www.mohandesyar.com

عنـــــوان

معادلات دیفرانسیل

جلسه هفتم

مثال، جواب خصوصی معادله زیر را به روش ضرایب نامعین بیابید.

$y'' + 2y' + 2y = 4\sin x$

حدس $y = A\sin x + B\cos x$

معادله مشخصه $\Rightarrow k^2 + 2k + 2 = 0 \rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$y' = A\cos x - B\sin x$ $\rightarrow$ معادله جایگذاری $\Rightarrow$

$y'' = -A\sin x - B\cos x$

$$\begin{aligned} \sin x \text{ ضریب: } & -A - 2B + 2A = 4 \\ \cos x \text{ ضریب: } & -B + 2A + 2B = 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} A - 2B = 4 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{5} \\ B = \frac{-8}{5} \end{cases}$$

جواب خصوصی $y \Rightarrow \frac{4}{5}\sin x - \frac{8}{5}\cos x$

مثال) جواب خصوصی معادله زیر را به روش ضرایب نامعین بیابید.

پیاوری

$y''+9y=2\sin 3x$

معادله مشخصه

$k^2+9=0$

$k^2=-9$

$k=\pm\sqrt{-9}$

$k=\pm 3i$

$y_{\text{حدس}} = \cancel{A\sin 3x + B\cos 3x}$

$y_{\text{حدس جدید}} = Ax\sin 3x + Bx\cos 3x$

$y' = A\sin 3x + 3Ax\cos 3x + B\cos 3x - 3Bx\sin 3x$

$y'' = 3A\cos 3x + 3A\cos 3x - 9Ax\sin 3x - 3B\sin 3x$

ادامه $-3B\sin 3x - 9Bx\cos 3x$

چون $3i$ ریشه معادله مشخصه است باید حدس عوض شود

در معادله می‌گذاریم

$-6B=2 \to B=-\frac{1}{3}$

$\to y=-\frac{1}{3}x\cos 3x$

$6A=0 \to A=0$

برای جواب خصوصی در حدس می‌گذاریم

<= روش کاهش مرتبه : (یکی از مباحث فصل اول است که ایشان تدریس نشده)

یکی از روش‌های حل معادله مرتبه دوم، تبدیل آن به یک معادله مرتبه اول است به این روش کاهش مرتبه می‌گوییم.

۱- معادلاتی که شامل y نباشند. $F(x, y', y'')=0$

Subject :

Year: Month. Date.

در این گونه معادلات می‌توان با قرار دادن $y'=p$ مرتبه معادله را کاهش داد

$$\begin{cases} y' = p \\ y'' = p' \end{cases} \qquad F(x, p, p') = 0 \leftarrow$$ معادله مرتبه اول

مثال: معادله‌ی زیر را به روش کاهش مرتبه حل کنید.

$$x^2 y'' = 2xy' + y'^2$$

حل ← جاگذاری می‌کنیم

$$\begin{cases} y' = p \\ y'' = p' \end{cases} \rightarrow x^2 p' = 2xp + p^2$$ ← حال باید نوع معادله را تشخیص دهیم

$$\Rightarrow x^2 p' - 2xp = p^2$$

$$\Rightarrow p' - \frac{2}{x} p = \frac{1}{x^2} p^2$$ برای سادگی در تشخیص، ساده کردیم.

$$p' - \frac{2}{x} p = \frac{1}{x^2} p^2$$ ← حال برنولی مقابل را حل می‌کنیم

$$z = p^{+1-2} = p^{-1} \Rightarrow z' = -1 p^{-2} p'$$

$$-p^{-2}p' + \frac{2}{x} p^{-2} p = \frac{-1}{x^2} p^{-2} p^2 \Rightarrow z' + \frac{2}{x} z = \frac{-1}{x^2}$$ خطی ← حل می‌کنیم

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int \frac{-1}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right)$$

$$z = \frac{1}{x^2}(-x + C) \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{x^2}(-x + C) \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{-x + C}{x^2}$$

ادامه در صفحه بعد

$$P = \frac{x^2}{-x+C} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{-x+C} \Rightarrow y = \int \frac{x^2}{-x+C}\,dx$$

حل اسنثا ل

$$\int \frac{x^2 - C^2 + C^2}{-x+C}\,dx$$

$$-(-x+C) = x + C$$

$$(x-C)(x+C)$$

$$\int \frac{x^2 - C}{-x+C} + \frac{C^2}{-x+C}$$

$$\int -x - C + \frac{C^2}{-x+C}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -x+C \\ \hline -x^2 + Cx & -x - C \\ \hline Cx & \\ -Cx + C^2 & \\ \hline C & \end{array}$$

$$\int -x - C + \frac{C^2}{-x+C}\,dx$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - C_1 x - C^2 \ln(-x + C_1) + C_2$$

مثال) معادله زیر را حل کنید

$$y'' - \frac{1}{x} y' = 0 \xrightarrow{\text{حل}} y' = P$$

$$y'' = P'$$

$$\Rightarrow P' - \frac{1}{x} P = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{P}{x} \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln P = \ln x + \ln C$$

$$\ln P = \ln Cx \rightarrow P = Cx \rightarrow y' = Cx \Rightarrow \begin{cases} y = C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 \\ \boxed{y = C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2} \end{cases}$$

۲) معادلاتی که x ندارند: در این گونه معادلات نیز مجدداً $y'=p$ را انتخاب می‌کنیم

$$F(y, y', y'') = 0 \rightarrow y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p \Rightarrow$$

$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}p\right)$ معادله مرتبه اول (در این معادله y را عملاً تغییر مستقل در نظر گرفته می‌شود).

مثال) معادله زیر را با روش کاهش مرتبه حل کنید

$$yy'' + y'^2 = 0$$

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy}p \Rightarrow yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \Rightarrow yp\frac{dp}{dy} = -p^2$$

$$\Rightarrow \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = -1 \Rightarrow \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = -\ln y + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln p = \ln\frac{1}{y} + \ln c \Rightarrow \ln p = \ln\frac{c}{y} \Rightarrow p = \frac{c}{y} \Rightarrow y' = \frac{c}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int c\,dx \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2}$$

مثال : معادله را به روش کاهش مرتبه حل کنید. $y'' - 9y = 0$

$y' = P$

$y'' = \frac{dP}{dy}P \Rightarrow \frac{dP}{dy}P - 9y = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy}P = 9y \Rightarrow \int P\,dp = \int 9y\,dy$

$\frac{P^2}{2} = \frac{9y^2}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow P^2 = 9y^2 + C \Rightarrow P = \sqrt{9y^2 + C}$

$\Rightarrow y' = \sqrt{9y^2 + C} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{9y^2 + C}$

$\int \frac{dy}{9y^2 + c^2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{3} \operatorname{ArcSinh} \frac{3y}{C_1} = x + C_2$

یادآوری

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$