www.mohandesyar.com

عنـــــــوان

معادلات دیفرانسیل

روشلی :

به کمک این روش می خواهیم یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن

$y''+P(x)y'+q(x)y=R(x)$ بیابیم ابتدا جواب عمومی معادله همگن نظیر آن را می یابیم

فرض کنید که جواب عمومی همگن بصورت روبرو است $y=C_1y_1+C_2y_2$ عمومی همگن

دراینصورت جواب خصوصی ناهمگن عبارت است از: $y=V_1y_1+V_2y_2$ خصوصی ناهمگن

V_1 و V_2 را به کمک فرمول زیر می یابیم.

$$V_1=\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$$V_2=\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$W(y_1,y_2)$ (رونسکی) دترمینان زیر است:

$$W_{(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

جواب خصوصی معادله زیر را با روش پارامتر بیابید $y''+y=\sec x$

حل: $y''+y=0 \quad k^2+1=0$

$$k^2=-1\rightarrow k=\pm\sqrt{-1}=\pm i\begin{cases} y_1=\cos x \\ y_2=\sin x\end{cases}$$

عمومی همگن $=C_1\cos x+C_2\sin x$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2x+\sin^2x=1$$

$$v_1=\int \frac{-\sin x \sec x}{1}\,dx=+\ln \cos x$$

$$v_2=\int \frac{\cos x \sec x}{1}\,dx=\int 1\,dx=x$$

جواب خصوصی $\Rightarrow$ $\boxed{y=(\ln \cos x)\cos x + x\sin x}$

$y''-7y'=6e^{6x}$ جواب خصوصی معادله زیر را به روش عملگر یا اهترسیم بیابید.

$$y''-7y'=0 \rightarrow k^2-7k=0 \rightarrow k(k-7)=0 \begin{cases} k=0 & \rightarrow \\ k=7 & \end{cases} \begin{cases} y_1=e^{0x}=1 \\ y_1=e^{7x} \end{cases}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} 1 & e^{7x} \\ 0 & 7e^{7x} \end{vmatrix}=7e^{7x}$$

$$v_1=\int \frac{-e^{7x}\,6e^{6x}}{7e^{7x}}\,dx=-\frac{6}{7}\int e^{6x}\,dx=-\frac{1}{7}e^{6x}$$

جواب خصوصی $\Rightarrow (-\frac{1}{7}e^{6x})+(-\frac{6}{7}e^{-x})e^{7x}$

$$v_2=\int \frac{6e^{6x}}{7e^{7x}}=\frac{6}{7}\int e^{-x}\,dx=-\frac{6}{7}e^{-x}$$

پاورقی:
$$\int e^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}$$

جواب خصوصی معادله زیر را به روش تغییر پارامتر بیابید. (اویلر ناهمگن)

$x^2y'' + 7xy' + 5y = x$

$* \; z = \ln x \Rightarrow e^{z} = e^{\ln x} \Rightarrow x$

چون متغیر z است دیگر x نیست $(z = \ln x)$

$z = \ln x \rightarrow y'' + 6y' + 5y = e^{z}$ *

$$y'' + 6y' + 5y = 0 \rightarrow k^2 + 6k + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} (k+1) \Rightarrow k = -1 \\ (k+5) \Rightarrow k = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-z} \, * \\ y_2 = e^{-5z} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-z} & e^{-5z} \\ -e^{-z} & -5e^{-5z} \end{vmatrix} \Rightarrow -5e^{-6z} + e^{-6z} \Rightarrow -4e^{-6z}$$

$$v_1 = \int \frac{-e^{-5z}\, e^{z}}{-4e^{-6z}}\, dz = \frac{1}{4}\int e^{2z}\, dz = \frac{1}{8}e^{2z}$$

$$v_2 = \int \frac{e^{-z}\, e^{z}}{-4e^{-6z}}\, dz = -\frac{1}{4}\int e^{6z}\, dz = -\frac{1}{24}e^{6z}$$

جواب خصوصی $\Rightarrow y = e^{-z}\left(\frac{1}{8}e^{2z}\right) + \left(-\frac{1}{24}e^{6z}\right)e^{-5z} = \frac{1}{8}e^{z} - \frac{1}{24}e^{z} = \frac{1}{8}x - \frac{1}{24}x$

جواب خصوصی $\Rightarrow y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{24}x$

تبدیلات لاپلاس

تعریف: فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[0, \infty)$ تعریف شده باشد لاپلاس تابع $f(x)$ که با نماد $L[f(x)]$ نمایش می‌دهیم، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$$

هر عدد بتوان ∞+ صفر می‌شود.

مثال:

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-px} dx = -\frac{1}{p} e^{-px} \Big]_0^\infty = +\frac{1}{p} \rightarrow \boxed{L[1] = \frac{1}{p}}$$

$$L[x] = \int_0^\infty e^{-px} x\, dx \qquad \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-px} \end{cases} \qquad \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{p} e^{-px} \end{cases}$$

جزء به جزء

$$-\frac{1}{p} x e^{-px} + \frac{1}{p} \int e^{-px} dx = -\frac{1}{p} x e^{-px} - \frac{1}{p^2} e^{-px} \Big|_0^\infty = +\frac{1}{p^2}$$

⇐ جدول لاپلاس

تابع	1	x	x^n	e^{ax}	$\sin ax$	$\cos ax$	$\sinh ax$	$\cosh ax$
لاپلاس	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

- قواعد لاپلاس

① تبدیل لاپلاس، یک تبدیل خطی است. یعنی به عبارت دیگر:

$$L[af(x)+bg(x)] = aL[f(x)] + bL[g(x)]$$

مثال) الف) $L[4x^3+e^{2x}] = 4L[x^3]+L[e^{2x}] = 4\left(\frac{6}{p^4}\right) + \frac{1}{p-2}$

ب) $L[2e^{-3x}+\sin 2x] = 2L[e^{-3x}]+L[\sin 2x] \to 2\left(\frac{1}{p+3}\right) + \frac{2}{p^2+4}$

ج) $L[\sin^2 x] = L\left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right] = \frac{1}{2}L[1-\cos 2x] \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right)$

② دستور انتقال اول: $L[f(x)] = f(p) \to L[e^{ax}f(x)] = f(p-a)$

مثال) الف) $L[e^{2x}x^3] = \frac{6}{(p-2)^4}$

ب) * $L[e^{3x}\cos 5x] = \frac{(p-3)}{(p-3)^2+25}$

ج) $L[e^{-2x}\sinh x] = \frac{1}{(p+2)^2-1}$

⚠ توجه ← دستور انتقال اول در محاسبه لاپلاس معکوس نیز کاربردهای فراوانی دارد. به مثال های زیر توجه کنید:

الف) $L^{-1}\left[\frac{1}{(P-4)^2}\right] = x e^{4x}$. * بجای $(P-4)^2$، (P^2) فرض می کنیم پس می شود $\frac{1}{P^2} = x$ طبق تعریف است. e

ب) $L^{-1}\left[\frac{1}{(P-2)^4}\right] = \frac{1}{6} x^3 e^{2x}$ * پرانتز را P فرض می کنیم $(P)^4$، x^3 نیست چون اول 6 دارد پس $x^3 \frac{1}{6}$ را می گذاریم

ج) $L^{-1}\left[\frac{1}{(P-4)^2+9}\right] = \frac{1}{3}\sin 3x\, e^{4x}$ $\frac{1}{P^2+a}$

د) $L^{-1}\left[\frac{(P-2)+2}{(P-2)^2+25}\right] = L^{-1}\left[\frac{P-2}{(P-2)^2+25} + \frac{2}{(P-2)^2+25}\right]$ (Cos است) (Sin است)

$\rightarrow e^{2x}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x\, e^{2x}$

* $\frac{2}{P^2+a^2}$، $\frac{1}{5}\sin 5x$ } پس در صورت 2 می گذاریم $\frac{2}{5}\sin 5x$

Subject :

Year: Month. Date.

ABADANOMRAN

ه) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+6p+13}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)^2+4}\right]=\frac{1}{2}\sin 2x\, e^{-3x}$

نصف ضریب p به توان 2 تا 13. 4 فاصله داریم تا بشود 13 پس + به اضافه +4

$13-9=3^2$

و) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+10p+21}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(p+5)^2-4}\right]=\frac{1}{2}\sinh 2x\, e^{-5x}$

$\frac{1}{p^2-4}=\sinh 2x$ و $\frac{1}{p^2+4}=\frac{1}{2}\sin 2x$

← قواعد لاپلاس

1) خطی $\frac{3}{p^2+9}$

2) دستور انتقال اول $L[e^{2x}\sin 3x]=\frac{3}{(p-2)^2+9}$

3) لاپلاس مشتق

$$\begin{cases} L[(f)']=pL[f]-f(0) \\ L[(f'')]=p^2L[f]-pf(0)-f'(0) \end{cases}$$

← مهم‌ترین کاربرد این قاعده در حل معادلات دیفرانسیل است که بعداً اشاره خواهد شد.

④ لاپلاس انتگرال $L\left[\int_0^x f(x)\,dx\right] = \dfrac{L[f(x)]}{p}$

مثال) الف) $L\left[\int_0^x \cos 4x\,dx\right] = \dfrac{\frac{p}{p^2+16}}{p}$

ب) $L\left[\int_0^x e^{3x} x^2\,dx\right] = \dfrac{\frac{2}{(p-3)^3}}{p}$

مثال) لاپلاس معکوس های زیر را بیابید

الف) $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p(p-1)}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{\frac{1}{p-1}}{p}\right] = \int_0^x e^x\,dx$ یا $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p(p-1)}\right]$

$\Rightarrow L^{-1}\left[\dfrac{-1}{p} + \dfrac{1}{p-1}\right] \Rightarrow -1 + e^x$

ب) $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^3+p}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{\frac{1}{p^2+1}}{p}\right] = \int_0^x \sin x\,dx$

ج) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^3+p^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{p+1}}{p}\right] = \overbrace{\int_0^x\left(\int_0^x e^{-x}dx\right)dx}^{\text{چون دوتا } p \text{ داریم}}$

$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2-p}\right] \xrightarrow{\text{مربع کامل}} L^{-1}\left[\frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right] = e^{\frac{1}{2}x}\, 2\sinh\frac{1}{2}x$

5- مشتق لاپلاس

$$L[xf(x)] = -L[f(x)]'$$

6- انتگرال لاپلاس

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_p^\infty L[f(x)]\,dp$$

مثال) * در این مواقع به x کاری نداریم لاپلاس تقسیم را حساب می‌کنیم و چون x وارد به مشتق منفی قرار می‌دهیم.

$$L[xe^{2x}] = -\left(\frac{1}{p-4}\right)'$$

$$L[xe^{2x}] = -\left(\frac{1}{p-2}\right)'$$

$$L[xe^{4x}\sinh x] = -\left(\frac{1}{(p-4)^2-1}\right)$$

دستور انتقال بخاطر e^{4x}

دستور انتقال است به خاطر x یک منفی به مشتق

$$L\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\int_p^{\infty}\frac{1}{p^2+1}\,dp$$

$$L\left[x^2\sin x\right]=+\left(\frac{1}{p^2+1}\right)''$$ چون x^2 هاست پس دو بار در منفی ضرب کرده و دو بار مشتق می‌گیریم

مثال) لاپلاس معکوس های زیر را بیابید

A) $L^{-1}\left[\ln\frac{p+1}{p-1}\right]=f(x)$

از دو طرف لاپلاس می‌گیریم

قانون پنجم را بکار می‌گیریم

$$L-\left(\ln\frac{p+1}{p-1}\right)'=L\left[f(x)\right]\to-\left(\frac{p-1}{p+1}\times\frac{p-1-(p+1)}{(p-1)^2}\right)=L\left[x f(x)\right]$$

$$L\left[x f(x)\right]=\frac{2}{(p+1)(p-1)}$$

$$L\left[x f(x)\right]=\frac{2}{p^2-1}=2\left(\frac{1}{p^2-1}\right)=L\left[2\sinh x\right]$$

$$x f(x)=2\sinh x\Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{2\sinh x}{x}}$$

پاورقی ← $\ln\frac{p+1}{p-1}$ را در چنین مسئله‌ای یکبار انتگرال و یک بار مشتق می‌گیریم

که لاهیتان به آن می‌خورد (ساده می‌کنیم) اگر مشتق به کار آمد قاعده‌ی [illegible] و اگر انتگرال کار آمد از قاعده ۴ بهره می‌بریم

B) $L^{-1}\left[\operatorname{ArcTan}\left(\frac{1}{p}\right)\right] = f(m)$ ← با مشتق ساده‌تر می‌شود پس قاعده ی را بکار می‌بریم

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{p}\right) = L[f(m)]$

ضرب در m

$-\left(\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{p}\right)\right)' = L[m f(m)]$

مشتق باید حتما   قاعده ی

$-\left(\frac{1}{1+\frac{1}{p^2}} \times \left(-\frac{1}{p^2}\right)\right) = L[m f(m)]$

$-\left(\frac{1}{\frac{p^2+1}{p^2}} \times -\frac{1}{p^2}\right) = L[m f(m)]$

$L[\sin m] = \frac{1}{p^2+1} = L[m f(m)]$

$m f(m) = \sin m \longrightarrow \boxed{f(m) = \frac{\sin m}{m}}$

$u = p^2+1 \to du = 2p$

$\int \frac{2p}{(p^2+1)^2} dp = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = \frac{-1}{p^2+1}$

در اینجا انتگرال ساده‌تر می‌شود پس قاعده ی را بکار می‌بریم

C) $L^{-1}\left[\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right] = f(m) \to \frac{2p}{(p^2+1)^2} = L[f(m)] \to \int_p^{\infty} \frac{2p}{(p^2+1)^2} dp = L\left[\frac{f(m)}{m}\right]$

$-\frac{1}{p^2+1}\Big|_p^{\infty} = L\left[\frac{f(m)}{m}\right] \to L(\sin m) = +\frac{1}{p^2+1} = L\left[\frac{f(m)}{m}\right] \to \frac{f(m)}{m} = \sin m$

$\Rightarrow \boxed{f(m) = m \sin m}$