www.mohandesyar.com

عنـــــــوان

معادلات دیفرانسیل

بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه درس معادلات دیفرانسیل استاد منشور

کتب مرجع: معادلات دیفرانسیل علی اصغر ابراهیمیان

معادلات دیفرانسیل مسعود نیکوکار

معادلات دیفرانسیل سیمونز

فصل اول: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول.

(تفکیک پذیر - همگن - کامل - عامل انتگرال ساز - خطی - کاهش مرتبه -)

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم.

(ضرایب ثابت - روش V - ضرایب نامعین - روش تغییر پارامتر)

فصل سوم: تبدیلات لاپلاس.

(معرفی و قواعد تبدیلات لاپلاس - کاربرد لاپلاس در معادلات)

فصل چهارم: حل معادلات به روش سری ها.

بدست آوردن

* تعریف: به هر معادله شامل x، y و مشتقات y نسبت به x یک معادله دیفرانسیل می‌گوئیم.

مثال: $5x^2y' + \frac{2x}{y} = \ln x$ مرتبه دوم

$y'' + 5y' + 6y = 0$ مرتبه دوم

* هدف: یافتن y (که یک تابع است) می‌باشد.

به دنبال ... هستیم که خود و مشتقاتشان در معادله صدق می‌کنند

به عنوان مثال معادله دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = 0$ را در نظر بگیرید: $\leftarrow y = e^{-2x}$

یکی دیگر از جوابهای این معادله $y = e^{-3x}$ می‌باشد.

به این جوابها، جواب خصوصی معادله می‌گوئیم در حالی که هدف از حل یک معادله دیفرانسیل یافتن تمامی جوابهای معادله می‌باشد که آنها را به صورت یک دسته جواب به عنوان جواب عمومی می‌گوئیم.

مثلاً در مورد مثال بالا جواب عمومی به صورت زیر می‌باشد $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$

معادلات مرتبه اول

1- تفکیک پذیر یا جدایی پذیر: هر معادله دیفرانسیل که پس از ساده کردن به صورت $f(x)dx = g(y)dy$ یا $F(x)dx = g(x)dy$ نوشته شود را تفکیک پذیر می‌گوئیم. برای حل این معادله کافی است از طرفین آن انتگرال بگیریم.

مثال) $(x^2-1)yy' = 2x \to (x^2-1)y\frac{dy}{dx} = 2x$

$\to (x^2-1)y\,dy = 2x\,dx$

$\to y\,dy = \frac{2x\,dx}{(x^2-1)} \to \int y\,dy = \int \boxed{\frac{2x\,dx}{(x^2-1)}}$

مشتق مخرج در صورت

$$\boxed{\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln(x^2-1)+C}$$

مثال) $y' = e^{x+y} \to y' = e^x \cdot e^y \to dy/dx = e^x e^y \quad dy = e^x e^y dx$

$\int dy/e^y = \int e^x dx \to \boxed{e^{-y} = e^x + C}$ یا $\boxed{-\frac{1}{e^y} = e^x + C}$

مثال) $2x(y+1)dx + (x^2-1)dy = 0$

$\to (x^2-1)dy = -2x(y+1)dx \to \frac{(x^2-1)dy}{(x^2-1)(y+1)} = \frac{-2x(y+1)dx}{(x^2-1)(y+1)}$

$\to \frac{dy}{y+1} = \frac{-2x\,dx}{x^2-1}$

$\to \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{-2x\,dx}{x^2-1} \to \boxed{\ln|y+1| = -\ln(x^2-1)+C}$

$\to \ln(y+1) = \ln\frac{1}{(x^2-1)} + \ln C$

$\to \ln(y+1) = \ln\frac{C}{x^2-1} \to y+C = \frac{C}{x^2-1} \to \boxed{y = \frac{C}{x^2-1} - 1}$

مثال $y' = \sin^2(x - y + 1)$

← نکته: این معادله جدای پذیر نیست با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان آن را جدا کرد.

$z = x - y + 1 \rightarrow z' = 1 - y' \rightarrow y' = 1 - z'$

درمعادله $1 - z' = \sin^2 z \rightarrow 1 - \frac{dz}{dx} = \sin^2 z$

$\rightarrow -\frac{dz}{dx} = -(1 + \sin^2) z \rightarrow -\frac{dz}{dx} = -\cos^2 z \rightarrow \frac{dz}{\cos^2 z} = dx$

$\tan z = x + C \rightarrow \boxed{\tan(x - y + 1) = x + C}$ جواب عمومی

$\frac{1}{\sin^2} = -\cot$

$\frac{1}{\cos^2} = \tan$

پایان جلسه اول