



www.mohandesyar.com

عنوان

معادلات

دیفرانسیل

جلسه ششم (پوش) ۷۲ (بد جواب از روی جواب دیگر)

همانطور که می دانیم برای حل یک معادله همگن به دو جواب خصوصی نیاز داریم. بنابراین یکی از آنها را در اختیار ما قرار دهند. آنگاه دو جواب را به شیوه زیر می توانیم بیابیم که فرقی کنیم. y_1 جواب خصوصی $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد. در این صورت y_2

عبارت استاندارد $y_2 = v y_1$

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx$$

مثال: فرقی کنیم $y_1 = 1$ یک جواب معادله $y'' + \frac{2}{x}y' = 0$ باشد. جواب عمومی $y_1 = 1$ $y_2 = v y_1$ معادله را بیابیم.

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx = \int \frac{1}{1} e^{-2 \ln x} dx = \int x^{-2} dx$$

جواب عمومی $\int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{x} = C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{x}\right)$

مثال: فرقی کنیم $y_1 = x^2$ یک جواب معادله $y'' + 4y' + 4y = 0$ باشد. معادله را بیابیم.

جواب عمومی معادله فوق $y_2 = v y_1$

$$\Rightarrow v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{4}{x} dx} dx = \int \frac{1}{x^4} e^{-4 \ln x} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{x^{-4}}{4}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{x^2}{-4}\right)$$

مسئله ۱: معادله $(1 + m \cot g m) y'' - m y' + y = 0$ را با روش جداسازی متغیرها حل کنید.

پاسخ: جواب عمومی $y_1 = e^{\int \frac{m}{1 + m \cot g m} dm}$

$y_2 = \sqrt{y_1}$

$V = \int \frac{1}{y_1} y_2 = \int \frac{1}{m^2} e^{\int \frac{m}{1 + m \cot g m} dm} dm$

پایه $\rightarrow V = \int \frac{1}{m^2} e^{\ln(\sin m - m \cos m)} dm$

$\rightarrow \int \frac{1}{m^2} (\sin m - m \cos m) dm$

$u = \sin m - m \cos m$

$du = \cos m - \cos m + m \sin m$

$\rightarrow \int \frac{1}{m^2} \sin m dm - \int \frac{1}{m} \cos m dm$

$\int \frac{m dm}{1 - m \cot g m} = \int \frac{m dm}{1 - \frac{m \cos m}{\sin m}}$

$\int \frac{m \sin m dm}{\sin m - m \cos m} = \int \frac{du}{u}$

$\Rightarrow \ln u = \ln(\sin m - m \cos m)$

$\rightarrow \left[-\frac{1}{m} \sin m + \int \frac{1}{m} \cos m dm \right] - \int \frac{1}{m} \cos m dm = -\frac{1}{m} \sin m$

$y_2 = \sqrt{y_1} = \sin m$

$y = C_1 m + C_2 (-\sin m)$

جواب عمومی

مسئله (حل جواب عمومی معادله $y'' + 4y' + 4y = 0$ را بیابید)

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} k = -2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-2m} \\ y_2 = \sqrt{e} e^{-2m} \end{cases}$$

$$\rightarrow y = \int \frac{1}{e^{-4m}} e^{-\int 4 dm} dm$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{e^{-4m}} e^{-4m} dm = \boxed{m}$$

۱. روش قیاسی (تجانسی) در این روش می‌خواهیم یک جواب خصوصی برای یک معادله نامتناهی

$$y'' + py' + qy = R(m)$$

یافته‌ای ثابت زیر بیابیم که در آن $R(m)$ انزاعاً صورت نمایی $(e^{\alpha m})$ یا چند جمله‌ای با ضرایب

$$(a \sin m + b \cos m) \text{ و یا ترکیبی از آن‌ها می‌باشد.}$$

جواب خصوصی مورد نظر برای این معادله از طریق حدس زدن آن بدست می‌آید برای

این عمل تست حالت ایجاد می‌کنیم.

$$\text{۱. اگر } R(m) \text{ نمایی باشد } R(m) = e^{\alpha m}, \text{ در این صورت حدس می‌زنیم } y = Ae^{\alpha m}$$

اگر α ریشه ساده معادله همجنس باشد باید حدس را در m ضرب کنیم.

اگر α ریشه مضاعف معادله همجنس باشد باید حدس را در m^2 ضرب کنیم.

(2) اگر $R(m)$ چند جمله ای باشد $R(m) = am^n + am^{n+1} + \dots + a_0$ حرس $y = A_n m^n + A_{n-1} m^{n-1} + \dots + A_0$

اگر معادله همگن باشد حرس را باید در m ضرب کنیم.
اگر معادله نهمگن باشد حرس را باید در m^2 ضرب کنیم.

(3) اگر $R(m)$ مثلثاتی باشد $R(m) = a \sin \beta m + b \cos \beta m$ حرس $y = A \sin \beta m + B \sin \beta m$

اگر β ریشه معادله همگن باشد حرس را باید در m ضرب کنیم.
بهتر آنکه حرس را \sin و \cos لازم است از آن مشتق گرفته و در معادله قرار دهیم
بسیار قریب وجود در طرفین تساوی را اعتبار قرار دهیم پس هر دو طرف دستاویز باشد
و اگر با عمل آن قریب نامعین حرس همگن می شود.

مسئله (جواب عمومی معادله زیر را با روش قریب نامعین بنویسید): $y'' + 2y' + y = 4m^2 + 1$

حرس $y = Am^2 + Bm + C$ $2A + 4Am + 2B + Am^2 + Bm + C = 4m^2 + 1$

$y' = 2Am + B$ $\left\{ \begin{array}{l} A = 4 \\ 4A + B = 0 \end{array} \right.$

$y' = 2A$ $\left\{ \begin{array}{l} 4A + B = 0 \rightarrow B = -16 \\ 2A + 2B + C = 1 \end{array} \right.$

$y'' + 2y' + y = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B + C = 1 \\ 8 - 32 + C = 1 \end{array} \right.$

$k^2 + 2k + 1 = 0$ $C = 25$

$k = -1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-m} \\ y_2 = me^{-m} \end{cases} \rightarrow y = C_1 e^{-m} + C_2 m e^{-m}$ عمومی

مسئله 1 جواب $y = 4x^2 - 16x + 25$

مسئله 2 $y = C_1 e^x + C_2 x e^{-x} + 4x^2 - 16x + 25$

مسئله 3 $y'' - y' = 2x$ در $y = Ax + B$ فقط جواب عمومی را بنویسید

در $y = Ax^2 + Bx$

در $y' = 2Ax + B \rightarrow y'' = 2A$ در ضرایب

$$\begin{cases} 2A - B = 0 & B = -2 \\ 2A = 2 & A = 1 \end{cases}$$

فرد $A = 1$ فرد $A = -1$

فرد $A = 1$ فرد $A = -1$

مسئله 4 $y = -x^2 - 2x$ فقط جواب عمومی را بنویسید

مسئله 5 $y'' - 7y' + 6y = e^x \rightarrow \alpha = 1$ فقط جواب عمومی را بنویسید

در $y = Ae^{\alpha x}$

در $y = Ae^{\alpha x} \rightarrow y' = Ae^{\alpha x} + Ae^{\alpha x} \rightarrow y'' = Ae^{\alpha x} + Ae^{\alpha x} + Ae^{\alpha x}$

فرد e^x $2A - 7A = 1 \rightarrow -5A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{5}$

فرد xe^x \rightarrow جواب عمومی $y = -\frac{1}{5} x e^x$

و پایان حلیم سیستم