



[www.mohandesyar.com](http://www.mohandesyar.com)

عنوان

معادلات

دیفرانسیل

Subject :

Year:

Month:

Date:



معادله خطی: هر معادله خطی به صورت  $y' + p(x)y = q(x)$  را یک معادله خطی می‌گویند.

$$y' = \frac{2}{x} y \Rightarrow y = 4x^3 \quad y' + y \ln x = \sin x \quad y' + xy = \tan \frac{x}{x}$$

برای حل معادله خطی سعی می‌کنیم عامل انتگرال ساز را پیدا کنیم. فرم معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$y' + p(x)y = q(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$dx \rightarrow dy + p(x)y - dx = p(x)dx \Rightarrow (p(x)y - q(x))dx + dy = 0$$

$$\frac{5x}{5y} - \frac{5x}{5x} \Rightarrow (-p(x) - 0 = p(x)) \Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx}$$

فرمول کلی عامل انتگرال ساز معادله خطی

$$\mu = e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \text{فرمول کلی عامل انتگرال ساز معادله خطی}$$

مثال معادله خطی زیر را حل کنید:  $y' = \frac{2}{x} y \Rightarrow \sin x$

$$y = e^{\int p(x)dx} \left( \int q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C \right) \leftarrow \text{فرمول}$$

$$y = e^{-\int -\frac{2}{x} dx} \left( \int \sin x e^{\int -\frac{2}{x} dx} dx + C \right) \leftarrow \text{فرمول ساده شده}$$

$$y = e^{2 \ln x} \left( \int \sin x e^{-2 \ln x} dx + C \right) \quad (x) \Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx}$$

$$y = x^2 (\ln x - 2 dx + C) \Rightarrow y = x^2 (\ln x + C)$$



Subject :

Year:

Month:

Date:



$$y' + y \cot u = 5e^{\cos u} \rightarrow y = e^{-\int \cot u du} \left( \int 5e^{\cos u} e^{\int \cot u du} du + C \right)$$

$$y = e^{-\int \cot u du} \left( \int 5e^{\cos u} e^{\int \cot u du} du + C \right)$$

$$y = e^{-\ln \sin u} \left( \int 5e^{\cos u} e^{\ln \sin u} du + C \right)$$

$$y = \frac{1}{\sin u} \left( - \int 5e^{\cos u} \sin u du + C \right)$$

Use  $u = \cos u$

$$y = \frac{1}{\sin u} \left( - \int 5e^u du + C \right)$$

$$y = \frac{1}{\sin u} \left( -5e^{\cos u} + C \right)$$

$$ay' - 2y = a^3 \sin^4 u \rightarrow ay' - 2y = a^3 \sin^4 u \rightarrow y' - \frac{2y}{a} = a^2 \sin^4 u$$

$$y = e^{-\int \frac{2}{a} du} \left( \int a^2 \sin^4 u e^{\int \frac{2}{a} du} du + C \right)$$

$$y = e^{-\frac{2}{a}u} \left( \int a^2 \sin^4 u e^{\frac{2}{a}u} du + C \right)$$

$$y = e^{-\frac{2}{a}u} \left( \int a^2 \sin^4 u e^{\frac{2}{a}u} du + C \right)$$

$$y = a^2 \left( \int \sin^4 u e^{\frac{2}{a}u} du + C \right)$$

$$y = a^2 \left( \int \sin^4 u du + C \right) \Rightarrow y = a^2 \left( -\frac{1}{4} \cos 4u + C \right)$$

$$y' + y = \frac{1}{1+e^{2u}}$$

$$y = e^{-\int 1 du} \left( \int \frac{1}{1+e^{2u}} e^{\int 1 du} du + C \right) \rightarrow y = e^{-u} \left( \int \frac{1}{1+e^{2u}} e^u du + C \right)$$

$$\left( \int \frac{1}{1+u^2} du + C \right) \Rightarrow y = e^{-u} (\text{Arctan } e^u + C)$$



Subject :

Year:

Month:

Date:



$$e^y y' + e^y = 4 \sin x$$

محل

مثال

این معادله خطی است، اما با تغییر متغیر زیر به معادله خطی تبدیل می شود:

$$z = e^y \rightarrow z' = e^y y'$$

$$z' + z = 4 \sin x$$

$$\rightarrow z = e^{-x} \left( \int 4 \sin x e^x dx + C \right)$$

$$\Rightarrow z = e^{-x} \left( \int 4 \sin e^x dx + C \right)$$

$$e^y z = e^{-x} \left( 4 \left( \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C \right) \right)$$

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

معادله برنولی این معادله بصورت

بی پایه توهم کنیم که جدا کنیم. اما  $n=1$  باشد که آنجا معادله فوق هم خطی است.

در غیر این صورت معادله برنولی با تغییر متغیر زیر به یک معادله خطی تبدیل می شود.

$$z = y^{1-n}$$

$$y' + \frac{1}{x} y = x^3 y^3$$

مثال معادله برنولی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x \rightarrow -2y^{-3} y' - 2y^{-3} \frac{1}{x} y = -2y^{-2} x^3 y^3 \\ \text{خطی} \end{cases}$$

$$x = y \rightarrow z = y^{-2}$$

$$\Rightarrow z' = -2y^{-3} y'$$

$$z' - \frac{2}{x} z = -2x^3 \rightarrow z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left( \int -2x^3 e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right)$$

$$z = x^2 (-x^2 + C) \rightarrow y^{-2} = x^2 (-x^2 + C)$$



Subject :

Year:

Month:

Date:

$$ny' - y = y^2 \Rightarrow y' - \frac{y}{2 \ln n} = \frac{y^2}{n}$$

مفاد (فصل)

$$Z = y^{1-n} \rightarrow Z = y^{-1} \rightarrow Z = -y \quad \frac{-2}{1}$$

$$y' y^2 + \frac{y y^2}{2 \ln n} = \frac{1}{n} \quad \text{فصل (فصل)}$$

$$Z = e^{-\int P(m) dm} \left( \int q(m) e^{\int P(m) dm} dm + C \right)$$

فصل

$$Z = e^{-\int \frac{1}{2 \ln n} dm} \left( \int -\frac{1}{n} e^{\int \frac{1}{2 \ln n} dm} dm + C \right)$$

$$u = \ln n \\ du = \frac{1}{n} dm$$

$$Z = e^{-1/2 \ln \ln n} \left( \int -\frac{1}{n} e^{1/2 \ln \ln n} dm + C \right)$$

$$Z = (\ln n)^{-1/2} \left( \int -\frac{1}{n} (\ln n)^{1/2} dm + C \right)$$

$$+ \int \frac{1}{u} du = \ln u$$

$$y' = Z = (\ln n)^{-1/2} \left( -\frac{\ln n^{3/2}}{3/2} + C \right)$$

$$\ln \ln n$$

$$- \int u^{1/2} du = -\frac{u^{3/2}}{3/2}$$

فصل (فصل)