

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تجزیه و تحلیل سیستم ها

تهیه و تنظیم :

مهدی جلمبادانی

jelambadany@iaus.ac.ir

jelambadany@gmail.com

www.SignalS.ir

All Rights Reserved 2008 © by SignalS.ir™

فصل اول

معرفی سیگنال‌های زمان پیوسته و زمان گسسته

۱-۱- تعریف سیگنال

سیگنال تابعی است که حاوی اطلاعاتی درباره رفتار فیزیکی یک سیستم است.

$x[n]$ سیگنال زمان گسسته $x(t)$ سیگنال زمان پیوسته

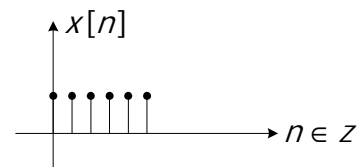
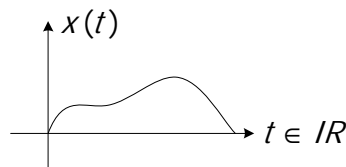
t, n متغیرهای مستقل و x متغیر وابسته یا تابع می‌باشد.

سیستم: مجموعه‌ای از اجزای گرد آمده در کنار هم.

۱-۲- طبقه‌بندی سیگنال‌ها

۱-۲-۱- سیگنال‌های زمان گسسته

۲-۲-۱- سیگنال‌های زمان پیوسته



بدیهی است که با نمونه‌برداری از سیگنال زمان پیوسته می‌توان سیگنال زمان گسسته را بدست آورد.

۱-۳- سیگنال‌های زوج و سیگنال‌های فرد

$$x[n] = x[-n] \quad \text{یا زوج, Even} \quad x(t) = x(-t)$$

$$x[n] = -x[-n] \quad \text{یا فرد, Odd} \quad x(t) = -x(-t)$$

تذکر ۱: سیگنال فرد گسسته بالاجبار در مبدا مختصات مقدار صفر دارد.

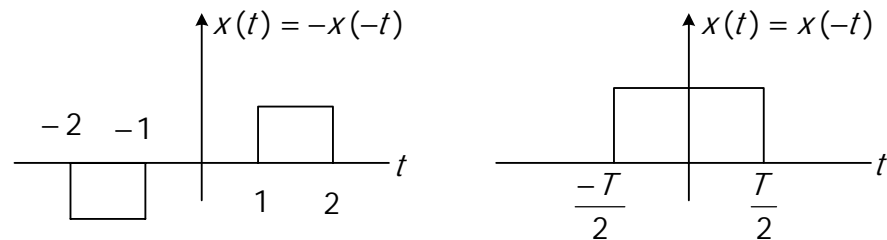
تذکر ۲: هر سیگنال دلخواه را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت:

$$x(t) = \text{Even}(x(t)) + \text{Odd}(x(t))$$

$$\text{Even}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$\text{Odd}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

مثال ۱



۴-۱- سیگنال متناوب

سیگنال متناوب به سیگنالی گفته می‌شود که در بازه‌های زمانی مشخص عیناً تکرار شده باشد.

$$x(t) = x(t+T) = x(t+kT) \quad \omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x[n] = x[n+N] = x[n+kN] \quad \Omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \quad k \in \mathbb{Z}$$

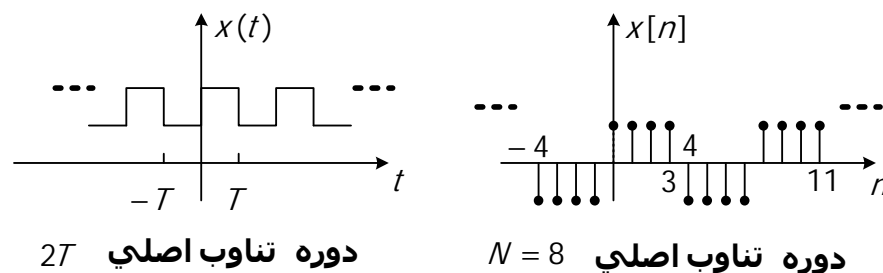
تذکر ۱: بدیهی است که اگر N, T دوره تناوب باشند ۲ برابر و ۳ برابر و ... آن هم دوره تناوب است.

تذکر ۲: کوچکترین دوره تناوب دوره تناوب اصلی است (T در پیوسته، N در گسسته) و فرکانس تعریف شده با کوچکترین

دوره تناوب، فرکانس اصلی است. (ω_0 در پیوسته، Ω_0 در گسسته)

تذکر ۳: دوره تناوب سیگنال زمان پیوسته (T) باید عدد مثبت باشد، درحالی‌که دوره تناوب سیگنال زمان گسسته (N) علاوه بر مثبت بودن بایستی صحیح نیز باشد.

مثال ۲



۵-۱- سیگنال‌های انرژی و توان

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

انرژی

توان متوسط

$$P_{av} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

يك سيگنال به عنوان سيگنال انرژی شناخته می شود اگر و تنها اگر محدود باشد.

۶-۱- عملیات روی متغیر وابسته

$$y[n] = Ax[n] \quad y(t) = Ax(t) \quad (1)$$

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (2)$$

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \quad y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad (3)$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (4)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

۷-۱- عملیات روی متغیر مستقل

۱-۷-۱- شیفت زمانی

$$y[n] = x[n - n_0] \quad y(t) = x(t - t_0)$$

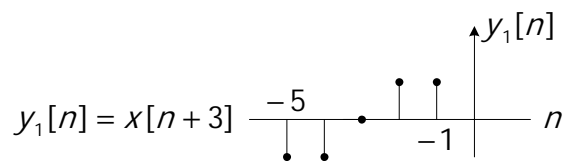
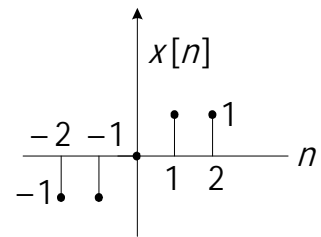
شیفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد $x(t)$ را به اندازه t_0 به سمت راست شیفت می دهیم تا $y(t)$ بدست آید.

شیفت به چپ: اگر $t_0 < 0$ باشد $x(t)$ را به اندازه t_0 به سمت چپ شیفت می دهیم تا $y(t)$ بدست آید.

تذکر ۱: چنانچه $t_0 > 0$ باشد، سیگنال $x(t - t_0)$ از $x(t)$ عقبتر است (به لحاظ زمانی) و چنانچه $t_0 < 0$ باشد، سیگنال $x(t - t_0)$ از $x(t)$ جلوتر است.

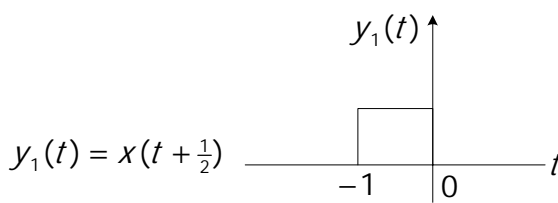
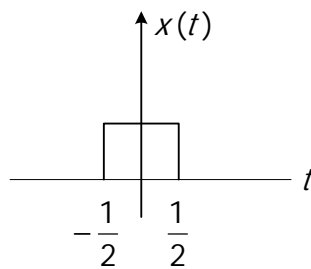
تذکر ۲: در مورد سیگنال های زمان گسسته نیز بسته به اینکه n_0 مثبت و یا منفی باشد سیگنال $x[n]$ را به راست و یا چپ به اندازه n_0 واحد شیفت می دهیم تا $y[n]$ بدست آید.

مثال ۳

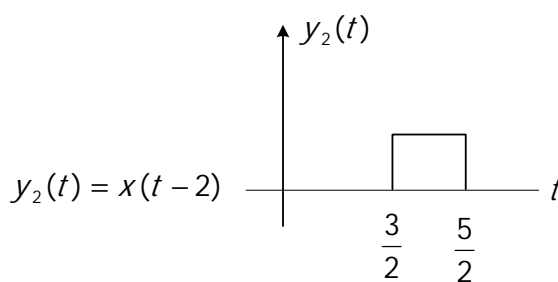


$$y_1[n] = x[n+3]$$

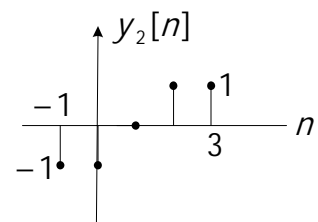
مثال ۴



$$y_1(t) = x(t + \frac{1}{2})$$



$$y_2(t) = x(t - 2)$$



$$y_2[n] = x[n-1]$$

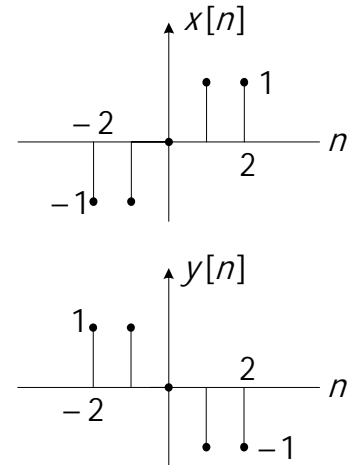
در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي توان سيگنالي را به صورت زوج يا فرد درآورد.

۱-۷-۲- وارون سازي زماني

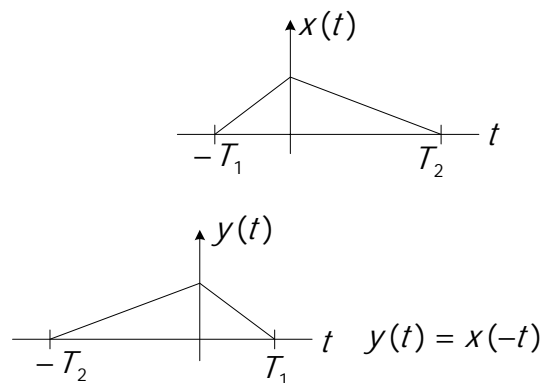
$$y[n] = x[-n] \quad y(t) = x(-t) \quad (2)$$

$x(-t)$ يا $x[-n]$ انعكاس $x(t)$ و يا $x[n]$ نسبت به محور قائم هستند.

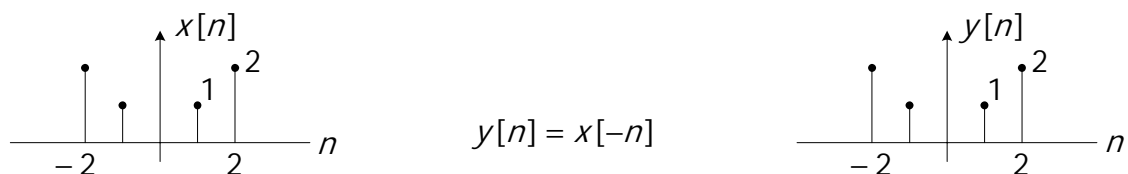
مثال ۵)



مثال ۶)



مثال ۷)



برای سیگنالی که نه زوج و نه فرد است واریون زمانی آن نه فرد و نه زوج است. اما برای سیگنال زوج واریون زمانی زوج است ولی برای سیگنال فرد با توجه به خاصیت $x[n] = -x[-n]$ واریون زمانی آن $-x[n]$ است.

۱-۷-۳- تغییر مقیاس زمانی

$$y[n] = x\left[\frac{1}{k}n\right] \quad ; k \in \mathbb{Z} \quad \text{یا} \quad y[n] = x[kn] \quad y(t) = x(at) \quad ; a \in \mathbb{R} \quad (3)$$

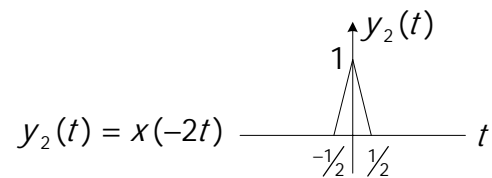
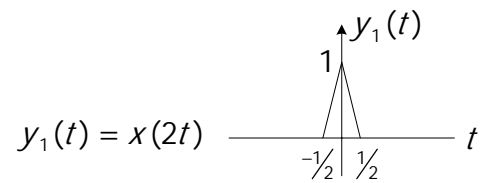
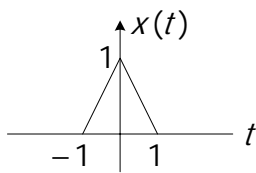
الف) اگر $|a| > 1$ باشد $y(t)$ فشرده شده سیگنال $x(t)$ خواهد بود.

ب) اگر $|a| < 1$ باشد $y(t)$ باز شده سیگنال $x(t)$ خواهد بود.

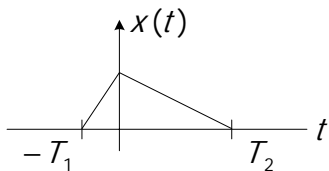
ج) اگر $a < 0$ باشد باید بعد از تغییر مقیاس، واریون زمانی انجام داد.

تذکر: در زمان پیوسته ماهیت سیگنال عوض نمی‌شود، اما در زمان گسسته ماهیت سیگنال تغییر می‌کند و سیگنال جدیدی بدست می‌آید.

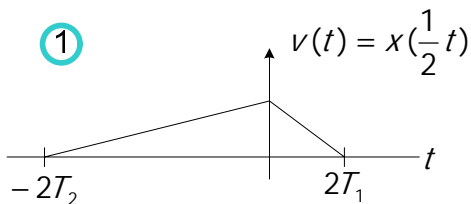
مثال ۸)



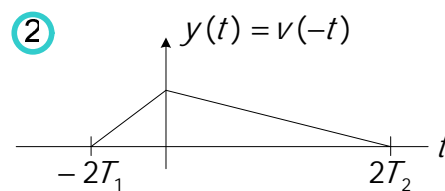
مثال ۹



$$y(t) = x\left(-\frac{1}{2}t\right)$$

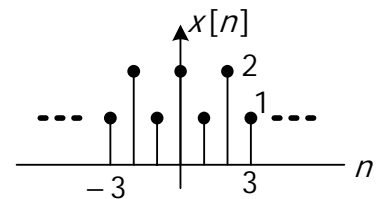


وارون زمانی



مثال ۱۰

$$y_1[n] = x[2n], \quad N = 2$$



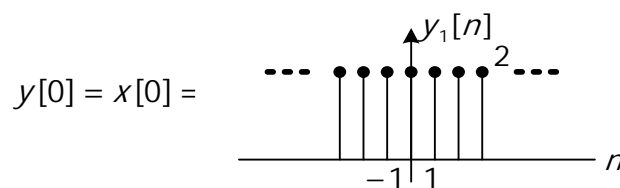
برای حل اینگونه مسائل به روش زیر عمل می‌کنیم:

با جایگذاری n در فرمول $y[n]$ مقادیر بدست آمده برحسب $x[n]$ می‌باشند.

⋮

$$y[-1] = x[-2] = 2$$

$$y[1] = x[2] = 2$$



$$y[0] = x[0] =$$

$$y[2] = x[4]$$

⋮

دوره تناوب سیگنال جدید $x[2n]$ برابر $N = 1$ است.

تذکر: $y[n] = x[kn]$ نسبت به $x[n]$ فشرده شده، که برخی از مقادیر را از دست می‌دهد.

$$y_2[n] = x\left[\frac{1}{2}n\right] \quad \text{مثال ۱۱}$$

⋮

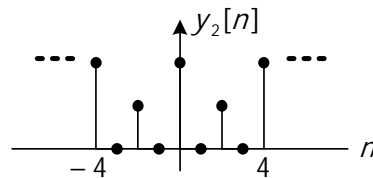
$$y[-1] = 0$$

$$y[0] = x[0] = 2$$

$$y[1] = x\left[\frac{1}{2}\right] = 0$$

$$y[2] = x[1] = 1$$

⋮



دوره تناوب سیگنال جدید برابر $N = 4$ است.

تذکر: $y[n] = x\left[\frac{1}{k}n\right]$ نسبت به $x[n]$ باز شده که در نتیجه تعدادی صفر به $y[n]$ اضافه خواهد شد. بدین ترتیب ماهیت سیگنال گسسته در اثر تغییر مقیاس زمانی تغییر می‌کند.

تذکر: اگر سیگنال زمان پیوسته و یا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغییر مقیاس زمانی در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سیگنال جدید کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سیگنال جدید افزایش می‌یابد.

۴-۷-۱- رسم سیگنال به روش منظم

$$y(t) = x(at - b)$$

$$x(t) \rightarrow v(t) = x(t - b)$$

$$v(t) \rightarrow y(t) = v(at) = x(at - b)$$

4)

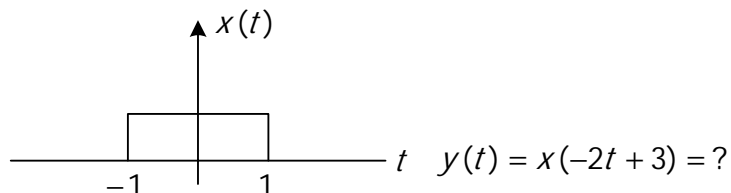
$$y[n] = x[kn - n_0] \quad \left(x\left[\frac{1}{k}n - n_0\right]\right)$$

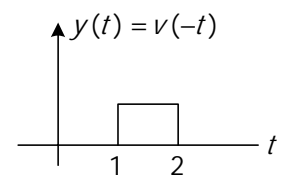
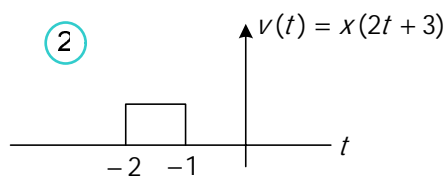
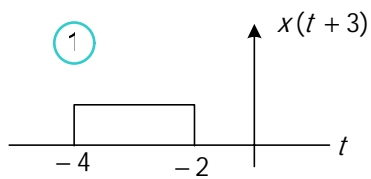
$$x[n] \rightarrow v[n] = x[n - n_0]$$

$$v[n] \rightarrow y[n] = v[kn] = x[kn - n_0] \quad \left(x\left[\frac{1}{k}n - n_0\right]\right)$$

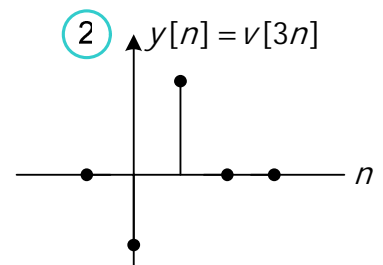
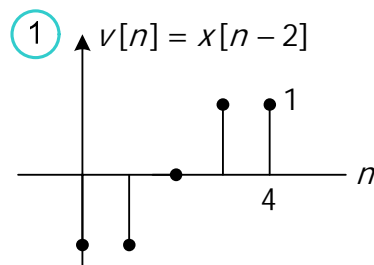
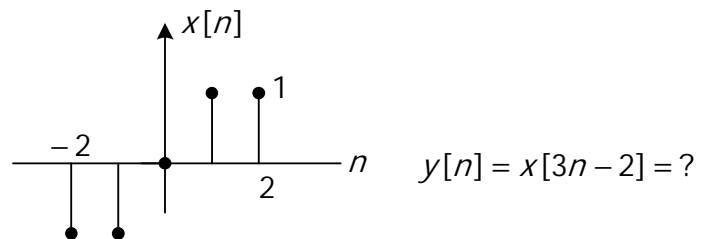
4)

مثال ۱۲



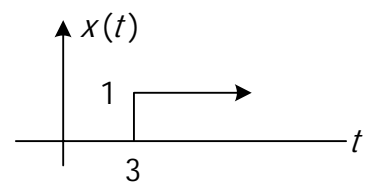


مثال ۱۳

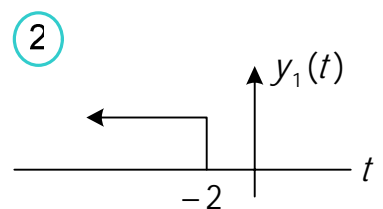
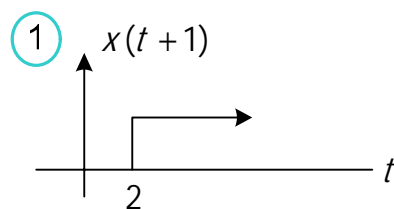


مثال ۱۴

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$

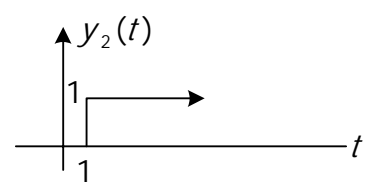
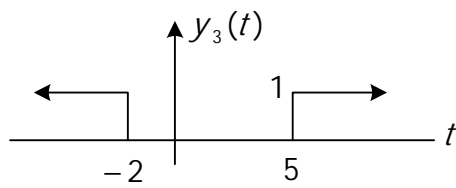


الف) $y_1(t) = x(1-t)$



ب) $y_2(t) = x(3t)$

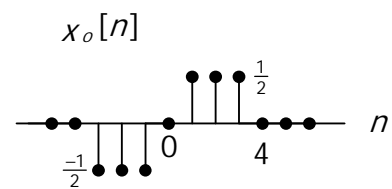
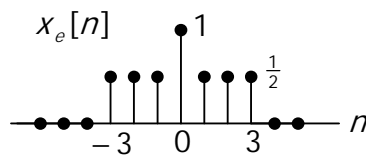
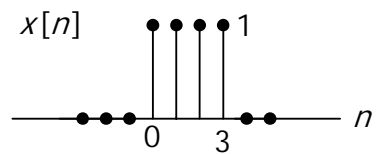
ج) $y_3(t) = x(1-t) + x(t-2)$



$$x[n] = \begin{cases} 1 & n=0,1,2,3 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

مثال ۱۵) مطلوب است قسمت زوج و فرد سیگنال زیر؟

$$\text{میدانیم} \quad \begin{cases} x_e = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \\ x_o = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \end{cases}$$

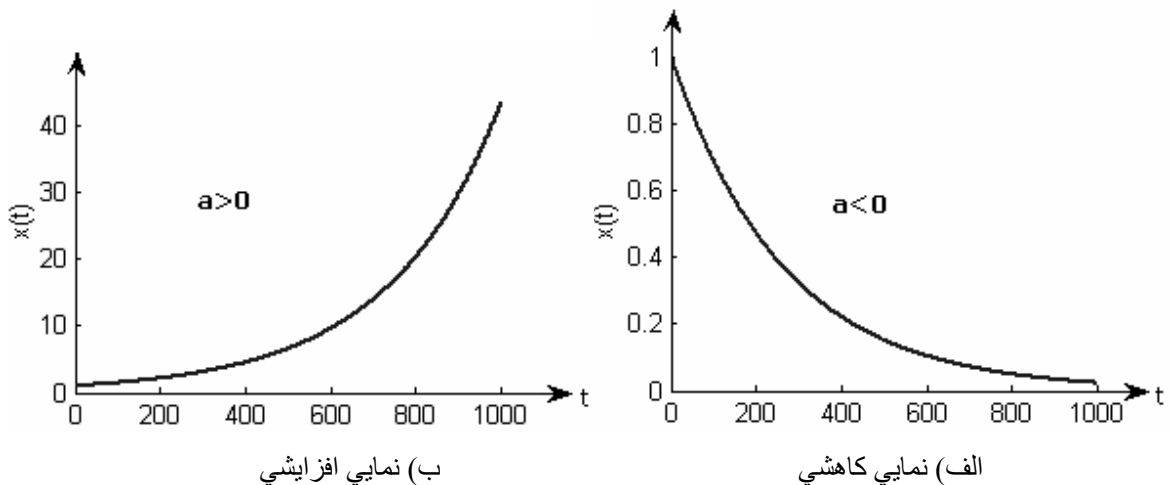


۸-۱- معرفی سیگنال‌های مهم

در این قسمت چند سیگنال اساسی زمان پیوسته و زمان گسسته را معرفی می‌کنیم. این سیگنال‌ها نه تنها به دفعات پیش می‌آیند بلکه توسط آنها می‌توان سیگنال‌های پیچیده‌ای را فرموله و تولید کرد. مهم‌ترین کاربرد آنها در آزمایشگاه مشخص می‌شود.

۱-۸-۱- سیگنال نمایی

$$x(t) = Be^{at} \quad \text{زمان پیوسته}$$

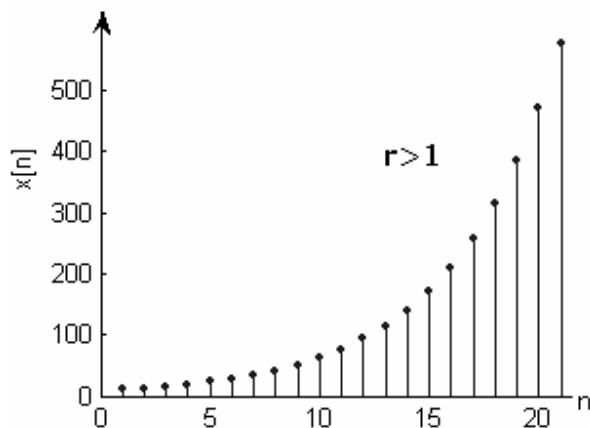


با فرض اینکه $a, B \in \mathbb{R}$ باشند، با توجه به مثبت و یا منفی بودن a سیگنال نمایی به یکی از دو فرم افزایشی و یا کاهشی خواهد بود.

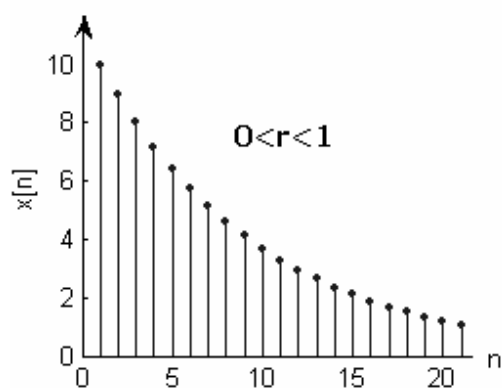
تذکر: چنانچه دامنه سیگنال خروجی سیستمی با افزایش زمان به طور نامحدود زیاد شود، سیستم تحت بررسی به عنوان سیستم ناپایدار شناخته می‌شود.

$$x[n] = B(r^n) \quad \text{سگنال زمان گسسته}$$

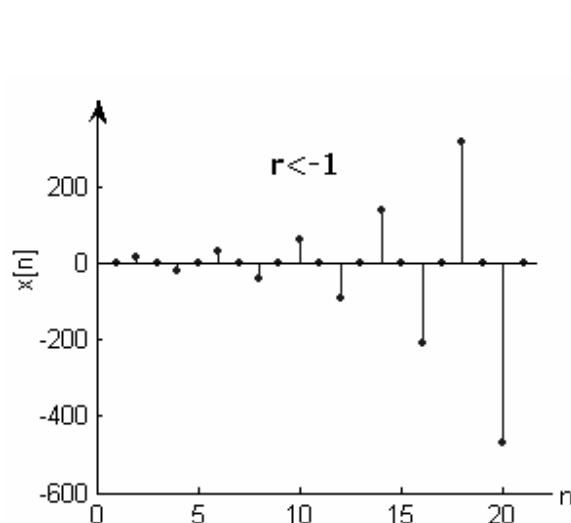
سیگنال زمان گسسته نمایی بسته به مقادیر مختلف r چهار حالت می تواند داشته باشد.



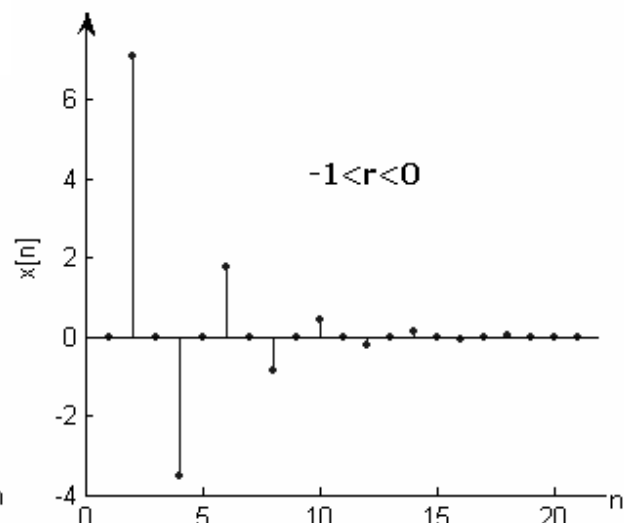
الف) نمایی افزایشی



ب) نمایی کاهشی



ج) نوسانی افزایشی



د) نوسانی کاهشی

۱-۸-۲- سیگنال سینوسی

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{و} \quad x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{زمان پیوسته}$$

تذکر: سیگنال سینوسی همواره متناوب و با دوره تناوب T است.

مثال (۱)

$$x(t) = \cos\left(\frac{1}{6}t\right) \quad \text{الف)}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

$$x(t) = \cos\left(\frac{8\pi}{31}t\right) \quad (\text{ب})$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}$$

$$\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \quad \text{و} \quad x[n] = A \cos(\Omega n + \varphi) \quad \text{سیگنال زمان گسسته}$$

تذکر: سیگنال زمان گسسته سینوسی به شرطی متناوب است که بتوان $N \in \mathbb{Z}^+$ را بدست آورد به نحوی که $x[n] = x[n+N]$ گردد. (این سیگنال برخلاف سیگنال زمان پیوسته سینوسی بعضاً متناوب نیست.)

$$A \cos(\Omega n + \varphi) = A \cos(\Omega n + \Omega N + \varphi) \rightarrow \Omega N = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\Omega}, N \in \mathbb{Z}^+$$

(مثال ۲)

(الف)

$$x[n] = \cos\left[\frac{2\pi}{12}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{12}} = 12k = 12, \quad (k=1)$$

(ب)

$$x[n] = \cos\left[\frac{8\pi}{31}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}k = 31, \quad (k=4)$$

(ج)

$$x[n] = \cos\left[\frac{1}{6}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{1}{6}} = 12k\pi$$

متناوب نیست

۱-۸-۳- سیگنال نمایی مختلط

زمان پیوسته $x(t) = B e^{-j\omega t}$ یا $x(t) = B e^{j\omega t}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad x(t) = B e^{j\omega t} = B \cos(\omega t) + jB \sin(\omega t)$$

زمان گسسته $x[n] = B e^{-j\Omega n}$ یا $x[n] = B e^{+j\Omega n}$

$$x[n] = B e^{j\Omega n} = B \cos(\Omega n) + jB \sin(\Omega n) \quad N = \frac{2k\pi}{\Omega}, \quad N \in \mathbb{Z}^+, K \in \mathbb{Z}$$

تذکر ۱: سیگنال زمان گسسته نمایی مختلط $x[n] = B e^{+j\Omega n}$ می‌تواند در زمان متناوب با دوره تناوب N باشد.

تذکر ۲: سیگنال زمان گسسته نمایی مختلط $x[n] = Be^{+j\Omega n}$ علاوه بر اینکه در زمان نسبت به n می‌تواند متناوب باشد، در فرکانس نیز نسبت به Ω همواره متناوب است.

$$e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j(\Omega+4\pi)n} = e^{j(\Omega+2m\pi)n}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

تذکر ۳: اگر سیگنال به صورت حاصلضرب بود در صورت امکان باید به حاصل جمع دو سیگنال تبدیل شود و دوره تناوب هر کدام را جداگانه به دست آورد. سپس دوره تناوب مشترک را به دست می‌آوریم.

مثال ۳

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t} \quad (\text{الف})$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \dots \Rightarrow T = 2\pi$$

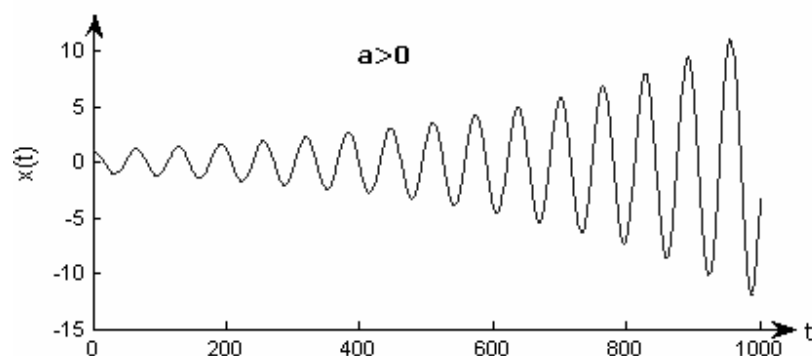
$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n} \quad (\text{ب})$$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3k = 3 = 6 = 9 = \dots = 24, \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8k}{3} = 8 = 16 = 24 = \dots, \quad N = 24$$

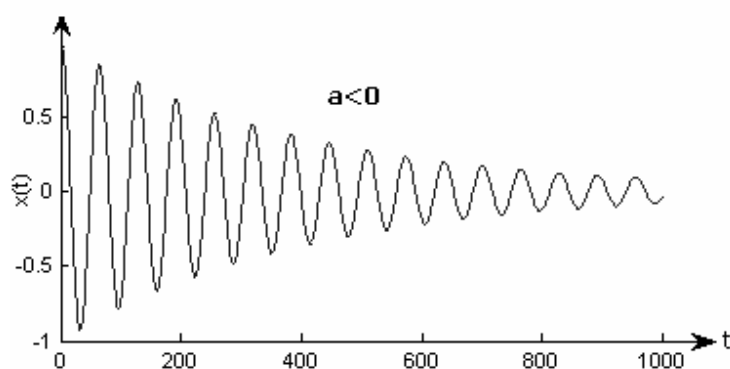
۱-۸-۴- سیگنال سینوسی میراثونده

$$x(t) = Be^{at} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{زمان پیوسته}$$

تذکر: سیگنال نمایی متناوب نبوده و پس از ضرب آن در هر عبارتی باعث می‌شود که سیگنال نهایی متناوب نباشد.

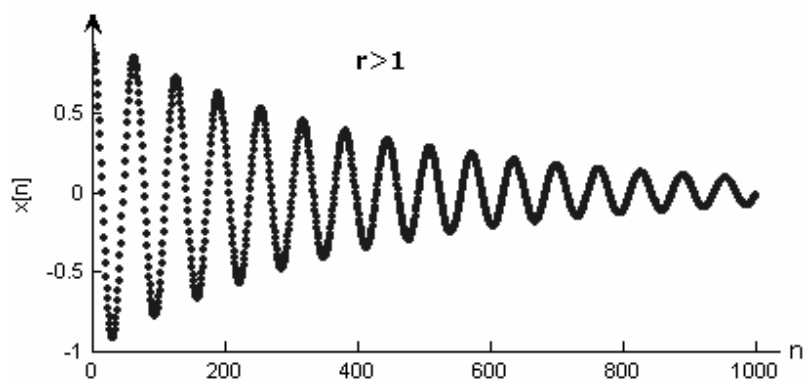


الف) سیگنال سینوسی میراثونده افزایشی

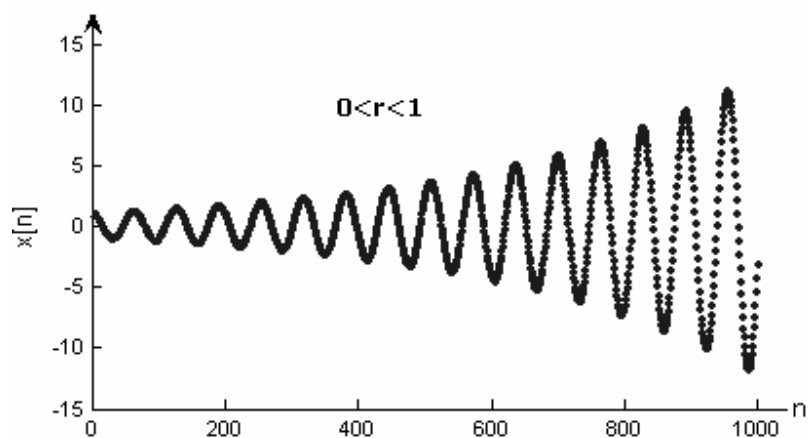


ب) سیگنال سینوسی میراثونده کاهشی

$$x[n] = B(r^n) \cos[\Omega n + \varphi] \quad \text{زمان گسسته}$$



الف) سیگنال سینوسی میراثونده کاهشی

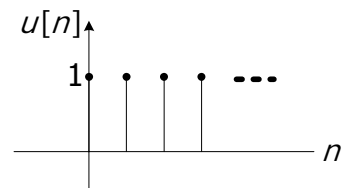
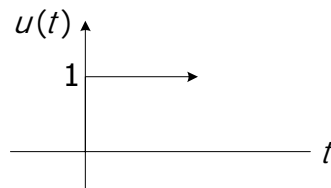


ب) سیگنال سینوسی میراثونده افزایشی

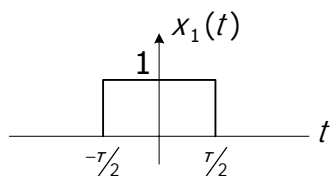
۹-۱-توابع ویژه

۹-۱-۱-تابع پله واحد

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{زمان پیوسته} \quad u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{زمان گسسته}$$

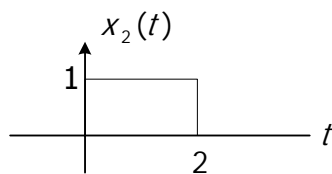


تذکر: توابعی که فرم هندسی دارند را می‌توان بر حسب تابع پله بیان کرد:
(مثال ۴)



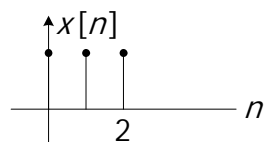
$$x_1(t) = u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$$

(الف)



$$x_2(t) = u(t) - u(t - 2)$$

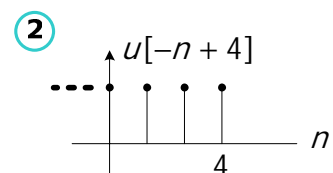
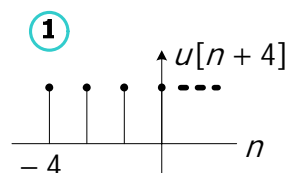
(ب)



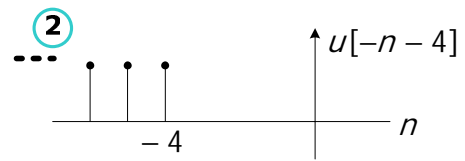
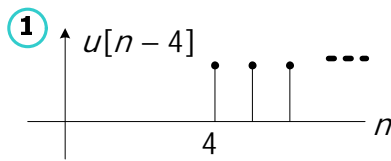
$$x[n] = u[n] - u[n - 3]$$

(ج)

$$u[-n + 4] \quad \text{(د)}$$



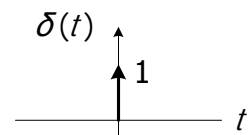
$$u[-n - 4] \quad \text{(ن)}$$



۱-۹-۲- تابع ضربه

زمان پیوسته

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{مقدار/رویزه} & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{-1} \delta(t) dt = 0$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} \delta(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau$$

$$\lambda + t_0 = \tau$$

خواص:

(۱) بیان توابع چند ضابطه‌ای با یک ضابطه:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t)u(t)$$

مثال ۵

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 2 \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t)u(t-2)$$

(۲) خاصیت غربالی تابع ضربه

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \delta(t)$$

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

(۳) انتگرال کانولوشن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \lambda) d\lambda = x(t)$$

(۴) زوج بودن تابع ضربیه

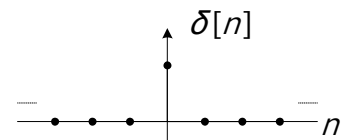
$$\delta(t) = \delta(-t)$$

(۵)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

زمان گسسته

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربیه واحد

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{m=n}^{-\infty} \delta[m] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

$$u[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-n_0-k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$\delta[n] = u[-n] - u[-n-1]$$

تابع ضربیه چون تابعی زوج است پس هر دو رابطه بالا قابل قبول است.

- خواص:

(۱) بیان توابع چند ضابطه‌ای با یک ضابطه

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \leq -2 \\ 0 & o.w \end{cases} = x[n] u[-n-2]$$

(۲) خاصیت غربالی تابع ضربیه

* این رابطه را اثبات کنید.

$$y[n] = x[n] \cdot \delta[n] = x[0]\delta[n]$$

مثال 6:

$$y[n] = x[n+2]\delta[n-4] = x[6]\delta[n-4]$$

۳) انتگرال کانولوشن

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] = x[n]$$

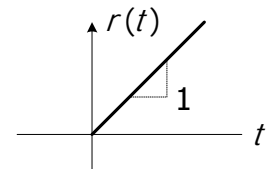
۴) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta[n] = \delta[-n]$$

۱-۹-۳- تابع شیب

زمان پیوسته

$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



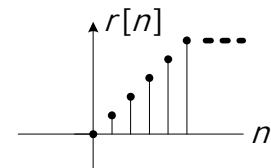
رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$r(t) = t u(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

زمان گسسته

$$r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



رابطه بین تابع شیب و پله واحد

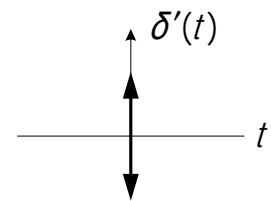
$$r[n] = n u[n]$$

$$u[n] = ?$$

۱-۹-۴- تابع دوبلت واحد

زمان پیوسته

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



خواص:

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

خاصیت (۱)

اثبات:

$$(x(t) \cdot f(t))' = x'(t)f(t) + x(t)f'(t)$$

$$\text{if } f(t) = \delta(t)$$

$$\downarrow = x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) + x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t)$$

$$(x(t)\delta(t))'$$

$$=$$

$$(x(0)\delta(t))'$$

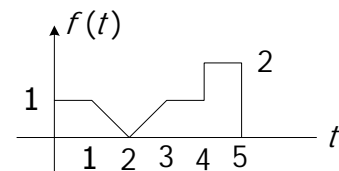
$$=$$

$$x(0)\delta'(t) = x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \Rightarrow x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta'(t-\lambda)d\lambda = x'(t)$$

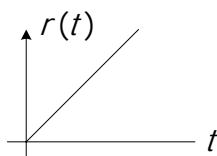
خاصیت (۲)

مثال (۷) مطلوب است بیان $f(t)$ بر حسب توابع ویژه ؟

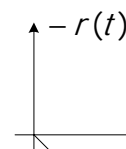


از منتهی الیه سمت چپ شروع به نوشتن می‌کنیم. هر جا که شکل تغییر کند یعنی تابع عوض شده. اولین کاری که انجام می‌دهیم ضریب زاویه کلیه خطها را بدست می‌آوریم :

در فاصله $1 \leq t \leq 2$ شکل تغییر کرده و دارای شیب به سمت پایین است. در فاصله $2 \leq t \leq 3$ نیز شکل دوباره تغییر می‌کند.



$$\begin{matrix} (2,0) \\ (3,1) \end{matrix} \Rightarrow m = 1$$



$$\begin{matrix} (1,1) \\ (2,0) \end{matrix} \Rightarrow m = -1$$

$$f(t) = u(t) - r(t-1) + 2r(t-2) - r(t-3) + u(t-4) - 2u(t-5)$$

$$f'(t) = \delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4) - 2\delta(t-4)$$

مثال ۸) اگر $f(t) = a e^{-t}$ هر يك از توابع زیر را همراه با مشتق و انتگرالشان رسم کنید.

$$f_1(t) = f(t) u(t) \quad \text{الف)}$$

حل

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= f'(t) u(t) + f(t) u'(t) \\ &= f'(t) u(t) + f(0) \delta(t) + -a e^{-t} u(t) + a \delta(t) \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} a e^{-t} dt = -a e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = a$$

$$f_2(t) = f(t-1) u(t-2) \quad \text{ب)}$$

$$f_3(t) = f(t-1) u(t-1) \quad \text{ج)}$$

$$f_4(t) = f(t-1) u(t) \quad \text{د)}$$

سیستم و تعریف آن :

پروژه‌ای که باعث تغییر و تحول در یک سیگنال می‌شود .
مجموعه‌ای منظم که به کمک یکدیگر هدف مشخصی را برآورده می‌سازد.
بیان روابط بین خروجی و ورودی در یک سیستم :

زمان پیوسته

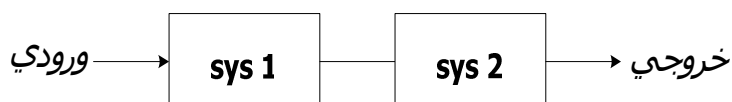
(۱) با استفاده از معادلات دیفرانسیل (۲) تابع تبدیل

زمان گسسته

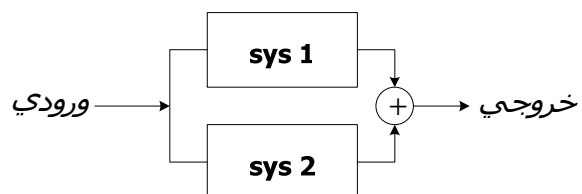
(۱) معادلات تفاضلی (۲) تابع تبدیل

۱-۱-۱- تقسیم‌بندی سیستم‌ها

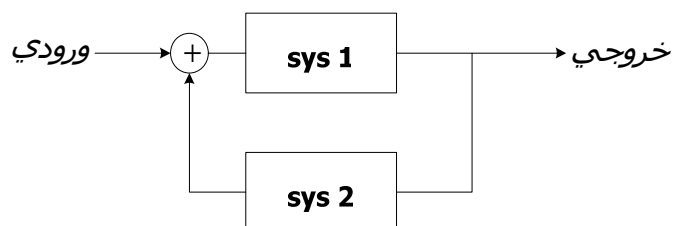
۱-۱۰-۱- اتصال سری:



۲-۱۰-۱- اتصال موازی:



۳-۱۰-۱- اتصال فیدبک:



۱-۱-۱- خواص سیستم‌ها

۱-۱۱-۱- حافظه

سیستم بدون حافظه است اگر خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر سیستم با حافظه است اگر خروجی به مقادیر گذشته ورودی وابسته باشد.

مثال ۱)

بدون حافظه	(د) $i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	الف) بدون حافظه $y[n] = 2x[n] + x^2[n]$
با حافظه	(ن) $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\lambda) d\lambda$	ب) با حافظه $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$
با حافظه	و) $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	ج) با حافظه $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$

۱-۱۱-۲- پایداري (BIBO)

سیستمی پایدار است که به ازای ورودی محدود خروجی محدود بدهد.

$$|x(t)| \leq M_x < \infty, \forall t \Rightarrow |y(t)| \leq M_y < \infty, \forall t$$

تذکر ۱: اگر سیستمی با ورودی محدود و خروجی نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است.

تذکر ۲: اگر سیستمی با ورودی نامحدود و خروجی نامحدود داشتیم هیچ صحبتی نمی‌توان راجع به این سیستم کرد.

¹ Bounded Input Bounded Output

مثال ۲) $y(t) = tx(t)$

$x(t) = u(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$y(t) = tx(t) = r(t)$ و تابعی نامحدود است پس سیستم ناپایدار است.

مثال ۳) $y(t) = e^{x(t)}$

$|y(t)| = |e^{x(t)}| = e^{x(t)} \leq M_y < \infty$

چون $e^{x(t)}$ عدد می‌شود پس باز هم محدود است. بنابراین با توجه به تعریف ریاضی این سیستم پایدار است.

مثال ۴)

$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$

اگر $x[n]$ در همه لحظات محدود باشد شیفته‌هایی آن هم محدود است پس سیستم پایدار است

مثال ۵)

$$y[n] = r^n x[n] \begin{cases} |r| > 1 \Rightarrow |r^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty : x[n] = u[n] \rightarrow y[n] \rightarrow \infty \Rightarrow \text{ناپایدار} \\ |r| < 1 \Rightarrow |r^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{پایدار} \end{cases}$$

مثال ۶)

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \rightarrow x[n] = u[n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = r[n]$

ناپایدار

۱-۱۱-۳- علیت (causality)

سیستمی علی است که خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه یا لحظات قبل بستگی داشته باشد به عبارتی خروجی سیستم به آینده ورودی بستگی ندارد.

تذکر ۱: سیستم بدون حافظه مطمئناً علی است.

تذکر ۲: برای سیستم علی شرط سکون برقرار است.

شرط سکون

$x(t) = 0; \quad t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0; \quad t \leq t_0$

$$x_1(t) = x_2(t); \quad t \leq t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t); \quad t \leq t_0$$

(مثال ۷)

(الف) $y(t) = x(t+1)$ غیر علی (ب) $v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$ علی

(ج) $i_c(t) = \frac{dv_c(t)}{dt}; \quad \frac{dv_c}{dt} = \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_c(t) - v_c(t - \Delta t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_c(t + \Delta t) - v_c(t)}{\Delta t} \end{cases}$

با توجه به این که برای مشتق دو تعریف وجود دارد چنانچه از دومین تعریف برای تعیین جریان خازن استفاده نمائیم سیستم مذکور غیر علی خواهد بود.

(د) $y(t) = x(t) \cos(t+1)$

خروجی فقط به زمان حال ورودی بستگی دارد و از طرفی چون سیستم بدون حافظه است پس حتما علی است.

(ه) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + x[n-1] + \dots$ علی

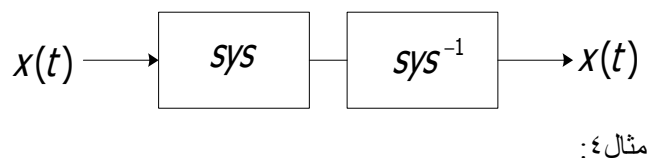
(ن) $y[n] = x[-n] \quad n = -1 \Rightarrow y[-1] = x[1]$ غیر علی

(و) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ علی

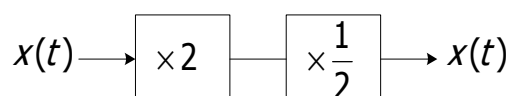
(ی) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$ غیر علی

۱-۱۱-۴- معکوس پذیری

سیستمی معکوس پذیر است که به ازای ورودی‌های متمایز همواره خروجی‌های متمایز داشته باشد. اگر سیستمی معکوس پذیر باشد می‌توان به صورت زیر نشان داد:



(الف) $y(t) = 2x(t)$ معکوس پذیر

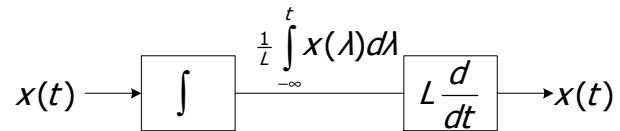


معکوس ناپذیر

$$y(t) = x^2(t) \quad \begin{cases} x(t) = 1 \\ x(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 1 \quad (\text{ب})$$

باید ورودی بدهیم که خروجی را از حالت پایدار خارج نکند.

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \quad (\text{ج})$$

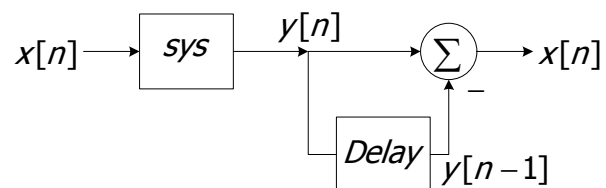


$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{ن})$$

چون به ازای همه ورودی‌های ثابت خروجی صفر می‌شود پس معکوس‌پذیر نیست.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (\text{و})$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$



۵-۱۱-۱- نامتغیر با زمان (TI) Time invariant

اگر رفتار و مشخصه‌های سیستم در طی زمان ثابت باشد. به آن سیستم، نامتغیر با زمان گفته می‌شود.

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y(t) \\ x(t - t_0) &\longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y(t - t_0) \end{aligned} \quad (\text{مثال ۵})$$

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (\text{الف})$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys1}} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

با توجه به تعریف اگر شیفت یافته ورودی را به سیستم اعمال کنیم خروجی هم به همان اندازه شیفت پیدا کند، سیستم مورد نظر نامتغیر با زمان خواهد بود.

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys1}} \longrightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau \stackrel{t-t_0=\lambda}{=} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda$$

$$\text{خروجی} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

نامتغیر با زمان

$$y(t) = \frac{1}{R(t)} x(t) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys2}} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{R(t)} x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys2}} \longrightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{R(t)} z(t)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{R(t)} x(t - t_0) \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{1}{R(t - t_0)} x(t - t_0)$$

متغیر با زمان

$$y(t) = t x(t) \quad (\text{ج})$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys3}} \longrightarrow y(t) = t x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys3}} \longrightarrow \text{خروجی} = t z(t)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = t x(t - t_0) \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$\stackrel{?}{=} (t - t_0) x(t - t_0)$$

متغیر با زمان

$$y(t) = x(at) \quad (\text{د})$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys4}} \longrightarrow y(t) = x(at)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys4}} \longrightarrow \text{خروجی} = z(at)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = x(at - t_0) \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$\stackrel{?}{=} x(a(t - t_0))$$

متغیر با زمان

$$y[n] = r^n x[n] \quad (ن)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{sys5}} \longrightarrow y[n] = r^n x[n]$$

$$z[n] \longrightarrow \boxed{\text{sys5}} \longrightarrow \text{خروجی} = r^n z[n]$$

$$z[n] = x[n - n_0] \Rightarrow \text{خروجی} = r^n x[n - n_0] \stackrel{?}{=} y[n - n_0]$$

$$\stackrel{?}{=} r^{n-n_0} x[n - n_0]$$

متغیر با زمان

$$y[n] = nx[n] \quad (ه)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{sys6}} \longrightarrow y[n] = n x[n]$$

$$z[n] \longrightarrow \boxed{\text{sys6}} \longrightarrow \text{خروجی} = n z[n]$$

$$z[n] = x[n - n_0] \Rightarrow \text{خروجی} = nx[n - n_0] \stackrel{?}{=} y[n - n_0]$$

$$\stackrel{?}{=} (n - n_0)x[n - n_0]$$

متغیر با زمان

۱-۱۱-۶- خطی بودن

سیستم خطی به سیستمی گفته می‌شود که اصل جمع آثار برای آن صدق کند.

شرط خطی بودن:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y(t) \\ x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1) x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad \text{جمع آثار;} \\ 2) ax(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow ay(t) \quad \text{همگنی;} \end{array} \right.$$

تذکر: در برقراری همگنی ضریب ثابت a هر عددی می‌تواند باشد، حتی عدد مختلط.

(مثال ۶)

الف) $y(t) = x^2(t)$ غیر خطی

$$(x_1 + x_2) \rightarrow \boxed{\text{sys}} \rightarrow (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

ب) $y(t) = x(t)x(t-1)$ غیر خطی

$$ax(t) \rightarrow \boxed{\text{sys}} \rightarrow (ax(t))(ax(t-1)) = a^2 x(t)x(t-1) \neq ax(t)x(t-1)$$

ج) $y(t) = \sin(x(t))$ غیر خطی است چون توابع \sin, \cos غیر خطی هستند.

$$y(t) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$$

$$ax(t) = a \rightarrow y(t) = 1$$
 خاصیت همگنی نقض شده پس غیر خطی است.

د) $y[n] = nx[n]$

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow n(x_1[n] + x_2[n]) = nx_1[n] + nx_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$ax[n] \rightarrow n(ax[n]) = a(nx[n]) = ay[n]$$
 خطی

ه) $y[n] = \text{Real}(x[n])$

$$x[n] = r + js \rightarrow y[n] = r$$

غیر خطی $ax[n] = a(r + js) \Rightarrow \text{if } a = j2 \Rightarrow -2S \neq ay[n]$

و) $y[n] = 2x[n] + 3$

$$x_1[n] + x_2[n] \Rightarrow 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \neq (2x_1[n] + 3) + (2x_2[n] + 3)$$
 غیر خطی

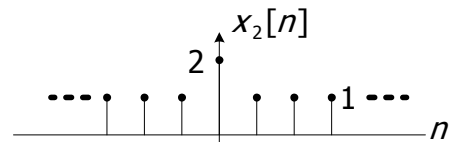
$$\neq y_1[n] + y_2[n]$$

نمونه مسائل فصل

۱- تعیین کنید کدام يك از سیگنال هاي زیر متناوبند؟

(الف) $x_2[n] = u[n] + u[-n]$

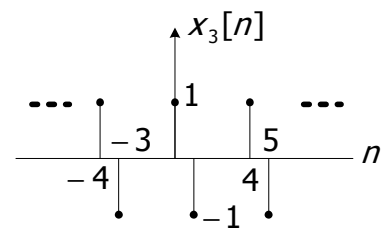
يك راه تشخیص متناوب بودن رسم سیگنال است.



وجود يك ناپیوستگی در نقطه صفر باعث می شود که نامتناوب شود.

(ب) $x_3[n] = \sum \delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k]$

در هر دوره تناوب $N = 4$ ، ضربه را شامل شده است.



(ج) $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n}$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{4\pi}{7}} = 7k = 7 \quad (k=1) \quad , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5k = 5 \quad (k=1) \quad \Rightarrow N = 35$$

۲- تعیین کنید کدام يك از سیگنال هاي زیر معکوس پذیر است؟

(الف) $y[n] = x[n] x[n - 2]$

$$x[n] = A\delta[n] \quad , \quad y[n] = A^2\delta[n] \delta[n - 2] = 0 \quad , \quad x[n] = \delta[n - 3] \\ \Rightarrow y[n] = \delta[n - 3] \delta[n - 5] = 0$$

حافظه دار است ولي معکوس پذیر نیست.

(ب) $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$

$$= x[n+1]u[n] + x[n]u[-n-1] \quad ,$$

$$\begin{aligned}
 \text{if } x[n] = u[n] &\Rightarrow y[n] = \underbrace{u[n+1]u[n]}_{=u[n]} + \underbrace{u[n]u[-n-1]}_{=0} = u[n] \\
 \text{if } x[n] = u[n-1] &\Rightarrow y[n] = \underbrace{u[n]u[n]}_{=u[n]} + \underbrace{u[n-1]u[-n-1]}_{=0} = u[n]
 \end{aligned}$$

معکوس پذیر نیست.

تمرین) آیا این سیستم معکوس پذیر است یا نه؟ اگر هست معکوسش را به دست آورید.

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

۱۲-۱- خلاصه

سیگنال تابعی است که حاوی اطلاعاتی درباره رفتار فیزیکی یک سیستم است. هر سیگنال دلخواه را می توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت. در بسیاری از مسائل با استفاده از شیفت زمانی می توان سیگنال را به صورت زوج یا فرد درآورد. کوچکترین دوره تناوب سیگنال دوره تناوب اصلی است و فرکانس متناسب با دوره تناوب اصلی فرکانس اصلی است. توابعی که فرم هندسی دارند را می توان بر حسب توابع ویژه بیان کرد. توابع ضربه واحد، پله واحد و دابلت واحد خواص منحصر به فردی دارند. اگر سیستمی با ورودی محدود و خروجی نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است. سیستم بدون حافظه مطمئناً علی است.

فصل دوم

سیستم‌های LTI زمان پیوسته و زمان گسسته

۱-۲. خواص سیستم‌های LTI با توجه به رابطه کانولوشن

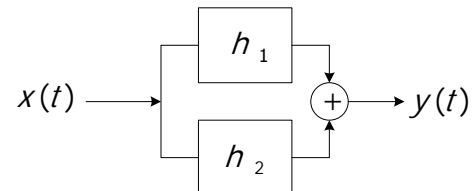


۱-۱-۲. جابه‌جایی پذیری

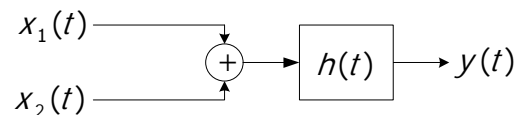
$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \\
 &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda
 \end{aligned}
 , \quad
 \begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] \\
 &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]
 \end{aligned}$$

۲-۱-۲. توزیع پذیری

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

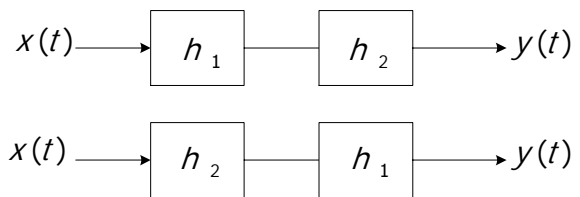


$$y(t) = (x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

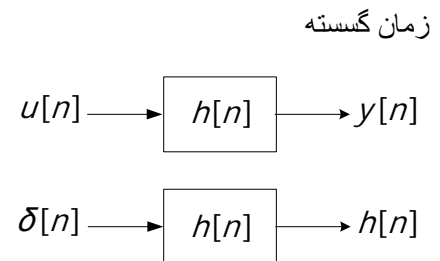
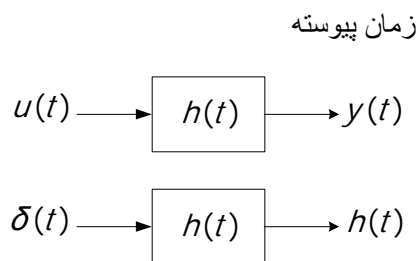


۳-۱-۲. شرکت پذیری

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) \\
 &= x(t) * (h_2(t) * h_1(t))
 \end{aligned}$$



۲-۲- رابطه بین پاسخ ضربه $h(t)$ و پاسخ پله



$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda$$

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

$$h[n] = y[n] - y[n-1]$$

مثال ۱) پاسخ پله سیستم‌های LTI زیر را بدست آورید.

الف)
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{\lambda}{RC}} u(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{\lambda}{RC}} d\lambda = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$y(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t)$$

ب)
$$h[n] = (-a)^n u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n (-a)^k u[k] = \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ \sum_{k=0}^n (-a)^k = \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 - (-a)} & , \quad n \geq 0 \end{cases} = \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 + a} u[n]$$

۳-۲- خواص سیستم‌های LTI با توجه به تابع تبدیل

۳-۲-۱- حافظه

زمان پیوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$$

$$h(t) = 0 \quad ; \quad t \neq 0$$

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]$$

شرط بدون حافظه بودن سیستم:

$$h[n] = 0 \quad ; \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

اثبات (سیستم زمان گسسته):

$$y[n] = \dots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots$$

این سیستم به شرطی بدون حافظه است که خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه وابسته باشد که برای این منظور بایستی:

$$h[n] = 0 \quad , \quad n \neq 0 \Rightarrow h[n] = \delta[n] \quad \text{یا} \quad h[n] = k \delta[n] \quad ; \quad k = cte$$

۳-۲-۲- معکوس پذیری

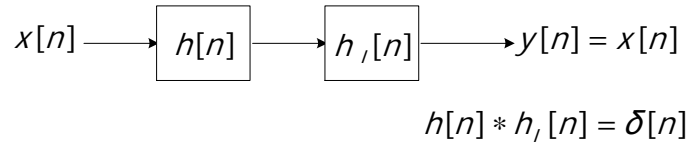
زمان پیوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \boxed{h_i(t)} \longrightarrow y(t) = x(t)$$

$$x(t) = (h(t) * h_i(t)) * x(t)$$

$$\delta(t) * x(t) = x(t) \Rightarrow h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

زمان گسسته



۲-۳-۳- علیت

در سیستم علی خروجی به آینده ورودی بستگی ندارد. با توجه به رابطه $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$ شرط زیر برای

تابع تبدیل (پاسخ ضربه) بیانگر سیستم علی خواهد بود.

زمان پیوسته

زمان گسسته

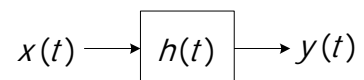
$$h(t) = 0 \quad ; \quad t < 0$$

$$h[n] = 0 \quad ; \quad n < 0$$

تذکر: تابع تبدیل $h(t) = u(t)$ ($h[n] = u[n]$) بیانگر سیستم علی است.

۲-۳-۴- پایداري (BIBO*)

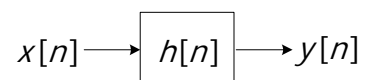
زمان پیوسته



$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| |x(t-\lambda)| d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| d\lambda < \infty$$

$$\text{شرط پایداري: } \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

زمان گسسته



Bounded Input Bounded Output *

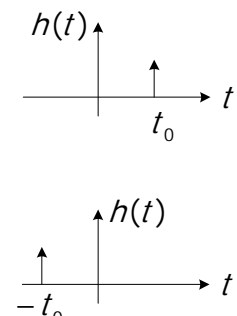
$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad \text{شرط پایداری:}$$

مثال ۲) با استفاده از تابع تبدیل خواص سیستم‌های LTI را بررسی کنید.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t - t_0)$$

الف) علی بودن

$$h(t) = y(t) \Big|_{x(t)=\delta(t)} \Rightarrow h(t) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} t_0 \geq 0 ; & \text{سیستم علی} \\ t_0 < 0 ; & \text{سیستم غیر علی} \end{cases}$$


ب) سیستم معکوس

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t) \quad , \quad \delta(t - t_0) * h_i(t) = \delta(t) \quad , \quad h_i(t - t_0) = \delta(t) \xrightarrow{t-t_0=t'} h_i(t') = \delta(t' + t_0)$$

معکوس پذیر

ج) پایداری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t - t_0)| dt < \infty \quad \text{پایدار}$$

مثال ۳)

$$h(t) = e^{at} u(t) \quad \text{الف)}$$

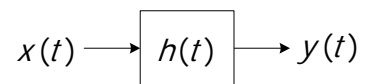
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{at} u(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{at} dt = \begin{cases} a < 0 & \text{پایدار} \\ a \geq 0 & \text{ناپایدار} \end{cases} \quad , \quad \text{علی و حافظه دار}$$

$$n \geq -2, \quad h[n] = a^n u[n+2] \quad \text{ب)}$$

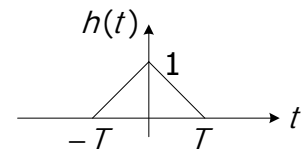
غیر علی و حافظه دار

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[k+2]| = \sum_{k=-2}^{\infty} |a^k| \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 & , \quad \text{پایدار} \\ |a| > 1 & , \quad \text{ناپایدار} \end{cases}$$

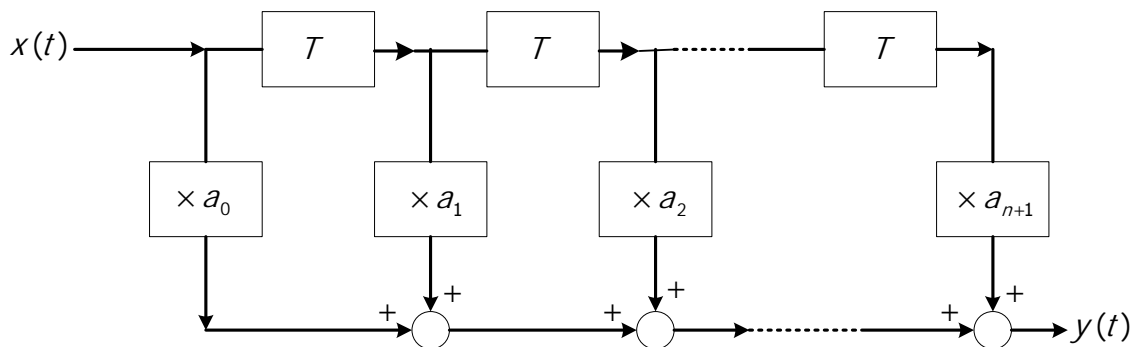
تمرین ۱: مطلوب است ترسیم $y(t)$ ؟



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT)$$



تمرین ۲: مطلوب است پاسخ ضربه سیستم ذیل $h(t)=?$



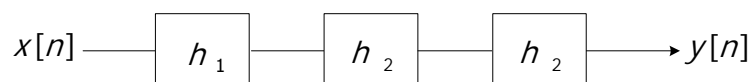
مثال ۳) رابطه بین ورودی دلخواه $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را برای پاسخ ضربه سیستم LTI داده شده بدست آورید.

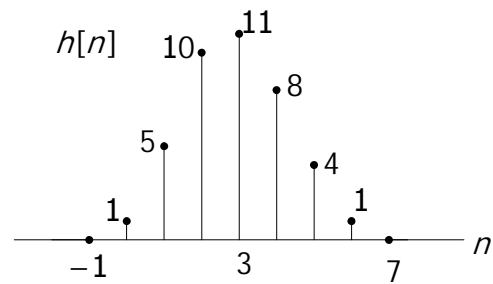
$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases} \quad \begin{array}{c} \uparrow h[n] \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 3 \end{array} \quad \frac{1}{4}$$

$$h[n] = \frac{1}{4} (u[n] - u[n-4]) = \frac{1}{4} (\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3])$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \frac{1}{4} (x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3])$$

مثال ۴) اگر $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$ (الف) مقدار $h_1[n]$ را بدست آورید، تابع تبدیل کل سیستم $h[n]$ داده شده است.





$$h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad , \quad h[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_2[n])$$

$$\begin{aligned} h_2[n] * h_2[n] &= (\delta[n] + \delta[n-1]) * (h_2[n]) = h_2[n] + h_2[n-1] \\ &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-1] + \delta[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$$

اولین جایی که $h[n]$ مقدار دارد $n = 0$ است پس در نمودارهای بالا به ازای $n = 0$ داریم:

$$a_0 + 2a_{-1} + a_{-2} = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a_1 + 2a_0 = 5 \Rightarrow a_1 = 3$$

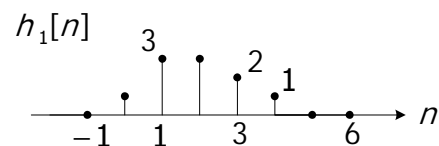
$$a_2 + 2a_1 + a_0 = 10 \Rightarrow a_2 = 3$$

$$a_3 + 2a_2 + a_1 = 11 \Rightarrow a_3 = 2$$

$$a_4 + 2a_3 + a_2 + 8 = 4 \Rightarrow a_4 = 1$$

$$a_5 + 2a_4 + a_3 = 4 \Rightarrow a_5 = 0$$

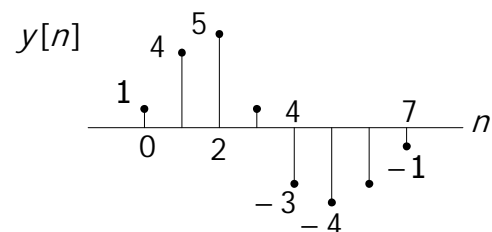
$$a_6 + 2a_5 + a_4 + 1 = 0 \Rightarrow a_6 = 0 \dots$$



ب) اگر $x[n]$ برابر باشد با $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ مطلوب است مقدار خروجی $y[n]$ ؟

این قسمت کاملاً مستقل از قسمت قبل است چون $x[n]$ داده شده است.

$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] - h[n-1]$$



۲-۴- کانولوشن (زمان پیوسته)

۲-۴-۱- روش ترسیمی

توصیه می‌شود اگر $f(t)$ به لحاظ ریاضی ساده‌تر است از فرمول ۲ و اگر $g(t)$ ساده‌تر است از فرمول ۱ استفاده می‌کنیم. در این مثال از فرمول ۲ استفاده می‌کنیم.

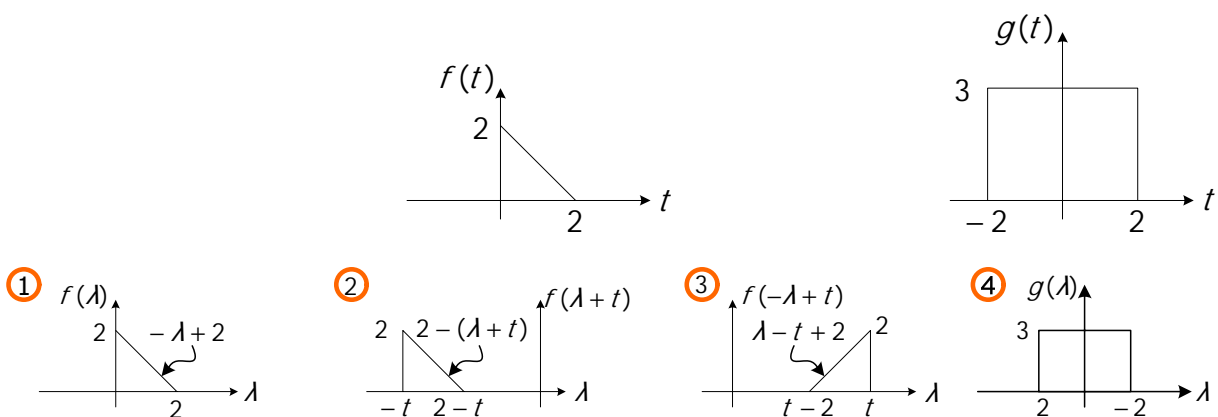
$$y(t) = f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda}_1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) f(t - \lambda) d\lambda}_2$$

$g(\lambda)$ و $f(\lambda)$ را می‌سازیم.

برای ساخت $f(t - \lambda)$ اول باید $f(t + \lambda)$ را ساخت چون نمی‌دانیم که t مثبت است یا منفی است پس به صورت قراردادی t واحد به سمت چپ شیفت می‌دهیم. سپس $f(t - \lambda)$ را می‌سازیم از این مرحله به بعد باید در هر مرحله معادله خط کنار نمودار نوشته شود.

حال $g(\lambda)$ را ثابت نگه داشته و $f(t - \lambda)$ را از $-\infty$ به سمت $+\infty$ شیفت می‌دهیم. بدیهی است در جایی که دو تابع همپوشانی نداشته باشند حاصلضرب صفر است. سپس به نقطه‌ای می‌رسد که \max همپوشانی را دارد و بعد دوباره به جایی می‌رسد که هیچ همپوشانی نداشته باشند:

(مثال ۵)



$$\begin{cases} t < -2, & * = 0 \\ -2 \leq t < 0, & * = \int_{-2}^t (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = \frac{3}{4}(4 - t^2) \\ 0 \leq t < 2, & * = \int_{t-2}^t (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = 6 \\ 2 \leq t \leq 4, & * = \int_{t-2}^2 (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = \frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) \\ t \geq 4, & * = 0 \end{cases}$$

۲-۴-۲- استفاده از فرمول

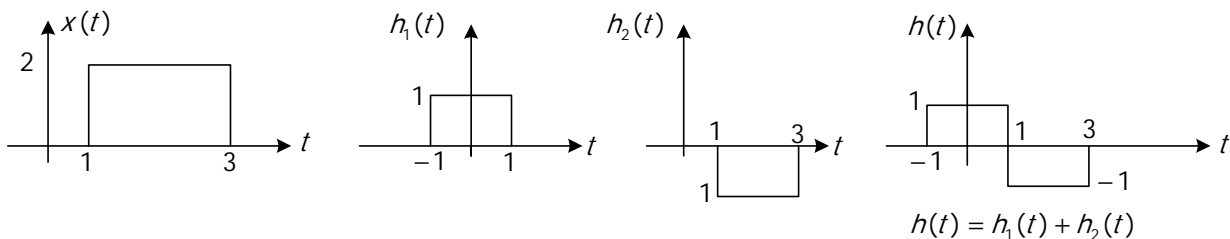
اگر با استفاده از فرمول بخواهیم کانولوشن دو سیگنال را بدست بیاوریم. باید معادله دو سیگنال بر حسب توابع ریاضی داده شده باشند یا اینکه بتوان آنها را بر حسب توابع ویژه فرموله نمود.

برای مثال قبل $f(t)$, $g(t)$ را باید به فرم زیر نوشت و سپس در فرمول کانولوشن جایگذاری کرد:

$$f(t) = 2u(t) - r(t) + r(t-2), \quad g(t) = 3(u(t+2) - u(t-2))$$

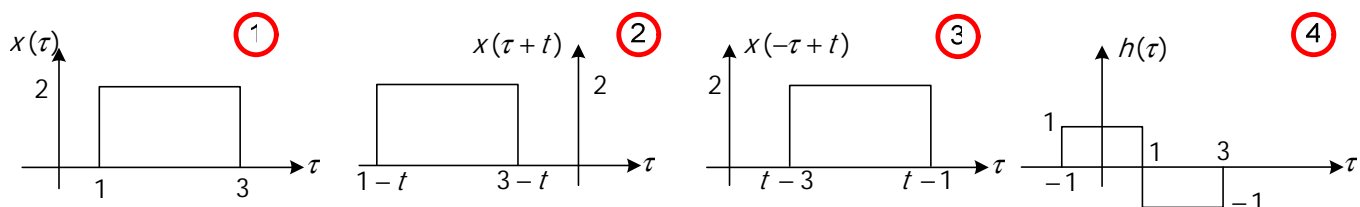
مثال (۱)

$$x(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3) \quad , \quad h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$$

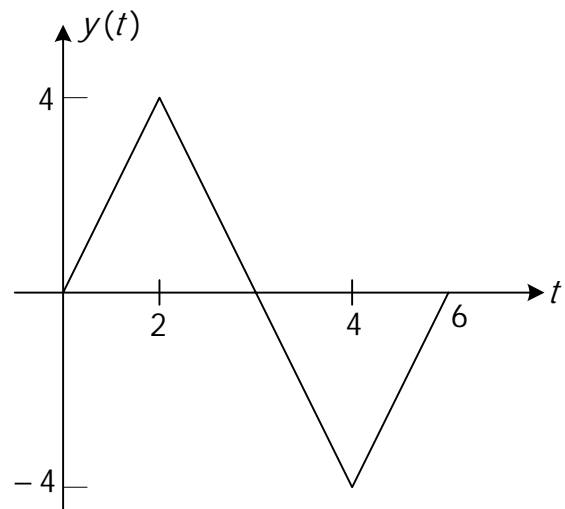


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

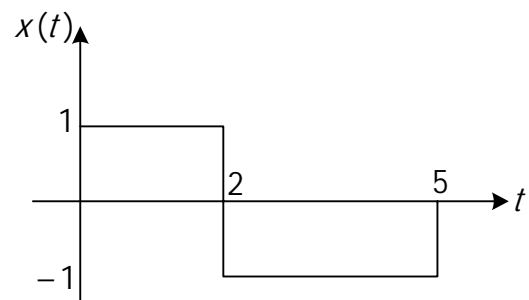
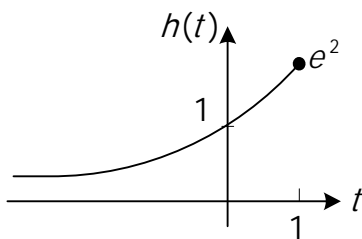


$$\left\{ \begin{array}{ll} t-1 < 1 & , \quad * = 0 \\ -1 \leq t-1 < 1 & , \quad * = \int_{-1}^{t-1} 2d\tau = 2t \\ 1 \leq t-1 < 2 & , \quad * = \int_{t-3}^1 2d\tau + \int_1^{t-1} -2d\tau = 12 - 4t \\ 2 \leq t-1 < 3 & , \quad * = \int_{t-3}^1 2d\tau + \int_1^{t-1} -2d\tau = 12 - 4t \\ 3 \leq t-1 < 4 & , \quad * = \int_{t-3}^3 -2d\tau = -2(6-t) \\ t-1 \geq 5 & , \quad * = 0 \end{array} \right.$$

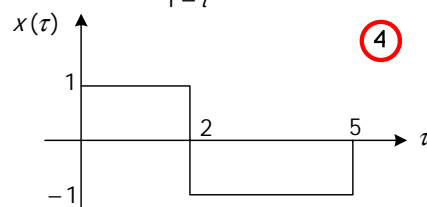
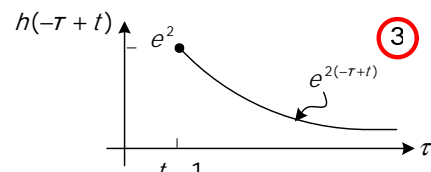
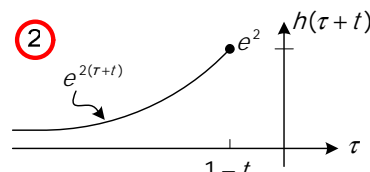
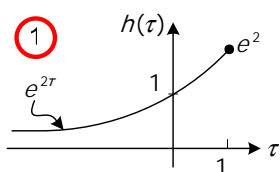


تذکر: وقتی دو تابع پالسی باهم کانوالو می‌شوند حاصل یک تابع دوزنقه می‌شود و اگر این دو تابع پالسی هم عرض باشد شکل حاصل یک تابع مثلثی خواهد بود.

$$h(t) = e^{2t}u(1-t) \quad , \quad x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \quad (\text{مثال ۲})$$



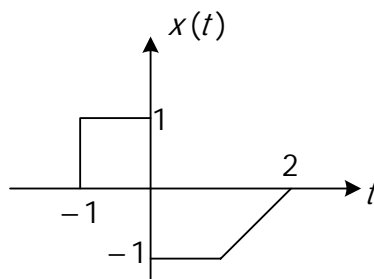
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



$$\begin{cases} t-1 > 5 & , \quad * = 0 \\ 2 < t-1 \leq 5 & , \quad * = \int_{t-1}^5 e^{2(-\tau+t)} \times (-1) d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-5)} - e^2 \\ 0 < t-1 \leq 2 & , \quad * = \int_{t-1}^2 e^{2(-\tau+t)} d\tau + \int_2^5 e^{2(-\tau+t)} d\tau = \frac{1}{2} (e^2 - e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} - e^{2(t-2)}) \\ t-1 \leq 0 & , \quad * = \int_0^2 e^{2(-\tau+t)} d\tau + \int_2^5 -e^{2(-\tau+t)} d\tau = \frac{1}{2} (e^{2t} - e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} - e^{2(t-2)}) \end{cases}$$

تمرین: سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ داده شده. پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ را بدست آورید و مقدار خروجی را در

لحظات $t = -\frac{1}{4}$, $t = \frac{3}{4}$, $t = \frac{3}{2}$, $t = +\infty$ محاسبه کنید.



$$h(t) = e^{-t} \delta(t) + u(t) \quad , \quad y(t) = x(t) * h(t) \quad ?$$

۵-۲- کانولوشن زمان گسسته

۵-۲-۱- روش ترسیمی

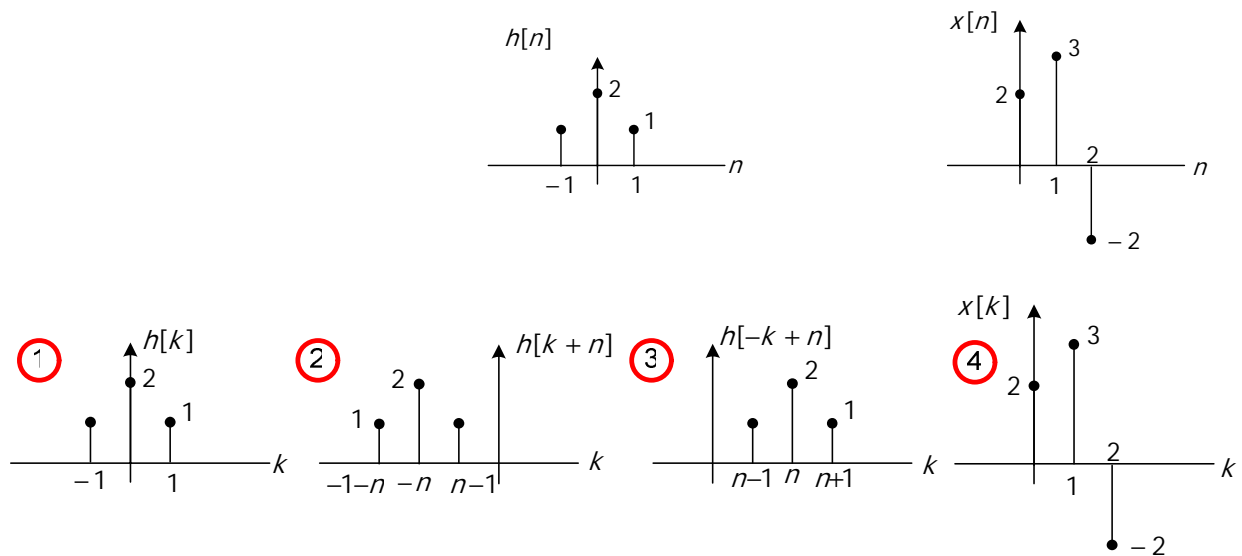
$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]}_1 = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]}_2$$

پس از تصمیمگیری راجع به اینکه از رابطه ۱ یا رابطه ۲ خروجی $y[n]$ را حساب کنیم، مراحل انجام عملیات عیناً شبیه زمان پیوسته است.

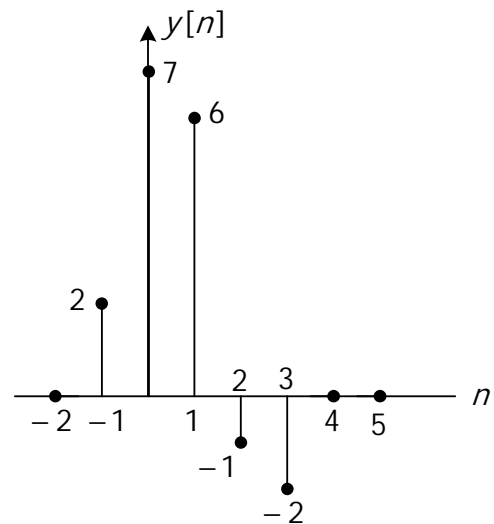
روش ترسیمی را برای تعیین خروجی سیستم زمان گسسته مطرح می‌کنیم:

مثال ۳)

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = \pm 1 \\ 2 & n = 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad x[n] = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ -2 & n = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} n+1 < 0 & , \quad * = 0 \\ n+1 = 0 & , \quad * = 1 \times 2 = 2 \\ n+1 = 1 & , \quad * = 2 \times 2 + 1 \times 3 = 7 \\ n+1 = 2 & , \quad * = 1 \times 2 + 2 \times 3 - 2 \times 1 = 6 \\ n+1 = 3 & , \quad * = 1 \times 3 + 2 \times (-2) = -1 \\ n+1 = 4 & , \quad * = 1 \times (-2) = -2 \\ n+1 \geq 5 & , \quad * = 0 \end{cases}$$



۲-۵-۲- استفاده از فرمول

ابتدا باید توابع را بر حسب توابع ویژه و یا توابع ریاضی بیان کرد. اگر ورودی و یا پاسخ ضربه بر حسب تابع ضربه بیان شده باشند، بدلیل خاصیت تابع ضربه محاسبه کانولوشن بسیار راحت خواهد بود.

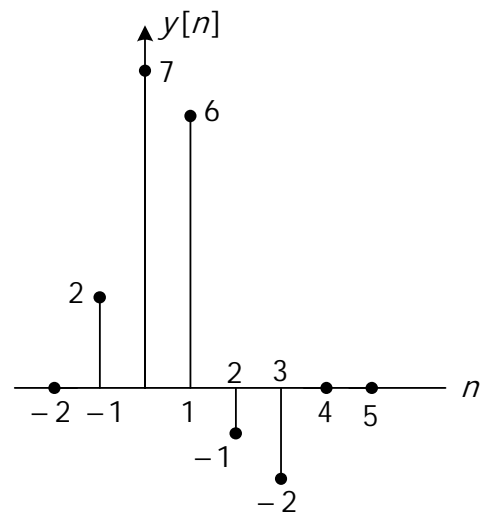
(مثال ۴)

$$h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1] \quad , \quad x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= (2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]) * h[n] \\ &= 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2] \end{aligned}$$

۲

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * (\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]) \\ &= x[n+1] + 2x[n] + x[n-1] \end{aligned}$$



بدیهي است پاسخ محاسبه شده در هر دو حالت یکسان خواهد بود:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1], \quad h[n] = u[n-1] \quad (\text{مثال ۵})$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} u[-k-1] \cdot u[n-k-1]$$

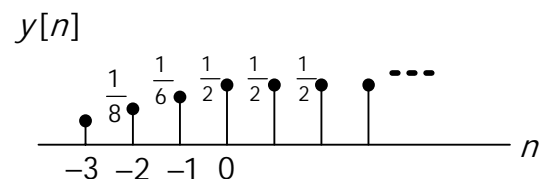
$$u[-K-1] = \begin{cases} 1 & ; \quad k \leq -1 \\ 0 & ; \quad k > -1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \dots \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ -3 \quad -2 \quad -1 \end{array} \rightarrow k$$

\Rightarrow

$$u[n-K-1] = \begin{cases} 0 & ; \quad k \leq n-1 \\ 1 & ; \quad k > n-1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \dots \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad n-1 \end{array} \rightarrow k$$

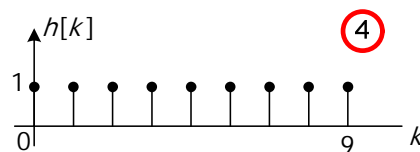
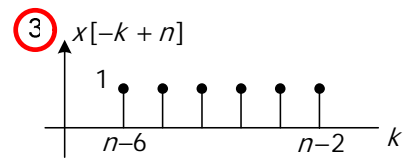
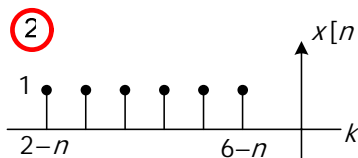
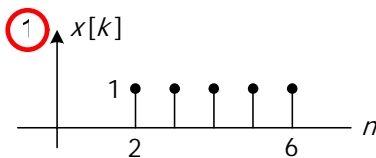
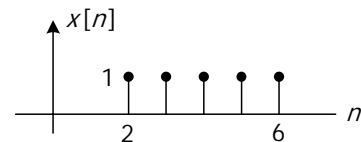
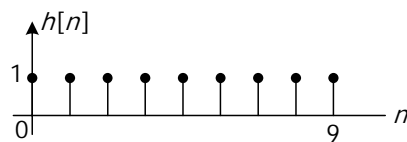
$$n-1 < -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} = \sum_{k=-n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1} = \frac{3}{2} (3)^{n-1} = \frac{1}{2} (3)^n$$

$$n-1 \geq -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

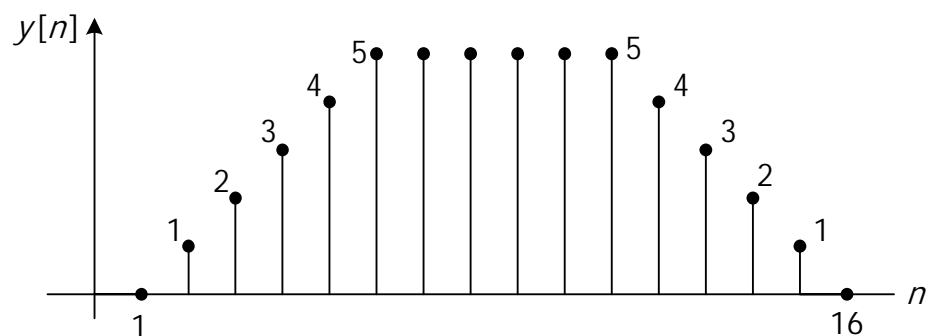


مثال ۶) $x[n] = a^n u[n] \quad 0 < a < 1$, $h[n] = u[n]$, $y[n] = ?$

مثال ۷) $h[n] = u[n] - u[n-10]$, $x[n] = u[n-2] - u[n-7]$



$n-2 < 0$, $*$ = 0	$n-2 = 10$, $*$ = 4
$n-2 = 0$, $*$ = 1	$n-2 = 11$, $*$ = 3
$n-2 = 2$, $*$ = 2	$n-2 = 12$, $*$ = 2
$n-2 = 3$, $*$ = 4	$n-2 = 13$, $*$ = 1
$\left\{ \begin{array}{l} n-2 = 4 , \quad * = 5 \\ \vdots \\ n-2 = 9 , \quad * = 5 \end{array} \right.$	$n-2 \geq 14$, $*$ = 0



۶-۲- سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل (زمان پیوسته)

به طور کلی معادله دیفرانسیل یک سیستم به فرم روبه‌رو نوشته می‌شود:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y(t)$$

برای حل معادله دیفرانسیل باید

(۱) معادله همگن حل شود.

(۲) جواب خصوصی به ازای ورودی خاص تعیین گردد.

(۳) جواب کلی سیستم عبارت است از پاسخ عمومی + پاسخ خصوصی و با توجه با این که پاسخ عمومی دارای تعدادی ضرایب ثابت است این ضرایب از روی شرایط سکون یا شرایط اولیه به دست می‌آیند.

$$۱) \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \Rightarrow y_h(t) = \dots$$

$$۲) y_p(t) = \dots$$

$$۳) y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

تذکر: برای بکارگیری شرایط سکون جهت تعیین پاسخ سیستم LTI به ورودی داده شده، عنوان علی بودن سیستم ضروری است. در غیر اینصورت بایستی شرایط اولیه داده شده باشد.

مثال (۸)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = t \quad , \quad t > 0 \quad , \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 t e^{-t}$$

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \quad , \quad t \geq 0 \Rightarrow y_p(t) = At^2 + Bt + c \Rightarrow y_p(t) = (t - 2)$$

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 t e^{-t} + (t - 2) \quad , \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = (2 + t) e^{-t} + (t - 2) \quad , \quad t > 0$$

مثال ۹) معادله دیفرانسیل سیستم LTI و علی داده شده است. مطلوبست پاسخ سیستم به ازای ورودی داده شده:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \begin{cases} 0; & t \leq -1 \\ 1; & t > -1 \end{cases}$$

حل:

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \quad , \quad y_h(t) = K_1 e^{-2t} \quad (۱)$$

$$y'(t) + 2y(t) = 1; \quad t > -1 \quad , \quad y_p(t) = \frac{1}{2} \quad (۲)$$

(۳) اعمال شرط سکون بر اساس علی بودن سیستم

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}; & t > -1 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}; \quad t > -1$$

یا

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}\right) u(t+1)$$

۷-۲- پاسخ به ورودی ضربه:

۷-۲-۱- استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم‌های LTI:

با یک مثال این رابطه را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۰) سیستم LTI و علی است. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t)$

$$z''(t) + z'(t) - 2z(t) = u(t) \quad \text{حل:}$$

$$z''(t) + z'(t) - 2z(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$z_h(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t$$

$$z_p(t) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} z(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t - \frac{1}{2}; & t > 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}; \quad t > 0$$

(مشتق پاسخ پله = پاسخ ضربه)

$$z(t) = \left(\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}\right) u(t); \quad y(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t) + \left(\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}\right) \delta(t) \Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t)$$

۲-۷-۲- محاسبه پاسخ ضربه سیستم بطور مستقیم

جهت محاسبه پاسخ ضربه سیستم LTI پاسخ معادله همگن را بدست آورده و آن را بعنوان پاسخ کامل سیستم در نظر می‌گیریم. پاسخ کامل باید در معادله دیفرانسیل صدق کند که بدین ترتیب ضرایب ثابت محاسبه و پاسخ کامل، که همان پاسخ ضربه سیستم LTI است تعیین خواهد شد. حال مثال ۱۰ را به این روش مجدداً حل می‌کنیم:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

$$y_h(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t \Rightarrow y(t) = (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t)$$

$$y'(t) = (-2K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t) + (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta(t)$$

$$y''(t) = \dots = (4K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t) + (-4K_1 e^{-2t} + 2K_2 e^t) \delta(t) + (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta'(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (-3K_1 e^{-2t} + 3K_2 e^t) \delta(t) + (K_1 + K_2) \delta'(t) - (-2K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = -\frac{1}{3} \\ K_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t) = h(t)$$

۸-۲- سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات تفاضلی (زمان گسسته)

هدف از تحلیل معادله تفاضلی:

(۱) رابطه مستقیمی بین ورودی و خروجی به دست آوریم.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

(۲) خروجی را به ازای ورودی مشخص پیدا کنیم.

۸-۲-۱ روش حل معادله تفاضلی

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

(الف) روش مستقیم:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \quad \text{پاسخ کامل:} \quad y_p[n] \quad \text{پاسخ خاص:} \quad y_h[n] \quad \text{پاسخ عمومی:}$$

با فرض آنکه معادله تفاضلی مرتبه دوم است $N=2$ ، برای بدست آوردن جواب عمومی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = 0$$

$$y_h[n] = K r^n \Rightarrow (a_0 + a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2}) \cdot K r^n = 0$$

$$r_1, r_2 \quad \text{حقیقی و متمایز} \quad y_h[n] = k_1 (r_1)^n + k_2 (r_2)^n$$

$$r_1 = r_2 \quad y_h[n] = k_1 (r_1)^n + k_2 n (r_2)^n$$

مثال ۱) مطلوب است خروجی اگر $x[n] = n^2$ و $y[0] = 1$ باشد.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

پاسخ عمومی:

$$y[n] + 2y[n-1] = 0 \Rightarrow y_h[n] = k r^n \Rightarrow k r^n + 2k r^{n-1} = 0$$

$$k r^n (1 + 2 r^{-1}) = 0 \Rightarrow r = (-2) \Rightarrow y_h[n] = k (-2)^n$$

پاسخ خصوصی:

$$y[n] + 2y[n-1] = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

$$y_p[n] = An + B \Rightarrow An + B + 2(A(n-1) + B) = 2n - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3A = 2 \\ -2A + 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p[n] = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

جواب خصوصي

پاسخ كامل:

$$\begin{cases} y[n] = k(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \Rightarrow k = \frac{8}{9}; & y[n] = \frac{8}{9}(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \\ y[0] = 1 \end{cases}$$

(ب) روش بازگشتي

با يك مثال اين روش را پيروي مي كنيم:

مثال ۲) سيستم LTI و علي توصيف شده با معادله تفاضلي زير را در نظر بگيريد.

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه $h[n]$

(ب) پاسخ ضربه معكوس $h_i[n]$

(ج) به ازاي ورودی داده شده $x[n] = \delta[n-1]$ خروجي را بدست آوريد.

$$h[n] = y[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]} \quad \text{(الف)}$$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] + \delta[n]$$

روش بازگشتي:

$$h[0] = \frac{1}{4}h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = \frac{1}{4}h[0] = \frac{1}{4}(1)$$

$$h[2] = \frac{1}{4}h[1] = \frac{1}{4}(1)^2$$

⋮

$$h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ب) برای بدست آوردن $h_l[n]$ باید فرمول زیر برقرار باشد:

$$h[n] * h_l[n] = \delta[n] \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] h_l[n-k] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k u[k] h_l[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k h_l[n-k] = \delta[n]$$

سؤال: اگر سیستمی LTI و علی باشد آیا معکوس سیستم نیز LTI و علی خواهد بود؟

$$h_l[n] + \frac{1}{4} h_l[n-1] + \left(\frac{1}{4}\right)^2 h_l[n-2] + \left(\frac{1}{4}\right)^3 h_l[n-3] + \dots = \delta[n]$$

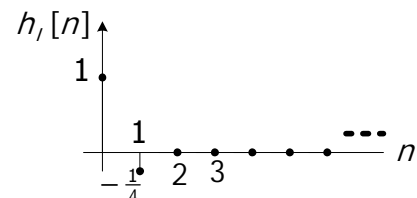
روش بازگشتی:

$$h_l[0] = 1$$

$$h_l[1] + \frac{1}{4} h_l[0] = 0 \Rightarrow h_l[1] = -\frac{1}{4}$$

$$h_l[2] + \frac{1}{4} h_l[1] + \left(\frac{1}{4}\right)^2 h_l[0] = 0 \Rightarrow h_l[2] = 0$$

$$h_l[3] = 0, \dots \Rightarrow h_l[n] = \delta[n] - \frac{1}{4} \delta[n-1]$$



ج) پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ در قسمت الف بدست آورده شد، با توجه به خاصیت TI (نامتغیربازمان) بودن سیستم داریم:

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow y[n] = h[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

مثال ۳) سیستم LTI با معادله تفاضلی $y[n] + 2y[n-1] = x[n]$ توصیف شده است. با فرض سکون اولیه (علی) پاسخ ضربه را به دست آورید.

تذکر: اگر ورودی ضربه واحد بود پیشنهاد می‌شود از روش بازگشتی معادله را حل کنید.

روش اول: بکارگیری روابط بازگشتی و تعیین پاسخ به ازاء ورودی خاص با توجه به شرط سکون اولیه

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

$$h[n] + 2h[n-1] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = -2h[n-1] + \delta[n]$$

$$h[0] = -2h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = -2h[0] = -2$$

$$h[2] = -2h[1] = (-2)^2$$

$$h[3] = (-2)^3$$

⋮

$$h[k] = (-2)^k \Rightarrow h[n] = (-2)^n u[n]$$

روش دوم: بدست آوردن خروجی بر حسب ورودی بطور کلی با استفاده از روابط بازگشتی.

$$\begin{aligned} y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \\ y[0] + 2y[-1] &= x[0] \\ y[1] + 2y[0] &= x[1] \\ y[2] + 2y[1] &= x[2] \\ &\vdots \\ y[n-2] + 2y[n-3] &= x[n-2] \\ y[n-1] + 2y[n-2] &= x[n-1] \\ y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \end{aligned}$$

برای بدست آوردن رابطه صریح خروجی بر حسب ورودی (FIR) به طریق ذیل عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} (-2)^n (y[0] + 2y[-1] &= x[0]) \\ (-2)^{n-1} (y[1] + 2y[0] &= x[1]) \\ (-2)^{n-2} (y[2] + 2y[1] &= x[2]) \\ &\vdots \\ (-2)^2 (y[n-2] + 2y[n-3] &= x[n-2]) \\ (-2)^1 (y[n-1] + 2y[n-2] &= x[n-1]) \\ (-2)^0 (y[n] + 2y[n-1] &= x[n]) \\ \hline \sum &\Rightarrow y[n] = (-2)^0 x[n] + (-2)^1 x[n-1] + (-2)^2 x[n-2] + \dots + (-2)^n x[0] \\ &= \sum_{k=0}^n (-2)^k x[n-k] = \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} x[k] \\ \Rightarrow h[n] &= \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \delta[k] = (-2)^n \sum_{k=0}^n \delta[k] = (-2)^n u[n] \end{aligned}$$

روش سوم: استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم های LTI

پاسخ پله:

$$z[n] + 2z[n-1] = u[n]$$

پاسخ همگن:

$$z[n] + 2z[n-1] = 0$$

$$z_h[n] = k(r)^n \Rightarrow k r^n (1 + 2r^{-1}) = 0 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow z_h[n] = k(-2)^n$$

پاسخ خصوصی:

$$z[n] + 2z[n-1] = 1, n \geq 0 \Rightarrow z_p[n] = A \Rightarrow A + 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

پاسخ کامل:

$$z[n] = k(r)^n + \frac{1}{3}, n \geq 0 \Rightarrow z[-1] = k(-2)^{-1} + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow z[n] = \left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n + \frac{1}{3}, n \geq 0 \Rightarrow z[n] = \left[\left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n + \frac{1}{3}\right]u[n]$$

محاسبه پاسخ ضربه با استفاده از پاسخ پله:

$$\Rightarrow h[n] = z[n] - z[n-1] = \left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n u[n] + \frac{1}{3}u[n] - \frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n-1] - \frac{1}{3}u[n-1]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n u[n] - \frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n] = \left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n \left[\frac{1}{2} + 1\right]u[n] = (-2)^n u[n]$$

۹-۲- نمایش سیستم LTI با استفاده از بلوک دیاگرام (مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر)

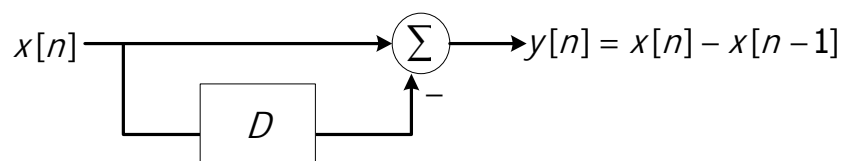
زمان پیوسته

$$x(t) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \rightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

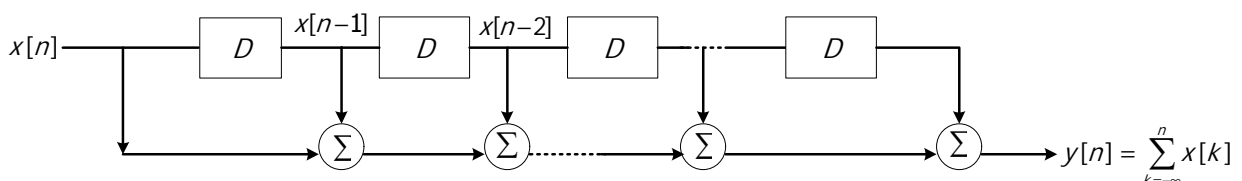
$$x(t) \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^t} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$$

زمان گسسته

هم ارز با مشتق در پیوسته :



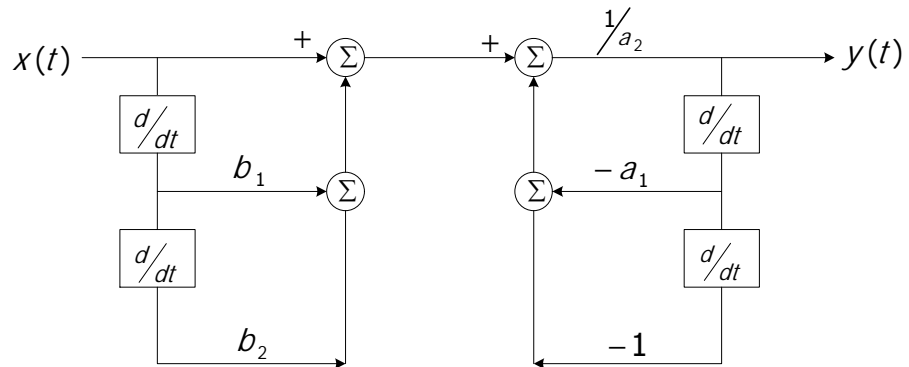
هم ارز با انتگرال در پیوسته :



$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) \quad (\text{مثال ۴})$$

الف) نمایش سیستم با استفاده از بلوک‌های مشتق‌گیر

$$y(t) = -\frac{a_1}{a_2} y'(t) - \frac{1}{a_2} y''(t) + \frac{1}{a_2} x(t) + \frac{b_1}{a_2} x'(t) + \frac{b_2}{a_2} x''(t)$$

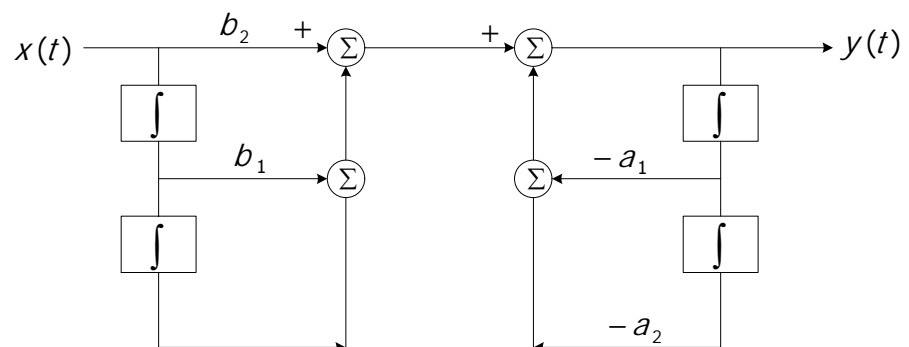


ب) نمایش سیستم با استفاده از بلوک‌های انتگرال‌گیر

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t)$$

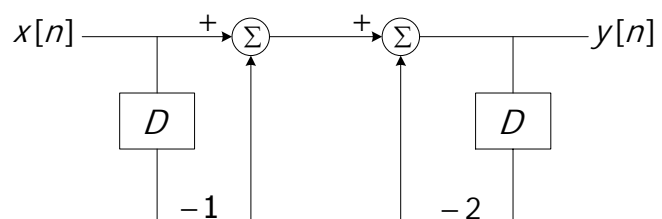
$$\Rightarrow y''(t) = -a_1 y'(t) - a_2 y(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t)$$

$$y(t) = -a_1 \int y(t) dt - a_2 \iint y(t) dt + \int \int x(t) dt + b_1 \int x(t) dt + b_2 x(t)$$



$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] - x[n-1] \quad (\text{مثال ۵})$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - 2y[n-1]$$



تمرین: رسم بلوک دیاگرام؟

سیستم زمان پیوسته

$$y'''(t) + 3y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = x'(t)$$

سیستم زمان گسسته

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

۲-۱۰- خلاصه

با توجه به رابطه کانولوشن می‌توان خواص جابه‌جایی‌پذیری، توزیع‌پذیری و شرکت‌پذیری را برای سیستم‌های LTI تعریف کرد.

با معرفی تابع تبدیل می‌توان خواص جدیدی برای سیستم‌های LTI بیان کرد.

کانولوشن به دو روش ترسیمی و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات دیفرانسیل، با حل معادله همگن و یافتن جواب خصوصی به ازای ورودی خاص، جواب کلی سیستم از جمع پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی بدست می‌آید.

برای بکارگیری شرایط سکون جهت تعیین پاسخ سیستم LTI به ورودی داده شده، عنوان علی بودن سیستم ضروری است.

با استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم‌های LTI و یا محاسبه پاسخ ضربه سیستم به طور مستقیم می‌توان پاسخ به ورودی ضربه را یافت.

سیستم‌های LTI را با استفاده از بلوک دیاگرام نیز می‌توان نشان داد.

فصل سوم

سري فوريه سيستم‌هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

۳-۱- تعاریف

۳-۱-۱- سیگنال متناوب

سیگنال متناوب است اگر $x(t) = x(t + T)$ و $T > 0$ بوده و دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$ کوچکترین مقدار مثبت

غیر صفر T است که در رابطه بالا صدق می‌کند. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ فرکانس اصلی سیگنال خواهد بود. (مثال ۱)

$$x(t) = 2 \sin(3t) \Rightarrow \omega_0 = 3, \quad T = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{الف})$$

$$x(t) = 4 \cos(\sqrt{2}t) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \quad (\text{ب})$$

۳-۱-۲- دوره تناوب حاصل جمع دو سیگنال

به طور کلی قانون خاصی برای این حالت وجود ندارد. در بعضی موارد اگر هر یک از سیگنال‌ها متناوب باشند حاصل جمع آنها نیز متناوب است و در بعضی موارد با وجود متناوب بودن هر یک از سیگنال‌ها، حاصل جمع آنها متناوب نیست.

(مثال ۲)

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t} \quad (\text{الف})$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$= 2\pi, \quad = \frac{4\pi}{3}$$

$$= 3\pi, \quad = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

$$m = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad n = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

$$x(t) = 2 \cos t + 4 \cos(\sqrt{2}t) \quad (\text{ب})$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

علیرغم متناوب بودن تک‌تک سیگنال‌های تشکیل‌دهنده $x(t)$ ، این سیگنال نامتناوب است.

تذکر: اگر $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ و دوره تناوب آنها به ترتیب T_1, T_2 باشد حاصل جمع دو سیگنال زمانی متناوب است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (n_1, n_2 \text{ باید اعداد صحیح مثبت و } n_2 \text{ عدد کسری صحیح (گویا) باشد})$$

۳-۱-۳- دوره تناوب حاصلضرب دو سیگنال

۱- در صورت امکان پس از تبدیل حاصلضرب توابع به حاصلجمع دو تابع، دوره تناوب را به دست می‌آوریم (چنانچه دوره تناوب را در همان حالتی که در هم ضرب شده محاسبه کنیم دوره تناوب به دست آمده ممکن است دوره تناوب اصلی سیگنال نباشد).

۲- چنانچه سیگنال حاصلضرب قابل تبدیل به حاصلجمع نبود، با توجه به رابطه $z(t) = x(t) \cdot y(t)$ و $z(t) = z(t+T)$ دوره تناوب $z(t)$ را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم.

مثال ۳

الف) $z(t) = e^{j6t} \cos(10t)$

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} & , & T_2 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \\ & = \frac{2\pi}{3} & = \frac{2\pi}{5} \\ & = \frac{3\pi}{3} = \pi & \vdots \\ & & \Rightarrow T = \pi \\ & & = \frac{5\pi}{5} = \pi \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{j6t} \cdot \frac{1}{2} (e^{j10t} + e^{-j10t}) = \frac{1}{2} e^{j16t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} \\ T_1 = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} & , & T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ & = \frac{2\pi}{8} & \\ & = \frac{3\pi}{8} & \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} \\ & = \frac{4\pi}{8} & \end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود دوره تناوب محاسبه شده از حاصل ضرب دو سیگنال (n) دوره تناوب اصلی سیگنال یا

کوچکترین دوره تناوب سیگنال $\left(\frac{n}{2}\right)$ نمی‌باشد.

قضیه: اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t) = f(t + T)$ تابع $G(t) = f(f(t))$ نیز پریودیک با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلی تابع $f(t)$ باشد، در این صورت دوره تناوب اصلی $G(t)$ لزوماً T نیست.

(مثال ۴)

(الف)

$$f(t) = \cos(t) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T = 4\pi = 6\pi = \dots$$

$$g(t) = f^3(t) \Rightarrow g(t) = \cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3}$$

(ب)

$$g(t) = \cos^4 t$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$$

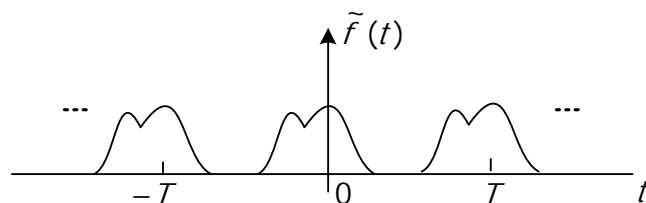
$$T_1 = \frac{2\pi}{2}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{4\pi}{4}$$

۳-۱-۴- روش نوشتن توابع به صورت پریودیک

اگر سیگنال در طی یک دوره تناوب (T) فرموله شود $(f(t))$ ، با استفاده از رابطه زیر سیگنال متناوب در کل زمان‌ها بیان

می‌شود $(\tilde{f}(t))$.

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT)$$



۳-۲- سری فوریه زمان پیوسته

سری فوریه، تنها برای توابع متناوب بیان می‌شود، توابعی که دارای دوره تناوب

$$x(t) = x(t + T) \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

اصلی می‌باشند. سری فوریه را به هر یک از دو فرم زیر می‌توان نمایش داد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

سؤال: چرا علاقمند هستیم که سیگنال متناوب را به صورت مجموعی از نمایی‌های مختلط نمایش دهیم؟

(۱) در صورت موفقیت، شناخت بهتری نسبت به سیگنال و محتوای فرکانسی آن به دست می‌آوریم. (در صورتی که بتوان سیگنال را به صورت مجموعه‌ای از هارمونی‌ها بسط داد، می‌توان به این سوال که در یک سیگنال چه فرکانس‌هایی و با چه قدرتی وجود دارند را پاسخ داد.)

(۲) پاسخ سیستم LTI به نمایی مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ یا به طور کلی $e^{j\omega t}$ به فرم بسیار ساده‌ای تعریف می‌شود.

تذکر ۱: هرچه هارمونی‌ها بالاتر باشد فرکانس‌ها بالاتر است و برعکس هر چه هارمونی‌ها پایین‌تر باشد فرکانس‌ها پایین‌تر است.

تذکر ۲: اگر سیگنالی در هارمونی‌های بالا ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس بالا است و برعکس اگر سیگنالی در هارمونی‌های پایین ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس پایین است.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$T_k = \frac{2\pi}{k\omega_0} \Rightarrow T_1|_{k=\pm 1} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad , \quad T_2|_{k=\pm 2} = \frac{2\pi}{2\omega_0} \quad , \quad T_3|_{k=\pm 3} = \frac{2\pi}{3\omega_0} \quad , \dots$$

مثال ۵) دوره تناوب اصلی سیگنال زیر چیست؟

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \quad , \quad T_3 = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_0 = 1 \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{1}$$

با توجه به رابطه اوایلر:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} e^{j(2\pi)t} + \frac{1}{4} e^{-j(2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j2(2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j(-2)(2\pi)t} + \frac{1}{3} e^{j3(2\pi)t} + \frac{1}{3} e^{j(-3)(2\pi)t}$$

$$\Rightarrow a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \quad , \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \quad , \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

فرم دیگر سری فوریه (سیگنال‌های حقیقی):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\
 &\stackrel{k \rightarrow -k}{\Rightarrow} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \\
 &\Rightarrow x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t} + (a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t})^*)
 \end{aligned}$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

اگر $x(t) = x^*(t)$ باشد:

$$\Rightarrow x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t} + (a_k e^{jk\omega_0 t})^*) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re}(a_k e^{jk\omega_0 t}), \quad a_k = A_k \cdot e^{j\theta_k}$$

$$\Rightarrow a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re}(A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

۳-۲-۱- تعیین ضرایب سری فوریه

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

طرفین رابطه بالا را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب می‌کنیم و از طرفین رابطه روی یک دوره تناوب انتگرال می‌گیریم:

$$x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt}_I$$

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + \frac{1}{T} \int_0^T j \sin(k-n)\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

اگر $k=n$ باشد، مقدار I طبق اثبات برابر واحد شده که در نتیجه ضرایب سری فوریه از رابطه زیر بدست می‌آیند

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

۳-۲-۲- همگرایی سری فوریه

سؤال: سیگنال متناوب $x(t)$ تحت چه شرایطی دارای نمایش سری فوریه است؟

شرایط دیریکله:

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot x(t)^* dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

(۱) سیگنال مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد:

(۲) برای يك سیگنال متناوب که تعداد محدودی ناپیوستگی در هر دوره تناوب دارد، نمایش سری فوریه در همه جا به جز نقاط منفرد ناپیوستگی برابر سیگنال است و در نقاط ناپیوستگی سری به مقدار متوسط سیگنال در آن نقطه همگرا می‌شود. تذکر: در کلیه موارد عملی سری فوریه را می‌توان به کار برد. اما سیگنال‌هایی که شرایط دیریکله را ارضاء نمی‌کنند طبیعت نامعقولی دارند، در نتیجه عموماً در زمینه‌های عملی ظاهر نمی‌شوند.

(مثال ۶)

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) \quad (\text{الف})$$

$$= 1 + (\frac{1}{2j} + 1) e^{j\omega_0 t} + (-\frac{1}{2j} + 1) e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1}^* = 1 + \frac{1}{2j}, \quad a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j)$$

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = a_{-1}^* = \frac{1}{2j} \quad (\text{ب})$$

تمرین: سیگنال زیر شامل چه هارمونی‌هایی است؟

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j10\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-j10\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{j11\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{-j11\omega_0 t}$$

یادآوری:

اگر $x(t) = x(t + T)$ در این صورت سیگنال دارای سری فوریه است پس:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

"فرمول سنتز"

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt$$

"فرمول آنالیز"

تذکر ۱: مجموعه ضرایب $\{a_k\}$ را ضرایب سری فوریه یا ضرایب طیفی $x(t)$ می‌نامند. این ضرایب در حالت کلی مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سیگنال در هارمونی متناظر است.

تذکر ۲: ضریب a_0 مؤلفه DC یا ثابت سیگنال است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

مقدار متوسط

تمرین ۱: چه تفاوتی میان $u(t)$ و $u(2t)$ و $u(\frac{t}{2})$ وجود دارد؟

تمرین ۲: چه تفاوتی میان $u(t - T_0)$ و $u(2t - T_0)$ و $u(\frac{t}{2} - T_0)$ وجود دارد؟

۳-۳- خواص سری فوریه زمان پیوسته

۳-۳-۱- خطی بودن

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) &\xrightarrow{f_s} b_k \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ z(t) = Ax(t) + By(t) &\xrightarrow{f_s} z(t) = Aa_k + Bb_k \quad ; \quad z(t) = z(t + T_0) \end{aligned}$$

۳-۳-۲- انتقال زمانی

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) = x(t - t_0) &\xrightarrow{f_s} b_k = a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} &\Rightarrow x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \end{aligned}$$

۳-۳-۳- وارون سازی زمانی

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) = x(-t) &\xrightarrow{f_s} b_k = a_{-k} \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} &\Rightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \end{aligned}$$

$$x(t) = x(-t) \Rightarrow a_k = a_{-k} \quad (\text{الف})$$

$$x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = -a_{-k} \quad (\text{ب})$$

۳-۳-۴- تغییر مقیاس زمانی

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k ; \quad x(t) = x(t + T_0)$$

$$y(t) = x(at) \xrightarrow{f_s} a_k ; \quad y(t) = y(t + \frac{T_0}{a})$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0/a})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jka\omega_0 t}$$

۳-۳-۵- مزدوج گیری

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k$$

$$x^*(t) \xrightarrow{f_s} a_{-k}^*$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{+jk(\frac{2\pi}{T_0})at}$$

(۱) اگر سیگنال حقیقی باشد چون $x(t) = x^*(t)$ پس $a_k = a_{-k}^*$

(۲) اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد، $a_k = a_{-k}^*$ و $a_k = a_{-k}$ آنگاه ضرایب سری فوریه مطلقاً حقیقی و زوج هستند.

(۳) اگر سیگنال حقیقی و فرد باشد، $a_k = -a_{-k}^*$ و $a_k = a_{-k}$ آنگاه ضرایب سری فوریه مطلقاً موهومی و فرد هستند.

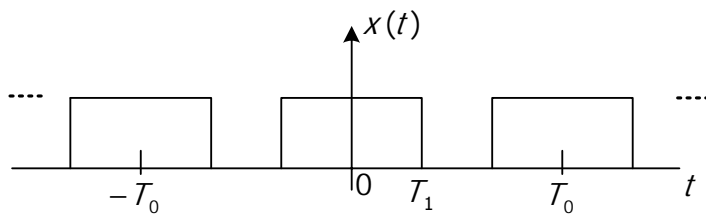
۳-۳-۶- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$|a_k|^2$ نشان دهنده قدرت سیگنال در هارمونی k ام است.

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

مثال (۱) ضرایب سری فوریه شکل مقابل را به دست آورید.

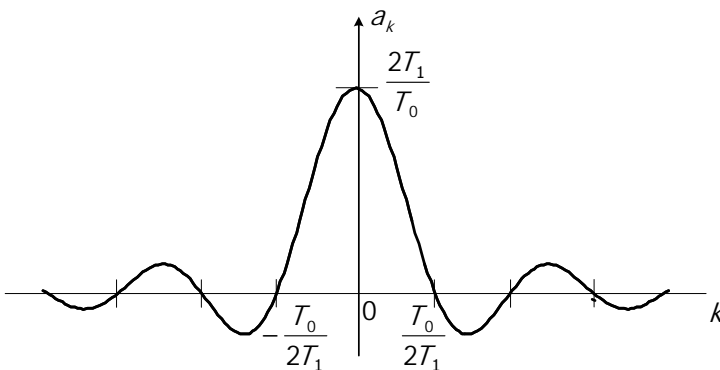


$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{-1}{jk \frac{2\pi}{T_0}} e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \bigg|_{-T_1}^{T_1} \\ &= \frac{-1}{jk2\pi} \cdot (e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1} - e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1}) = \frac{-1}{jk2\pi} (-2j) \sin(k \frac{2\pi}{T_0} \cdot T_1) \\ &\Rightarrow a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \end{aligned}$$

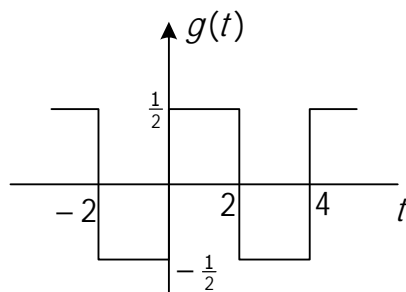
$$\text{sinc}(k) = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} \Rightarrow a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}(\frac{2T_1}{T_0} k)$$

: با توجه به تعریف



$$\begin{cases} a) T_0 = \text{cte}, T_1 \rightarrow 0 \\ b) T_1 = \text{cte}, T_0 \rightarrow \infty \end{cases}$$

مثال ۲)



$$\begin{aligned} g(t) &= x(t-1) - \frac{1}{2} \\ T_0 &= 4, \quad T_1 = 1 \end{aligned}$$

$$x(t) \rightarrow a_k$$

$$x(t-t_0) \rightarrow a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} = a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{4})t}$$

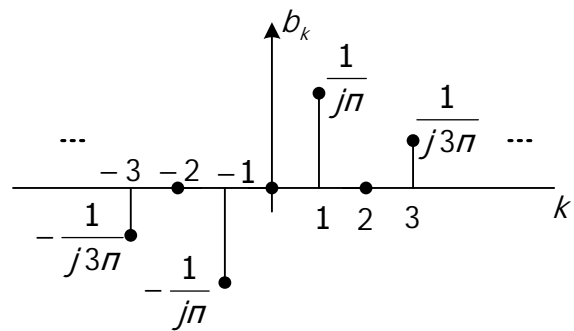
$$e^{jk2\pi} = 1 \quad *$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk \frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk \frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2}$$

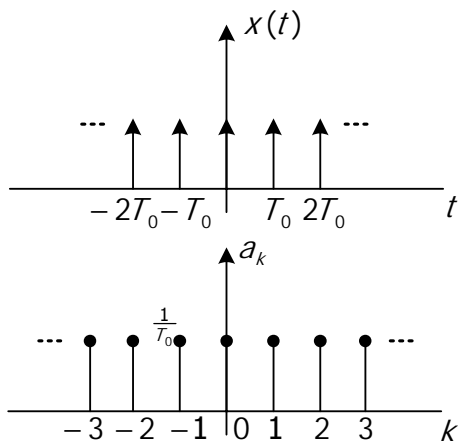
$$\Rightarrow g(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk \frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{\pi}{2})t}$$

$$b_k = \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk} = \frac{e^{-jk \frac{\pi}{2}}}{k\pi} \cdot \left(\frac{e^{jk \frac{\pi}{2}} - e^{-jk \frac{\pi}{2}}}{2j} \right) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - (-1)^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = 0 & k : \text{even} \\ b_k = \frac{1}{jk\pi} & k : \text{odd} \end{cases}$$



۳-۴. قطار ضربه



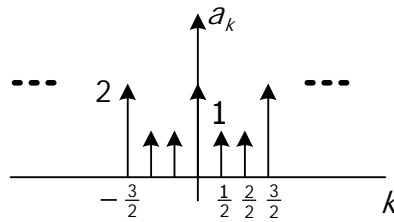
$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{m}{2}) + \delta(t - \frac{3m}{2})$$

مثال ۳



$$T_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_{T_0=\frac{3}{2}} (\delta(t + \frac{1}{2}) + 2\delta(t) + \delta(t - \frac{1}{2})) e^{-jk\frac{2\pi}{3}t} dt = \frac{2}{3} (2 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}k)) = \frac{4}{3} (1 + \cos(\frac{2\pi}{3}k))$$

۳-۵- سری فوریه زمان گسسته

$$\varphi[n] = e^{j\Omega n}$$

$$\varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \cos(k\frac{2\pi}{N}n) + j\sin(k\frac{2\pi}{N}n)$$

$$\frac{2\pi}{k\frac{2\pi}{N}} = \frac{N}{K}, (k \in Z)$$

تک تک هارمونی‌ها دوره تناوب N دارند:

$$\varphi_k[n] = \varphi_k[n+N] \Rightarrow \varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \varphi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \cdot e^{j2\pi n} = \varphi_k[n], (n \in Z)$$

$$\Rightarrow \varphi_k[n] = \varphi_{k+rN}[n+N], (r \in Z)$$

$$x[n] = x[n+N]$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \Rightarrow a_k = a_{k+rN}, \begin{cases} N \in Z^+ \\ r \in Z \\ k \in Z \end{cases}$$

۳-۶-۲. خواص سری فوریه زمان گسسته

۳-۶-۱. تفاضل اول

$$\begin{aligned}
 x[n] &= x[n+N] \Rightarrow x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\
 x[n-1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\
 \Rightarrow y[n] &= x[n] - x[n-1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k (1 - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}) \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}
 \end{aligned}$$

۳-۶-۲. رابطه پارسوال

$$\frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

مثال ۴) فرض کنید اطلاعات زیر درباره دنباله $x[n]$ داده شده:

$$N = 6, \quad x[n] = x[n+N] \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1 \quad (\text{ج})$$

در میان مجموعه سیگنال‌هایی که در سه شرط بالا صدق می‌کنند $x[n]$ را پیدا کنید که کمترین توان را در هر دوره تناوب دارد.

$$x[n] = \sum_{k=\langle 6 \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{6})n} = \sum_{k=0}^5 a_k \cdot e^{jk(\frac{\pi}{3})n} \quad ; \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \text{ ضرایب مجموعه}$$

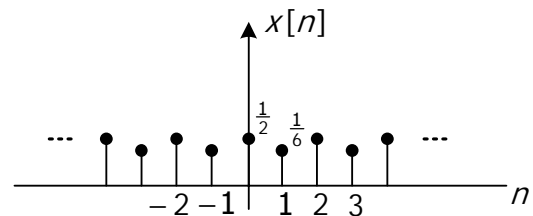
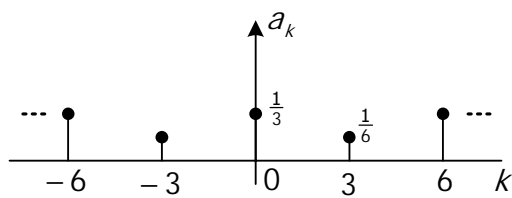
$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-jk(\frac{\pi}{3})n} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] = \frac{1}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 x[n] e^{-jk(\frac{\pi}{3})n} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 x[n] e^{-jn\pi} = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = \frac{1}{6}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{6}$$

با توجه به رابطه پارسوال، برای احراز آخرین شرط ($x[n]$ کمترین توان را در هر دوره تناوب دارد) بایستی سایر ضرایب صفر در نظر گرفته شود ($a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$). بدین ترتیب با توجه به ضرایب a_0 و a_3 بدست آمده می‌توان سیگنال $x[n]$ را با استفاده از فرمول سنتز بدست آورد.

$$x[n] = \sum_{k=0}^5 a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (-1)^n$$

$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ \frac{1}{6} & n=1 \\ \frac{1}{2} & n=2 \\ \frac{1}{6} & n=3 \\ \frac{1}{2} & n=4 \\ \frac{1}{6} & n=5 \end{cases}$$



۷-۳- سیستم‌های LTI و سری فوریه زمان پیوسته

سیستم LTI با ورودی $x(t)$ ، خروجی $y(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{c} LTI \\ \boxed{h(t)} \end{array} \quad x(t) \longrightarrow \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

پاسخ سیستم را به ورودی نمایی $x(t) = e^{st}$ را در حالت کلی بدست می‌آوریم:

$$x(t) = e^{st} \Big|_{s=r+j\omega} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

۷-۳-۱- پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$s = j\omega, x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{الف})$$

پس به این ترتیب خروجی سیستم همان ورودی $x(t) = e^{j\omega t}$ در حاصل ضرب پاسخ فرکانسی سیستم خواهد بود. پاسخ فرکانسی هر سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = x(t + T_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \dots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \dots \quad (\text{ب})$$

با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ به مجموعه ورودی‌ها برابر مجموع پاسخ‌ها به تک‌تک ورودی‌هاست.

$$\Rightarrow y(t) = \dots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} \cdot H(-j\omega_0) + a_0 \cdot H(j0) + a_1 e^{j\omega_0 t} \cdot H(j\omega_0) + \dots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot H(jk\omega_0), \quad H(jk\omega_0) = H(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

اگر ورودی به سیستم LTI متناوب و با ضرایب سری فوریه a_k باشند، خروجی سیستم نیز متناوب (با همان دوره تناوب ورودی) $b_k = a_k H(jk\omega_0)$ خواهد بود. با عبور ورودی متناوب از سیستم می‌توان برخی از هارمونی‌ها را تقویت، تضعیف و یا به طور کامل حذف نمود.

مثال ۱) اگر $x(t) = e^{j2t}$, $y(t) = x(t-3)$ خروجی چه خواهد بود؟

روش اول:

$$x(t) = e^{j2t} \quad , \quad y(t) = x(t-3) \Rightarrow y(t) = e^{j2(t-3)}$$

روش دوم:

$$h(t) = \delta(t-3) \quad , \quad H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3) e^{-j\omega t} dt = e^{-j3\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{j2t} \cdot H(j\omega) \Big|_{\omega=2} = e^{j2t} \cdot e^{-j6}$$

روش سوم:

$$h(t) = \delta(t-3) \quad , \quad x(t) = e^{j2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda-3) e^{j2(t-\lambda)} d\lambda = e^{j2(t-3)}$$

مثال ۲) اگر $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$, $y(t) = x(t-3)$ خروجی چه خواهد بود؟

ابتدا سری فوریه ورودی را نوشته و آنگاه سری فوریه خروجی را بدست می آوریم.

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{-j7t}$$

$$h(t) = \delta(t-3) \Rightarrow H(j\omega) = e^{-j3\omega}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{j4t} H(j4) + \frac{1}{2} e^{-j4t} H(-j4) + \frac{1}{2} e^{j7t} H(j7) + \frac{1}{2} e^{-j7t} H(-j7)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j4t} \cdot e^{-j12} + \frac{1}{2} e^{-j4t} \cdot e^{j12} + \frac{1}{2} e^{j7t} \cdot e^{-j21} + \frac{1}{2} e^{-j7t} \cdot e^{j21}$$

$$= \cos(4t-12) + \cos(7t-21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \\ a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \\ a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi)t}$$

به سیستم LTI با پاسخ

مثال ۳) ورودی $h(t) = e^{-t} u(t)$ اعمال می شود. مطلوب است ضرایب سری فوریه خروجی؟

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = \left. \frac{-1}{j\omega + 1} e^{-(1+j\omega)t} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

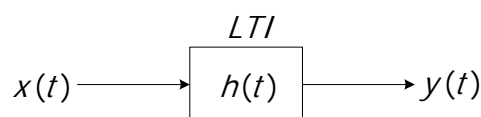
$$H(jk\omega_0) = H(jk2\pi) = \frac{1}{1 + jk2\pi}$$

$$b_0 = 1 \times 1 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + j2\pi}, \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - j2\pi},$$

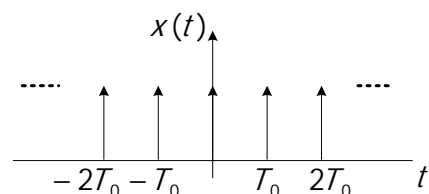
$$b_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + j4\pi}, \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - j4\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 + j6\pi}, \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - j6\pi}$$

۳-۷-۲. پاسخ سیستم LTI به قطار ضربه

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT_0)$$



$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_0}, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk\omega_0 t}$$



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T_0} H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

سری فوریه خروجی:

۳-۸-۱. فیلتر کردن (زمان پیوسته)

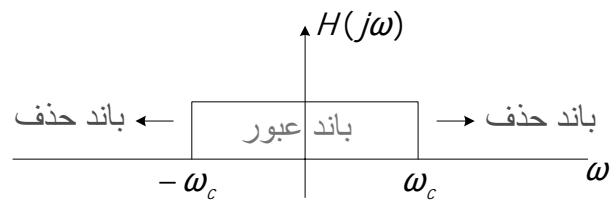
فیلترهای شکل دهنده فرکانسی: شکل طیف سیگنال ورودی را تغییر می دهد.

فیلترهای انتخابگر فرکانسی: بعضی از فرکانس ها را اساساً بدون اعوجاج عبور داده و سایر فرکانس ها را تضعیف یا حذف می کند. (notch filter)

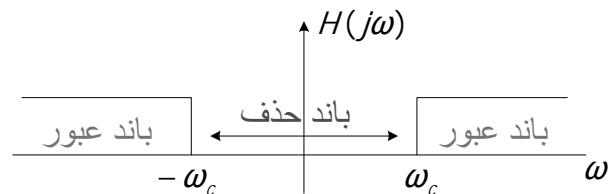
۳-۸-۱. انواع فیلترها

فیلتر پایین گذر (*LPF):

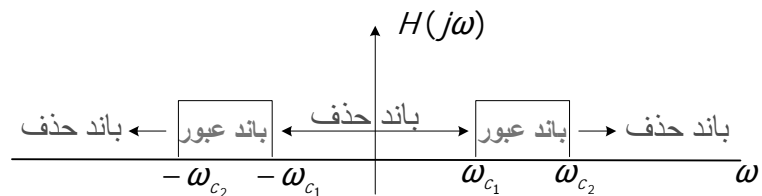
* 1. Low Pass Filter



فیلتر بالا گذر (HPF*):



فیلتر میان گذر (BPF*):



۳-۸-۲- تشخیص نوع فیلتر:

با توجه به داده‌های مسئله به دو روش می‌توان نوع فیلتر را تشخیص داد:

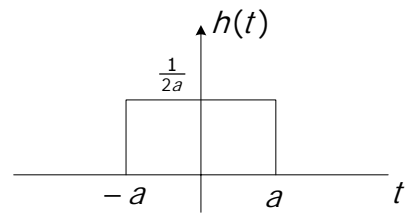
۱) اگر در صورت مسئله پاسخ ضربه سیستم $h(t)$ داده شده باشد، با بدست آوردن $H(j\omega)$ و سپس رسم اندازه پاسخ فرکانسی $|H(j\omega)|$ به ازای فرکانس‌های مختلف، نوع فیلتر را تشخیص می‌دهیم.

۲- اگر در صورت مسئله معادله دیفرانسیل سیستم LTI داده شده باشد، ابتدا با اعمال تابع $x(t) = e^{j\omega t}$ بعنوان ورودی سیستم، $H(j\omega)$ را با توجه به رابطه $y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$ بدست می‌آوریم. سپس اندازه پاسخ فرکانسی سیستم $|H(j\omega)|$ را ترسیم می‌کنیم تا نوع فیلتر را تشخیص دهیم.

مثال ۴: پاسخ ضربه سیستم $h(t) = \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{t}{2a}\right)$ داده شده است. سیستم LTI مذکور همانند چه نوع فیلتری عمل می‌کند؟

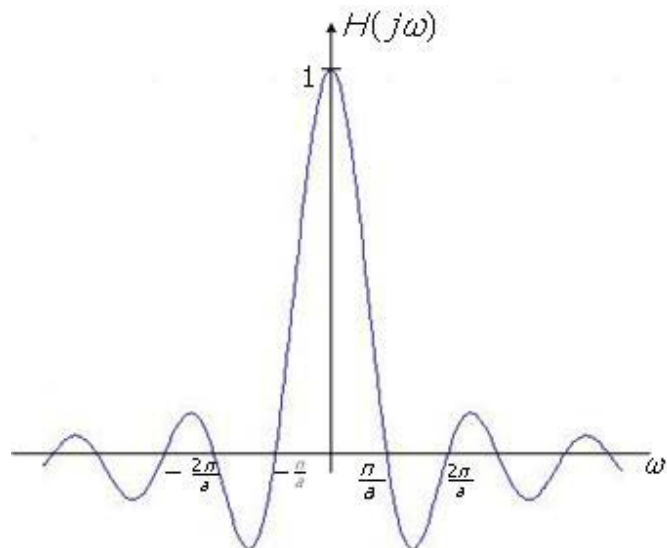
2. High Pass Filter

3. Band Pass Filter

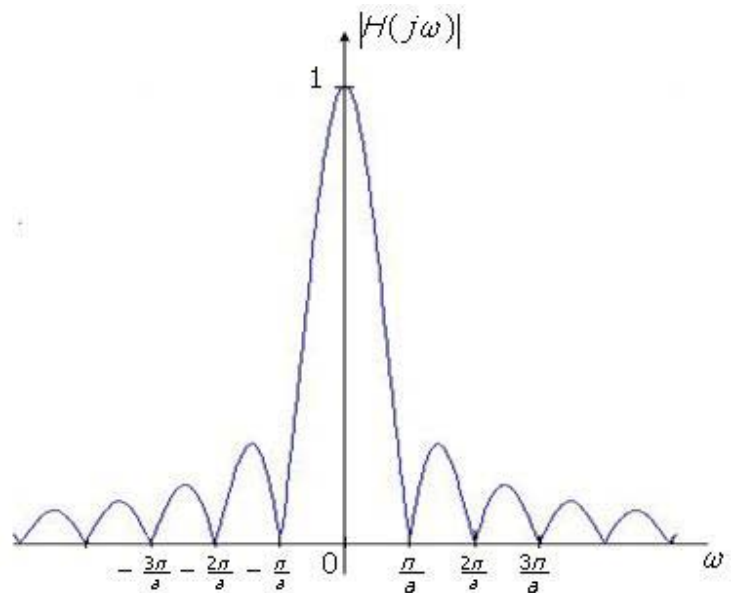


$$H(j\omega) = \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j2a\omega} (e^{-ja\omega} - e^{ja\omega}) = \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} = \frac{\sin(\frac{a\omega}{\pi} \pi)}{\frac{a\omega}{\pi} \pi}$$

$$= \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot a\right); \quad \frac{\omega}{\pi} \cdot a = m, \quad m \in \mathbb{Z}$$



برای تشخیص نوع فیلتر بایستی $|H(j\omega)|$ را ترسیم نمائیم.



که با توجه به اندازه پاسخ فرکانسی سیستم نوع فیلتر، فیلتر پایین گذر LPF غیرایده‌آل است چون نزدیک صفر بیشترین دامنه را دارد و با افزایش فرکانس اندازه پاسخ فرکانسی بشدت کاهش و به سمت صفر میل می‌کند.

مثال ۵: اگر $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $x(t) = e^{j\omega t}$ نوع فیلتر را تعیین کنید.

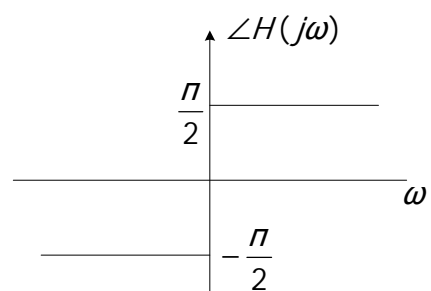
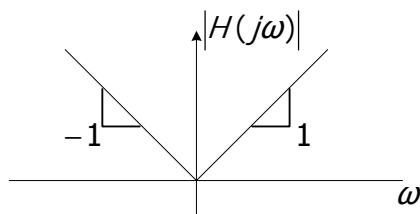
$$x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$X(t)$ و $y(t)$ را در رابطه داده شده برای سیستم LTI جایگذاری می‌کنیم تا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آوریم.

$$e^{j\omega t} H(j\omega) = j\omega e^{j\omega t} \Rightarrow H(j\omega) = j\omega$$

$$|H(j\omega)| = |\omega|$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2}; & \omega < 0 \end{cases}$$



با توجه به اندازه پاسخ فرکانسی سیستم نوع فیلتر بالاگذر HPF است.

مثال ۶) اگر $y'(t) + 2y(t) = \cos 3t$ مطلوب است:

الف) این سیستم به عنوان چه فیلتری عمل می‌کند.

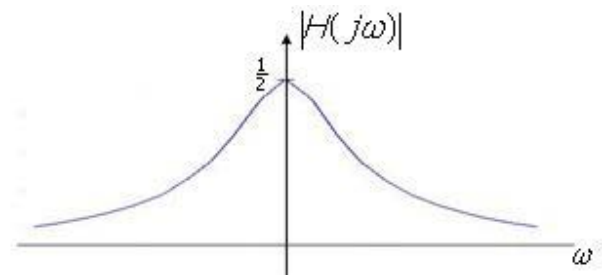
ب) سری فوریه خروجی را با توجه به ورودی داده شده به دست آورید.

حل الف:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t); \quad x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$j\omega e^{j\omega t} H(j\omega) + 2e^{j\omega t} H(j\omega) = e^{j\omega t};$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}, \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$



با توجه به شکل نوع فیلتر پایین‌گذر LPF است.

حل ب:

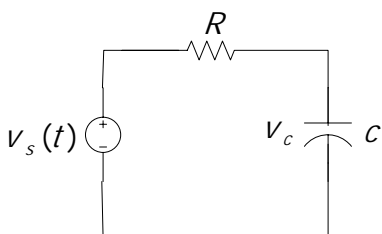
$$x(t) = \cos 3t = \frac{1}{2} e^{j3t} + \frac{1}{2} e^{-j3t}; \quad \omega_0 = 3$$

$$b_1 = \frac{1}{2} H(j3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 + 3j}, \quad b_{-1} = \frac{1}{2} H(-j3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 - 3j}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 + 3j} e^{j3t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 - 3j} e^{-j3t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13} e^{j56.3}} e^{j3t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13} e^{-j56.3}} e^{-j3t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \cos(3t - 56.3)$$

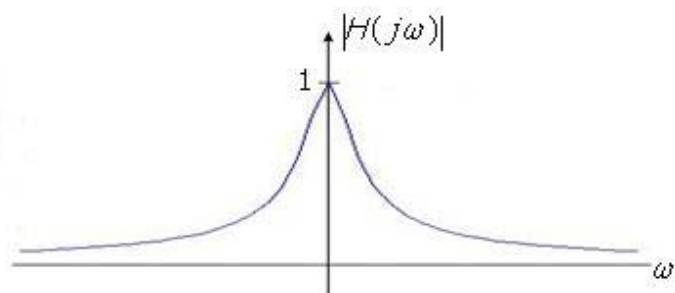
مثال ۷) $H(j\omega)$ و نوع فیلتر را تعیین کنید.



$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t); \quad v_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow v_c(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$\Rightarrow RC(j\omega) e^{j\omega t} H(j\omega) + e^{j\omega t} H(j\omega) = e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC(j\omega) + 1}; \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

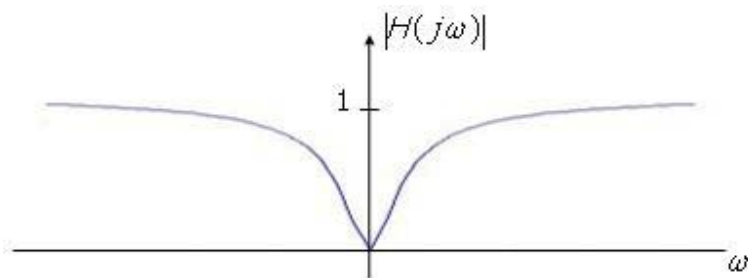


حال اگر خروجی دو سر مقاومت باشد:

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_R(t) = \frac{dv_s(t)}{dt}; \quad v_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow v_R(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$\Rightarrow j\omega e^{j\omega t} + \frac{1}{RC}e^{j\omega t} H(j\omega) = j\omega e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{\frac{1}{RC} + j\omega}; \quad |H(j\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{(\frac{1}{RC})^2 + \omega^2}}$$



تذکر: همانطوریکه ملاحظه می‌شود بسته به اینکه خروجی در سر خازن و یا مقاومت در نظر گرفته شود نوع فیلترینگ از پایین‌گذر به بالاگذر تغییر می‌کند.

۹-۳- سیستم‌های LTI و سری فوریه زمان گسسته

$$x[n] = Z^n \Rightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z^{n-m} \cdot h[m] = Z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] Z^{-m} = Z^n \cdot H(z) \quad (\text{الف})$$

$$; H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] Z^{-n}$$

$$Z = e^{j\Omega}; x[n] = e^{j\Omega n} \Rightarrow y[n] = e^{j\Omega n} \cdot H(e^{j\Omega}); H(e^{j\Omega}) \stackrel{\Delta}{=} H(j\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \quad (\text{ب})$$

$$x[n] = x[n+N] \quad ; \quad x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (\text{ج})$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} b_k \cdot H(jk \frac{2\pi}{N}) \quad ; \quad H(jk \frac{2\pi}{N}) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

تذکر: در مورد سیستم زمان گسسته و LTI با ورودی متناوب، خروجی نیز متناوب خواهد بود. دوره تناوب خروجی و ورودی یکسان بوده و ضرایب سری فوریه خروجی از رابطه داده شده در بند ۳ بدست می‌آید.

یادآوری (سری هندسی):

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \alpha = 1 \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \alpha^n = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) \stackrel{?}{=} \frac{4}{5} \quad \text{تمرین :}$$

مثال ۱) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \alpha^n u[n]$ داده شده است. پاسخ $y[n]$ را به ورودی $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{N}n)$ بدست آورید.

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ به تک‌تک ورودی‌های نمایی مختلف طبق بند ۲ را بدست آورده و با یکدیگر جمع می‌کنیم تا پاسخ کلی سیستم به ورودی مذکور تعیین شود.

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

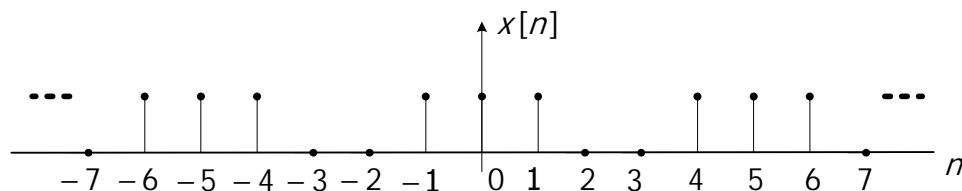
$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} \quad , \quad b_{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

مثال ۲) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و ورودی متناوب $x[n]$ داده شده است. سری فوریه خروجی را بدست آورید.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \quad , \quad x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm 1 \\ 0 & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases} \quad ; N = 6$$



$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{6} (e^{-jk\frac{2\pi}{6}(-1)} + 1 + e^{-jk\frac{2\pi}{6}(1)}) = \frac{1}{6} (1 + 2 \cos(k \frac{\pi}{3}))$$

$$\begin{aligned}
 H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cdot e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{j\Omega}\right)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{j\Omega}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^n \\
 \Rightarrow H(j\Omega) &= \frac{\frac{1}{2} e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \cos(\Omega) + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5 - 4 \cos(\Omega)} \\
 H(jk \frac{2\pi}{6}) &= \frac{3}{5 - 4 \cos(k \frac{\pi}{3})} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{6} (1 + 2 \cos(k \frac{\pi}{3})) \cdot H(jk \frac{\pi}{3}) e^{jk \frac{\pi}{3} n}
 \end{aligned}$$

۱۰-۳- فیلتر کردن (زمان گسسته)

$$\begin{array}{c}
 LTI \\
 \boxed{h[n]} \\
 x[n] \longrightarrow \longrightarrow y[n]
 \end{array}
 \quad
 H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n}$$

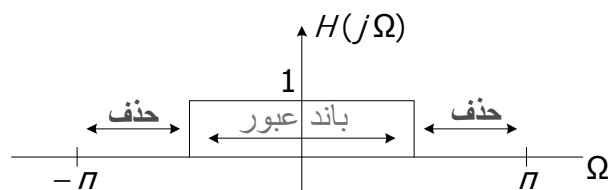
$$H(j\Omega) = H(j(\Omega + 2\pi))$$

با دوره تناوب 2π متناوب است پس می‌توان نوشت:

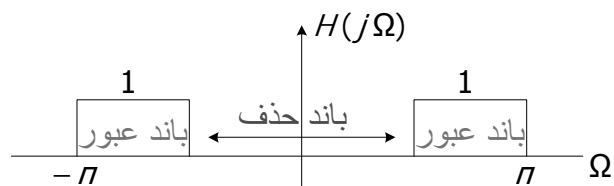
بدین ترتیب برای تشخیص نوع فیلتر در سیستم‌های زمان گسسته به اندازه پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ توجه شود.

۱۰-۱-۳- انواع فیلترها

فیلتر پائین‌گذر (LPF*):



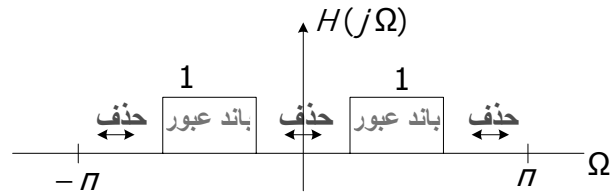
فیلتر بالاگذر (HPF*):



* 1. Low Pass Filter

2. High Pass Filter

فیلتر میان‌گذر (BPF*):



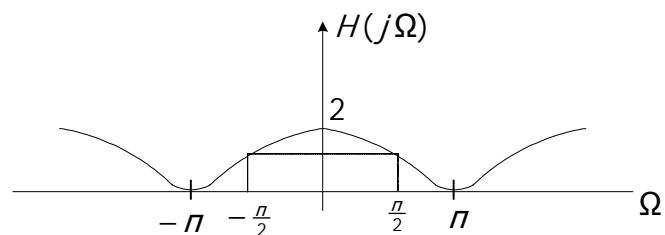
مثال ۳) در سیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$ ، پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] + x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$h[n] = y[n]|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \right) e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2}e^{j\Omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} = 1 + \cos(\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega = -\pi \\ 1 & \Omega = -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \Omega = 0 \\ 1 & \Omega = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \Omega = \pi \end{cases}$$



با توجه به $H(j\Omega)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ (چون همواره مثبت است لذا با $|H(j\Omega)|$ برابر خواهد بود) نوع فیلتر پایین‌گذر LPF است.

مثال ۴) در سیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n] = -\frac{1}{2}x[n+2] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

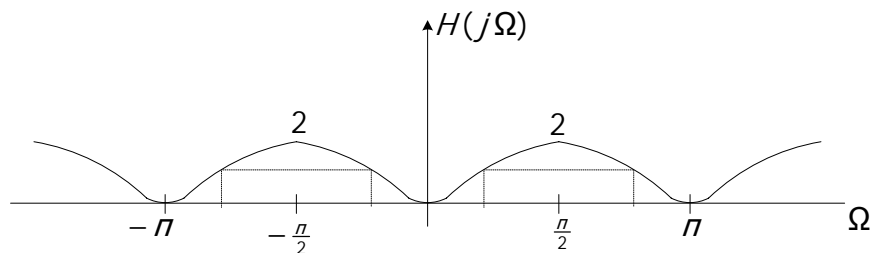
از آنجایی که $h[n]$ در مسئله خواسته شده است، طبق بند ۲ مستقیماً $H(j\Omega)$ را بدست می‌آوریم.

$$x[n] = e^{j\Omega n} \Rightarrow y[n] = e^{j\Omega n} H(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega n} H(j\Omega) = -\frac{1}{2} e^{j\Omega(n+2)} + e^{j\Omega n} - \frac{1}{2} e^{j\Omega(n-2)}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = -\frac{1}{2} e^{j2\Omega} + 1 - \frac{1}{2} e^{-j2\Omega} = 1 - \cos(2\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega = 0 \\ 1 & \Omega = \pm \frac{\pi}{4} \\ 2 & \Omega = \pm \frac{\pi}{2} \\ 1 & \Omega = \pm \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \Omega = \pm \pi \end{cases}$$



با در نظر گرفتن پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ نوع فیلتر میان‌گذر BPF است.

مثال ۵) سیستم LTI و علی با معادله تفاضلی زیر داده شده است.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}) x[n-k]$$

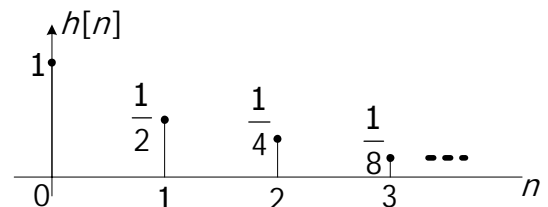
مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه $h[n]$ ؟

ب) پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ ؟

ج) نوع فیلتر ؟

$$h[n] = y[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}) \delta[n-k] = \delta[n] + 2^{-1} \delta[n-1] + 2^{-2} \delta[n-2] + \dots$$

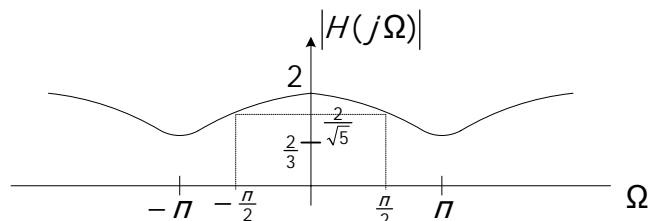


$$H(j\Omega) = 1 + 2^{-1} e^{-j\Omega} + 2^{-2} e^{-j2\Omega} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos \Omega + j \frac{1}{2} \sin \Omega}$$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} \cos \Omega)^2 + (\frac{1}{2} \sin \Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} - \cos(\Omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos(\Omega)}}$$

$$|H(j\Omega)| = \begin{cases} 2 & \Omega=0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \Omega=\pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3} & \Omega=\pm\pi \end{cases}$$



با در نظر گرفتن اندازه پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ ، از آنجایی که با افزایش فرکانس میزان تضعیف با توجه به شکل زیاد می‌شود، نوع فیلتر را می‌توان پایین‌گذر LPF دانست.

۱۱-۳- خلاصه

اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t) = f(t+T)$ تابع $G(t) = f(f(t))$ نیز پریودیک با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلی تابع $f(t)$ باشد، در این صورت دوره تناوب اصلی $G(t)$ لزوماً T نیست. اگر سیگنال در طی یک دوره تناوب (T) فرموله شود $(f(t))$ ، با توجه به رابطه گفته شده سیگنال متناوب در کل زمان‌ها بیان می‌شود $(\tilde{f}(t))$.

سری فوریه، تنها برای توابع متناوب بیان می‌شود، توابعی که دارای دوره تناوب

$$x(t) = x(t+T) \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ اصلی می‌باشند.}$$

در صورتی که بتوان سیگنال را به صورت مجموعه‌ای از هارمونی‌ها بسط داد، می‌توان به این سوال که در یک سیگنال چه فرکانس‌هایی و با چه قدرتی وجود دارند را پاسخ داد.

پاسخ سیستم LTI به نمایی مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ یا به طور کلی $e^{j\omega t}$ به فرم بسیار ساده‌ای تعریف می‌شود.

هرچه هارمونی‌ها بالاتر باشد فرکانس‌ها بالاتر است و برعکس هر چه هارمونی‌ها پایین‌تر باشد فرکانس‌ها پایین‌تر است.

اگر سیگنالی در هارمونی‌های بالا ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس بالا است و برعکس اگر سیگنالی در هارمونی‌های پایین ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس پایین است.

به شرط برقرار بودن شرایط دیریکله همگرایی سری فوریه قابل بررسی است.

مجموعه ضرایب $\{a_k\}$ را ضرایب سری فوریه یا ضرایب طیفی $x(t)$ می‌نامند. این ضرایب در حالت کلی مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سیگنال در هارمونی متناظر است. ضریب a_0 مؤلفه DC یا ثابت سیگنال است. با دانستن خواص سری فوریه، در برخی مسائل برای پیدا کردن ضرایب سری فوریه لزومی به استفاده از تعریف گفته شده برای سری فوریه نیست.

اگر ورودی ضرایب فوریه a_k باشند، خروجی $b_k e^{jk\omega_0}$ می‌باشد. می‌توان تعدادی از ورودی‌ها را از خروجی حذف کرد. اگر سیستم ورودی سیستم LTI متناوب باشد، خروجی نیز با همان دوره تناوب متناوب خواهد بود. با توجه به ورودی و خروجی سیستم می‌توان نوع فیلتر و شکل آن را بدست آورد.

فصل چهارم

تبدیل فوریه سیستم‌های زمان پیوسته

۴-۱- تعریف تبدیل فوریه زمان پیوسته

$$f(t) \xleftrightarrow{f^{-1}} F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad ; \quad \omega = 2\pi f$$

۴-۲- شرایط وجود تبدیل فوریه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

۱- سیگنال مطلقاً انتگرال باشد.

۲- در طول هر بازه محدود سیگنال تعداد محدودی Max یا Min داشته باشد.

۳- در طول هر بازه محدود سیگنال تعداد محدودی ناپیوستگی داشته باشد.

مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-at} u(t)$, $a > 0$ را بدست آورده و اندازه و فاز آن را بدست آورده و ترسیم نمایید.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

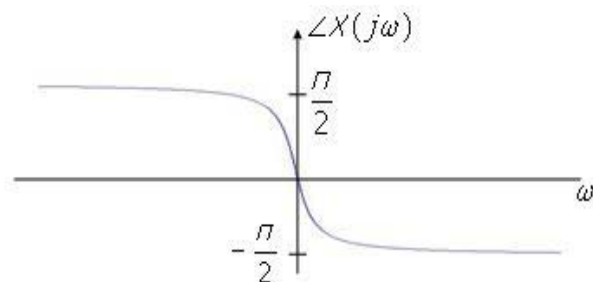
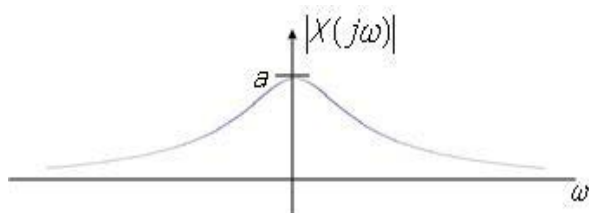
$$X(j\omega) = |X(j\omega)| \cdot e^{j\angle X(j\omega)};$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

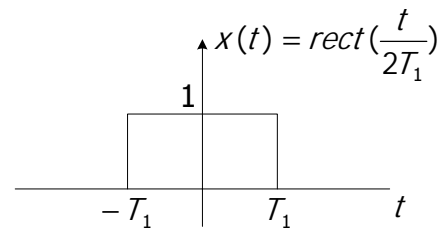
$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

$$|X(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a}, & \omega = 0 \\ 0, & \omega = \pm\infty \end{cases}$$

$$\angle X(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ \mp \frac{\pi}{2}, & \omega = \pm\infty \end{cases}$$



مثال ۲) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.

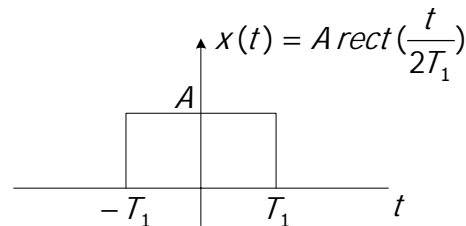


$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega T_1 \cdot \frac{1}{T_1}}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = 2T_1 \frac{\sin(\pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi})}{\pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi}} = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1\right)$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{یادآوری:}$$

تذکر: در حالت کلی اگر سیگنال پالسی به فرم زیر باشد آنگاه:



$$X(j\omega) = 2T_1 A \times \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1\right) \quad \text{سطح پالس} \times \text{sinc} = \frac{\omega}{\pi} \times (\text{نصف عرض پالس})$$

۴-۳- خواص تبدیل فوری

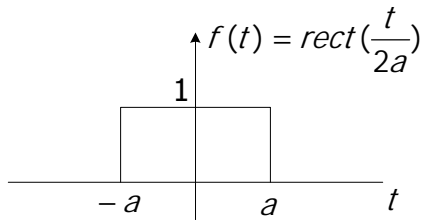
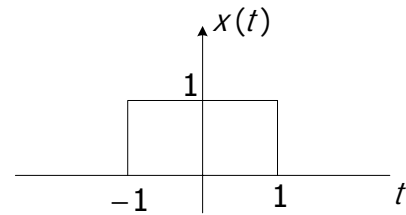
۴-۳-۱- خطی بودن

$$\begin{cases} f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega) \end{cases} \Rightarrow af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$$

۴-۳-۲- تغییر مقیاس زمانی

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

مثال ۳) به کمک خواص، تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



$$F(j\omega) = 2a \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot a\right)$$

می‌دانیم:

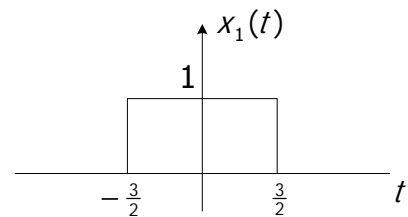
$$x(t) = f(at) \Leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) = \frac{2a}{|a|} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot a\right) = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

۴-۳-۳- شیفت زمانی

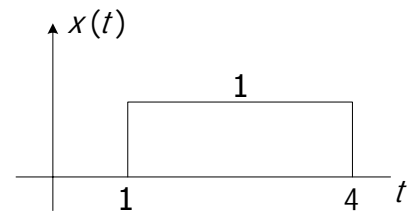
$$f(t) \Leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

مثال ۴) تبدیل فوریه تابع $x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-2.5}{3}\right)$ را به دست آورید.

$$x_1(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{3}\right) \Rightarrow X_1(j\omega) = 3 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right) \quad ۱)$$



$$x(t) = x_1(t - 2.5) \Rightarrow X(j\omega) = e^{-j2.5\omega} \cdot X_1(j\omega) = e^{-j2.5\omega} \times 3 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right) \quad ۲)$$



۴-۳-۴- شیفٲ فرکانسی

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow e^{j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(j(\omega - \omega_0))$$

$$F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

مثال ۵) عكس تبدیل فوریه را بدست آورید.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1$$

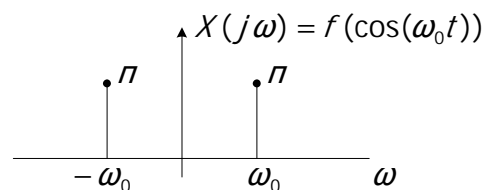
$$\begin{cases} \delta(t) \leftrightarrow 1 \\ 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \end{cases}$$

تذکر: تبدیل فوریه نمایی مختلط $e^{\pm j\omega_0 t}$ را نمی‌توان مستقیماً محاسبه نمود. با توجه به دو رابطه بدست آمده در بالا و با استفاده از خاصیت شیفٲ فرکانسی تبدیل فوریه این توابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{j\omega_0 t} \times 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ e^{-j\omega_0 t} \times 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{f} \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

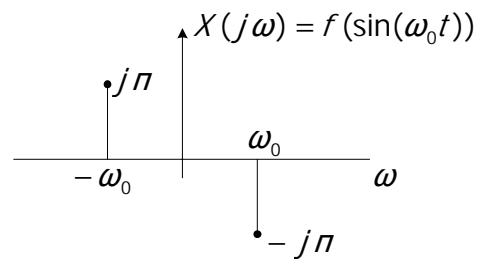
بنابراین تابع $\cos \omega_0 t$ جزو توابعی است که به کمک خواص، تبدیل فوریه‌اش بدست می‌آید. سیگنال $x(t) = \cos \omega_0 t$ مطلقاً حقیقی و زوج است، همانطوری‌که در شکل مشاهده می‌شود تبدیل فوریه آن نیز مطلقاً حقیقی و زوج می‌باشد.



با همان منطق دنبال شده در بالا می‌توان تبدیل فوریه تابع $x(t) = \sin \omega_0 t$ را نیز بدست آورد.

$$\begin{aligned} \sin \omega_0 t &= \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0) \\ &= -\pi j \delta(\omega - \omega_0) + \pi j \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

سیگنال $x(t) = \sin \omega_0 t$ مطلقاً حقیقی و فرد است. تبدیل فوریه این سیگنال همانطوریکه در شکل نیز مشاهده می‌شود مطلقاً موهومی و فرد می‌باشد.



۴-۳-۵- مدولاسیون

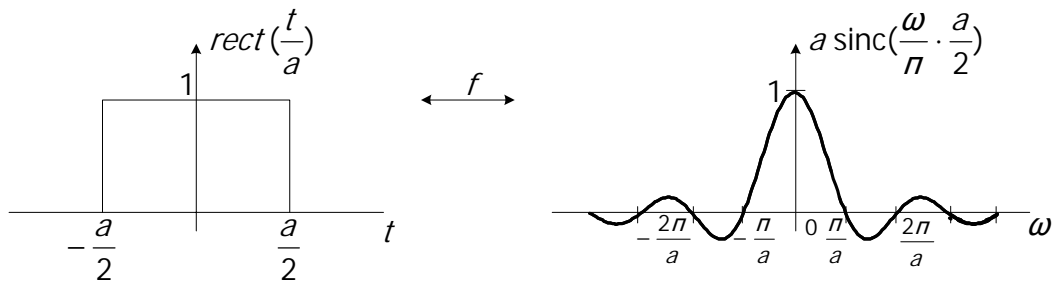
$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} F(j(\omega + \omega_0))$$

$$f(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} f(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t) e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2} F(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} F(j(\omega + \omega_0)) \quad \text{اثبات:}$$

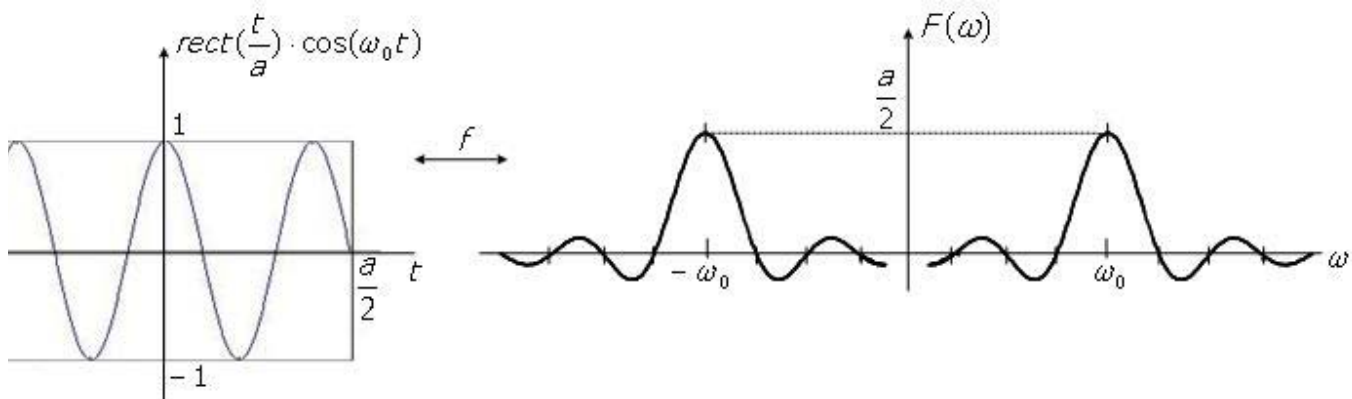
مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید؟

$$\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow ?$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow a \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right)$$



$$\Rightarrow \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{a}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right)$$



۴-۳-۶- مشتق فرکانسی

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow (-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$$

۴-۳-۷- مشتق زمانی

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

۴-۳-۸- مزدوج گیری (تقارن مزدوج)

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f^*(t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

تذکر:

$f(t)$ سیگنال حقیقی و زوج $\Leftrightarrow F(j\omega)$ مطلقاً حقیقی و زوج خواهد بود.

$f(t)$ سیگنال حقیقی و فرد $\Leftrightarrow F(j\omega)$ مطلقاً موهومی و فرد خواهد بود.

۴-۳-۹- خاصیت دوگانگی

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

یا

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

مثال ۲) تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ را به کمک خواص بدست آورید.

$$f(t) = e^{-a|t|} \Rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

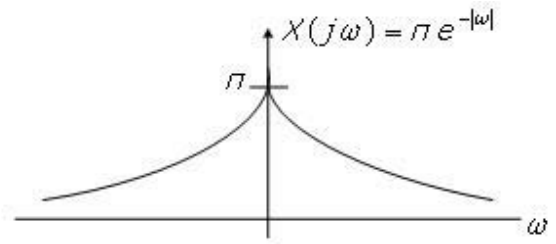
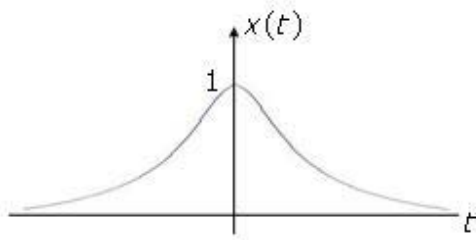
$$= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \xrightarrow{\text{دوگانی}} \frac{2a}{a^2 + t^2} \rightarrow 2\pi e^{-a|\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

$$\text{بنابراین} \quad \frac{2a}{a^2 + t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

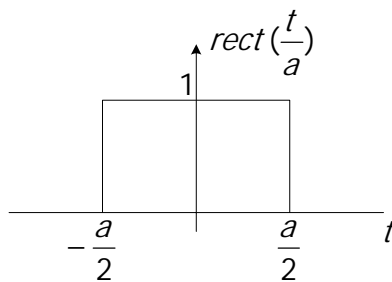
پارامتر $a=1$ را در نظر می گیریم:

$$\frac{2}{1+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1+t^2} \leftrightarrow X(j\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

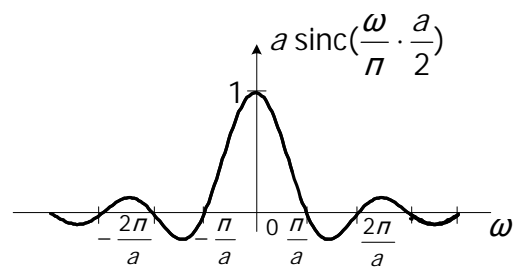


مثال ۳) تبدیل فوریه سیگنال زیر را به کمک خواص بدست آورید.

$$x(t) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right) \leftrightarrow ?$$

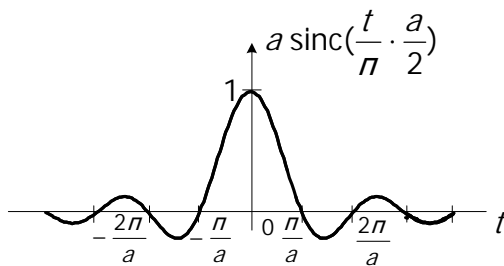


\longleftrightarrow

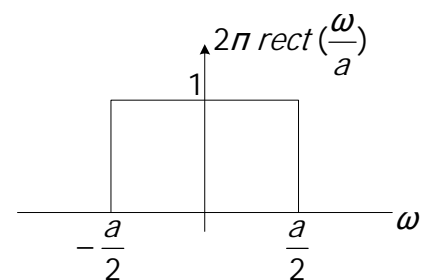


$$a \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \operatorname{rect}\left(-\frac{\omega}{a}\right) = 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x(t) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \operatorname{rect}\left(-\frac{\omega}{a}\right) = 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



\longleftrightarrow



۴-۳-۱۰ ضرب و کانولوشن

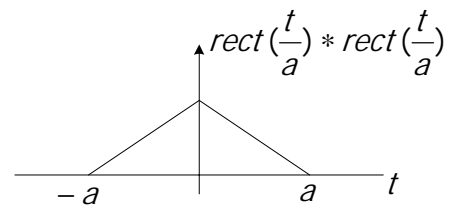
$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{a}\right) * \operatorname{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow ?$$

مثال ۴)

$$\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow a^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right)$$



۴-۳-۱۱- انتگرال

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(j0) \delta(\omega)$$

اثبات:

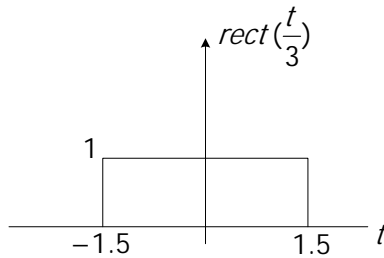
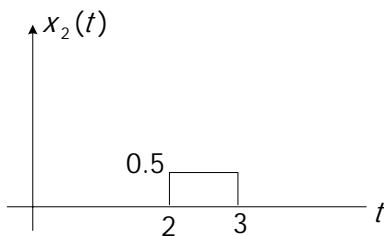
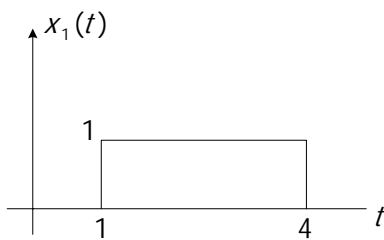
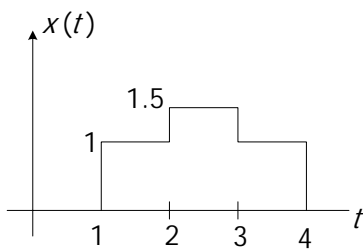
$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) u(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow F(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

$$u(t) \leftrightarrow U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

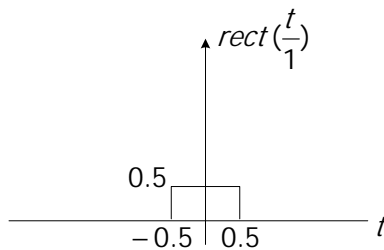
$$F(j\omega) U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi \delta(\omega) \cdot F(j\omega)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \cdot F(j0)$$

مثال ۵) سیگنال $x(t)$ در ذیل ترسیم شده است. تبدیل فوریه آن را بدست آورید.



$$\text{rect}\left(\frac{t}{3}\right) \leftrightarrow 3\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right)$$



$$\text{rect}\left(\frac{t}{1}\right) \leftrightarrow 0.5\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \leftrightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$$

$$x_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2.5}{3}\right) \leftrightarrow e^{-j\omega(2.5)} \cdot 3\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right)$$

$$x_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2.5}{1}\right) \leftrightarrow e^{-j\omega(2.5)} \cdot 0.5\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega(2.5)} \left(3\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\right) \right)$$

۴-۳-۱- رابطه پارسوال

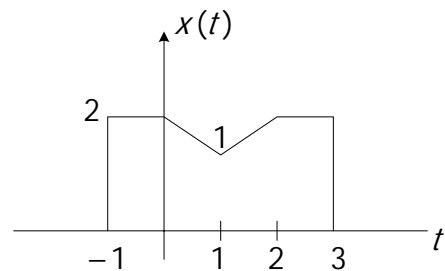
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2^*(j\omega)d\omega$$

اگر توابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ یکسان در نظر گرفته شوند، رابطه پارسوال به فرم ساده‌تری بیان می‌شود.

$$f(t) = f_1(t) = f_2(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|F(j\omega)\|^2 d\omega$$

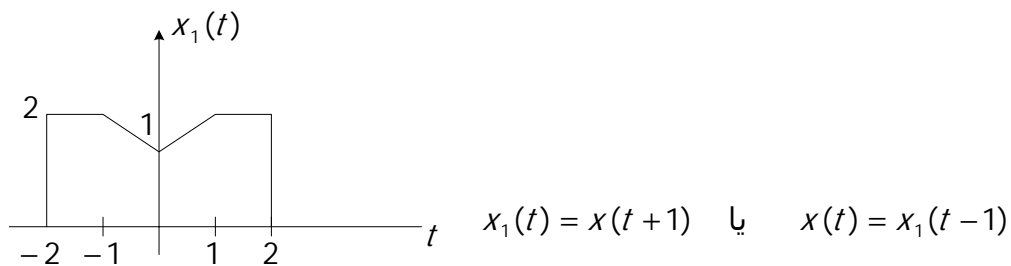
مثال ۶) سیگنال $x(t)$ به صورت زیر است.

اگر تبدیل فوریه آن $X(j\omega)$ باشد، بدون انجام محاسبات صریح مطلوبست:



الف) $\angle X(j\omega)$ ب) $X(j0)$ ج) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$ د) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

حل الف: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ چون $x_1(t)$ حقيقي و زوج است، $X_1(j\omega)$ نیز مطلقاً حقيقي و زوج خواهد بود. به عبارت دیگر: $\angle X_1(j\omega) = 0$



$x(t) = x_1(t-1)$ یا $x_1(t) = x(t+1)$
 $x(t) = x_1(t-1) \leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega} \cdot X_1(j\omega) \Rightarrow \angle X(j\omega) = -\omega + \angle X_1(j\omega)$
 $\Rightarrow \angle X(j\omega) = -\omega$

حل ب:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

چون سطح زیر منحنی $x(t)$ با سطح زیر منحنی $x_1(t)$ برابر است و با توجه به تعریف تابع زوج داریم:

$$X(j0) = 2 \left(\int_0^1 (\text{معادله خط}) dt + \int_1^2 2 dt \right) = 7$$

حل ج:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

حل د: رابطه پارسوال مورد نظر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

۴-۴- تبدیل فوریه سیگنال متناوب

اگر سیگنالی متناوب باشد به این معنی است که دارای سری فوریه است. تبدیل فوریه سیگنال متناوب را به طور مستقیم محاسبه نمی‌کنیم. ابتدا سری فوریه تابع را به دست آورده، سپس از سری فوریه تبدیل فوریه را به دست می‌آوریم.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}, \quad x(t) = x(t + T_0)$$

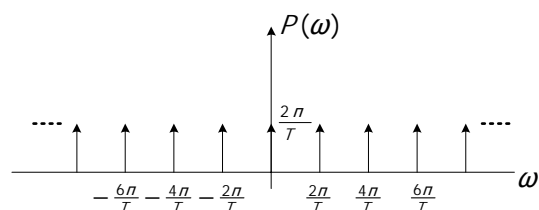
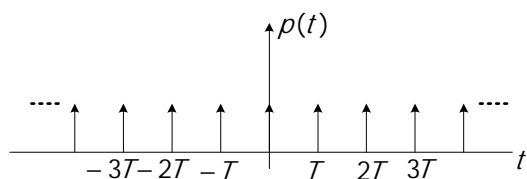
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \xrightarrow{f} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_0})$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

مهمترین سیگنال متناوبی که می‌شناسیم قطار ضربه است.

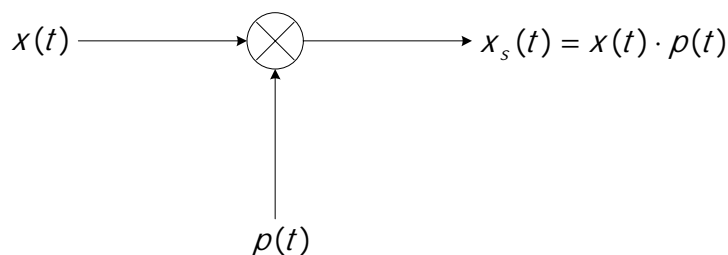
ابتدا سری فوریه تابع را به دست آورده:

$$a_k = \frac{1}{T}; \quad p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \leftrightarrow P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$



۴-۵- تئوری نمونه‌برداری سیگنال

در این روش سیگنال $x(t)$ در قطار ضربه ضرب می‌شود که با توجه به خواص بیان شده برای تبدیل فوریه، تبدیل فوریه حاصلضرب دو تابع برابر با کانولوشن آنهاست.



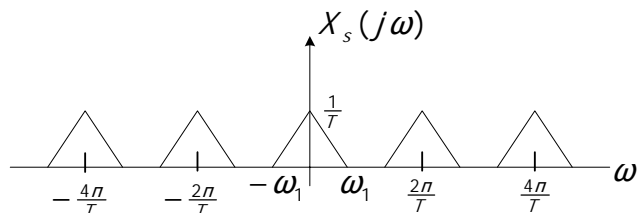
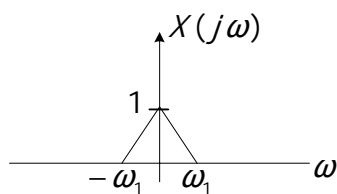
$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \leftrightarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \leftrightarrow P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

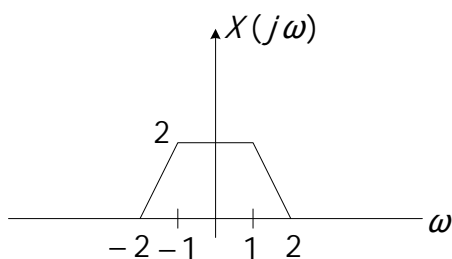
$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

رابطه بدست آمده بیان می‌کند که در اثر نمونه‌برداری از سیگنال، تبدیل فوریه سیگنال نمونه‌برداری شده $x_s(t)$ برابر تبدیل

فوریه سیگنال اولیه $X(j\omega)$ خواهد بود که البته در فواصل $\frac{2\pi}{T}$ عیناً تکرار شده و دامنه آن نیز در $\frac{1}{T}$ ضرب شده است.



مثال ۷) مطلوب است $X_s(j\omega)$ ، اگر $X(j\omega)$ به صورت مقابل باشد.

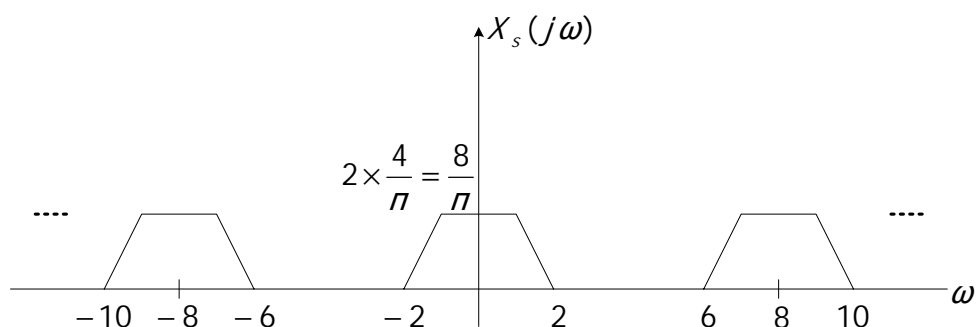


$$T = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{ج})$$

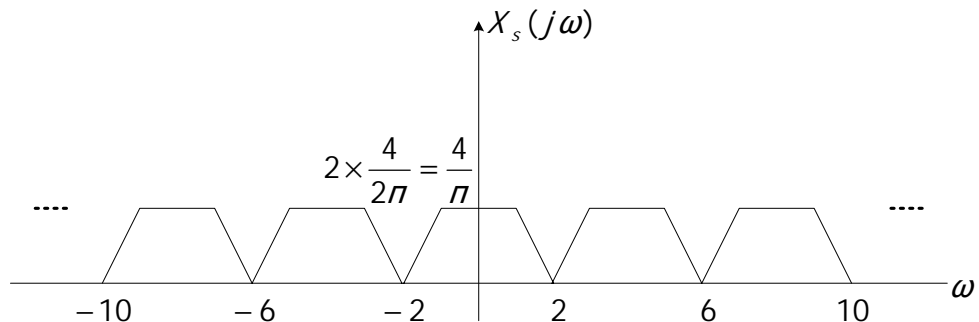
$$T = \frac{\pi}{2} \quad (\text{ب})$$

$$T = \frac{\pi}{4} \quad (\text{الف})$$

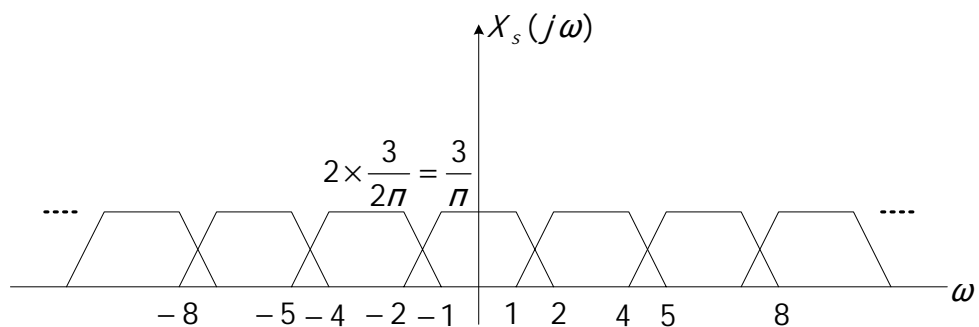
$$\frac{2\pi}{T} = 8 \quad \text{حل الف:}$$



$$\frac{2\pi}{T} = 4 \quad \text{حل ب:}$$



$$\frac{2\pi}{T} = 3 \quad \text{حل ج:}$$



۶-۴- خلاصه

قبل از بدست آوردن تبدیل فوریه با استفاده از باید شرایط وجود تبدیل فوریه (دیریکله) را بررسی کرد.

در تبدیل فوریه نیز با توجه به اندازه و فاز می‌توان نوع فیلتر را تشخیص داد.

با دانستن خواص تبدیل فوریه، برخی مسائل به روش ساده‌تری قابل حل است.

تابع $\cos \omega_0 t$ جزو توابعی است که به کمک خواص، تبدیل فوریه‌اش بدست می‌آید و با توجه به شکل حاصل، تبدیل فوریه آن

مطلقاً حقیقی و زوج است. همچنین با توجه به شکل بدست آمده برای $\sin \omega_0 t$ ، تبدیل فوریه آن مطلقاً موهومی و فرد است.

اگر $f(t)$ سیگنالی زوج و حقیقی باشد، $F(j\omega)$ مطلقاً حقیقی و زوج و همچنین اگر $f(t)$ سیگنالی فرد و حقیقی باشد، $F(j\omega)$ مطلقاً موهومی و فرد است.

اگر سیگنالی متناوب باشد به این معنی است که دارای سری فوریه است. تبدیل فوریه سیگنال متناوب را به طور مستقیم محاسبه نمی‌کنیم. ابتدا سری فوریه تابع را به دست آورده، سپس از سری فوریه تبدیل فوریه را به دست می‌آوریم.

مهمترین سیگنال متناوبی که می‌شناسیم قطار ضربه است.

در نمونه‌برداری سیگنال، تابع $x(t)$ در قطار ضربه ضرب می‌شود. با توجه به خواص بیان شده برای تبدیل فوری، تبدیل فوری حاصلضرب دو تابع برابر با کانولوشن آنهاست.

فصل پنجم

تبدیل فوریه سیستم‌های زمان گسسته

۵-۱- تعریف تبدیل فوریه زمان گسسته

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \quad , \quad X(j\Omega) = X(j(\Omega + 2k\pi)) = X(j(\Omega + 2\pi))$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\Omega} \quad , \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega$$

۵-۲- خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

۵-۲-۱- خطی بودن

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(j\Omega)$$

$$\Rightarrow ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(j\Omega)$$

۵-۲-۲- شیفت زمانی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega_0 n} X(j\Omega)$$

۵-۲-۳- شیفت فرکانسی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n] e^{+j\Omega_0 n} \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

۵-۲-۴- مزدوج گیری (تقارن مزدوج)

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$x[n]^* \leftrightarrow X^*(-j\Omega)$$

سیگنال حقیقی و زوج $\Rightarrow x[n]$ مطلقاً حقیقی و زوج خواهد بود $X(j\Omega)$

سیگنال حقیقی و فرد $\Rightarrow x[n]$ مطلقاً موهومی و فرد خواهد بود $X(j\Omega)$

۵-۲-۵- تفاضل گیری و مجموع گیری

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega}) X(j\Omega)$$

$$x[n-1] \leftrightarrow e^{-j\Omega} X(j\Omega)$$

مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال $y[n]$ را بدست آورید اگر:

$$Y(j\Omega) = ? \quad , \quad y[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] \quad , \quad y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

$$\begin{cases} y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \\ y[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] \end{cases} \Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] \leftrightarrow Y(j\Omega)$$

$$y[n-1] \leftrightarrow e^{-j\Omega} Y(j\Omega)$$

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \leftrightarrow X(j\Omega) = Y(j\Omega) - e^{-j\Omega} Y(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(j\Omega)$$

۵-۲-۶- تبدیل فوریه تابع پله و ضربه

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{f} 1$$

$$u[n] \xleftrightarrow{f} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + n\delta(\Omega)$$

۵-۲-۷- وارون زمانی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[-n] \leftrightarrow X(-j\Omega)$$

۵-۲-۸- گسترش زمانی

توجه: این خاصیت در گسسته برقرار نیست چون حاصل، یک سیگنال جدید است.

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[kn] \leftrightarrow ? \times$$

۵-۲-۹- مشتق گیری در فرکانس

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow (jn)' x[n] \leftrightarrow \frac{d' X(j\Omega)}{d\Omega'}$$

۵-۲-۱۰- ضرب و کانولوشن

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(j\Omega) X_2(j(\Omega - \theta)) d\theta$$

تذکر: \otimes (کانولوشن متناوب) با کانولوشن ساده برابر است با این تفاوت که فقط در یک دوره تناوب محاسبه می‌شود.

۵-۲-۱۱- دوگانی

توجه: در سیستم‌های زمان گسسته خاصیت دوگانی وجود ندارد چون n گسسته است اما Ω پیوسته است.

مثال (۲)

$$\delta[n] \xrightarrow{f} 1$$

$$? \xleftarrow{F^{-1}} 2\pi\delta(\Omega)$$

۵-۲-۱۲- رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

۵-۳- تبدیل فوریه توابع متناوب

$$x[n] = x[n + N]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

مثال (۳) مطلوبست تبدیل فوریه توابع نمایی مختلط $e^{\pm j\Omega_0 n}$.

تبدیل فوریه این توابع با توجه به خواص محاسبه می‌شوند

$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

$$e^{\pm j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega \mp \Omega_0)$$

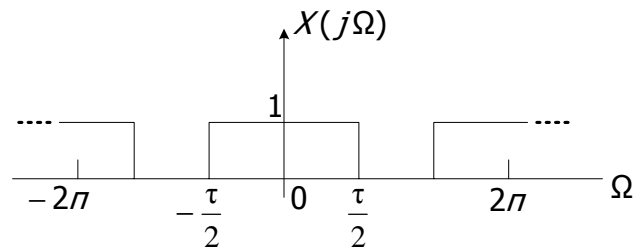
$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN)$$

مثال (۴) مطلوبست تبدیل فوریه قطار ضربه

$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN) = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow P(j\Omega) = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{2\pi}{N} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

با توجه به متناوب بودن سیگنال قطار ضربه ابتدا سری فوریه آن را محاسبه و سپس تبدیل فوریه سیگنال را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۵) اگر $X(j\Omega) = \text{rect}(\frac{\Omega}{\tau})$ مطلوبست $x[n]=?$

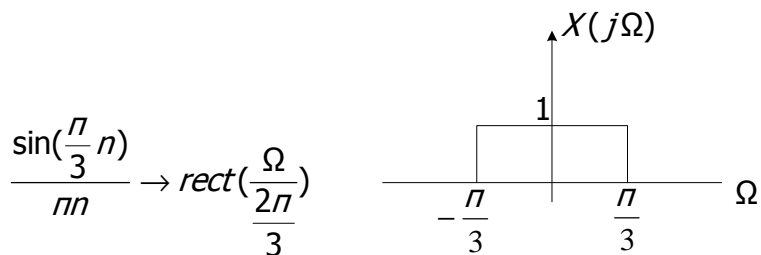


$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi n} (e^{j\frac{\tau}{2}n} - e^{-j\frac{\tau}{2}n}) = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}$$

$\Rightarrow \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\tau})$

مثال ۶)



$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\frac{2\pi}{3}})$$

مثال ۷) با توجه به پاسخ ضربه $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$ مطلوبست:

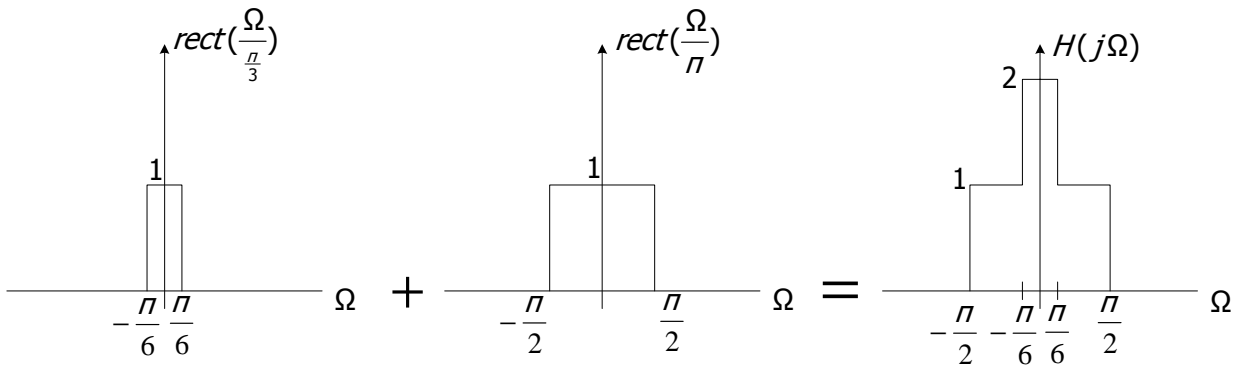
الف) پاسخ فرکانسی سیستم $H(j\Omega)$

ب) خروجی $y[n]$ اگر ورودی $x[n] = 2 \sin(\frac{\pi}{8}n) - 2 \cos(\frac{\pi}{4}n)$

حل الف:

$$\text{داريم} \quad \frac{\sin(\frac{\tau}{2} n)}{n\pi} \leftrightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\tau}) \Rightarrow \begin{cases} \tau = \frac{\pi}{3}; & \frac{\sin(\frac{\pi}{6} n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) \\ \tau = \pi; & \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\pi}) \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6} n)}{n\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega) = \text{rect}(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) + \text{rect}(\frac{\Omega}{\pi})$$



حل ب:

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$$

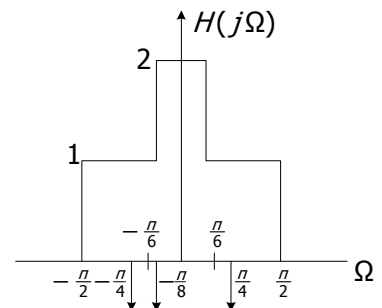
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{8}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{8}n} - e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$X(j\Omega) = 2\pi \times (\frac{1}{2j} \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j} \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}))$$

$$Y(j\Omega) = 2\pi \times (\frac{1}{2j} H(j\frac{\pi}{8})) \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j} H(j(-\frac{\pi}{8})) \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - H(j\frac{\pi}{4}) \delta(\Omega - \frac{\pi}{4})$$

$$- H(j(-\frac{\pi}{4})) \delta(\Omega + \frac{\pi}{4})) = 2\pi (2 \cdot \frac{1}{2j} \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - 2 \cdot \frac{1}{2j} \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}))$$

$$y[n] = 2 \sin(\frac{\pi}{8} n) - 2 \cos(\frac{\pi}{4} n)$$



يادآوري:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

$$x[n] = (-\alpha)^n u[n] \leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

$$\begin{aligned} x[n] = \alpha^n u[-n] \leftrightarrow X(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^0 \alpha^n \cdot e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 (\alpha^{-1} e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha^{-1} e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha^{-1}| < 1 \not\Leftarrow |\alpha| > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n] = (-\alpha)^n u[-n] \leftrightarrow X(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^0 (-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 (-\alpha^{-1} e^{j\Omega})^n = \frac{1}{1 + \alpha^{-1} e^{j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha^{-1}| < 1 \not\Leftarrow |\alpha| > 1 \end{aligned}$$

۵-۴- سیستم‌های LTI و تبدیل فوریه زمان پیوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \quad \begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ Y(j\omega) &= X(j\omega) \cdot H(j\omega) \end{aligned}$$

اتصال سری

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1} \longrightarrow \boxed{h_2} \longrightarrow y(t) \quad \begin{aligned} y(t) &= x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) \\ h(t) &= h_1(t) * h_2(t) \\ H(j\omega) &= H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) \end{aligned}$$

اتصال موازی

$$x(t) \longrightarrow \begin{array}{c} \boxed{h_1} \\ \boxed{h_2} \end{array} \longrightarrow \bigoplus \longrightarrow y(t) \quad \begin{aligned} y(t) &= x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \\ h(t) &= h_1(t) + h_2(t) \\ H(j\omega) &= H_1(j\omega) + H_2(j\omega) \end{aligned}$$

مثال ۱) تبدیل فوریه تابع $h(t) = \frac{\sin(t) \cdot \sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}$ را بدست آورید.

$$h(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2})}{t} = \frac{\sin(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2n})}{\frac{t}{2n}} = \frac{1}{2n} \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{2n}\right)$$

داریم $\rightarrow \begin{cases} \text{rect}(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow a \text{sinc}(\frac{\omega}{n} \cdot \frac{\tau}{2}) \\ \tau \text{sinc}(\frac{t}{n} \cdot \frac{\tau}{2}) \leftrightarrow 2n \text{rect}(\frac{\omega}{\tau}) \end{cases}$

$$\tau = 2 \Rightarrow 2\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\tau = 1 \Rightarrow 1\text{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)$$

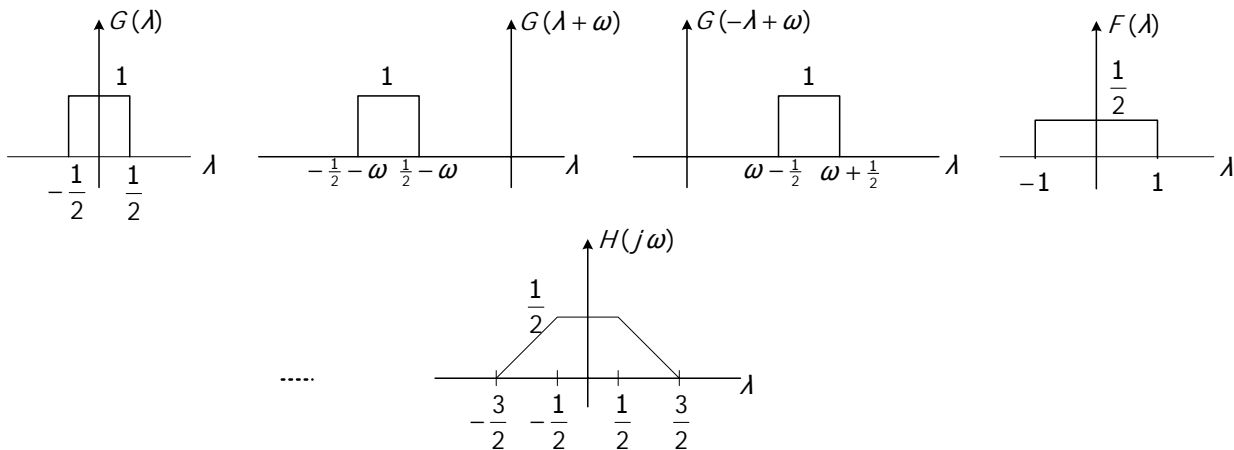
داریم

$$\rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)2} (\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) * 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)) = \frac{1}{2} \underbrace{\text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)}_{F(\omega)} * \underbrace{\text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)}_{G(\omega)}$$

$$H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) G(\omega - \lambda) d\lambda$$

از روش گرافیکی حل می‌کنیم:



مثال ۲) ورودی سیستم LTI و پاسخ ضربه سیستم در ذیل داده شده است. مطلوبست خروجی سیستم؟

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t}, \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} = \frac{\omega_i}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right), \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau = 2\omega_i \Rightarrow 2\omega_i \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right) \xrightarrow{f} 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) \\ \tau = 2\omega_c \Rightarrow 2\omega_c \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right) \xrightarrow{f} 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$$

$$Y(j\omega) = \begin{cases} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) & ; \quad \omega_i < \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_i}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right) \\ \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) & ; \quad \omega_i > \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right) \end{cases}$$

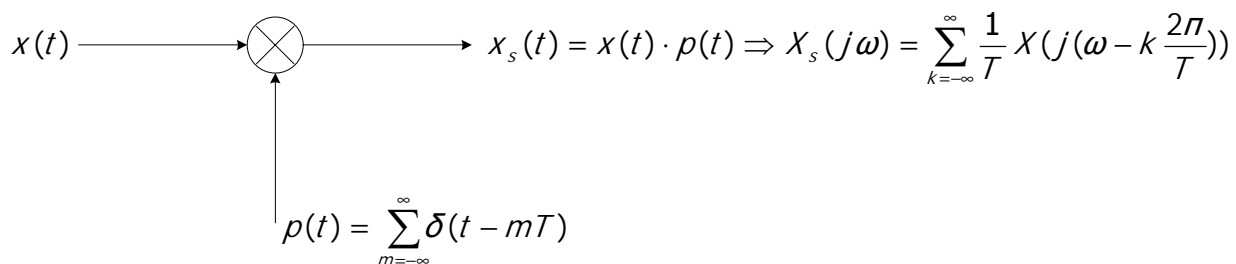
مثال ۳) اگر $p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$ باشد، مطلوبست $X_s(j\omega)$ با استفاده از تئوری نمونه‌برداری؟

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \quad ; \quad p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X\left(j\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

مثال ۴) از سیگنال $x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$ تحت شرایط زیر نمونه‌برداری می‌شود. مطلوبست تبدیل فوریه سیگنال

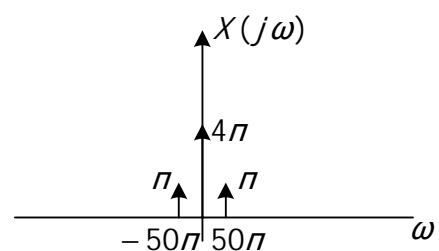
نمونه‌برداری شده $X_s(j\omega)$ ؟



الف) $T = \frac{1}{100}$

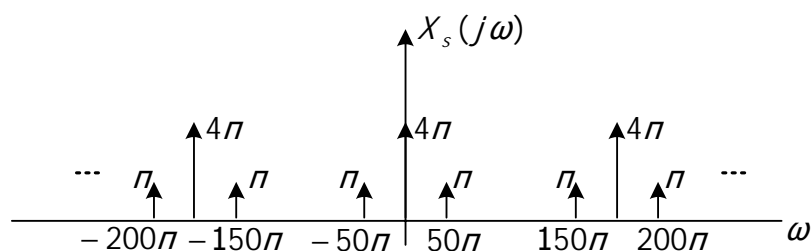
ب) $T = \frac{1}{40}$

$$x(t) = 2 + \cos(50\pi t) \Rightarrow X(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega + 50\pi) + \pi\delta(\omega - 50\pi)$$



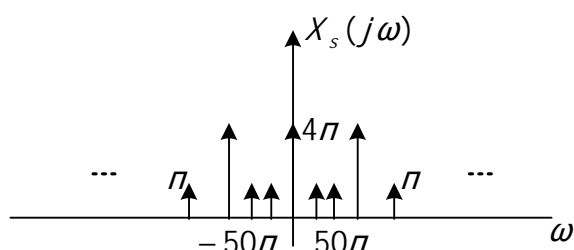
$$\frac{2\pi}{\frac{1}{100}} = 200\pi$$

حل الف:



$$\frac{2\pi}{\frac{1}{40}} = 80\pi$$

حل ب:



۵-۴-۱- سیستم‌های LTI با معادلات دیفرانسیل

بدست آوردن $h(t)$ دارای اهمیت زیادی است چون نشان دهنده رفتار تابع است.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

برای حل معادلات دیفرانسیل دو راه وجود دارد:

(۱) ابتدا $h(t)$ را بدست آورده و سپس $H(j\omega)$ که تبدیل فوری $h(t)$ است را بدست می‌آوریم.

(۲) ابتدا $H(j\omega)$ را بدست آورده و سپس $h(t)$ را با عکس تبدیل فوری گرفتن از $H(j\omega)$ بدست می‌آوریم.

مثال (۵) پاسخ سیستم LTI زیر به ورودی $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ داده شده است،

$$y(t) = (2e^{-t} + 2e^{-4t})u(t)$$

الف) مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم $H(j\omega)$

(ب) پاسخ ضربه $h(t)$

(ج) معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده ورودی و خروجی

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

حل الف:

$$X(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} + \frac{1}{3 + j\omega}, \quad Y(j\omega) = \frac{2}{1 + j\omega} - \frac{2}{4 + j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2 \left(\frac{3}{(1 + j\omega)(4 + j\omega)} \right)}{\frac{4 + 2j\omega}{(1 + j\omega)(3 + j\omega)}} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{3(3 + j\omega)}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)}$$

حل ب:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{3}{2}}{2 + j\omega} + \frac{\frac{3}{2}}{4 + j\omega} \Rightarrow h(t) = \frac{3}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{3}{2}e^{-4t}u(t)$$

حل ج:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{9 + 3(j\omega)}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 9X(j\omega) + 3(j\omega)X(j\omega)$$

با توجه به خاصیت مشتق زمانی رابطه زیر بدست می آید:

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 3x'(t) + 9x(t)$$

مثال ۶) ورودی و خروجی یک سیستم LTI با معادله $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 2x(t)$ به هم مربوط می شوند. مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سیستم $h(t)$

ب) اگر ورودی $x(t) = te^{-2t}u(t)$ خروجی را بدست آورید.

حل الف:

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8} = \frac{2}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)} = \frac{1}{(j\omega + 2)} + \frac{-1}{(j\omega + 4)}$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

حل ب: چون $x(t)$ و $h(t)$ هر دو توابع پیچیده‌ای هستند به جای استفاده از کانولوشن می‌توان ابتدا تبدیل فوریه هر دو را بدست آورد سپس با عکس تبدیل فوریه گرفتن از $Y(j\omega)$ پاسخ زمانی سیستم $y(t)$ را بدست آورد.

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2+j\omega}$$

$$(jt)e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{2+j\omega} \right) = \frac{-j}{(2+j\omega)^2}$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \left(\frac{2}{(2+j\omega)(4+j\omega)} \right) = \dots$$

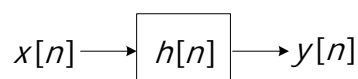
به روش تجزیه کسر ها $Y(j\omega)$ بدست می‌آید و با استفاده از عکس تبدیل فوریه $y(t)$ محاسبه خواهد شد.

مثال ۷) یک سیستم LTI و علی با پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$ را در نظر بگیرید. برای یک ورودی خاص $x(t)$ مشاهده می‌شود که خروجی به فرم $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ است. مطلوبست ورودی $x(t)$ ؟

$$Y(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}}{\frac{1}{(3+j\omega)}} = \frac{1}{(4+j\omega)} \leftrightarrow x(t) = e^{-4t}u(t)$$

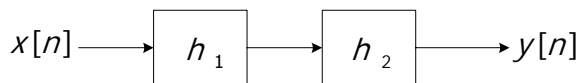
۵-۵- سیستم‌های LTI و تبدیل فوریه زمان گسسته



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$$

اتصال سری:

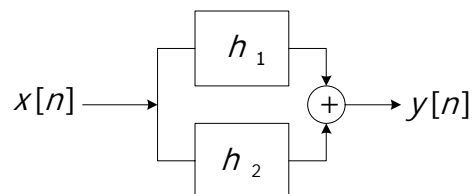


$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) \cdot H_2(j\Omega)$$

اتصال موازي:



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)$$

۱-۵-۵- سیستم‌های LTI با معادلات تفاضلي

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$

مثال ۸) سیستم LTI زمان گسسته علي توصيف شده با معادله تفاضلي زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2} x[n-2]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سیستم $h[n]$.

ب) پاسخ ضربه سیستم معکوس $h_i[n]$.

حل الف:

$$\begin{aligned}
 Y(j\Omega) + e^{-j\Omega} Y(j\Omega) + \frac{1}{4} e^{-j2\Omega} Y(j\Omega) &= e^{-j\Omega} X(j\Omega) - \frac{1}{2} e^{-j2\Omega} X(j\Omega) \\
 \Rightarrow (1 + e^{-j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\Omega}) Y(j\Omega) &= (e^{-j\Omega} - \frac{1}{2} e^{-j2\Omega}) X(j\Omega) \\
 H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} &= \frac{e^{-j\Omega} (1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega})}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} = \frac{e^{-j\Omega} (1 - (\frac{1}{2} e^{-j\Omega} + 1 - 1))}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} \\
 &= \frac{e^{-j\Omega} - e^{-j\Omega} (1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega}) + e^{-j\Omega}}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} = 2e^{-j\Omega} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} - \frac{e^{-j\Omega}}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} \\
 \Rightarrow h[n] &= 2(-2n - \frac{1}{2})^n u[n] - (-\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1]
 \end{aligned}$$

حل ب:

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n] \leftrightarrow H(j\Omega) \cdot H_1(j\Omega) = 1$$

$$H(j\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} (1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega})}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2}$$

$$H_1(j\Omega) = \frac{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega} (1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\Omega} (1 + \frac{1}{4} e^{-j2\Omega} + e^{-j\Omega})}{(1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{1}{4} e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

$$h_1[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} u[n+1] + \frac{1}{4} (\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1] + (\frac{1}{2})^n u[n]$$

مثال ۹) در يك سيستم LTI و علي با توجه به پاسخ ضربه داده شده مطلوبست:

$$h[n] = a^{|n|}, \quad 0 < a < 1$$

الف) پاسخ فرکانسي $H(j\Omega)$

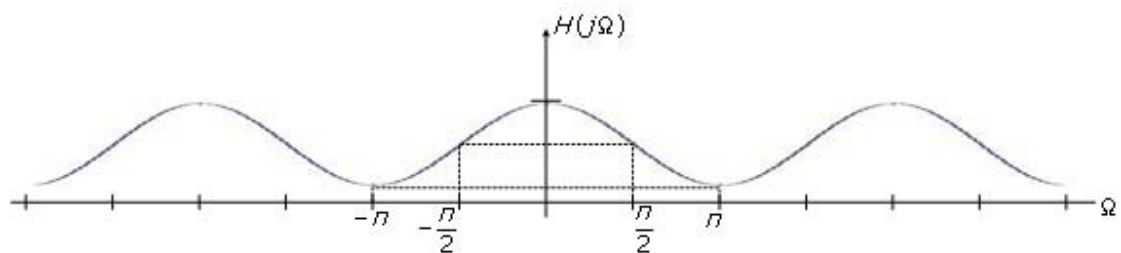
ب) نوع فیلتر.

حل الف:

$$\begin{aligned}
 H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} \cdot e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (a e^{j\Omega})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\Omega})^n = \frac{a e^{j\Omega}}{1 - a e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} = \frac{a e^{j\Omega} (1 - a e^{-j\Omega}) + 1 - a e^{j\Omega}}{(1 - a e^{j\Omega})(1 - a e^{-j\Omega})} \\
 &= \frac{1 - a^2}{a^2 + 1 - a e^{-j\Omega} - a e^{j\Omega}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\Omega)}
 \end{aligned}$$

حل ب:

$$H(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{1-a} & \Omega = 0 \\ \frac{1-a^2}{(1-a)^2} & \Omega = \pm \frac{\pi}{2} \\ \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1-a}{1+a} & \Omega = \pm \pi \end{cases}$$



با توجه به شکل بدست آمده نوع فیلتر پایین‌گذر LPF است.