www.mohandesyar.com

عنـــــــوان

معادلات دیفرانسیل

Subject :

Year: 1390 Month. 2 Date. 1

ابتدای جلسه نهم

معادلات خطی مرتبه دوم

هر معادله بصورت $y'' + P(x)y' + q(x)y = R(x)$ را یک معادله خطی مرتبه دوم می‌نویسیم.

چنانچه $R(x) = 0$ باشد معادله را همگن نامیده و در غیر این صورت آن را ناهمگن می‌نامیم.

دو قضیه زیر در حل معادله فوق دارای اهمیت می‌باشد:

1- اگر y_1 و y_2 دو جواب خصوصی از معادله همگن باشند آنگاه ترکیب آنها جواب عمومی معادله همگن خواهد بود. $y_c = C_1y_1 + C_2y_2$ ← جواب عمومی

2- اگر y_1 جواب خصوصی معادله ناهمگن باشد y_c جواب عمومی معادله همگن تولید آن باشد آنگاه جواب عمومی معادله ناهمگن به صورت زیر است: $y = y_c + y_1$ ← جواب عمومی

در این حالت چهار روش زیر استفاده می‌کنیم

1- روش ضرایب ثابت

2- روش $\sqrt{\Delta}$ (یک جواب از روی جواب دیگر)

3- روش ضرایب نامعین

4- روش تغییر پارامتر

(P و q دو عدد هستند)

1- روش ضرایب ثابت: این روش برای یافتن جواب معادله‌ای بصورت $y'' + Py' + qy = 0$ می‌باشد. برای حل این معادله ابتدا جواب آن را بصورت زیر حدس می‌زنیم:

صفحه بعدی

$$y=e^{kx},\quad y'=ke^{kx},\quad y''=k^2e^{kx} \xrightarrow{\text{در معادله}} k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$$

$$e^{kx}(k^2+pk+q)=0$$

$$\underset{e^{kx}\neq 0}{\Longrightarrow} k^2+pk+q=0 \rightarrow \begin{cases} k_1 & y_1=e^{k_1x} \\ k_2 & y_2=e^{k_2x} \end{cases}$$

مثال) معادله زیر را به روش ضرایب ثابت حل کنید: $y''+5y'+6y=0$

حل)

معادله مشخصه: $k^2+5k+6=0$

$$(k+2)(k+3)=0 \quad \begin{cases} k_1=-2 \\ k_2=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=e^{-2x} \\ y_2=e^{-3x} \end{cases} \rightarrow y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

جواب عمومی ←

* توجه کنید که معادله درجه دو ممکن است دارای ۲ جواب نباشد. لذا حالات خاصی پیش می آید که به شرح زیر است.

$k^2+pk+q=0$ معادله مشخصه

$$1)\ \Delta>0 \rightarrow \begin{cases} k_1 \Rightarrow y_1=e^{k_1x} \\ k_2 \Rightarrow y_2=e^{k_2x} \end{cases}$$

این حالت ها اشاره شده

$$2)\ \Delta=0 \rightarrow k_1= \begin{cases} y_1=e^{k_1x} \\ y_2=xe^{k_1x} \end{cases}$$

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

$$3)\ \Delta<0 \rightarrow \overset{\text{قسمت حقیقی}}{\alpha}+\underset{\text{قسمت موهومی}}{\beta i} \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$

مثال) معادلات زیر را به روش ضرایب ثابت حل نمایید:

1) $y''-2y'+y=0$

معادله مشخصه ← $k^2-2k+1=0$

$$(k-1)(k-1)=0 \Rightarrow k=1 \begin{cases} y_1=e^{x} \\ y_2=xe^{x} \end{cases} \Rightarrow y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$$

$$\Rightarrow y=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\sin 2x$$

جواب عمومی ←

2) $y''+2y'+5y=0 \xrightarrow{\text{حل}} k^2+2k+5=0 \to k=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}$

$\Rightarrow k=\frac{-2\pm\sqrt{+16}\,\sqrt{-1}}{2} \to k=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i \to \begin{cases} y_1=e^{-x}\cos 2x \\ y_2=e^{-x}\sin 2x \end{cases}$

جواب عمومی $\to y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x$ $\qquad i=\sqrt{-1}$

معادله اویلر ← این معادله بصورت $x^2y''+Pxy'+qy=0$ می باشد.

اگر بتوان به نحوی x ها را در این معادله حذف کرد، آنگاه می توان به روش ضرایب ثابت آن معادله را حل کرد.

برای اینکار، از تغییر متغیر مستقل زیر استفاده می کنیم: $z=\ln x$

حال لازم است y' و y'' را برحسب y'_z و y''_z بیابیم.

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=y'\frac{1}{x}$

پاورقی: $\boxed{y'=y'_z\cdot\frac{1}{x}}$ صفر نشود

$\to y''=(y'_z\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}y'_z+(\frac{dy_z}{dz}\cdot\frac{dz}{dx})\frac{1}{x}$

$\to \boxed{y''=-\frac{1}{x^2}y'_z+y''_z\frac{1}{x^2}} \longrightarrow$ صفر نشود

$x^2y''+Pxy'+qy=0 \to x^2(-\frac{1}{x^2}y'_z+y''_z\frac{1}{x^2})+P\cancel{x}y'_z\frac{1}{\cancel{x}}+qy=0$

ادامه در صفحه آینده

معادل این روش بشرط اینکه ضریب x یک باشد از این روش استفاده می‌شود.

$y_z'' + (P-1)y_z' + 9y = 0$

مثال) معادله اویلر زیر را حل کنید.

1) $2x^2y'' + 10xy' + 8y = 0$

حل $\rightarrow x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

$z = \ln x \rightarrow y'' + 4y' + 4y = 0 \rightarrow (k+2)(k+2) = 0 \rightarrow k = -2$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-2z} = e^{-2\ln x} = x^{-2} \\ y_2 = z e^{-2z} = (\ln x) e^{-2\ln x} = (\ln x) x^{-2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = C_1 x^{-2} + C_2 \ln x}$$

جواب عمومی

2) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

حل $\rightarrow z = \ln x \rightarrow y'' - 2y' - 3y \rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \rightarrow (k+1)(k-3) = 0$

$$\begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = e^{-z} = e^{-\ln x} = 1/x \\ y_2 = e^{3z} = e^{3\ln x} = x^3 \end{cases}$$

جواب عمومی $\boxed{y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x^3}$

پایان جلسه پنجم