www.mohandesyar.com

عنـــــــوان

معادلات دیفرانسیل

$$\frac{2}{3}z+\frac{1}{2}\ln(3z+1)=x+c$$

پایان جلسه دوم : $\;\to \frac{2}{3}(x+y+1)+\frac{1}{9}\ln(3x+3y+4)=x+c$

مثال ← معادله زیر را به صورت کامل بودن حل کنید: $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\ln x-2)dy=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\end{cases} \to \text{کامل است}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{x}+6x \xrightarrow[\text{مشتق نسبت به } y]{\text{انتگرال نسبت به } x} f=y\ln x+3x^2+g(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\ln x-2\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\ln x+g'(y)$$

$$\to g'(y)=-2 \Rightarrow g(y)=-2y$$

مثال) معادله مشتق زیر را در صورت کامل بودن حل کنید

$$(\cos y+y\cos x)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$$

* جواب در صفحه ی بعدی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\sin y + \cos x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos x - \sin y \end{cases}$$

کامل است

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos y + y\cos x \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} F = x\cos y + y\sin x + g(y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \sin x - x\sin y \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x\sin + \sin x + g'(y)$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

جواب عمومی $x\cos y + y\sin x + C = 0$

$(4xy + 3y^2 - x)dx$

$+$

$(x^2 + 2xy)dy = 0$

عامل انتگرال ساز برمعادله مقابل توجه کنید

* این معادله کامل نیست زیرا

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y \end{cases}$$

حل معادله فوق را در x^2 ضرب می کنیم

$(4x^3y + 3y^2x^2 - x^3)dx + (x^4 + 2x^3y)dy = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 + 6yx^2 \\ \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 4x^3 + 6x^2y \end{cases}$$

← **تعریف**: عبارت μ را عامل انتگرال ساز معادله $M\,dx + N\,dy = 0$ می نامیم

هرگاه معادله $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ کامل باشد.

حال با دو پرسش زیر مواجه می شویم:

A) آیا هر معادله دیفرانسیل غیر کامل، عامل انتگرال ساز دارد؟

B) عامل انتگرال ساز چگونه یافت می شود؟

جواب پرسش اول مثبت است اما در بسیاری از موارد عامل انتگرال ساز را فقط به صورت صوری می توان نوشت. بنابراین عامل انتگرال ساز معادلات غیر کامل را فقط در بعضی از موارد خاص بدست می آوریم، این موارد عبارتند از:

۱-) هنگامی که عامل انتگرال ساز فقط برحسب x باشد.

۲-) هنگامی که عامل انتگرال ساز فقط برحسب y باشد.

۳-) هنگامی که عامل انتگرال ساز برحسب $x+y$ باشد.

← برای یافتن عامل انتگرال ساز عبارت $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ را می یابیم سپس یکی از حالات زیر رخ می دهد.

1) $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=g(x)\Rightarrow \mu=e^{\int g(x)dx}$$

2) $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=h(y)\Rightarrow \mu=e^{\int h(y)dy}$$

3) $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=k(z)\Rightarrow \mu=e^{\int k(z)dz}\quad \boxed{z=x+y}$$

مثال) عامل انتگرال ساز معادله زیر را یافته سپس آن را حل نمائید.

$$(4xy+3y^2-x)dx+(x^2+2xy)dy=0$$

حل

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4x+6y-(2x+2y)}{x^2+2xy}=\frac{2x+4y}{x^2+2xy}$$

$$=\frac{2(x+2y)}{x(x+2y)}=\frac{2}{x}\rightarrow \mu=e^{\int \frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2$$

توان

$$(4x^3y+3y^2x^2-x^3)dx+(x^4+2x^3y)dy=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x^3y+3y^2x^2-x^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^4+2x^3y \xrightarrow[\text{انتگرال نسبت به } y]{} F=yx^4+x^3y^2+g(x)$$

مشتق نسبت به x → $$\frac{\partial F}{\partial x}=4x^3y+3x^2y^2+g'(x)$$

$g'(x) = -x^3 \Rightarrow g(x) = -\frac{x^4}{4} \Rightarrow$ جواب عمومی $yx^4 + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = C$

مثال) عامل انتگرال ساز؛ معادله زیر را یافته آن را حل کنید.

$\overset{N}{(3x^2 - y^2)}\,dy - \overset{M}{2xy\,dx} = 0$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{-2x - 6x}{2xy} = -\frac{8x}{2xy} = \frac{-4}{y}$$

$$M = e^{\int -\frac{4}{y}dy} \Rightarrow e^{-4\ln y} = y^{-4} = \frac{1}{y^4}$$

$$\left(\frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2}\right)dy - \frac{2x}{y^4}\,dx = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2x}{y^3} \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} F = -\frac{x^2}{y^3} + g(y)$$

مشتق نسبت به y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{3x^2}{y^4} + g'(y)$$

$\boxed{\int -\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}}$

حذف شود

$g'(y) = -\frac{1}{y^2} \rightarrow g(y) = \frac{1}{y}$

پایان جلسه سوم.