www.mohandesyar.com

عنــــــوان

معادلات دیفرانسیل

معادله‌های همگن :

تعریف: معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول $m\,dx + n\,dy = 0$ را همگن گوییم هرگاه توابع m و n هر دو همگن و هم درجه باشند. نمونه‌هایی از معادلات همگن:

$$(x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

$$(4x+2y)\,dx - 5x\,dy = 0$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - 2y\,dy = 0$$

$$2x\,dx + 4y\sin(y/x)\,dy = 0$$

← برای حل یک معادله همگن کافی است از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم

$$\boxed{z = y/x \to y = zx \to y' = z'x + z} \Leftarrow$$ حفظ کنید!

معادله همگن زیر را حل کنید:

اول y' $\quad (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0$

$$(x+y) - (x-y)y' = 0 \to y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$z'x + z = \frac{x+zx}{x-zx} = \frac{x(1+z)}{x(1-z)} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$z'x = \frac{1+z}{1-z} - \frac{z}{1} = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

ادامه در صفحه بعد

این انتگرال را به دو انتگرال تجزیه می کنیم

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{1+z^2}{1-z}\rightarrow\int\frac{1-z}{1+z^2}dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{1-z^2}dz-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{1+z^2}dz=\int\frac{dx}{x}$$

۲ برای توازن اضافه می کنیم

$$\rightarrow \mathrm{ArcTan}\,z-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+z^2)=\mathrm{Ln}\,x+C$$

$$\rightarrow \boxed{\mathrm{Arc\,tan}(y/x)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\mathrm{Ln}\,x+C}$$ جواب نهایی

مثال) معادله همگن زیر را حل کنید

$$y'=\frac{y^2+2xy}{x^2}$$

$$z'x+z=\frac{z^2x^2+2xzx}{x^2}=\frac{\cancel{x^2}(z^2+2z)}{\cancel{x^2}}\rightarrow z'x=z^2+2z-z$$

$$\frac{dz}{dx}x=z^2+z\rightarrow\int\frac{dz}{z^2+z}=\int\frac{dx}{x}$$

تجزیه به $z(z+1)$

$$\int\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}dz=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow \mathrm{Ln}\,z-\mathrm{Ln}(z+1)=\mathrm{Ln}\,x+C$$

$$\mathrm{Ln}(y/x)-\mathrm{Ln}(y/x+1)=\mathrm{Ln}\,x+C$$

مثال) معادله همگن زیر را حل کنید. (الف) $(2x\sin \frac{y}{x} + 3y\cos\frac{y}{x})dx$

$(2x\sin y/x + 3y\cos y/x)dx - 3x\cos y/x\, dy = 0$

dx

$(2x\sin y/x + 3y\cos y/x)\frac{dx}{dx} - 3x\cos y/x\, y' = 0$

$\to y' = \frac{2x\sin y/x + 3y\cos y/x}{3x\cos y/x} = 0$

$z'x + z = \frac{2x\sin z + 3zx\cos z}{3x\cos z} \to z'x + z = \frac{2\sin + 3z\cos z}{3\cos z} - z$

$z'x = \frac{2\sin z + 3z\cancel{\cos z} - 3\cancel{z}\cos z}{3\cos z} \to zx = \frac{2}{3}\tan z \to$

$\frac{dz}{dx}x = \frac{2}{3}\tan z \to \int \frac{3}{2}\cot g\, z = \int \frac{dx}{x}$ dz

جواب عمومی

$\frac{3}{2}\ln\sin z = \ln x + c \to \boxed{\frac{3}{2}\ln\sin y/x = \ln x + C}$

یادآوری: $\int \tan x =$ $\int \cot g =$

← گاهی اوقات می‌توان معادلات همگن را با تغییر متغیرات به یک معادله‌ی همگن تبدیل کرد.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال) معادله زیر را در نظر بگیرید $y' = \frac{4x-3y+5}{2x-y+2}$ این معادله همگن

نسبت هر جای که می‌توان با تغییر متغیرها آنرا همگن نمود؟

$$\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases}$$

$Y' = y'$ اگر مشتق بگیریم برابرند

$$Y' = \frac{4(X+\alpha)-3(Y-\beta)+5}{2(X+\alpha)-(Y-\beta)+2}$$

$$Y' = \frac{4X-3Y+(4\alpha-3\beta+5)}{2X-Y-(2\alpha-\beta+2)} \nearrow \begin{cases} 4\alpha-3\beta+5=0 \\ -2)\ 2\alpha-\beta+2=0 \end{cases}$$

$$-\beta+1=0 \rightsquigarrow \beta=1$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}$$

$$Y' = \frac{4X-3Y}{2X-Y} \rightarrow Z'X+Z = \frac{4X-3ZX}{2X-ZX} = \frac{4-3Z}{2-Z}$$

وجه مشترک

ادامه در ابتدای صفحه بعد

$$zx = \frac{4-3z}{2-z} - \frac{z}{1} = \frac{4-3z+2z+z^2}{2-z}$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{z^2-5z+4}{2-z}$$ xها یکطرف و zها یکطرف

$$\int \frac{2-z}{z^2-5z+4}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$(z-1)(z-4)$

چون ضریب z فقط دارد

$$\int \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-4}\,dz = \int \frac{dx}{x} \to \frac{Az-4A+Bz-B}{//}$$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ -4A-B=2 \end{cases} \rightsquigarrow A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{2}{3}$$

$$-3A=1$$

$$\int \frac{1/3}{z-1} + \int \frac{-2/3}{z-4}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{3}\ln(z-1) - \frac{2}{3}\ln(z-4) = \ln x + C$$

جواب

$$-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{y-1}{x+\frac{1}{2}}-1\right) - \frac{2}{3}\ln\left(\frac{y-1}{x+\frac{1}{2}}-4\right) = \ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

← معادله زیر را در نظر بگیرید :

$$y' = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$$

← اگر حاصل ضرایب متغیرها صفر باشد از روش قبلی قابل حل نیست.

← چون حاصل ضرایب متغیرهای این معادله برابر صفر است این معادله به روش قبل حل نمی‌شود
در این گونه مواقع کافی است صورت یا مخرج کسر را به دلخواه به عنوان متغیر در نظر بگیریم

$$y = \frac{x+y+1}{2x+2y+3} \qquad z = x+y+1$$

$$2z = 2x+2y+2$$

$$z'-1 = \frac{z}{2z+1} \qquad 2z+1 = 2x+2y+3$$

$$z' = 1+y' \rightarrow y' = z'-1$$

$$z' = \frac{z}{2z+1} + 1 \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z+2z+1}{2z+1} \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3z+1}{2z+1}$$

$$\int \frac{2z+1}{3z+1}\, dz = \int dx$$

پاورقی

$$\begin{array}{r|l} 2z+1 & 3z+1 \\ -2z-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{3} & \end{array}$$

اگر هم درجه بودند صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم

$$\rightarrow \int \left(\frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{3z+1} \right) dz = \int dx$$

$\frac{2}{3}z + \frac{1}{2}\ln(3z+1) = x + c$

پایان جلسه دوم : $\hookrightarrow \frac{2}{3}(x+y+1) + \frac{1}{9}\ln(3x+3y+4) = x + c$