\ \ y(0)=0 \tag{14}$$

که R مستطیل $|x|\leqslant 1$، $|y|\leqslant 1$ است را درنظر می‌گیریم. دراین‌مثال $f(x,y)=3y^{2/3}$ در R بوضوح پیوسته است. همچنین، $y_1(x)=x^3$ و $y_2(x)=0$ دوجواب متفاوت‌اند که برای همهٔ xها معتبر هستند، پس جواب (۱۴) مسلماً منحصر به‌فرد نیست. توضیح این

---

۱. رودولف لیپشیتس Rudolf Lipschitz (۱۹۰۳-۱۸۳۲) اکثرعمرش را استاد دانشگاه بن بود. از او عمدتاً به‌خاطر نقش وی در ساده کردن و توضیح نظریهٔ اولیهٔ کوشی در مورد وجود و یگانگی جواب معادلات دیفرانسیل یاد می‌شود ولی او همچنین قضیهٔ دیریکله راجع به نمایش‌پذیری تابع به‌وسیلهٔ سری فوریه‌اش را گسترش داد، و به‌عنوان یکی از نتایج نظریهٔ خود درمورد تجزیهٔ کواترنیون‌های صحیح، فرمول مربوط به تعداد راههای ممکن برای نوشتن یك عدد صحیح مثبت به‌شکل مجموع چهار مجذور را به‌دست‌آورد، وکارهای‌مفیدی درمکانیك نظری، حساب تغییرات، توابع بسل،‌فرمهای دیفرانسیلی درجهٔ دوم، ونظریهٔ‌سیالات ناروان (viscous) ارائه کرد.

۲. جوزپه پئانو Guiseppe Peano (۱۹۳۲-۱۸۵۸)، منطق دان و ریاضیدان ایتالیایی که تأثیربسزائی در بررسی اصل موضوعی‌هندسهٔ مسطحه توسط هیلبرت وکار وایتهد و راسل راجع‌به منطق ریاضی، داشته‌است. اصول موضوعهٔ وی راجع به‌اعداد صحیح مثبت نسلهایی از دانشجویان را به‌این توهم واداشته است‌که نکند تمامی جبر مدرن نوعی توطئه برای مبهم ساختن مطالب بدیهی باشد (که البته چنین‌نیست!). درسال ۱۸۹۰ وی با کشف منحنی پیوستهٔ جالبی درصفحه که تمام مربع $0\leqslant x\leqslant 1$، $0\leqslant y\leqslant 1$ را پرمی‌کند، جهان را به‌شگفتی واداشت. با تأسف برای مرد ارزشمندی چون پئانو، اثباتی را که برای قضیهٔ فوق‌الذکر، راجع به‌وجود جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ درسال ۱۸۸۶ عرضه کرد نارسا بود، وتا سالها بعد نیز اثبات قانع‌کننده‌ای برای آن پیدا نشد.

۳. مثلا به‌کتاب زیر مراجعه‌کنید:

A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, "Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis," vol. 1, p. 56, Graylock, Baltimore. 1957.

عدم یگانگی جواب، دراین امر نهفته است کـه تابع $f(x , y)$ روی مستطیل R درشرط لیپشیتس صدق نمی کند، زیرا کسر

$$\frac{f(0 , y)-f(0 , 0)}{y-0}=\frac{3y^{2/3}}{y}=\frac{3}{y^{1/3}}$$

درهر همسایگی مبدأ بیکران است.

تبصره ۳. قضیهٔ الف را یك قضیهٔ وجود و یگانگی موضعی می‌نامند، زیرا این قضیه وجود و یگانگی جواب منحصر به‌فرد را تنها درفاصله‌ای مانند $|x-x_0|\leqslant h$ (که درآن h ممکن است بسیار کوچك باشد)، تضمین می کند. حالات مهم فراوانی یافت می‌شوند که درآنها این محدودیت قابل رفع است. به‌عنوان مثال، معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

راکه درآن $P(x)$ و $Q(x)$ درفاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ معین و پیوسته می باشند، درنظر می گیریم. دراین مثال

$$f(x , y)=-P(x)y+Q(x)$$

واگر K ماکزیمم $|P(x)|$ درفاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ باشد، واضح است که

$$|f(x , y_1)-f(x , y_2)|=|-P(x)(y_1-y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|$$

بنابراین تابع $f(x , y)$ در نـوار قائم نامتناهـی تعریف شده بـه‌صورت $a\leqslant x\leqslant b$ و $-\infty<y<\infty$ پیوسته است و درشرط لیپشیتس صدق می‌کند. تحت این شرایط، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'+P(x)y=Q(x) \quad , \quad y(x_0)=y_0$$

در سرتاسر فاصله $a\leqslant x\leqslant b$ جواب منحصر به‌فرد دارد. بعلاوه، نقطهٔ (x_0 , y_0) می‌تواند هرنقطهٔ داخلی یا غیرداخلی این نوار باشد. این مطلب حالت خاصی از قضیهٔ بعد است.

قضیهٔ ب. فرض کنید $f(x , y)$ تابع پیوسته‌ای بـاشد کـه در نـوار تعریف شده به صورت $a\leqslant x\leqslant b$ و $-\infty<y<\infty$ ، درشرط لیپشیتس

$$|f(x , y_1)-f(x , y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|$$

صدق کند. هرگاه (x_0 , y_0) نقطه‌ای از این نوار باشد، آنگاه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'=f(x , y) \quad , \quad y(x_0)=y_0 \qquad (15)$$

درفاصله $a\leqslant x\leqslant b$ دارای یك و تنها یك جواب $y=y(x)$ است.

اثبات. اثبات این قضیه شبیه اثبات ارائه شده برای قضیهٔ الف است، با این تفاوت که چون

ناحیهٔ مورد بحث ازطرف بالا و پایین نامحدود است، بعضی قسمتهای برهان را می‌توان ساده کرد. بویژه، اثبات را به همان صورت شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم کـه سری (۴) ـ و درنتیجه، دنبالهٔ (۳) ـ درتمام فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ همگـرای یکنواخت است. درانجام این کار روشی راکه برای برآورد جملات سری (۱۰) به‌کار خـواهیم برد، کمی متفاوت خواهد بود.

نخست $M_\circ$ ، $M_\backprime$ ، و M را صورتهای زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_\circ=|y_\circ| \ ، \ M_۱=\max|y_۱(x)| \ ، \ M=M_\circ+M_۱$$

وتوجه می‌کنیم که $|y_\circ(x)|\leqslant M$ و $|y_۱(x)-y_\circ(x)|\leqslant M$. حال، اگر $x_\circ\leqslant x\leqslant b$، خواهیم داشت

$$|y_۲(x)-y_۱(x)|=\left|\int_{x_\circ}^{x}\{f[t \,،\, y_۱(t)]-f[t \,،\, y_\circ(t)]\}dt\right| \ ،$$
$$\leqslant\int_{x_\circ}^{x}|f[t \,،\, y_۱(t)]-f[t \,،\, y_\circ(t)|dt$$
$$\leqslant K\int_{x_\circ}^{x}|y_۱(t)-y_\circ(t)|dt$$
$$\leqslant KM(x-x_\circ)$$
$$|y_۳(x)-y_۲(x)|=\left|\int_{x_\circ}^{x}\{f[t \,،\, y_۲(t)]-f[t \,،\, y_۱(t)]\}dt\right|$$
$$\leqslant K\int_{x_\circ}^{x}|y_۲(t)-y_۱(t)|dt$$
$$\leqslant K^۲M\int_{x_\circ}^{x}(t-x_\circ)dt=K^۲M\frac{(x-x_\circ)^۲}{۲}$$

و درحالت کلی

$$|y_n(x)-y_{n-۱}(x)|\leqslant K^{n-۱}M\frac{(x-x_\circ)^{n-۱}}{(n-۱)!}$$

همین استدلال برای‌فاصله $a\leqslant x\leqslant x_\circ$ نیز تنها به‌شرط تبدیل $x-x_\circ$ به $|x-x_\circ|$ معتبر است، پس نامساویهای

$$|y_n(x)-y_{n-۱}(x)|\leqslant K^{n-۱}M\frac{|x-x_\circ|^{n-۱}}{(n-۱)!}$$
$$\leqslant K^{n-۱}M\frac{(b-a)^{n-۱}}{(n-۱)!}$$

برای هر x این فاصله و $n = ۱ ، ۲ ، \dots$ برقرارهستند. نتیجتاً هرجملهٔ سری (۱۰) کمتراز (یا مساوی با) جملهٔ متناظرش از سری عددی همگرای زیر است

$$M+M+KM(b-a)+K^{۲}M\frac{(b-a)^{۲}}{۲!}+K^{۳}M\frac{(b-a)^{۳}}{۳!}+\dots$$

لذا سری (۳) در فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ همگرای یکنواخت است و حد آن تابعی مانند $y(x)$ می‌باشد.

درست مانند مورد قبل، از همگرایی یکنواخت نتیجه می‌شود که $y(x)$ جوابی از معادلهٔ (۱۵) درتمام فاصله است، و تنها مطلبی که باقی می‌ماند، اثبات یگانگی این جواب است. فرض می‌کنیم که $\bar{y}(x)$ نیز جوابی برای (۱۵) ، درآن فاصله، باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که وقتی $n \to \infty$ ، برای هرمقدار x ، $y_n(x)$ به‌سمت $\bar{y}(x)$ میل خواهد کرد؛ وازآنجاکه $y_n(x)$ نیز به‌سمت $y(x)$ میل می‌کند، نتیجه خواهد شد که $\bar{y}(x)=y(x)$. مطلب را باتوجه به‌اینکه $\bar{y}(x)$ پیوسته است و درمعادلهٔ

$$\bar{y}(x)=y_{۰}+\int_{x_{۰}}^{x} f[t ، \bar{y}(t)]dt$$

صدق می‌کند ، آغاز می‌کنیم. اگر $A=\max|\bar{y}(x)-y_{۰}|$ ، آنگاه برای $x_{۰} \leqslant x \leqslant b$ داریم

$$\begin{aligned}
|\bar{y}(x)-y_{۱}(x)| &= \left|\int_{x_{۰}}^{x}\{f[t ، \bar{y}(t)]-f[t ، y_{۰}(t)]\}dt\right| \\
&\leqslant \int_{x_{۰}}^{x}|f[t ، \bar{y}(t)]-f[t ، y_{۰}(t)]|dt \\
&\leqslant K\int_{x_{۰}}^{x}|\bar{y}(t)-y_{۰}|dt \\
&\leqslant KA(x-x_{۰})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\bar{y}(x)-y_{۲}(x)| &= \left|\int_{x_{۰}}^{x}\{f[t ، \bar{y}(t)]-f[t ، y_{۱}(t)]\}\,dt\right| \\
&\leqslant K\int_{x_{۰}}^{x}|\bar{y}(t)-y_{۱}(t)|dt \\
&\leqslant K^{۲}A\int_{x_{۰}}^{x}(t-x_{۰})dt = K^{۲}A\frac{(x-x_{۰})^{۲}}{۲}
\end{aligned}$$

و درحالت کلی

$$|\bar{y}(x)-y_n(x)| \leqslant K^n A\frac{(x-x_{۰})^n}{n!}$$

نتیجهٔ مشابهی نیز برای $a\leqslant x\leqslant x_\circ$ حاصل مـی‌شود، لذا برای کلیهٔ xهای این فـاصله داریم

$$|\bar{y}(x)-y_n(x)|\leqslant K^n A\frac{|x-x_\circ|^n}{n!}\leqslant K^n A\frac{(b-a)^n}{n!}$$

چون وقتی $n\to\infty$ طرف راست ایـن نامساوی به صفر میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم کـه برابری $\bar{y}(x)=y(x)$ برای هر x از آن فاصله درست است، و اثبات کامل است.

تمرین

۱ـ فرض کنید $(x_\circ \text{ ، } y_\circ)$ نقطهٔ دلخواهی از صفحه باشد و مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'=y^{۲} \quad \text{،} \quad y(x_\circ)=y_\circ$$

را درنظر بگیرید. توضیح دهید که قضیهٔ الف چگونه وجود جواب یگانهٔ این مسئله را در فـاصلـه‌ای مـانند $|x-x_\circ|\leqslant h$ تضمین مـی‌کند. چـون $f(x \text{ ، } y)=y^{۲}$ و $\partial f/\partial y=۲y$ درتمام صفحه پیوسته‌اند، ممکن است چنین به‌نظر برسد که این‌جواب برای کلیهٔ xها معتبر است. با ملاحظهٔ جوابهای ماربرنقاط (۰ ، ۰) و (۱ ، ۰)، نشان دهید که این نتیجه‌گیری گاهی درست و گاهی نادرست است، و بنابراین استنباط بالا درست نیست.

۲ـ نشان‌دهید که معادله $f(x \text{ ، } y)=y^{۱/۲}$

الف) درمستطیل $۱\geqslant|x|$ و $۱\geqslant y\geqslant ۰$ درشرط لیپشیتس صدق نمی‌کند؛

ب) درمستطیل $۱\geqslant|x|$ و $c\leqslant y\leqslant d$ که درآن $۰<c<d$ ، درشرط لیپشیتس صدق می‌کند.

۳ـ نشان‌دهید که تابع $f(x \text{ ، } y)=x^{۲}|y|$ درمستطیل $۱\geqslant|x|$ و $۱\geqslant|y|$ شرط لیپشیتس را ارضا می‌کند، ولی $\partial f/\partial y$ دربسیاری از نقاط این مستطیل وجود ندارد.

۴ـ نشان‌دهید که تابع $f(x \text{ ، } y)=xy^{۲}$

الف) درهر مستطیل $a\leqslant x\leqslant b$ و $c\leqslant y\leqslant d$ شرط لیپشیتس را ارضا می‌کند.

ب) درهیچ نوار $a\leqslant x\leqslant b$ و $-\infty<y<\infty$ درشرط لیپشیتس صدق نمی‌کند.

۵ـ نشان دهید که $f(x \text{ ، } y)=xy$

الف) درهرمستطیل $a\leqslant x\leqslant b$ و $c\leqslant y\leqslant d$ درشرط لیپشیتس صدق می‌کند.

ب) درهر نوار $a\leqslant x\leqslant b$ و $-\infty<y<\infty$ درشرط لیپشیتس صادق است.

ج) درسرتاسر صفحه، درشرط لیپشیتس صدق نمی‌کند.

۶ـ مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'=|y| \quad \text{،} \quad y(x_\circ)=y_\circ$$

را درنظر بگیرید.

الف) برای کدام نقاط (x_0 , y_0) ، قضیهٔ الف وجود جواب منحصر به‌فرد این مسئله را درفاصله‌ای به‌صورت $|x-x_0|\leqslant h$ تضمین می‌کند؟

ب) برای کدام نقاط (x_0 , y_0) ، ایـن مسئله درفاصله‌ای بـه‌صورت $|x-x_0|\leqslant h$ دارای جواب منحصر به‌فرد است؟

۷ـ برای کدام نقاط (x_0 , y_0) ، قضیهٔ الف وجود جوابی یگانه از مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'=y|y| \quad , \quad y(x_0)=y_0$$

را درفاصله‌ای به‌صورت $|x-x_0|\leqslant h$ تضمین می‌کند؟

۵۷. دستگاهها. معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم

از روش تقریبات متوالی پیکار، برای دستگاههای معادلاتِ مرتبهٔ اول نیز می‌توان استفاده کرد. به‌عنوان مثال، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مشتمل بر دومعادلهٔ مرتبهٔ اول و شرایط اولیهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x , y , z) \quad , \quad y(x_0)=y_0 \\[2ex] \dfrac{dz}{dx}=g(x , y , z) \quad , \quad z(x_0)=z_0 \end{cases} \tag{۱}$$

که‌درآن، توابع طرف راست، درناحیه‌ای ازفضای xyz شامل (x_0 , y_0 , z_0) پیوسته‌اند. علامت مشتق به‌کار رفته دراینجا تأکیدی براین‌نکته است‌که x متغیر مستقل می‌باشد. البته، جواب چنین دستگاهی یـك جفت تابع مانند $y=y(x)$ و $z=z(x)$ است کـه توأماً ، درفاصله‌ای شامل نقطهٔ x_0 ، درشرایط مذکور در (۱) صدق کنند. مانند حالت تك معادلهٔ مرتبهٔ اول، واضح است‌که دستگاه (۱) معادل دستگاه معادلات انتگرالی زیر می‌باشد،

$$\begin{cases} y(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f[t , y(t) , z(t)]dt \\[2ex] z(x)=z_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} g[t , y(t) , z(t)]dt \end{cases} \tag{۲}$$

بدین مفهوم‌که جوابهای (۱) ــ اگـر جـوابی وجود داشته باشد ــ دقیقاً همان جـوابهای پیوستهٔ (۲) هستند. هرگاه با انتخاب توابع ثابت

$$y_0(x)=y_0 , \quad z_0(x)=z_0$$

حل دستگاه (۲) را به‌کمك روش تقریبات متوالی آغازکنیم، روش پیکار را دقیقاً مـانند موارد قبل می‌توان دنبال کرد. درمرحلهٔ اول داریم

$$\begin{cases} y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t , y_0(t) , z_0(t)]dt \\ z_1(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} g[t , y_0(t) , z_0(t)]dt \end{cases}$$

و درمرحله دوم داریم

$$\begin{cases} y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t , y_1(t) , z_1(t)]dt \\ z_2(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} g[t , y_1(t) , z_1(t)]dt \end{cases}$$

و الی آخر. این روش دو دنبالهٔ $y_n(x)$ و $z_n(x)$ از توابع را تولید می‌کند، و بافرضهای مناسب ، می‌توان اثبات قضیهٔ ۵۶ـ الف را با موقعیت این مسئله تطبیق داد و ثابت کرد که این دنباله‌ها به جوابی از (۱) می‌گرایند که درفاصله‌ای به‌صورت $|x-x_0|\leqslant h$ موجود و یگانه است.

حال توجه خود را به دستگاههای خطی ، که درآن توابع $f(x , y , z)$ و $g(x , y , z)$ موجود در (۱) نسبت به y و z خطی هستند، معطوف می‌کنیم. یعنی، مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای به‌صورت

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=p_1(x)y+q_1(x)z+r_1(x) ,\quad y(x_0)=y_0 \\ \dfrac{dz}{dx}=p_2(x)y+q_2(x)z+r_2(x) ,\quad z(x_0)=z_0 \end{cases} \qquad (۳)$$

را درنظر می‌گیریم . دراینجا شش تابع $p_i(x)$ ، $q_i(x)$ و $r_i(x)$ در فاصله‌ای به صورت $a\leqslant x\leqslant b$ پیوسته‌اند و x_0 نقطه‌ای ازاین فاصله‌است. چون‌همهٔ این‌توابع در $a\leqslant x\leqslant b$ کراندارند ، عدد ثابتی چون K وجود دارد به‌طوری که برای $i=1 , 2$ ، نامساویهای $|p_i(x)|\leqslant K$ و $|q_i(x)|\leqslant K$ برقرار باشند.

حال بسادگی می‌توان دید که توابع طرف راست معادلات دستگاه (۳) در شرایط لیپشیتس به‌صورت

$$|f(x , y_1 , z_1)-f(x , y_2 , z_2)|\leqslant K(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)$$

و

$$|g(x , y_1 , z_1)-g(x , y_2 , z_2)|\leqslant K(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)$$

صدق می‌کنند. درست مانند آنچه دراثبات قضیهٔ ۵۶ـ ب دیدیم ، از این شرایط می‌توان دراثبات وجود و یگانگی جوابی برای (۳) روی تمامی فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ استفاده کرد.

بازهم از ذکر جزئیات خودداری می‌کنیم.

نکاتی که راجع به دستگاهها گفته شد، ارائه برهان ساده‌ای برای قضیه اساسی زیر را مقدور می‌سازد. این قضیه که صورت آن‌را درآغازفصل ۳ بیان‌کردیم، نقشی غیر مزاحم و قاطع درتمامی‌کار ما با معادلات خطی مرتبهٔ دوم ایفا کرده است.

قضیهٔ الف. فرض کنید توابع $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ در فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته باشند. هرگاه x_0 نقطه‌ای از این فاصله باشد، و y_0 و y_0' دوعدد دلخواه باشند، آنگاه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x) \quad , \quad y(x_0)=y_0 \quad و \quad y'(x_0)=y_0' \qquad (۴)$$

درفاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ دارای یك وتنها یك جواب $y=y(x)$ است.

اثبات. با انتخاب متغیر کمکی $z=dy/dx$ روشن می‌شود که هرجواب (۴) جوابی برای دستگاه خطی

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z & y(x_0)=y_0 \\[2ex] \dfrac{dz}{dx}=-P(x)z-Q(x)y+R(x) & z(x_0)=y_0' \end{cases} \qquad (۵)$$

به‌دست می‌دهد و برعکس. دیده‌ایم که درفاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ دستگاه (۵) دارای یك جواب منحصر به‌فرد است، پس همین مطلب برای (۴) نیز صادق است.

تمرین

۱ــ دستگاه مقدار اولیهٔ زیر را باروش پیکار حل‌کنید و نتیجه را با جواب دقیق آن مقایسه کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z & , \quad y(0)=1 \\[2ex] \dfrac{dz}{dx}=-y & , \quad z(0)=0 \end{cases}$$

جوابها

بخش ۲

۲. الف) $y=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}x^{2}+c$ ب) $y=\log x+c$

ج) $y=\frac{1}{2}e^{x^{2}}+c$ د) $y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^{2}}+c$

۳. الف) $y=xe^{x}-e^{x}+3$ ب) $y=\sin^{2}x+1$

ج) $y=x\log x-x$

بخش ۳

۱. الف) $x^{2}-y^{2}=c$ ب) $x^{2}+2y^{2}=c^{2}$

ج) $r=c(1-\cos\theta)$ د) $y^{2}=-2x+c$

۲. $$y^{2}=2xy\frac{dy}{dx}+y^{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}$$

این خانواده خود ـ متعامد است به این معنا که وقتی در این خانواده یك منحنی منحنی دیگری را قطع کند، بر آن عمود است.

۳. الف) $xy=c$ ب) $y^{2}=\pm 2x+c$

ج) $y=ce^{\pm x}$ د) $\theta=0$ یا $r=c\sin\theta$

ه) $\theta=\theta_{0}$ یا $r=ce^{k\theta}$

۴. $y=cx^2$

بخش ۴

۱. اگر $B=A$ ، آنگاه $x=\dfrac{kA^2abt}{kAabt+1}$

و اگر $B<A$ ، آنگاه $x=\dfrac{AB(1-e^{-k(A-B)abt})}{A-Be^{-k(A-B)abt}}$

۲. $x=x_0e^{kt}$

۳. $x=\dfrac{x_0x_1}{x_0+(x_1-x_0)e^{-kx_1t}}$

۴. $p=p_0e^{-ch}$

۵. $\left(\dfrac{\log 5}{\log 2}-1\right)$ ساعت

۶. ۱۲ متر

بخش ۵

۱. $v=\sqrt{\dfrac{g}{c}}\,\dfrac{1-e^{(-2\sqrt{gc})t}}{1+e^{(-2\sqrt{gc})t}}$ ؛ سرعت نهایی برابراست با $\sqrt{\dfrac{g}{c}}$

۲. ۳ کیلومتر

۴. $\sqrt{gR}$ ، که تقریباً ۸ کیلومتر برثانیه است

تمرینهای گوناگون فصل ۱

۱. $(\sqrt{5}-1)$ ساعت قبل از ظهر

۲. $r=(2-t)/8$ ؛ یك ماه دیگر

۳. پس از $400(3\log 2-\log 3)$ دقیقه

۴. $100(\sqrt{2}-1)$ دقیقه

۵. مقطع استوانه‌های $x=cy^4$ با $4x^2+y^2+4z^2=225$

۷. $\dfrac{14R^{5/2}}{15r^2\sqrt{2g}}$ ثانیه

۸. شکل رویهٔ حاصل از دوران $y=cx^{۴}$ حول محور y ها .

۹. $۲۵h$

۱۲. $\sqrt{\frac{۲}{g}}\log(۴+\sqrt{۱۵})$ ثانیه

۱۳. $\frac{dT}{d\theta}=\mu T$ ؛ $T=T_{\circ}e^{\mu\theta}$

۱۴. $r=r_{\circ}e^{\pi r_{\circ}^{۲}ax/۲L}$

۱۵. رئیس جمهور

۱۶. ناوشکن نخست به اندازهٔ $۳\ km$ به طرف مبدأ می‌رود و سپس در امتداد یکی از حلزونیهای $r=(۵/۳)e^{\pm\theta/\sqrt{۳}}$ به طرف خارج حرکت می‌کند.

۱۷. $r=\frac{a}{\sqrt{۲}}e^{-\theta}$ ؛ فاصلهٔ کل $=a$

بخش ۷

۱. الف) $y^{۲}=x^{۲}+cx^{۴}$ ب) $y=cx^{۲}(x+y)$

ج) $y=x\tan cx^{۳}$ د) $\cos\frac{y}{x}+\log cx=\circ$

هـ) $e^{y/x}=\log cx^{۲}$

۲. $x^{۲}+y^{۲}=cy$

۳. الف) $x+y=\tan(x+c)$

ب) $\tan(x-y+۱)=x+c$

۴. ب) $z=dx+ey$

۵. الف) $\tan^{-۱}\frac{y+۵}{x-۱}=\log\sqrt{(x-۱)^{۲}+(y+۵)^{۲}}+c$

ب) $y-x=۵\log(x+y-۱)+c$

بخش ۸

۱. $xy+\log y^{۲}=c$

۲. کامل نیست.

۳. $4xy-x^4+y^4=c$

۴. کامل نیست.

۵. $xy+\sin xy=c$

۶. کامل نیست .

۷. $xe^y+\sin x\cos y=c$

۸. $\cos\frac{x}{y}=c$ یا $\frac{x}{y}=c$

۹. کامل نیست.

۱۰. $x^2y^3+y\sin r=c$

۱۱. $\log\frac{1+xy}{1-xy}-2x=c$

بخش ۹

۲. الف) $\mu=\frac{1}{y^4}$ ، $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c$

ب) $\mu=\frac{1}{x}$ ، $xy-\log x-\frac{1}{2}y^2=c$

ج) $\mu=\frac{1}{x^3y^3}$ ، $-\frac{1}{2x^2y^2}+\frac{3}{2}y^2=c$

۳. وقتی که $\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/(N-M)$ تابعی مانند $g(z)$ از $z=x+y$ باشد.

۴. الف) $-\frac{x}{y}=-\frac{1}{y}+y+c$ ب) $\log\frac{x}{y}=\frac{1}{3}y^3+c$

ج) $\tan^{-1}\frac{x}{y}=-\frac{1}{4}x^4+c$ د) $\log\sqrt{x^2+y^2}=\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$

ه) $\tan^{-1}\frac{3y}{x}=3x+c$

بخش ۱۰

۲. الف) $y=x^4+cx^3$

ب) $y=e^{-x}\tan^{-1}e^x+ce^{-x}$

ج) $y=(1+x^2)^{-1}\log(\sin x)+c(1+x^2)^{-1}$

د) $y=x^2e^{-x}+x^2-2x+2+ce^{-x}$

ه) $y=x^2\csc x+c\csc x$

و) $y=-x^3+cx^2$

۳. الف) $\frac{1}{y^2}=-x^4+cx^2$

ب) $y^3=3\sin x+9x^{-1}\cos x-18x^{-2}\sin x-18x^{-3}\cos x+cx^{-3}$

۴. الف) $xy^2=e^y+c$ ب) $x=ye^y+cy$

۵. $x=y-2+ce^{-y}$

بخش ۱۱

۱. الف) $y^2=c_1x+c_2$

ب) $x^2+(y-c_2)^2=c_1^2$

ج) $y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$

د) $y=-\frac{1}{2}x^2-c_1x-c_1^2\log(x-c_1)+c_2$

۲. الف) $y=1$ یا $3y+x^3=3$

ب) $2y-3=8ye^{3x/2}$

۳. $y=-\log[\cos(x+c_1)]+c_2$

۴. $s=s_0\cos\sqrt{g/4a}\,t$، دورهٔ تناوب $=4\pi\sqrt{a/g}$

بخش ۱۲

۲. $T_0y''=w(s)\sqrt{1+(y')^2}+L(x)$

۳. سهمی

۵. $y=c(e^{ax}+e^{-ax})$، که درآن پایین پرده برمحور x ها و پایین‌ترین نقطهٔ میلهٔ پرده برمحور y ها واقع است.

۶. خط مستقیم افقی یا زنجیری

۸. الف) $y=\frac{c}{2}\left[\frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1-k}\right]+\frac{ck}{1-k^2}$

بنابراین فاصله‌ای که خرگوش طی می‌کند برابراست با $ck/(1-k^2)$.

ب) $$y=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2-c^2}{2c}-c\log\frac{c}{x}\right]$$

و سگ می‌تواند برای هر $\epsilon>0$، از $(c/2)+\epsilon$ نزدیکتر شود ولی به نزدیکی $c/2$ نمی‌رسد.

۹. $$y=\frac{1}{2}\left(\frac{x^{k+1}}{c^k}-\frac{c^k}{x^{k-1}}\right)$$

اگر $a>b$ $(k>1)$، آنگاه، وقتی $x\to 0$، $y\to-\infty$ وقایق‌هرگز به‌ساحل نخواهد رسید. اگر $a=b$ $(k=1)$ ، آنگاه ، وقتی $x\to 0$، $y\to -c/2$ و قایق در نقطهٔ $(0, -c/2)$ به ساحل خواهد رسید. اگر $a<b$ $(k<1)$، آنگاه، وقتی $x\to 0$ ، $y\to 0$ و قایق به مبدأ خواهد رسید.

بخش ۱۳

۱. الف) $$I=\frac{E_0}{R-kL}e^{-kt}+\left(I_0-\frac{E_0}{R-kL}\right)e^{-Rt/L}$$

ب) $$I=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t-\alpha)+\left(I_0+\frac{E_0L\omega}{R^2+L^2\omega^2}\right)e^{-Rt/L}$$

که درآن $\tan\alpha=L\omega/R$

تمرینهای گوناگون فصل ۲

۱. $y=c_2e^{c_1x}$

۲. $xy=\log y+c$

۳. $3\tan^{-1}\frac{y+1}{x-1}=\log[(y+1)^2+(x-1)^2]+c$

۴. $y\sqrt{x^2+y^2}+x^2\log(y+\sqrt{x^2+y^2})+y^2=3x^2\log x+cx^2$

۵. $3y=2x^2+cx^2y^3$

۶. $-\frac{1}{2x^2y^2}=\log\frac{y}{x}+c$

۷. $y^2=c_2e^{2x}+c_1$

۸. $xy=x\sin x+\cos x+c$

۹. $y=x\log y+cx$

۱۰. $ye^{x}-x^{2}y^{3}=c$

۱۱. $c_1\tan^{-1}c_1x=y+c_2$

۱۲. $y=x^{2}+cx$

۱۳. $y=x\sin x+2\cos x-2x^{-1}\sin x+cx^{-1}$

۱۴. $(3x+2y)+\log(3x+2y)^{2}+x=c$

۱۵. $x\cos(x+y)=c$

۱۶. $y=\frac{1}{2}(\log x)^{2}+c_1\log x+c_2$

۱۷. $ye^{xy}+\sin x=c$

۱۸. $(x-y)\log(x-y)=c-y$

۱۹. $y=xe^{-x^{2}}+ce^{-x^{2}}$

۲۰. $x^{2}y^{2}-2x^{3}y-x^{4}=c$

۲۱. $y=x^{4}(1+x^{2})^{-1}+c(1+x^{2})^{-1}$

۲۲. $e^{x}\sin y+\cos xy=c$

۲۳. $y=c_1\log(x+\sqrt{1+x^{2}})+c_2$

۲۴. $2xe^{y}+x^{2}+y^{2}-2x^{2}y=c$

۲۵. $2xe^{x}e^{-y}+y^{2}=c$

۲۶. اگر $k_1\neq k_2$، $y=\frac{k_1x_0}{k_2-k_1}(e^{-k_1t}-e^{-k_2t})$ و اگر $k_1=k_2$،

$y=k_1x_0te^{-k_1t}$؛

۲۷. وقتی $t=25$

۲۸. $ce^{(2.5)x^{5}}=\frac{y-x}{y+x}$

۲۹. سرعت در پایان سوخت $=b\log\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)-\frac{gm_2}{a}$

ارتفاع در پایان سوخت $=\frac{-gm_2^{2}}{2a^{2}}+\frac{bm_2}{a}+\frac{bm_1}{a}\log\frac{m_1}{m_1+m_2}$

۳۲. الف) اگر شتاب ثابت ناشی از میدان گرانشی ثابت با A نمایش داده شود، در آن صورت $v=c\left(\frac{1-e^{-2At/c}}{1+e^{-2At/c}}\right)$.

بخش ۱۴

۱. $y=c_1x+c_2+e^x$

۲. الف) $y=\frac{1}{2x}$ ب) $y=-3x$ ج) $y=-\frac{1}{3}\sin x$

۳. الف) $x^2y''-2xy'+2y=0$ ب) $y''-k^2y=0$ ج) $y''+k^2y=0$

بخش ۱۵

۲. الف) $y=x+2x^2$

۳. $y=-3e^x+2e^{2x}$

بخش ۱۶

۲. الف) $y=c_1\sin x+c_2\cos x$

ب) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

۳. $y=c_1+c_2x^{-2}$

۴. $y=c_1x^2+c_2x^{-2}$

۵. $y=c_1x+c_2\left[\frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1\right]$

۶. $y=c_1x^{-1/2}\sin x+c_2x^{-1/2}\cos x$

۷. الف) $y=c_1x+c_2e^x$ ب) $y=c_1x+c_2x^{-2}$

۸. $y=c_1x+c_2x\int x^{-2}e^{\int xf(x)dx}dx$

۹. $y=c_1e^x+c_2x^2e^x$

۱۰. $y=c_1e^x+c_2e^x\int e^{[-2x+\int f(x)dx]}dx$

بخش ۱۷

۱. الف) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$

ب) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

ج) $y=c_1\cos 2\sqrt{2}x+c_2\sin 2\sqrt{2}x$

د) $y=e^{x}(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x)$

ه) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

و) $y=c_1e^{5x}+c_2e^{4x}$

ز) $y=e^{-x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)$

۴. الف) $y=x^{-1}[c_1\cos(\log x^3)+c_2\sin(\log x^3)]$

ب) $y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\log x$

ج) $y=c_1x^3+c_2x^{-4}$

بخش ۱۸

۱. الف) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-5x}+\frac{1}{3}e^{4x}$

ب) $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+\sin x$

ج) $y=c_1e^{-5x}+c_2xe^{-5x}+7x^2e^{-5x}$

د) $y=e^{x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+2+4x+5x^2$

ه) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-4xe^{-2x}$

و) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+2\sin 2x+3\cos 2x$

ز) $y=c_1\sin x+c_2\cos x+x\sin x$

ح) $y=c_1+c_2e^{2x}+2x-3x^2$

۲. $y=c_1\sin kx+c_2\cos kx+\dfrac{\sin bx}{k^2-b^2}$

مگروقتی $b=k$، که درآن حالت $y=c_1\sin kx+c_2\cos kx-\dfrac{x\cos kx}{2k}$

۳. $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+x\sin 2x+2\cos x-1-x+2x^2$

بخش ۱۹

۱. $y_p=2x+4$

۲. $y_p = -\frac{1}{4} e^{-x}$

۳. الف) $y_p = -\frac{1}{4} \cos 2x \log(\sec 2x + \tan 2x)$

ب) $y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \log x - \frac{3}{4} x^2 e^{-x}$

ج) $y_p = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1)$

د) $y_p = \frac{1}{2} x e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x \log(\cos 2x)$

۴. الف) $y = c_1 x + c_2(x^2+1) + \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{2} x^2$

ب) $y = c_1 e^x + c_2 x^{-1} - x - 1 - \frac{1}{3} x^2$

بخش ۲۰

۱. وقتی $(k/M) - (c^2/2M^2)$ مثبت باشد، که محدودیت آن بیشتر از شرط $(k/M) - (c^2/4M^2) > 0$ است،بسامد (فرکانس) برابر است با

$$(1/2\pi)\sqrt{(k/M) - (c^2/2M^2)}$$

۳. $2\pi\sqrt{2r/3g}$ ثانیه.

۴. مدت رفت و برگشت مسافرت $2\pi\sqrt{R/g}$ است، که در آن R شعاع کرهٔ زمین است؛ این مدت زمان تقریباً ۹۰ دقیقه است.

بخش ۲۲

۳. $u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right) u = 0$

بخش ۲۳

۳. اگر $f(x) \geqslant 0$ و $k > 0$، آنگاه هرجواب معادلهٔ $y'' + [f(x)+k]y = 0$ دارای تعداد نامتناهی صفر مثبت است.

بخش ۲۴

۱. الف) $\lambda_n = 4n^2$ ، $y_n(x) = \sin 2nx$

ب) $\lambda_n=\frac{n^۲}{۴}$ ، $y_n(x)=\sin\frac{nx}{۲}$

ج) $\lambda_n=n^۲\pi^۲$ ، $y_n(x)=\sin n\pi x$

د) $\lambda_n=\frac{n^۲\pi^۲}{L^۲}$ ، $y_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}$

ه) $\lambda_n=\frac{n^۲\pi^۲}{۴L^۲}$ ، $y_n(x)=\sin\frac{n\pi(x+L)}{۲L}$

و) $\lambda_n=\frac{n^۲\pi^۲}{(b-a)^۲}$ ، $y_n(x)=\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}$

بخش ۲۵

۶. $\sum_{n=۱}^{\infty}nx^{n-۱}$

بخش ۲۶

۱. الف) $y=a_۰\left(۱+x^۲+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۶}{۳!}+\frac{x^۸}{۴!}+\cdots\right)=a_۰e^{x^۲}$

ب) $y=a_۰-(a_۰-۱)x+\frac{(a_۰-۱)}{۲!}x^۲-\frac{(a_۰-۱)}{۳!}x^۳+\cdots$

$$=۱+(a_۰-۱)\left(۱-x+\frac{x^۲}{۲!}-\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)=۱+(a_۰-۱)e^{-x}$$

۲. الف) $y=a_۱x$ ، هیچ اشکالی وجود ندارد.

ب) $y=۰$ ، $y=ce^{-۱/x}$ ، تابع دوم،تنها وقتی $c=۰$، در $x=۰$ تحلیلی است.

۳. $\sin^{-۱}x=x+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱\times۳\times\cdots\times(۲n-۱)}{۲\times۴\times\cdots\times(۲n)}\,\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}$

۵. $y=\frac{x^۲}{۲!}-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}-\cdots$

$$=\left(۱-x+\frac{x^۲}{۲!}-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}-\cdots\right)+x-۱=e^{-x}+x-۱$$

بخش ۲۷

۱. $$y=a_0\left(1+x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^6-\frac{1}{7}x^8+\dots\right)+a_1x$$
$$=a_0(1+x\tan^{-1}x)+a_1x$$

۲. الف) $$y_1(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\times 4}-\frac{x^6}{2\times 4\times 6}+\dots$$
$$y_2(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\times 5}-\frac{x^7}{3\times 5\times 7}+\dots$$

۳. $$a_{n+2}=-\frac{(n+1)a_{n+1}-a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

الف) $$y_1(x)=1+\frac{x^3}{2\times 3}-\frac{x^4}{2\times 3\times 4}+\frac{x^5}{2\times 3\times 4\times 5}+\dots$$

ب) $$y_2(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\times 3}+\frac{x^4}{2\times 3\times 4}-\frac{4x^5}{2\times 3\times 4\times 5}+\dots$$

۴. ج) $$a_{n+2}=-\frac{p-n}{(n+1)(n+2)}a_n$$
$$w(x)=a_0\left[1-\frac{p}{2!}x^2+\frac{p(p-2)}{4!}x^4-\dots\right]$$
$$+a_1\left[x-\frac{(p-1)}{3!}x^3+\frac{(p-1)(p-3)}{5!}x^5-\dots\right]$$

۵. ب) $$y(x)=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{2\times 5\times 8\times\dots\times(3n-1)3^n n!}\right]$$
$$+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{4\times 7\times 10\times\dots\times(3n+1)3^n n!}\right]$$

ج) $$y(x)=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\times 5\times 7\times\dots\times(3n-1)3^n n!}\right]$$
$$+a_1\left[-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{4\times 7\times 10\times\dots\times(3n+1)\,3^n n!}\right]$$

۶. الف) $$y_1(x)=1-\frac{p\times p}{2!}x^2+\frac{p(p-2)p(p+2)}{4!}x^4-\dots$$

$$y_۲(x)=x-\frac{(p-۱)(p+۱)}{۳!}x^۳$$

$$+\frac{(p-۱)(p-۳)(p+۱)(p+۳)}{۵!}x^۵-\dots$$

بخش ۲۸

۱. الف) $x=\circ$ نامنظم، $x=۱$ منظم

ب) $x=\circ$ و $x=۱$ منظم، $x=-۱$ نامنظم

ج) $x=\circ$ نامنظم

د) $x=\circ$ و $x=-۱/۳$ منظم

۲. الف) نقطهٔ عادی

ب) نقطهٔ عادی

ج) نقطهٔ غیرعادی منظم

د) نقطهٔ غیرعادی منظم

ه) نقطهٔ غیرعادی نامنظم

۳. الف) $m(m-۱)-۲m+۲=\circ\ ,\ m_۱=۲\ ,\ m_۲=۱$

ب) $m(m-۱)-\frac{۵}{۴}m+\frac{۱}{۲}=\circ\ ,\ m_۱=۲\ ,\ m_۲=\frac{۱}{۴}$

۴. الف) $y_۱(x)=x^{۱/۲}\left(۱-\frac{x}{۳!}+\frac{x^۲}{۵!}-\dots\right)=\sin\sqrt{x}$

$$y_۲(x)=۱-\frac{x}{۲!}+\frac{x^۲}{۴!}-\dots=\cos\sqrt{x}$$

ب) $y_۱(x)=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{x^n}{۱\times۳\times۵\times\dots\times(۲n+۱)}$

$$y_۲(x)=x^{-۱/۲}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{x^n}{۲^n n!}=x^{-۱/۲}e^{x/۲}$$

ج) $y_۱(x)=x^{۱/۲}\left(۱-\frac{۷}{۶}x+\frac{۲۱}{۴\circ}x^۲+\dots\right)$

$$y_۲(x)=۱-۳x+۲x^۲+\dots$$

د) $$y_1(x)=x\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{70}x^2+\cdots\right)$$

$$y_2(x)=x^{-1/2}\left(1-x-\frac{1}{2}x^2+\cdots\right)$$

۶. ب) $$y_2(x)=-xe^{1/x}$$

بخش ۲۹

۱. $$y=x^2(1-4x+4x^2+\cdots)$$

۲. $$y=c_1x^{1/2}e^x+c_2x^{1/2}e^x\log x$$

۳. الف) $$y_1=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots=x^{-1}\sin x$$

$$y_2=x^{-1}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)=x^{-1}\cos x$$

ب) $$y_1=x^2\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3+\cdots\right)$$

$$y_2=x^{-1}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots\right)$$

ج) $$y_1=x^2\left(1-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\cdots\right)=\sin x^2$$

$$y_2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots=\cos x^2$$

۴. $$y=x\left(1-\frac{x^2}{2^2\times 2!}+\frac{x^4}{2^4\times 2!\times 3!}-\cdots\right)$$

۵. $$y_1=x^{1/2}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)=x^{-1/2}\sin x$$

$$y_2=x^{-1/2}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)=x^{-1/2}\cos x$$

بخش ۳۰

۲. الف) $$y=c_1F\left(2,-1,\frac{3}{2},x\right)+c_2x^{-1/2}F\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},x\right)$$

$$=c_1\left(1-\frac{4}{3}x\right)+c_2x^{-1/2}F\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},x\right)$$

ب) $y=c_1F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -x\right)+c_2(-x)^{1/2}F\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -x\right)$

$$=c_1\left(\frac{1}{1+x}\right)+c_2\left[\frac{(-x)^{1/2}}{1+x}\right]$$

ج) $y=c_1F\left(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{x+1}{2}\right)+c_2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{1/2}F\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x+1}{2}\right)$

د) $y=c_1F\left(1, 1, \frac{14}{5}, \frac{3-x}{5}\right)$

$$+c_2\left(\frac{3-x}{5}\right)^{-9/5}F\left(-\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3-x}{5}\right)$$

۴. الف) $y=c_1F(p, 1, p, x)+c_2x^{1-p}F(1, 2-p, 2-p, x)$

ب) $y=c_1\left(\frac{1}{1-x}\right)+c_2\left(\frac{x^{1-p}}{1-x}\right)$

ج) $y=c_1\left(\frac{1}{1-x}\right)+c_2\left(\frac{\log x}{1-x}\right)$

۵. $y=c_1F\left(1, -1, -\frac{1}{2}, 1-e^x\right)+c_2(1-e^x)^{3/2}F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1-e^x\right)$

بخش ۳۱

۱. الف) یك نقطه غیرعادی منظم با توانهای $p+1$ و $-p$

ب) یك نقطه غیرعادی نامنظم

بخش ۳۲

۲. ج) $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ ، $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

بخش ۳۳

۴. الف) $f(x)=\frac{1}{4}P_0(x)+\frac{1}{2}P_1(x)+\frac{5}{16}P_2(x)+\dots$

$$f(x)=\frac{1}{2}(e-e^{-1})P_0(x)+3e^{-1}P_1(x)$$

$$+\frac{1}{2}(5e-35e^{-1})P_2(x)+\cdots$$

بخش ۳۴

۷. اگر p عدد صحیح نباشد،

$$y=x^{-c}[c_1J_p(ax^b)+c_2J_{-p}(ax^b)]$$

در تمام حالات،

$$y=x^{-c}[c_1J_p(ax^b)+c_2Y_p(ax^b)]$$

بخش ۳۵

۳. $$J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$$

$$J_3(x)=\left(\frac{8}{x^2}-1\right)J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x)$$

$$J_4(x)=\left(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x}\right)J_1(x)-\left(\frac{24}{x^2}-1\right)J_0(x)$$

بخش ۳۶

۱. الف)

$$\frac{dy}{dx}=z$$

$$\frac{dz}{dx}=xy+x^2z$$

ب)

$$\frac{dy}{dx}=z$$

$$\frac{dz}{dx}=w$$

$$\frac{dw}{dx}=w-x^2z^2$$

۲.

$$\frac{dx}{dt}=v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{f(t,x,y)}{m}$$

$$\frac{dy}{dt}=v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt}=\frac{g(t,x,y)}{m}$$

بخش ۳۷

۵. ب) $\begin{cases} x=c_1e^{4t}+c_2e^{-2t} \\ y=c_1e^{4t}-c_2e^{-2t} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x=3e^{4t}+2e^{-2t} \\ y=3e^{4t}-2e^{-2t} \end{cases}$

۶. ب) $\begin{cases} x=2c_1e^{4t}+c_2e^{-t} \\ y=3c_1e^{4t}-c_2e^{-t} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x=2c_1e^{4t}+c_2e^{-t}+3t-2 \\ y=3c_1e^{4t}-c_2e^{-t}-2t+3 \end{cases}$

۸. $\begin{cases} x=c_1e^{t}+c_2te^{t} \\ y=c_2e^{t} \end{cases}$

۹. الف) $\begin{cases} x=c_1e^{t} \\ y=c_2e^{t} \end{cases}$

بخش ۳۸

۱. الف) $\begin{cases} x=2c_1e^{-t}+c_2e^{t} \\ y=c_1e^{-t}+c_2e^{t} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x=e^{3t}(2c_1\cos 3t+2c_2\sin 3t) \\ y=e^{3t}[c_1(\cos 3t+3\sin 3t)+c_2(\sin 3t-3\cos 3t)] \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x=-2c_1e^{3t}+c_2(1+2t)e^{3t} \\ y=c_1e^{3t}-c_2te^{3t} \end{cases}$

د) $\begin{cases} x=3c_1+c_2e^{-2t} \\ y=4c_1+2c_2e^{-2t} \end{cases}$

ه) $\begin{cases} x=c_1e^{2t} \\ y=c_2e^{3t} \end{cases}$

و) $\begin{cases} x = c_1e^{-3t}+c_2(1-t)e^{-3t} \\ y = -c_1e^{-3t}+c_2te^{-3t} \end{cases}$

ز) $\begin{cases} x = 2c_1e^{10t}+3c_2e^{3t} \\ y = c_1e^{10t}-2c_2e^{3t} \end{cases}$

ح) $\begin{cases} x = e^{3t}(c_1 \cos 2t+c^2 \sin 2t) \\ y = e^{3t}[c_1(\sin 2t-\cos 2t)-c_2(\sin 2t+\cos 2t)] \end{cases}$

۵. ب) $\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = 2t-1 \end{cases}$

بخش ۳۹

۱. $$x\frac{d^2x}{dt^2}=(dx^2-cx)\frac{dx}{dt}+(acx^2-adx^3)+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

۲. منحنی روباه، مقعر رو به بالاست، هرگاه منحنی خرگوش صعودی باشد.

بخش ۴۰

۲. مقدار c را برابر $t_1 - t_2$ قراردهید واز یگانگی استفاده کنید.

۳. یکسانند بجز آنکه جهت تمامی مسیرها، درعبور از یکی به‌دیگری، معکوس می‌شود.

۴. الف) هر نقطه یك نقطهٔ بحرانی است، و هیچ مسیری وجود ندارد.

ب) هر نقطهٔ واقع برمحور y ها یك نقطهٔ بحرانی است، ومسیرها نیم‌خطهای افقی هستند که به طرف چپ و راست محور y ها رسم شده‌اند.

ج) نقاط بحرانی‌وجود ندارند، ومسیرها خطوطی مستقیم با شیب ۲ هستند که به‌طرف راست و به بالا می‌روند.

د) نقطهٔ (۰ ، ۰) تنها نقطهٔ بحرانی است، و مسیرها نیم‌خطوطی با همهٔ شیبهای ممکن و متوجهٔ مبدأ هستند.

۵. برای معادلات (۱) و (۲)، عبارتند از (۰ ، ۰)، ($\pm\pi$ ، ۰)، ($\pm 2\pi$ ، ۰)، ($\pm 3\pi$ ، ۰)، ...؛ و برای معادلهٔ (۳)، (۰ ، ۰) تنها نقطهٔ بحرانی است.

۶. الف) (۰ ، ۲−)، (۰ ، ۰)، (۰ ، ۱) ب) (۲ ، ۲)، (۳ ، ۳)

۷. $\begin{cases} x=c_1e^t \\ y=c_1e^t+e^t+c_2 \end{cases}$

بخش ۴۱

۱. الف) (۱) نقاط بحرانی نقاط روی محور x ها هستند.

(۲) $dy/dx=2xy/(x^2+1)$

(۳) $y=c(x^2+1)$

ب) (۱) $(0,0)$ (۲) $dy/dx=-x/y$ (۳) $x^2+y^2=c^2$

ج) (۱) نقطه بحرانی وجود ندارد؛

(۲) $dy/dx=\cos x$ (۳) $y=\sin x+c$

د) (۱) نقاط بحرانی نقاط روی محور y ها هستند.

(۲) $dy/dx=-2xy^2$ (۳) $y=1/(x^2+c^2)$ و $y=0$

۲. الف) (۱) $\begin{cases} x=c_1e^t \\ y=c_2e^{-t} \end{cases}$ (۲) $dy/dx=-y/x$

(۳) $xy=c$ (۴) ناپایدار

ب) (۱) $\begin{cases} x=c_1e^{-t} \\ y=c_2e^{-2t} \end{cases}$ (۲) $dy/dx=2y/x$

(۳) $y=cx^2$ (۴) بطور مجانبی پایدار

ج) (۱) $\begin{cases} x=2c_1\cos 2t+2c_2\sin 2t \\ y=-c_1\sin 2t+c_2\cos 2t \end{cases}$

(۲) $$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{4y}$$

(۳) $$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$$

(۴) پایدار ولی نه بطور مجانبی پایدار

بخش ۴۲

۱. الف) گره ناپایدار ب) حلزونی به‌طور مجانبی پایدار

ج) نقطه زینی ناپایدار　　د) مرکز پایدار ولی نه به‌طورمجانبی پایدار

ه) گره به‌طورمجانبی پایدار　　و) نقطه بحرانی منزوی نیست

ز) حلزونی ناپایدار

۳. ج) نقطه بحرانی (۲ ، ۳ −) است ، دستگاه تبدیل یافته عبارت است از

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=۲\bar{x}-۲\bar{y}\\[2ex]\dfrac{d\bar{y}}{dt}=۱۱\bar{x}-۸\bar{y}\end{cases}$$

و نقطه بحرانی یك گره به طور مجانبی پایدار است.

۴. الف) $m^۲+۲bm+a^۲=۰$ ؛ $p=۲b$ ، $q=a^۲$.

ب) (۱) یك مرکز پایدار ولی نه به‌طور مجانبی پایدار ؛ جرم نوسان می کند ؛ تغییر مکان x و سرعت $y=dx/dt$ توابعی متناوب از زمان هستند.

(۲) نقطهٔ حلزونی به طور مجانبی پایدار؛ جرم نوسانات میرا را جبران می کند؛ نوسانات کوچکتروکوچکتر می‌شوند و x و dx/dt به‌صفرمیل می کنند.

(۳) گره به‌طورمجانبی‌پایدار،جرم‌نوسان‌نمی کند؛ x و $dx/dt\to ۰$ بدون‌نوسان.

(۴) همانند (۳)

۵. $a_۲x^۲-۲a_۱xy-b_۱y^۲=c$

بخش ۴۳

۱. الف) هیچکدام　　ب) مطلقاً مثبت

ج) هیچکدام　　د) مطلقاً منفی

بخش ۴۴

۲. $$\frac{dy}{dx}=\frac{۲x^۲y-y^۳}{x^۳-۲xy^۳}$$

۳. بنویسید $D=-pq=(a_۱+b_۲)(a_۱b_۲-a_۲b_۱)>۰$

۴. وقتی دستگاه خطی (۳) در (۰ ، ۰) یك مرکز داشته باشد، نمی‌توان در مورد خواص پایداری دستگاه غیرخطی (۴) در (۰ ، ۰) نتیجه‌ای گرفت .

۵. الف) حلزونی ناپایدار؛　　ب) گره به‌طور مجانبی پایدار

۶. اگر $\mu>۰$ نقطه بحرانی (۰ ، ۰) ناپایدار است و اگر $\mu<۰$ به‌طور مجانبی

پایدار است.

بخش ۴۵

۱. اگر $f(\circ)=\circ$ و $xf(x)<\circ$ برای $x\neq\circ$ ، نقطهٔ بحرانی نقطهٔ زینی ناپایدار است.

۳. $y^{۲}-x^{۲}+x^{۴}=۲E$ ؛ $(-\sqrt{۲}/۲ \text{ ، } \circ)$ یك مرکز است ؛ $(\circ \text{ ، } \circ)$ یك نقطهٔ زینی است و $(\sqrt{۲}/۲ \text{ ، } \circ)$ یك مرکز است.

۴. وقتی $z=F(x)$ دارای ماکزیمم است ، نقطهٔ بحرانی نقطهٔ زینی است ؛ وقتی می‌نیمم دارد ، نقطهٔ بحرانی یك مرکز است ؛ و وقتی نقطهٔ عطف دارد ، نقطهٔ بحرانی یك قله است.

بخش ۴۶

۲. الف)
$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(۴-r^{۲})\\[2mm] \dfrac{d\theta}{dt}=-۴\end{cases}$$

ج)
$$\begin{cases}x=۲\cos ۴t\\ y=-۲\sin ۴t\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{۲\cos ۴(t+t_{\circ})}{\sqrt{۱+ce^{-۸t}}}\\[2mm] y=\dfrac{-۲\sin ۴(t+t_{\circ})}{\sqrt{۱+ce^{-۸t}}}\end{cases}$$

۴. الف) جواب متناوب (دوره‌ای) دارد (قضیهٔ لینار) ؛

ب) جواب متناوب ندارد(قضیهٔ ب) ؛

ج) جواب متناوب ندارد(قضیهٔ الف) ؛

د) جواب متناوب ندارد (قضیهٔ ب) ؛

ه) جواب متناوب دارد (قضیهٔ لینار).

بخش ۴۸

۱. الف) $(x-c_{۲})^{۲}+y^{۲}=c_{۱}^{۲}$

ب) $y=c_{۱}\sin(x-c_{۲})$

۲. $y=\frac{۱}{۴}(x^{۲}-x)$

۴. الف) $c_{۱}=r\cos(\theta-c_{۲})$ ؛ ب) همان جواب (الف)

بخش ۴۹

۳. الف) $x=\frac{ad}{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$ $\quad y=\frac{bd}{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$

$z=\frac{cd}{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$

۵. زنجیری $\quad y+\lambda=c_{۱}\cosh\left(\frac{x-c_{۲}}{c_{۱}}\right)$

بخش ۵۰

۳. $$L[\sin^{۲}ax]=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{p}-\frac{p}{p^{۲}+۴a^{۲}}\right)$$

و

$$L[\cos^{۲}ax]=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{p}+\frac{p}{p^{۲}+۴a^{۲}}\right)$$

مجموع این تبدیلها همان تبدیل ۱ ($۱/p=$) است.

۴. الف) $\frac{۱۰}{p}$ $\quad$ ب) $\frac{۵!}{p^{۶}}+\frac{p}{p^{۲}+۴}$

ج) $\frac{۲}{p-۳}-\frac{۵}{p^{۲}+۲۵}$ $\quad$ د) $\frac{۴}{p^{۲}+۴}+\frac{۲}{p+۱}$

ه) $\frac{۶!}{p^{۷}}$

۵. الف) $۵x^{۳}$ $\quad$ ب) $۲e^{-۳x}$

ج) $۲x^{۲}+۳\sin ۲x$ $\quad$ د) $۱-e^{-x}$ $\quad$ ه) $x-\sin x$

بخش ۵۱

۲. الف) $\frac{۱}{pe^{ap}}$ $\quad$ ب) $\frac{۱}{p(e^{p}-۱)}$

ج) $\frac{e^{p}-۱-p}{p^{۲}(e^{p}-۱)}$ $\quad$ د) $\frac{۱+e^{-\pi p}}{p^{۲}+۱}$

بخش ۵۲

۱. الف) $\frac{5!}{(p+2)^6}$ ب) $\frac{1}{p+1}-\frac{2!}{(p+1)^3}$

ج) $\frac{p-3}{(p-3)^2+4}$

۲. الف) $2e^{-2x}\sin 3x$ ب) $2e^{-3x}x^3$

ج) $e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x$

۳. الف) $y(x)=-e^{-x}+e^{2x}$

ب) $y(x)=3xe^{2x}$

ج) $y(x)=1-e^{-x}\cos x$

د) $y(x)=-5+6x-3x^2+x^3+5e^{-x}$

ه) $y(x)=e^{-x}\sin 2x+e^{-x}\sin x$

۴. $y(x)=y_0e^{ax}+(y_0'-ay_0)xe^{ax}$

۵. $1-e^{-x}$

بخش ۵۳

۱. $$L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\sin ax}{a}-x\cos ax\right)$$

۲. الف) $\frac{6ap^2-2a^3}{(p^2+a^2)^3}$ ب) $\frac{3}{4p^2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

۳. الف) $y(x)=cx^2e^x$ ب) $y(x)=xe^{-x}$

۵. الف) $\log\frac{b}{a}$ ب) $\tan^{-1}\frac{b}{a}$

۸. ب) $\frac{1}{p(1+e^{-p})}$

بخش ۵۴

۲. الف) $y(x)=\cos x$ ب) $y(x)=e^{2x}$

ج) $y(x)=e^{-x}(x-1)^2$ د) $y(x)=-2\sin x+4\sin 2x$

۴. $y=cx$

بخش ۵۵

۱. $$y=\frac{۱}{۱-x}=۱+x+x^{۲}+\cdots,|x|<۱$$

$$y_{۱}(x)=۱+x\,,\qquad y_{۲}(x)=۱+x+x^{۲}+\frac{۱}{۳}x^{۳}$$

$$y_{۳}(x)=۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\frac{۲}{۳}x^{۴}+\frac{۱}{۳}x^{۵}+\frac{۱}{۹}x^{۶}+\frac{۱}{۶۳}x^{۷}$$

۲. $$y=e^{x^{۲}}-۱$$

$$y_{۱}(x)=x^{۲}\,,\qquad y_{۲}(x)=x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۲}$$

$$y_{۳}(x)=x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۲}+\frac{x^{۶}}{۲\times۳}$$

$$y_{۴}(x)=x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۲}+\frac{x^{۶}}{۲\times۳}+\frac{x^{۸}}{۲\times۳\times۴}$$

۳. الف) $$y_{n}(x)=\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\cdots+\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}+e^{x}\to(e^{x}-x-۱)+e^{x}$$

ب) $$y_{n}(x)=۱+x+۲\left[\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۴}}{۴!}+\cdots+\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}\right]$$
$$\to ۱+x+۲(e^{x}-x-۱)$$

ج) $$y_{۱}(x)=(\sin x-x)+۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}$$

$$y_{۲}(x)=-\left(\cos x-۱+\frac{x^{۲}}{۲!}\right)+۱+x+(x^{۲})+\frac{x^{۳}}{۳!}$$

$$y_{۳}(x)=-\left(\sin x-x+\frac{x^{۳}}{۳!}\right)+۱+x+\left(x^{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}\right)+\frac{x^{۴}}{۴!}$$

$$y_{۴}(x)=\left(\cos x-۱+\frac{x^{۲}}{۲!}-\frac{x^{۴}}{۴!}\right)+۱+x$$
$$+\left(x^{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۴}}{۳\times۴}\right)+\frac{x^{۵}}{۵!}$$

بخش ۵۶

۶. الف) همهٔ نقاط (x_0 , y_0) با شرط $y_0 \neq 0$.

ب) همهٔ نقاط (x_0 , y_0)، زیـرا $f(x , y) = |y|$ در هر مستطیلی در شرط لیپشیتز صدق می‌کند.

۷. همهٔ نقاط (x_0 , y_0).

بخش ۵۷

۱. $$\begin{cases} y = \cos x \\ z = -\sin x \end{cases}$$

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

آزمون	test
ـ مقایسه	comparison ـ
ـ نسبت	ratio ـ
آهنگ	rate
ارتعاش	vibration
ـ آزاد	free ـ
ـ میرا	damped ـ
اصل	principle
ـ پایستگی انرژی	ـ of conservation of energy
ـ حداقل زمان‌فرما	Fermat's principle of least time
ـ کمترین عمل	principle of least action
انتگرال	integral
ـ بیضوی	elliptic ـ
ـ ناسره	improper ـ
انحنا	curvature
ایستا ، ایستی	stationary
بردار یکه	unit vector
بسامد	frequency
بسلا	manifold
به‌طور مجانبی پایدار	asymptotically stable
بیضی‌وار	ellipsoid
پایداری	stability
پایستار	conservative
پخش	diffusion
تابع	function
ـ بیضوی	elliptic ـ
ـ پذیرفتنی	admissible ـ
ـ پله‌ای	step ـ
ـ تك مقداری	single valued ـ
ـ خودریخت	automorphic ـ
ـ دلتای دیراك	Dirac delta ـ
ـ دندانه‌اره‌ای	sawtooth ـ
ـ ضربه‌ای واحد	unit impulse ـ
ـ فوق هندسی	hypergeometric ـ
ـ فوق هندسی متلاقی	confluent hypergeometric ـ
ـ مولد	generating ـ
ـ وزن	weight ـ
تابع ویژه	eigenfunction

تبدیل transformation
ـ انتگرالی integral —
تبدیل لاپلاس Laplace transform
تبدیل لاپلاس معکوس
inverse Laplace transform
تعیین صوری formalism
تحت میرا underdamped
تحلیلی analytic
تحلیل موضعی (توپولوژی)
analysis situs
تراز انرژی کوانتیده
quantized energy level
ترکیب خطی linear combination
تشدید resonance
تعادل equilibrium
تقریبات متوالی
successive approximations
تلاشی decay
تناظر یک به یک
one to one correspondence
توابع خاص special functions
توان معادلهٔ دیفرانسیل
exponent of differentialequea-tion

ثابت constant
ـ جداسازی separation —
ـ گرانشی gravitational —

جواب solution
ـ خصوصی particular —
ـ صفر trivial —
ـ عمومی general —

چرخزاد cycloid
چند جمله‌ای polynomial

حالت ماندگار steady-state
حساب تغییرات
calculus of variations
حلزونی spiral

خاصیت property
ـ کانونی focal —
ـ مینی‌ماکس minimax —
خروج ازمرکز eccentricity
خطی کردن linearization
خواص سرتاسری global properties
خودالقا inductor

دامنه amplitude
درجه degree
دستگاه system
ـ خودگردان autonomous —
ـ غیرزوج (غیرجفت) uncoupled —
دستور انتقالی shifting formula
دنباله sequence
دوره‌ای periodic
دیفرانسیل کامل exact differential
دینامیک dynamics

ذره particle

رابطهٔ بازگشتی recursion formula
رخسارهٔ فاز phase portrait
رشد growth
رصدخانهٔ مغناطیسی
magnetic observatory
روش method
ـ تغییر پارامترها
variation of parameters —

— اویلر Euler multiplier
— خودالقایی inductance—
— دوجمله‌ای binomial —
— لاگرانژ Lagrange multiplier

طول کمان arc length

عامل انتگرال‌ساز integrating factor

غشا membrane
غیرجبری transcendental
غیرزوج (غیر جفت) uncoupled
غیرعادی singular

فاصله interval
فضای فاز phase space
فوق میرا overdamped

قانون law
— شکست اسنل
Snell' s law of refraction
— گرانش — of gravitation
قضیه theorem
— حد مرکزی central limit —
— مجزاکنندهٔ استورم
Sturm separation—
— مقایسهٔ استورم
Sturm comparison—
— وجود و یگانگی
existence and uniqueness —
قطعه به قطعه پیوسته
piecewise continuous

کاهش لگاریتمی
logarithmic decrement
کاهش مرتبه reduction of order

— ضرایب نامعین
undetermined coefficient—
— مبتنی بر تکرار
iteration process —
رویهٔ کمترین‌مساحت minimal surface
رونسکیی Wronskian

زمان سقوط descent time

ژئودزیك geodesic
ژئومغناطیس geomagnetism

سازوکار mechanism
سرعت velocity
— فرار escape —
— نهایی terminal —
سری series
— بینهایت infinite—
— دوجمله‌ای binomial —
— توانی power —
— شبه‌توانی quasi power —
— فوق هندسی hypergeometric—
سقوط تأخیری retarded fall
سیاره planet

شرایط اولیه initial conditions
شعاع همگرایی
radius of convergence
شکل نرمال normal form
شهودی، حسی intuitive

صفحهٔ فاز phase plane
صوری، رسمی formal

ضریب coefficient

کراندار	bounded
کسر مسلسل	continued fraction
کمترین مربعات	least squares
کنولوسیون	convolution
گذرا	transient
گره	node
گلابی شکل	pear - shaped
ماهواره	satellite
مبین	discriminant
متعالی (غیرجبری)	transcendental
متغیر	variable
ـ ظاهری	dummy —
ـ وابسته	dependent —
محدب	convex
مرتبه	order
ـ نمایی	exponential —
مزدوج	conjugate
مسئلهٔ همزمانی	tautochrone problem
مسائل تغییراتی	variational problems
مستقل خطی	linearly independant
مسیرهای متعامد	orthogonal trajectories
مطلقاً مثبت	positive definite
مطلقاً منفی	negative definite
معادله	equation
ـ انتگرالی	integral —
ـ شاخص	indicial —
ـ کمکی	auxiliary —
ـ همبعد اویلر	Euler' s equidimensional —
مقدار ویژه	eigenvalue
مکانیک	mechanics
ـ تحلیلی	analytical —
ـ سماوی	celestial —
ـ همیلتنی	Hamiltonian—
منحنی	curve
ـ انتگرال	integral—
ـ تعقیب	pursuit —
ـ جهت‌دار	directed—
ـ زنجیری	catenary—
ـ کشاننده	tractrix —
ـ کوتاهترین‌زمان	brachistochrone—
منظم	regular
منظومه شمسی	solar system
موضعی	local
میدان گرانشی	gravitational field
میرای بحرانی	critically damped
ناپیوستگی جهشی	jump discontinuity
ناپیوسته	discontinuous
نامیرا	undamped
نسبیت عام	general relativity
نظریه	theory
ـ ارگودیک	ergodic —
ـ تقریب	of approximation —
ـ منسجم نورشناسی	coherent theory of optics
نقاط انتهایی	end points
نقطه	point
ـ بحرانی	critical —
ـ بحرانی منزوی	isolated critical—
ـ زینی	saddle —
ـ عادی	ordinary —
ـ غیرعادی نامنظم	irregular singular —
نورشناسی	optics

نوسان کردن oscillate

نوسانات forced vibrations

ــ نیروی بازگرداننده

restoring force

ــ کشش tension ــ

ــ گرانشی مرکزی

central gravitational force

ــ مرکزی central force

نیم‌مطلق‌منفی negative semidefinite

نیم‌مطلق مثبت positive semidefinite

هسته kernel

همساز harmonic

همسایگی neighborhood

هم‌پیرامون isoperimetric

همگرایی convergence

ــ مطلق absolute ــ

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

absolute convergence همگرایی مطلق
action عمل
admissible function تابع پذیرفتنی
amplitude دامنه
analysis situs
تحلیل موضعی (توپولوژی)
analytic تحلیلی
analytical mechanics مکانیک تحلیلی
arc length طول کمان
asymptotically stable
به طور مجانبی پایدار
automorphic function
تابع خودریخت
autonomous system
دستگاه خودگردان
auxiliary equation معادلهٔ کمکی

binomial دوجمله‌ای
— coefficient ضریب —
— series سری —
bounded کراندار
brachistochrone
منحنی کوتاهترین زمان

calculus of variations حساب تغییرات
catenary زنجیری
celestial mechanics مکانیک سماوی
central مرکزی
— force نیروی —
— gravitational force
نیروی گرانشی —
— limit theorem قضیه حد —
coherent منسجم
comparison test آزمون مقایسه
confluent hypergeometric function
تابع فوق هندسی متلاشی
conjugate مزدوج
conservative پایستار
continued fraction کسر مسلسل
convergence همگرایی
convex محدب
convolution کنولوسیون
critically damped میرای بحرانی
critical point نقطه بحرانی
crude approximation تقریب خام
curvature انحنا
cycloid چرخزاد

damped vibration ارتعاش میرا
decay تلاشی
degree درجه
dependent variable متغیر وابسته
descent time زمان سقوط
difference اختلاف
diffusion پخش
Dirac delta function
تابع دلتای دیراک
directed curve منحنی جهت‌دار
discontinuous ناپیوسته
discriminant مبین
dummy variable متغیر ظاهری
dynamics دینامیک

eccentricity خروج از مرکز
eigenfunction تابع ویژه
eigenvalue مقدار ویژه
ellipsoid بیضی‌وار
elliptic بیضوی
— function تابع —
— integral انتگرال —
end points نقاط انتهایی
escape velocity سرعت فرار
exact differential دیفرانسیل کامل
exponential order مرتبهٔ نمایی
exponent of differential equation
توان معادلهٔ دیفرانسیل
equilibrium تعادل
ergodic theory نظریهٔ ارگودیک
Euler's equidimensional equation
معادلهٔ همبعد اویلر
Euler multiplier ضریب اویلر
existence and uniqueness theorem
قضیه وجود و یگانگی

Fermat's principle of least time
اصل حداقل زمان‌فرما
focal property خاصیت کانونی
forced vibrations نوسانات واداشته
formal صوری ، رسمی
formalism تعیین صوری
free vibration ارتعاش آزاد
frequency بسامد

general عام ، عمومی
— relativity نسبیت —
— solution جواب —
generating function تابع مولد
geomagnetism ژئومغناطیس
global properties خواص سرتاسری
gravitational گرانشی
— constant ثابت —
— field میدان —
growth رشد

Hamiltonian mechanics
مکانیک همیلتنی
harmonic همساز
homogeneous همگن
hypergeometric فوق هندسی
— equation معادله —
— function تابع —
— series سری —

improper integral انتگرال ناسره
indicial equation معادلهٔ شاخص
inductance ضریب خودالقایی
inductor خودالقا
infinite series سری بینهایت
initial conditions شرایط اولیه

integral انتگرال، انتگرالی
— curve منحنی —
— equation معادلهٔ —
— transformation تبدیل —
integrating factor عامل انتگرال‌ساز
interval فاصله
intuitive حسی ، شهودی
inverse Laplace transform
تبدیل لاپلاس معکوس
irregular singular point
نقطهٔ غیرعادی نامنظم
isolated critical point
نقطهٔ بحرانی منزوی
isoperimetric هم‌پیرامونی
iteration process روش مبتنی بر تکرار

jump discontinuity ناپیوستگی جهشی

kernel هسته

Lagrange multiplier ضریب لاگرانژ
Laplace transform
تبدیل لاپلاس، مبدل لاپلاس
law of gravitation قانون گرانش
least squares کمترین مربعات
linear combination ترکیب خطی
linearization خطی کردن
linearly dependant وابسته خطی
linearly independant مستقل خطی
local موضعی
logarithmic decrement
کاهش لگاریتمی

magnetic observatory
رصدخانهٔ مغناطیسی

manifold بسلا
mechanism ساز و کار
membrane غشاء
method of variation of parameters
روش تغییر پارامترها
minimal surface method
رویهٔ کمترین مساحت
minimax property
خاصیت مینی‌ماکس

negative منفی
— definite مطلقاً —
— semidefinite نیم مطلق —
neighborhood همسایگی
node گره
normal form شکل نرمال

one to one correspondence
تناظر یك به یك
optics نورشناسی
order مرتبه
ordinary point نقطهٔ عادی
orthogonal trajectories
مسیرهای متعامد
oscillate نوسان کردن
overdamped فوق میرا

particle ذره
particular solution جواب عمومی
pear - shaped گلابی شکل
periodic دوره‌ای
phase فاز
— plane صفحهٔ —
— portrait رخسارهٔ —
— space فضای —

piecewise continuous
قطعه به قطعه پیوسته
planet سیاره
polynomial چندجمله‌ای
positive مثبت
— definite مطلقاً —
— semidefinite نیم مطلق —
power series سری توانی
principle اصل
— of conservation of energy
— پایستگی انرژی
— of least action — کمترین عمل
pursuit curve منحنی تعقیب

quantized energy level
تراز انرژی کوانتیده
quasi power series سری شبه‌توانی

radius of convergence
شعاع همگرایی
rate آهنگ
ratio test آزمون نسبت
recursion formula رابطهٔ بازگشتی
reduction of order کاهش مرتبه
regular منظم
resonance تشدید
restoring force نیروی بازگرداننده
retarded fall سقوط تأخیری

saddle point نقطهٔ زینی
satellite ماهواره
sawtooth function تابع دندانه‌اره‌ای
separation constant ثابت جداسازی
sequence دنباله

single valued function
تابع تک مقداری
singular غیرعادی
Snell's law of refraction
قانون شکست اسنل
stability پایداری
stationary ایستا ، ایستی
steady - state حالت ماندگار
step function تابع پله‌ای
shifting formula دستور انتقالی
solar system منظومهٔ شمسی
special functions توابع خاص
spiral حلزونی
Sturm comparison theorem
قضیهٔ مقایسهٔ استورم
Sturm separation theorem
قضیهٔ مجزاکنندهٔ استورم
successive approximations
تقریبات متوالی

tautochrone problem مسئلهٔ همزمانی
tension کشش
terminal velocity سرعت نهایی
theory of approximation
نظریهٔ تقریب
tractrix curve منحنی کشاننده
transcendental متعالی (غیرجبری)
transformation تبدیل
transient گذرا
trivial solution جواب صفر

uncoupled system
دستگاه غیرزوج (غیرجفت)
undamped نامیرا
underdamped تحت میرا

unit impulse function
تابع ضربه‌ای واحد

unit vector بردار یکه

variation of parameters method
روش تغییر پارامترها

variational problems
مسائل تغییراتی

vibration ارتعاش

weight function تابع وزن

Wronskian رونسکیی

undetermined coefficient method
روش ضرایب نامعین

فهرست راهنما