WWW.MOHANDESYAR.COM

بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی ۱

(بخش اول)

استاد عادلی

WWW.MOHANDESYAR.COM

تمرین ۱۵٪ نمره — میان‌ترم ۳۰٪ نمره — پایان‌ترم ۵۵٪ نمره

مرجع: نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها، چارلز دسور و ارنست کوه، ترجمه دکتر جبه دار

سرفصل‌ها:

۱- مدارهای فشرده و قوانین کیرشهف
۲- اجزاء مدار
۳- مدارهای ساده
۴- مدارهای مرتبه اول
۵- مدارهای مرتبه دوم
۶- خواص مدارهای LTI
۷- تجزیه تحلیل دائمی سینوسی
۸- مدارهای سه فاز

مباحث میان‌ترم برای پایان‌ترم حذف می‌شوند

مدارهای فشرده و قوانین کیرشهف:

کمیت‌هایی که در مدار با آنها سر و کار داریم: $p(t)$ ، $v(t)$ ، $i(t)$

جریان $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ → بار کولن ، → sec   ولتاژ $v(t) = \dfrac{dw}{dq}$ ژول

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = v(t)\, i(t) \qquad p(t) = v(t)\, i(t)$$

if $p(t) < 0$ توان تولید کرده active
if $p(t) > 0$ توان مصرف کرده passive

مدار الکتریکی: مجموعه‌ای است از اجزای الکتریکی (شامل منابع)

انواع مدار:
- مدارهای فشرده
- مدارهای گسترده distributed

WWW.MOHANDESYAR.COM

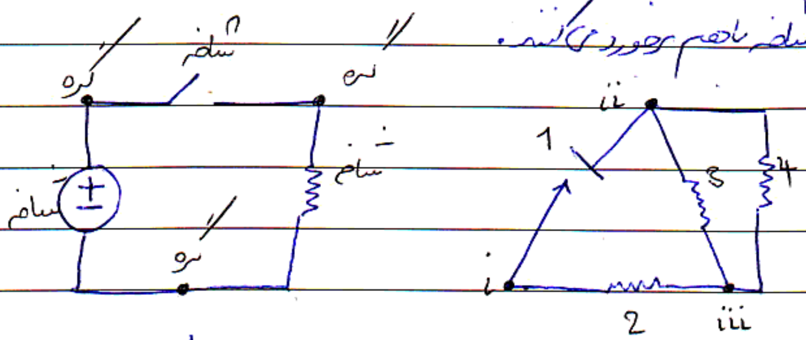
Subject:
Year. Month. Date.

مدار فشرده: اندازه‌ی اجزاء مدار بسیار کوچک‌تر از طول موج است.

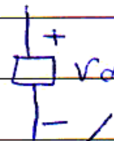
مدارهای گسترده: اندازه‌ی اجزاء مدار قابل مقایسه با طول موج است.

شاخه: (Branch) هر عنصر الکتریکی دو سر (دو پایانه) را می‌توان یک شاخه در نظر گرفت.

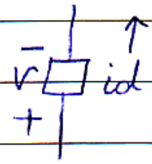
گره: محلی است که دو یا چند شاخه با هم برخورد می‌کنند.



جهت‌یابی ولتاژ: vd

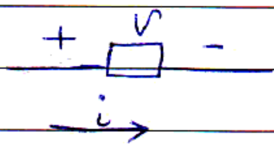


جهت‌یابی جریان: id



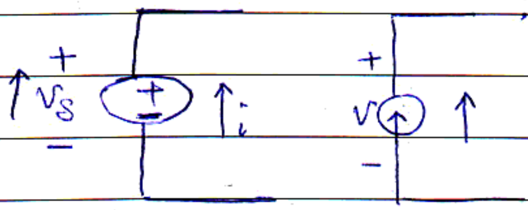
نکته: جهت‌های دلخواه برای ولتاژ و جریان مستقل از هم هستند.

جهت‌های قراردادی متناظر:



$p(t)=v(t)\times i(t)$

برای منابع ← جهت‌های قراردادی برعکس اند.



قوانین مدار:

قوانین کیرشهف در مدارهای فشرده معتبرند.

قانون جریان کیرشهف (KCL): در هر گره از مدار الکتریکی فشرده، مجموع جبری جریان‌های ورودی

WWW.MOHANDESYAR.COM

۱) در اجرای قانون دوم کیرشهف اگر در جهت جریان از مقاومتی عبور کنیم کاهش ولتاژ داریم و بالعکس.

۲) 〃 〃 〃 اگر از منفی به مثبت منبعی عبور کنیم افزایش ولتاژ داریم و بالعکس.

(ورودی و خروجی) برابر صفر است. $\sum_k i_k(t)=0$

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL):

در هر حلقه از مدار الکتریکی مسدود، مجموع جبری ولتاژها برابر صفر است. $\sum v(t)=0$

مثال) $i_4+i_3-i_1-i_2=0$

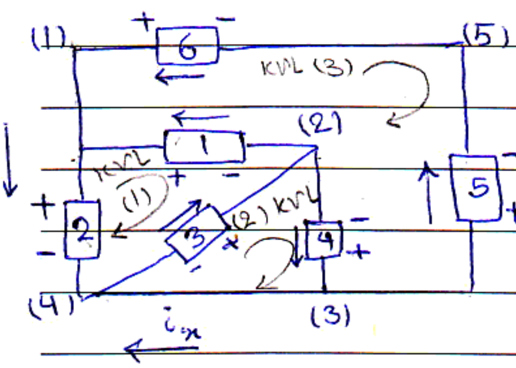
مجموع جریان های خروجی

$i_1+i_2-i_4-i_3=0$ مجموع جریان های ورودی

$\Rightarrow i_1+i_2=i_3+i_4$ مجموع جبری جریان های ورودی = مجموع جبری جریان های خروجی

قرارداد: برای راحتی، جریان های ورودی را مثبت می‌گیریم و جریان های خروجی را منفی در نظر می‌گیریم.

مثال)



KCL (1): $i_6-i_2+i_1=0$

KCL (2): $i_3-i_4-i_1=0$

KCL (3): $i_4-i_5-i_x=0$

KCL (4): $i_2+i_x-i_3=0$ → $i_4-i_5+i_2-i_3=0$

KCL (5): $i_5-i_6=0$

$i_2-i_3+i_4-i_5=0$

برای حلقه هایی KVL می‌نویسیم که درون آنها حلقه دیگری نباشد ← mesh

جهت حلقه: جهت عقربه های ساعت

قرارداد: اگر جهت عقربه ها با جهت قرارداد عناصر یکی بود ولتاژ آنها مثبت و در غیر این صورت ولتاژ آن ها منفی است.

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\begin{cases} KVL\ (1):\ -V_2+V_1+V_3=0 \\ KVL\ (2):\ -V_3-V_4=0 \\ KVL\ (3):\ V_6-V_5+V_4-V_1=0 \end{cases}$$

$\rightarrow -V_2+V_1-V_4=0$

حاصل

رابطه‌ی زمانی را

مساله را حل می‌کنیم.

RCL مدارات فشرده

مدارهای فشرده و گسترده:

← از لحاظ فیزیکی تفاوتشان در طول موج مدارات است.

فصل دوم: اجزا مدار

۱ـ مقاومت ۲ـ خازن ۳ـ سلف ۴ـ عناصر فرعی دیگر

۱ـ مقاومت Resistor: مقاومت، عنصری است که در هر لحظه از زمان، ولتاژ دو سر آن $v(t)$ و جریان گذرنده از آن $i(t)$ در صفحه‌ی $v-i$ تشکیل یک منحنی می‌دهد، به این منحنی، مشخصه‌ی مقاومت گویند.

۱ـ خطی بودن ۲ـ تغییر پذیر بودن با زمان

$$x(t) \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y(t)$$

خطی ← ۱ـ جمع‌پذیری
۲ـ همگن

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{cases}$$

جمع‌پذیری: $x_1(t)+x_2(t) \rightarrow y_1(t)+y_2(t)$

همگن: $\alpha x_1(t) \rightarrow \alpha y_1(t)$

مشخصه‌ی یک سیستم خطی یک خط راست گذرنده از مبدأ

$y(t) = 2x(t)+1$

خطی نیست

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2x_1(t) + 1$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = 2x_2(t) + 1$$

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y(t) = 2\left(x_1(t) + x_2(t)\right) + 2 \rightarrow$ خطی نیست.

$y(t) = 2x(t) \rightarrow$ خطی　　$y(t) = \sin t \; x(t) \rightarrow$ خطی تغییرپذیر با زمان

- اگر داشتیم $y(t) = t\,x(t)$ تغییرپذیر با زمان می‌شود.
- اگر t به صورت صریح در رابطه وجود داشته باشد تغییرپذیر با زمان است.

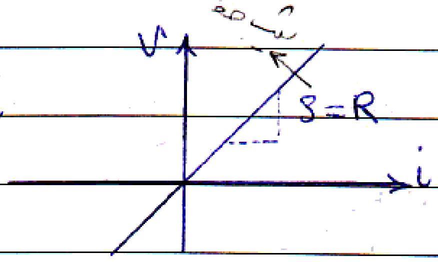
برای المان‌ها ۴ حالت پیش می‌آید:

1) linear time invariant → LTI　خطی تغییرناپذیر با زمان
2) " " variant
3) Nonlinear " invariant
4) " " variant

۱- مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان: (LTI)

R اهم

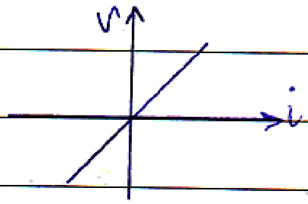
$v = Ri$



تمرین سری اول از فصل ۱ کتاب ۵-۲-۷-۱۳
تاریخ تحویل: ۸۶/۷/۱۴

رسانایی $G \triangleq \frac{1}{R}$　$\frac{v}{S}$　mho　آمپر

واحد رسانایی = زیمنس یا mho



۱- مقاومت LTI:

$v = Ri$

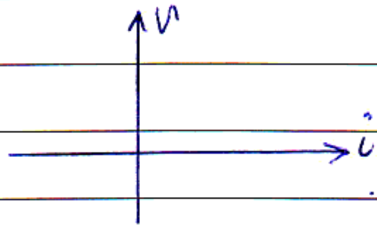
مقاومت

حالت خاص:

WWW.MOHANDESYAR.COM

۱) $R=0$ ← اتصال کوتاه short circuit

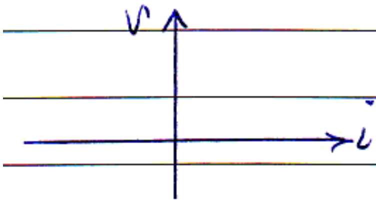
$G=\infty$ $\quad v=0$



منحنی بر محور i منطبق است.

۲) مدار باز $R=\infty$ open circuit

$G=0$ $\quad i=0$ $\quad v=\cdot$

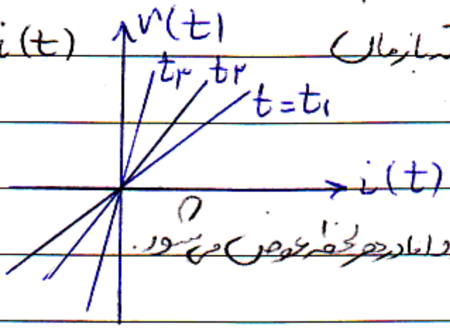


منطبق بر محور عمودی

۲_ مقاومت خطی وابسته به زمان

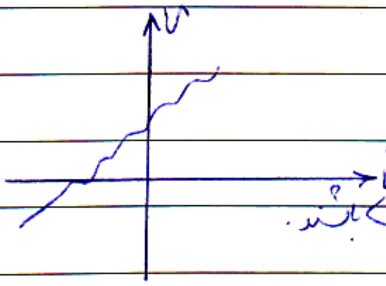
$$v(t)=R(t)\,i(t)$$

← تابع غیرخطی از زمان باشد.



مقاومت خطی از مبداء می‌گذرد ولی در هر لحظه عوض می‌شود.

۳_ مقاومت‌های غیرخطی:



می‌توانند هم تغییرناپذیر و هم تغییرپذیر با زمان باشند.

$$v(t)=f\big(i(t),t\big)$$

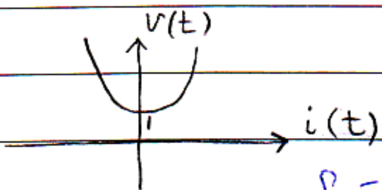
غیرخطی

اگر t به صورت صریح در رابطه فوق وجود داشته باشد ← تغییرپذیر با زمان

نحوه نمایش مقاومت

$+\ v(t)\ -$, $i(t)$

مثال) $v(t)=i^2(t)+1$



۱) آیا خطی است؟ خیر

۲) آیا تغییرناپذیر با زمان است؟ بله

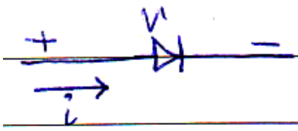
پارامتر t به صورت صریح در رابطه وجود ندارد

۲_ دیود

$$i=I_S\left(e^{\frac{v(t)}{V_T}}-1\right)$$

$V_T=25\,mV$

I_S ← جریان اشباع معکوس



رابطه جریان و ولتاژ یک رابطه نمایی است پس غیرخطی است و تغییرناپذیر با زمان.

WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال) $v(t)=2t\,i(t)$ تغییرپذیر با زمان – خطی است ولی می‌توان رابطه را بصورت زیر بیان کرد

$v(t)=R(t)\,i(t)$

اثبات خطی بودن رابطه بالا:

$i_1(t) \to v_1(t)=2t\,i_1(t)$

$i_2(t) \to v_2(t)=2t\,i_2(t)$

$i_1+i_2 \to v_3=2t(i_1+i_2)=\underbrace{2t\,i_1(t)}_{v_1(t)}+\underbrace{2t\,i_2(t)}_{v_2(t)}$

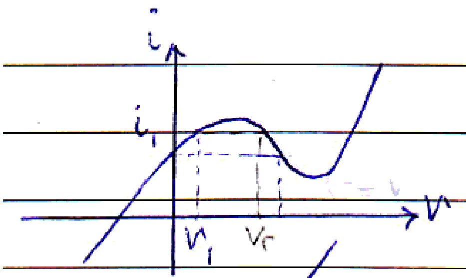
خاصیت اول برقرار است.

اگر دو ویژگی برقرار باشد سیستم خطی است:

$$\begin{matrix} x_1 \to y_1 \\ x_2 \to y_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ x_1+x_2 \to y_1+y_2 \\ 2)\ \alpha x_1 \to \alpha y_1 \end{cases}$$

برای خاصیت دوم: $\alpha\, i_1(t) \to v_2(t)$ $\quad v_2(t)=2t\left(\alpha\, i_1(t)\right)=\alpha\left(2t\, i_1(t)\right)=\alpha\, v_1(t)$

خاصیت دوم هم برقرار است پس سیستم خطی است.



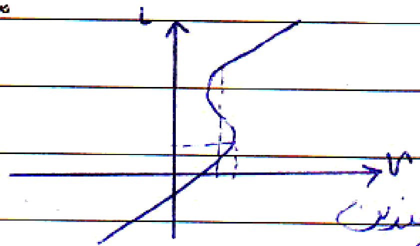
کنترل شونده با ولتاژ و جریان:

۱- کنترل شونده با ولتاژ: برای یافتن جریان به دانستن ولتاژ احتیاج است ولی عکس آن صادق نیست.

$i=f(v)$ متغیر مستقل

۲- کنترل شونده با جریان:

$v=f(i)$ متغیر مستقل



به ازای یک ولتاژ ممکن است چندین جریان وجود داشته باشد.

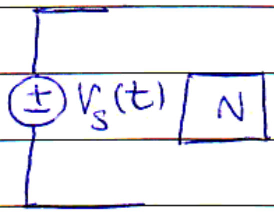
دانستن i برای یافتن v کافی است ولی عکس آن صادق نیست.

$v(t)=i^2+4i+3$ کنترل شونده با جریان

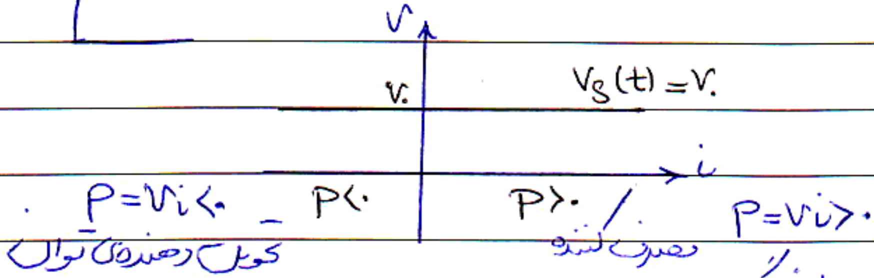
WWW.MOHANDESYAR.COM

منابع { ۱- مستقل (نابسته)
۲- وابسته (کنترل شده)

۱- منبع ولتاژ مستقل: عنصری است دو سر که ولتاژ معینی را در دو سر خود تأمین می‌کند. این منبع مستقل از مداری است که به آن متصل شده است.

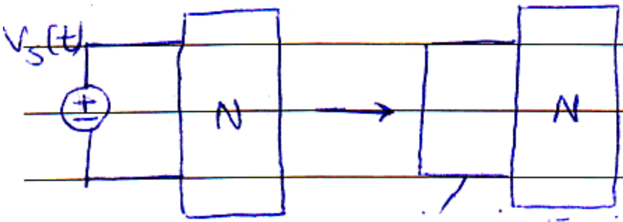


مثال) منبع ولتاژ مستقیم dc

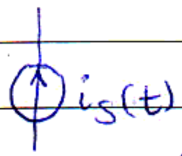


در حالت کلی یک عنصر غیرخطی است چون که از مبدأ نمی‌گذرد.
به ازای هر جریان ولتاژ ثابت است ⇐ کنترل شونده با جریان

استثناء: اتصال کوتاه
نکته: حذف منبع ولتاژ ($V=0$) در مدار معادل با اتصال کوتاه کردن آن است.

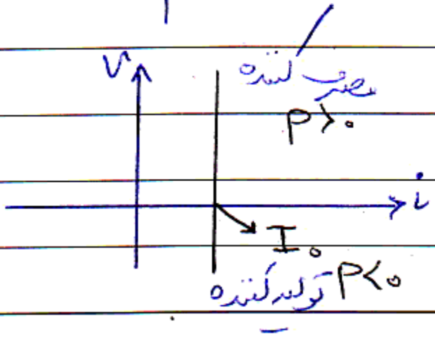


۲- منبع جریان مستقل: عنصری است دو سر که جریان معینی را تأمین می‌کند. این منبع مستقل از مداری است که به آن متصل است.



استثناء: مدار باز (جریانی ایجاد نمی‌شود)

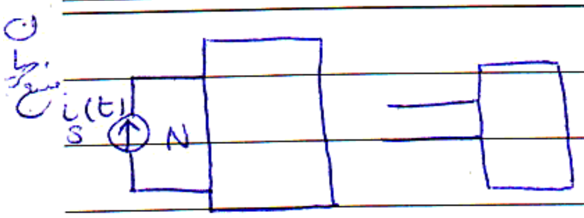
مثال) منبع جریان مستقیم dc : $i_s(t)=I_0$



غیرخطی - کنترل شونده با ولتاژ - تغییرپذیر با زمان

WWW.MOHANDESYAR.COM

نکته: حذف منبع جریان در مدار معادل باز کردن مدار است.



منابع وابسته:

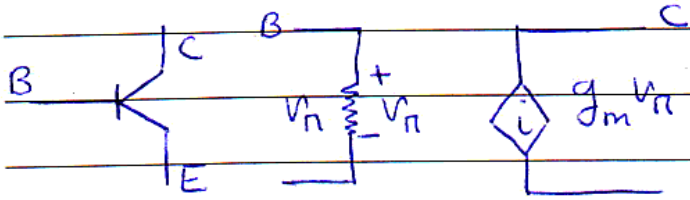
۱- منبع ولتاژ وابسته: $v_S(t)$ این منبع وابسته به ولتاژ یا جریان یک عنصر دیگر است.

$$v_S(t)=f\left(v(t),i(t),t\right)$$

۲- منبع جریان وابسته: وابسته به جریان یا ولتاژ یک عنصر دیگر است.

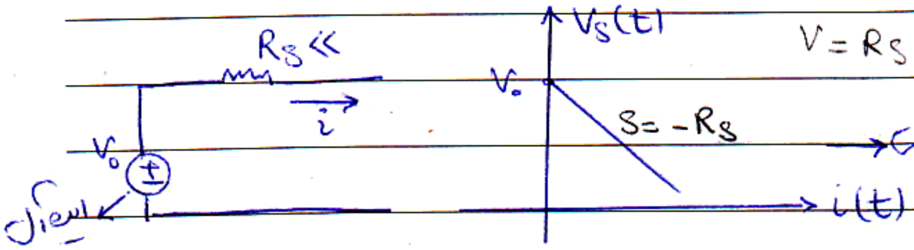
$$i_S(t)=f\left(v(t),i(t),t\right)$$

مثال) منبع جریان وابسته:

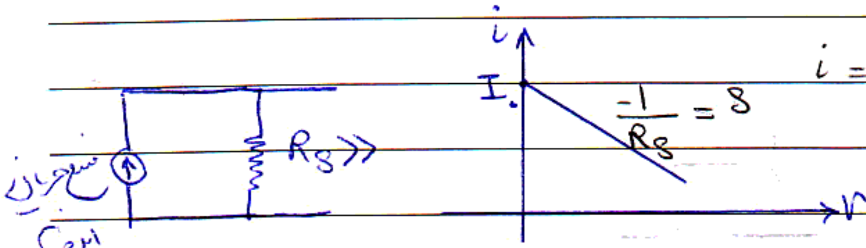


منبع ولتاژ واقعی: $V=R_S\, i$

مدل یک منبع واقعی

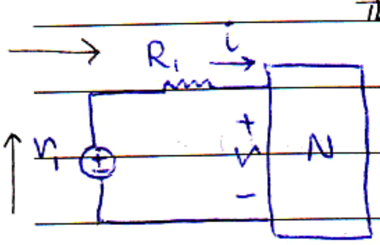


منبع جریان واقعی: $i=\dfrac{1}{R_S}V$



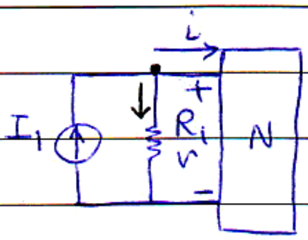
تبدیل منابع:

معادل‌های تونن و نورتن: Thevenin & Norton Equivalents



$$V=V_1-R_1 i \quad (1)$$

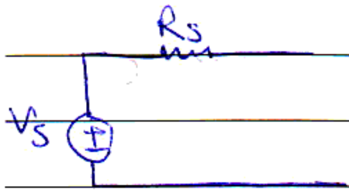
WWW.MOHANDESYAR.COM



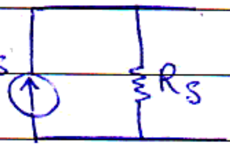
KCL

$I_1 - \frac{V}{R_1} - i = 0 \rightarrow V = R_1 I_1 - R_1 i \quad (۲)$

(۱) , (۲) $\quad V_1 - R_1 i = R_1 I_1 - R_1 i \longrightarrow V_1 = R_1 I_1$



$\equiv$ معادل



$I_S = \frac{V_S}{R_S}$

معادل تونن   معادل نورتن

توابع سیگنال در تجزیه و تحلیل مدارها :

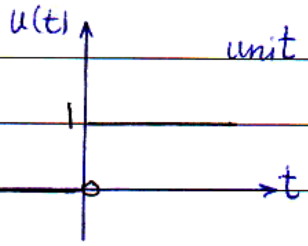
۱_ $f(t) = k$ k عدد ثابت

۲_ تابع سینوسی $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ دامنه Amplitude A

فرکانس $\omega = 2\pi f$ فاز phase φ

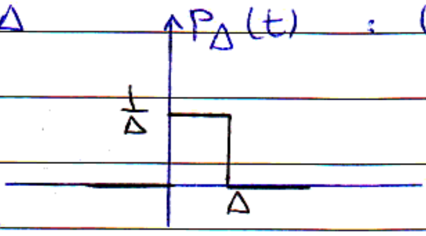
۳_ تابع پله واحد   unit step function

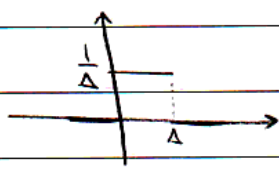
$$u(t) = f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



۴_ تابع پالس : (pulse)

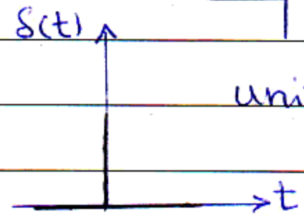
$$P_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$





۵_ تابع ضربه واحد : unit impulse function

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(t)$$



خواص $\delta(t)$:

۱) اندازه سطح زیر منحنی $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda$$

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)\,d\lambda$$

۲) $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda$

۳) $\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$

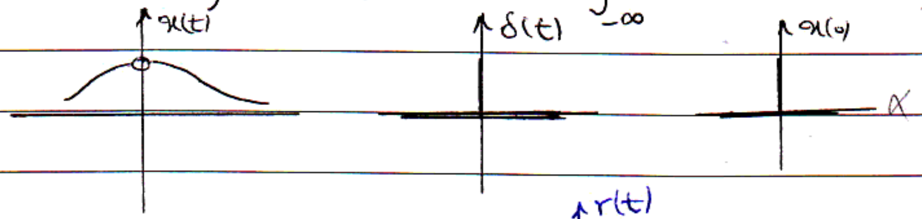
رابطه مشتق و انتگرال تابع $u(t)$

تمرین) ثابت کنید:

$$\begin{cases} x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t) \rightarrow ? \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x_0 \rightarrow \text{اثبات} \end{cases}$$

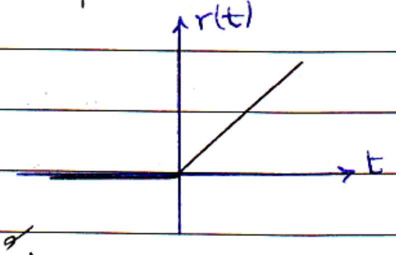
$$\underbrace{\int x(t)\delta(t)}_{x_0}=\int x(0)\delta(t) \quad x_0\underbrace{\int\delta(t)}_{1} \Rightarrow x_0=x_0$$

$$\int x(t)\delta(t)=\int x(0)\delta(t)\,dt=x(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=x(0)\,\cancel{\delta(t)}$$



۴- تابع شیب واحد:

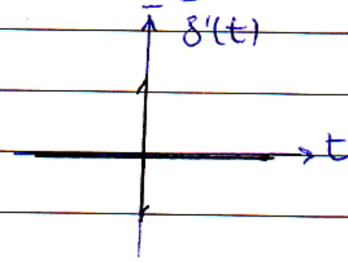
$$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

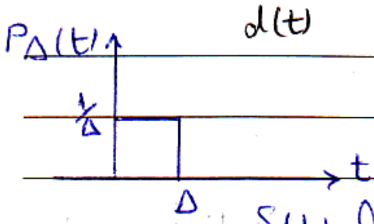


تمرین) رابطه بین $r(t)$ و $u(t)$ را بدست آورید ($r(t)$ انتگرال از تابع پله $r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)\,d(\lambda)$

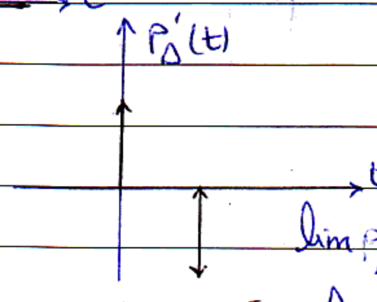
۷- تابع دوبلت

$$\delta'(t)=\frac{\delta(t)}{d(t)}$$



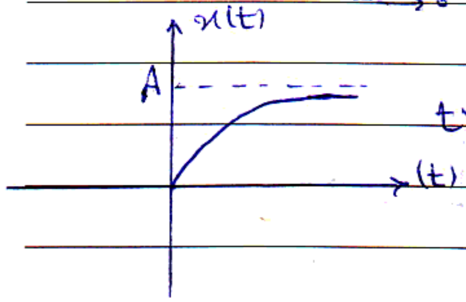


$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t)$$



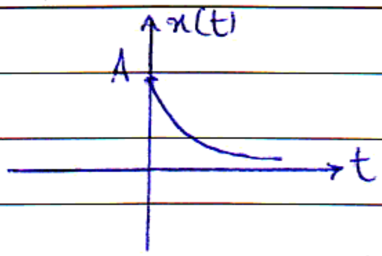
$$\lim_{\Delta\to 0}P'_\Delta(t)$$

۸- تابع نمایی



$$t\geq 0 \qquad x(t)=A\left(1-e^{-t/\tau}\right) \quad t\geq 0$$

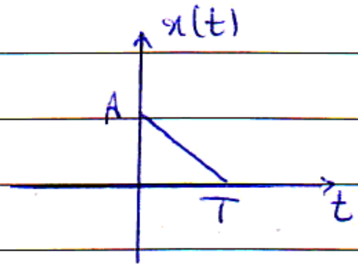
WWW.MOHANDESYAR.COM

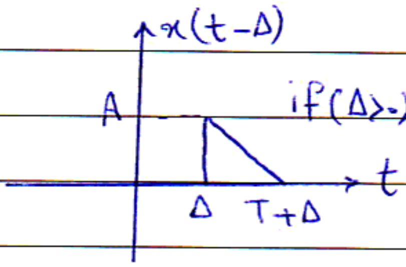


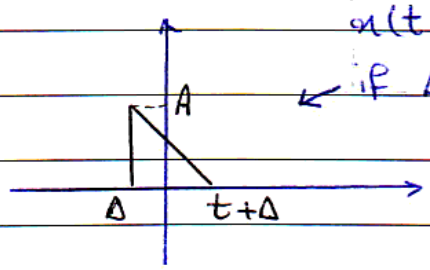
$$x(t) = A e^{-t/\tau}$$

تبدیلات روی توابع :

۱ـ انتقال تابع یا Shifting if $(\Delta > 0)$

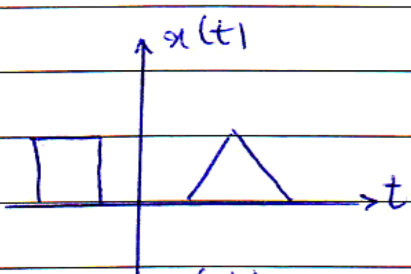


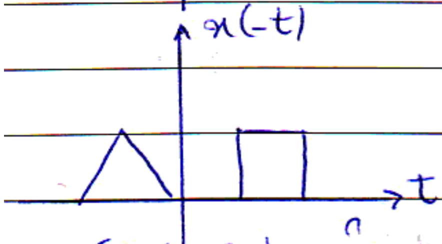




۲ـ معکوس کردن تابع یا Time invertion

$x(t) \rightarrow x(-t)$

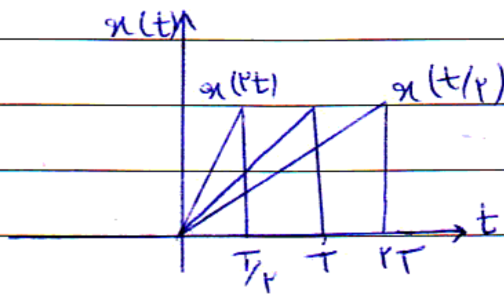




۱۸۰ درجه چرخش حول محور عمودی

۳ـ Scaling $x(t) \rightarrow x(at)$

$$\text{if} \begin{cases} a>1 \rightarrow \text{فشرده سازی} \\ a<1 \rightarrow \text{گسترده سازی} \end{cases}$$

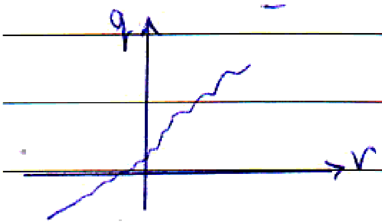


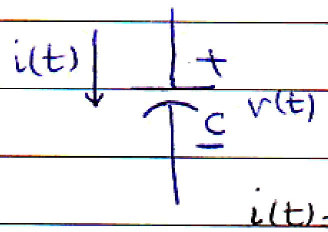
تمرین های ۱ و ۲
در ۴۷ و ۴۸

WWW.MOHANDESYAR.COM

خازن Capacitor

عنصری است دوپایانه که رابطه بین ولتاژ $(v(t))$ دو سر خود و مقدار بار $q(t)$ ذخیره شده در خود را توسط یک منحنی در صفحه $v-q$ می‌دهند





نحوه نمایش خازن

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

خواص: ۱- خطی بودن

۲- تغییرناپذیر با زمان بودن

۱- خازن خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) :

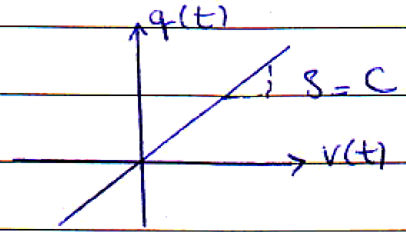
$$q(t) = C\,v(t)$$

ولت

کولن (کولمب)

C: ظرفیت خازن (فاراد)

$$1F = 1\,\frac{C}{V}$$



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C\,v(t)\right) = C\,\frac{dv}{dt} \qquad i(t) = C\,\frac{dv}{dt}$$

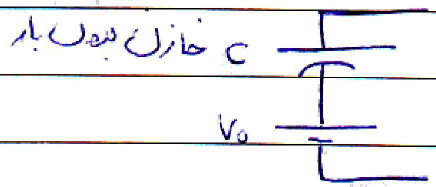
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}\,i(t) \rightarrow dv = \frac{1}{C}\,i(t)\,dt \rightarrow \int_{t_0}^{t} \Rightarrow v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$$

اگر $t_0 = 0$, $V(0) \triangleq V_0$:

$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\lambda)\,d(\lambda)$$

مدل سازی یک خازن با بار اولیه :



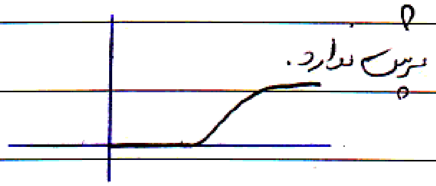
نکات مهم :

۱- خازن در مقابل جریان DC مثل مدار باز عمل می‌کند.

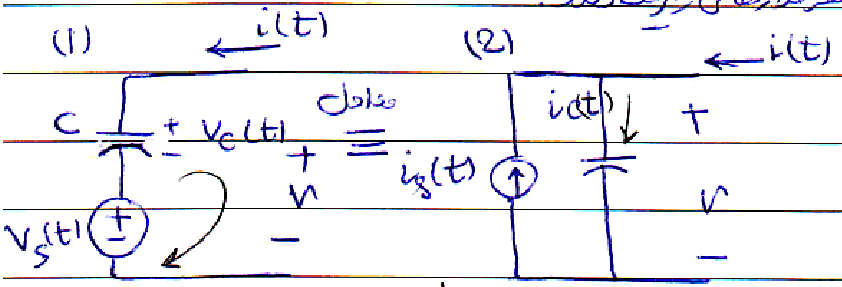
جریان DC = جریان مستقیم

۲- ولتاژ خازن پرش ندارد مگر اینکه جریان آن ضربه داشته باشد. $\delta(t)$

$v(t^-) = v(t^+)$



۳- برای یک خازن LTI با بار اولیه صفر مدارهای زیر معادلند:



$$i_S(t) = C\frac{dv_S(t)}{dt}$$

$(1):\ -V_S(t) - V_C(t) + V(t) = 0$

$$V(t) = V_S(t) + V_C(t)$$

$(1):\ V(t) = V_S(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$

$(2):\ KCL:\ i(t) + i_S(t) = i_C(t)$

$$i(t) = C\frac{dV_S(t)}{dt} + i_S(t) = C\frac{dV_C}{dt} \xrightarrow{\int} CV_S(t) + \int i_S(t)\,dt =$$

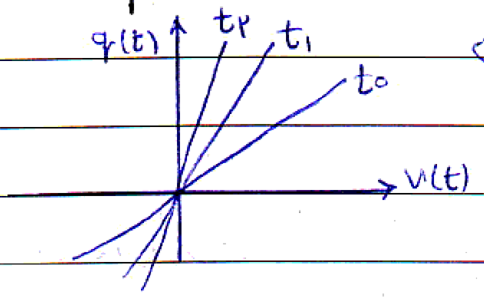
$V_S = V_C = V$

$$C(V_C(t) - \underbrace{V_C(0)}_{0}) \Rightarrow V_C(t) = V_S(t) + \frac{1}{C}\int i_S(t)\,dt$$

خازن خطی تغییرپذیر با زمان:

$$q(t) = C(t)\,v(t)$$

$C(t)$ تابع مشخصی از زمان



$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C(t)\,v(t)\right)$$

$$i(t) = C(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dC}{dt}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

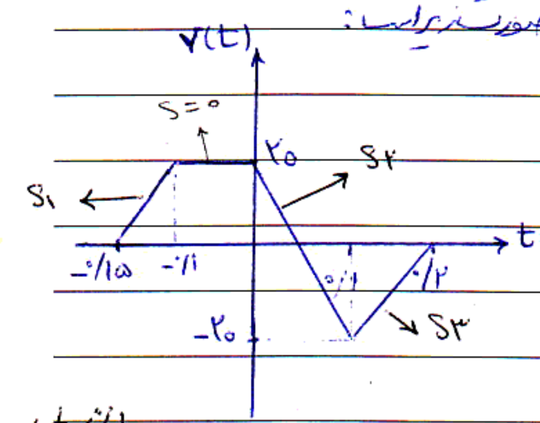
توابع غیرخطی : $q(t)=f\left(v(t),t\right)$

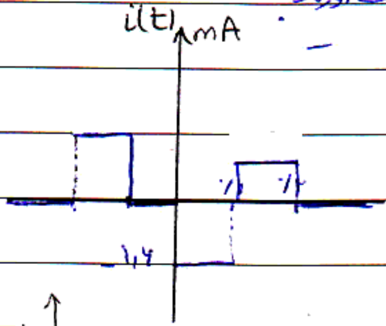
اگر t به صورت صریح وجود داشت تغییرپذیر با زمان، درغیراین صورت : ← غیرخطی

مثال) برای یک خازن $C=4\mu F$ ولتاژ بر حسب زمان به صورت زیر است:

الف) شکل جریان

ب) منحنی توان عناصر را بدست آورید؟





$$i(t)=C\frac{dv}{dt}$$

$$v(t)=S_1t+\alpha$$

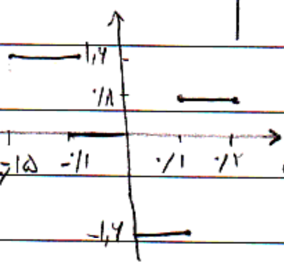
$$\frac{dv}{dt}=S_1 \rightarrow \text{شیب}$$

$$\text{شیب } S_1=\frac{20}{0/05}=400$$

$$CS_1=400\times4\times10^{-6}=1600\times10^{-6}=1/6\,mA$$

$0<t<0/1$

$$\frac{dv}{dt}=S_2=\frac{-40}{0/1}=-400$$



$$i=-400\times4\times10^{-6}=-1/6\,mA$$

$$\frac{dv}{dt}=S_3=\frac{20}{0/1}=200$$

ب) منحنی توان :

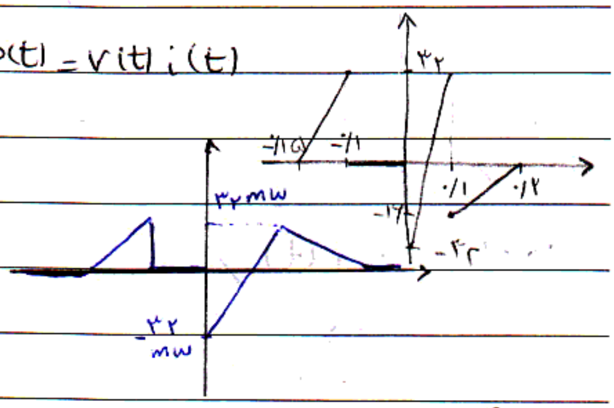
$$i=200\times4\times10^{-6}=800\times10^{-6}=0/8\,mA$$

$$p(t)=v(t)\,i(t)$$

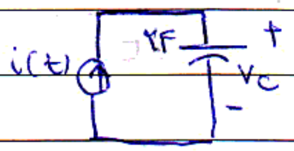
$-0/15<t<-0/1 \rightarrow i_1=1/6\,mA \begin{cases} V_2=20 & P_2=32 \\ V_1=0 & P_1=0 \end{cases}$

$0<t<0/1 \rightarrow i_2=-1/6\,mA \begin{cases} V_2=-20 & P_2=32 \\ V_1=20 & P_1=-32 \end{cases}$

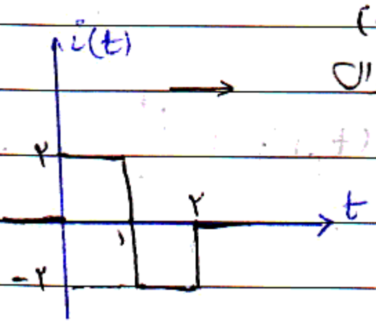
$0/1<t<0/2 \rightarrow i_3=0/8 \begin{cases} V_2=0 & P_2=0 \\ V_1=-20 & P_1=-16 \end{cases}$



مثال) صورت سوال



$$V_C(0^-)=-\tfrac{1}{2}\,V$$



WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v_c(t) = v_c(t_0) + \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$$

$$t_0 = 0 \longrightarrow v_c(t) = -\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t i(\lambda)\,d\lambda$$

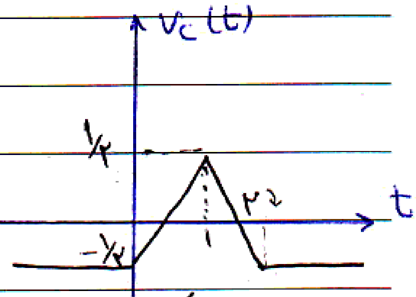
$$\text{if } 0 < t < 1 \quad v_c(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,d\lambda = t - \tfrac{1}{2}$$

$$v_c(1^-) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$1 < t < 2 \quad v_c(t) = v_c(1) + \frac{1}{2}\int_1^t i(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^t (-2)\,d\lambda = \tfrac{3}{2} - t$$

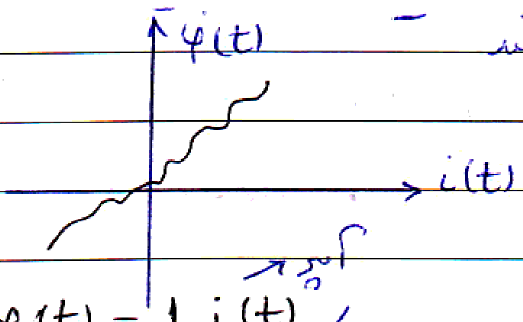
$$v_c(2) = \tfrac{3}{2} - 2 = -\tfrac{1}{2}$$

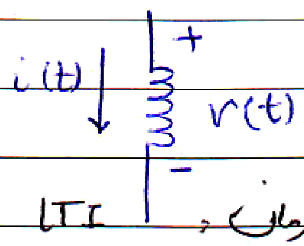
$$t > 2 \longrightarrow v_c(t) = v_c(2) + \frac{1}{2}\int_2^t (0)\,d\lambda = -\tfrac{1}{2}$$



سلف (القائی):

تعریف: سلف عنصری است دو پایانه که رابطه بین شار مغناطیسی $\varphi(t)$ و جریان آن $i(t)$ در هر لحظه از زمان در صفحه $\varphi - i$ توسط یک منحنی مشخص شود





$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان، LTI

$$\varphi(t) = L\, i(t)$$

آمپر

واحد شار: وبر wb

اندوکتانس

واحد H هانری

$$1\,H \triangleq 1\,\frac{wb}{A}$$

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\big(L\, i(t)\big) = L\frac{d(i(t))}{dt} \qquad v(t) = L\frac{d(i(t))}{dt}$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

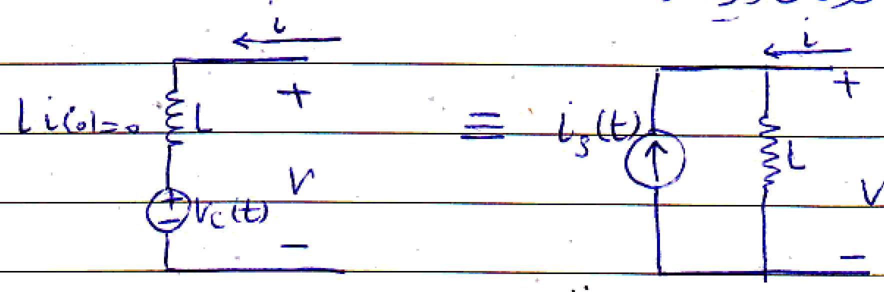
WWW.MOHANDESYAR.COM

خواص سلف LTI :

۱- اگر جریان سلف dc باشد ← سلف مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند

۲- جریان سلف نمی‌تواند جهش داشته باشد مگر اینکه ولتاژ دارای ضربه باشد $Li(t^-)=Li(t^+)$

۳- برای یک سلف با $Li(0)=0$ مدارهای زیر معادلند :



$$V_s(t)=L\frac{di_s(t)}{dt}$$

سلف خطی تغییرپذیر با زمان :

$$\varphi(t)=L(t)\,i(t)$$

$$v(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d}{dt}\big(L(t)\,i(t)\big)=L(t)\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{dL(t)}{dt}\longrightarrow v(t)=L(t)\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{dL(t)}{dt}$$

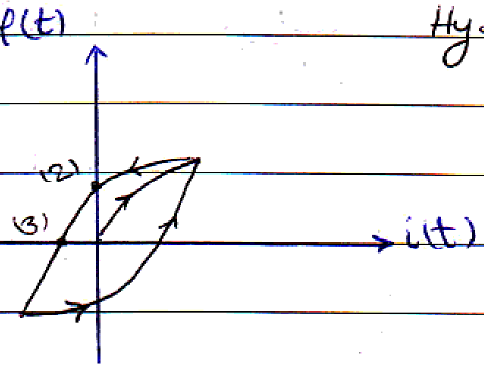
سلف‌های غیرخطی :

$$\varphi(t)=\overset{\text{غیرخطی}}{f}\big(i(t),t\big)$$

اگر t بصورت صریح وجود داشته باشد ← تغییرپذیر با زمان

" " نداشته باشد ← تغییرناپذیر با زمان

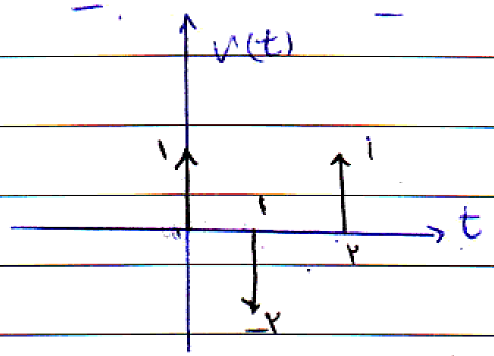
خاصیت هیسترزیس : Hysteresis



نقطه (۲) : شار پسماند

نقطه (۳) : جریان نیروی الزامی

مثال) یک سلف با القاء $L=2H$ ، $i(t)=۲A$ ، ولتاژ زیر اعمال می‌شود یعنی جریان سلف را بدست آورید؟



$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(\lambda)\,d\lambda$$

$$t_0=0 \longrightarrow i(t)=۲+\frac{1}{۲}\int_{0}^{t}v(\lambda)\,d\lambda$$

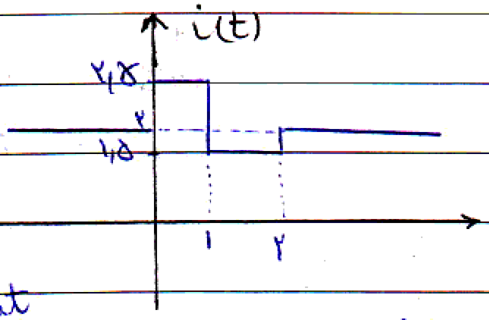
$$0^-<t<1^+ \quad i(t)=۲+\frac{1}{۲}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)+\frac{1}{۲}\int_{0^+}^{t}(0)\,dt=۲+\frac{1}{۲}=۲٫۵$$

$1^-<t<۲^-$

$$i(t)=i(1^-)+\frac{1}{۲}\int_{1^-}^{۲^-}v(\lambda)\,d\lambda=۲٫۵+\frac{1}{۲}\int_{1^-}^{1^+}-۲\,\delta(t-1)\,dt+\frac{1}{۲}\int_{1^+}^{t}(0)\,d\lambda=۲٫۵-1=1٫۵$$

$$t>۲^- \quad i(۲^-)=1٫۵ \quad i(t)=i(۲^-)+\frac{1}{۲}\int_{۲^-}^{t}v(\lambda)\,d\lambda=$$

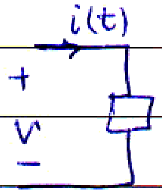
$$1٫۵+\frac{1}{۲}\int_{۲^-}^{۲^+}\delta(\lambda-۲)\,d\lambda+\frac{1}{۲}\int_{۲^+}^{t}(0)\,d\lambda$$



انرژی و توان ـ [illegible]؟

wat

$$p(t)=v(t)\,i(t)$$



جریان از سر مثبت شروع به حرکت کرده پس داریم $p(t)=v(t)i(t)$

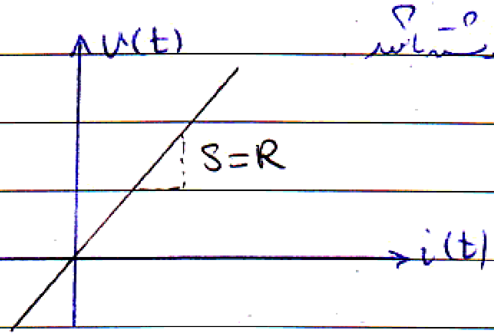
توان لحظه‌ای $p(t)$

ولی اگر از سر منفی حرکت کرده داریم: $p(t)=-v(t)i(t)$

انرژی در $t_0 \le t$: $w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\lambda)\, d\lambda$

اکتیو: عنصری است که امکان تحویل توان به مدار را داشته باشد

پسیو: " " " " نداشته باشد



$$\begin{cases} p(t) = v(t)\, i(t) \\ v(t) = R\, i(t) \end{cases} \Rightarrow p(t) = R\, i^2(t)$$

یا

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} > 0$$ مقاومت عنصر Passive

ممکن است غیرخطی باشد.

خازن، $v = f(q)$ $\quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ $\quad p(t) = v(t)\, i(t)$

$$p(t) = f(q)\frac{dq}{dt} \qquad w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} f(q)\, dq$$

برای خازن LTI: $q = cv$ $\quad f(q) = \frac{q}{c}$

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{q}{c}\, dq = \frac{1}{2c}\left(q^2(t) - q^2(t_0)\right)$$

فرض $q(0) = 0$ ، $t_0 = 0$

$$w(0, t) = w(t) = \frac{1}{2c} q^2(t) = \frac{1}{2} c v^2(t)$$

سلف، $i = f(\varphi)$ $\quad p(t) = v(t)\, i(t) = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) i(t) =$

ممکن است غیرخطی.

$$f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow p(t) = f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} f(\varphi)\, d\varphi$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

برای یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان:

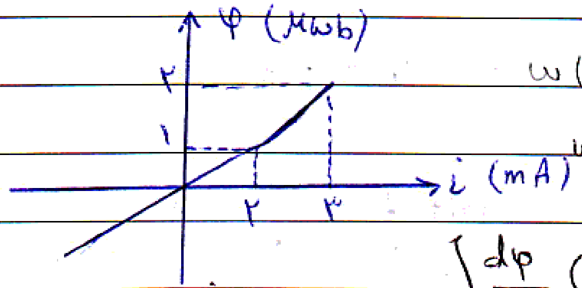
$$v(t)=L\frac{di}{dt}$$

$$\varphi(t)=Li(t) \qquad i(t)=\frac{\varphi(t)}{L} \longrightarrow f(\varphi)=\frac{\varphi(t)}{L}$$

$$w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi(t)}{L}\,d\varphi=\frac{1}{2L}\left(\varphi^2(t)-\varphi^2(t_0)\right)$$

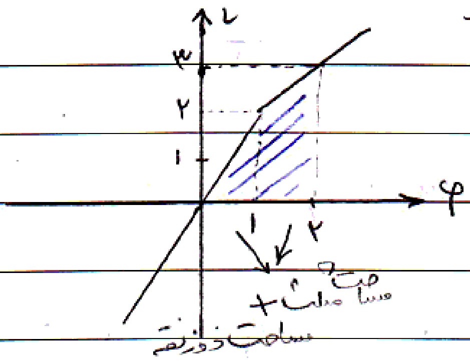
$$w(t)=\frac{1}{2L}\varphi^2(t)=\frac{1}{2}Li^2(t) \qquad \varphi(0)=0 \longrightarrow T_e=0$$

مثال: مشخصه یک سلف غیرخطی بصورت شکل زیر است. انرژی ذخیره شده در سلف از لحظه $i=0$ تا $i=3mA$ را بدست آورید.



$$w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}p(t)\,dt=\int_{t_0}^{t}f(\varphi)\,d\varphi$$

$$w(t)=\int p(t)\,dt=\int v(t)\,i(t)\,dt=\int\frac{d\varphi}{dt}(i(t))\,dt=\int_{t_0}^{t}i(t)\,d\varphi=3.5$$

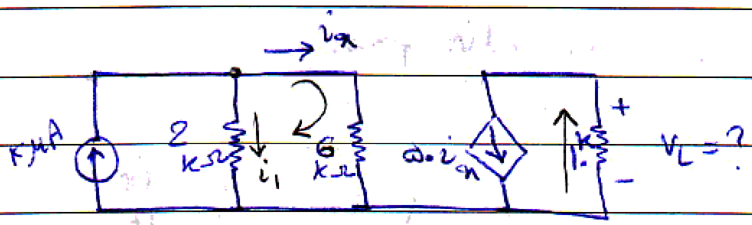


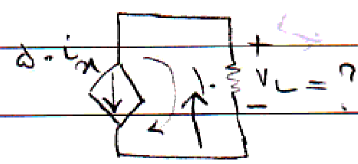
$$w(t)=\int_0^2 f(\varphi)\,d\varphi=3.5\times10^{-9}$$

$\varphi<1$

$$i(\varphi)=2\varphi \qquad i(\varphi)=\varphi+1 \qquad 1<\varphi<2$$

مثال: ولتاژ روبرو $V_L=?$





$$-2i_1+6i_x=0 \longrightarrow i_1=3i_x$$

$$\text{KCL}:\quad 4=i_1+i_x=4i_x \longrightarrow i_x=1\ \mu A$$

$$-V_L-50i_x\times10=0$$

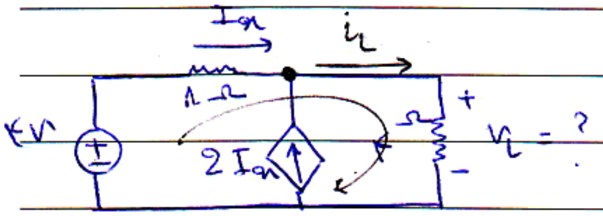
$$-V_L=50i_x\times10$$

$$V_L=-50i_x\times10$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$V_L = (-50 \cdot i_x) 10^k = -50 \times 10^{-4} \times 10 \times 10^{3} = -0/5 \, V$

مثال ۶)

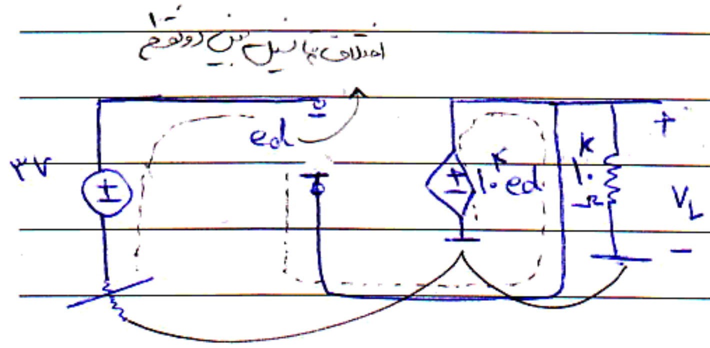


KCL: $I_x + 2I_x - i_L = 0 \longrightarrow i_L = 3 i_x$

KVL: $-4 + 8I_x + 4 i_L = 0$

$-4 + 8 I_x + 12 I_x = 0 \longrightarrow I_x = 1/5$ $\quad V_L = 4 i_L = 12 I_x = 12 \times \frac{1}{5} = 2/4$

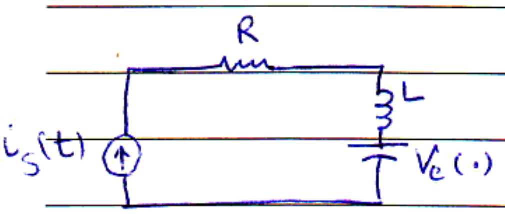
مثال ۵)

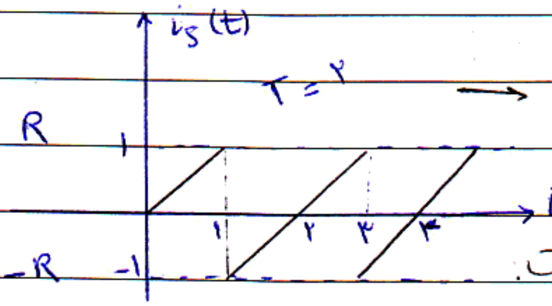


KVL: $-3 - e_d + 10^4 e_d = 0 \qquad (10^4 - 1) e_d = 3 \longrightarrow e_d \simeq 10^{-4} \times 3$

$V_L = 10^4 e_d = 10^4 \times 3 \times 10^{-4} \simeq 3 \, V$

مثال ۶) اگر $i_s(t)$ مطابق شکل زیر تغییر کند، ولتاژهای دو سر سلف و مقاومت و خازن را بدست آورید و رسم کنید.





$T = 2 \longrightarrow$ صورت سوال

پریود دارد.

تناوبش ۲ است.

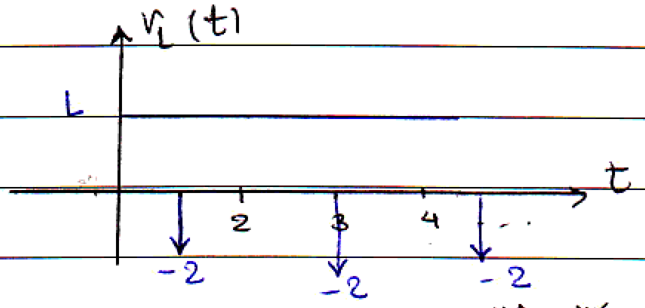
$V_R(t) = R i_s(t) \qquad i_s(t) = T$

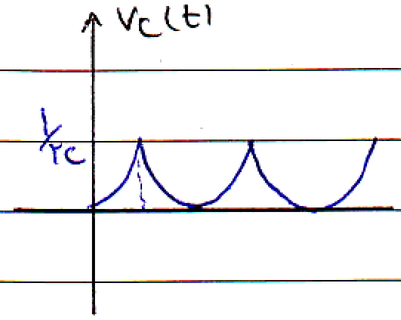
$0 < T < 1 \qquad I(t) = T$

$V_R(T) = RT$

$V_L = L \frac{di_s}{dt}$

WWW.MOHANDESYAR.COM



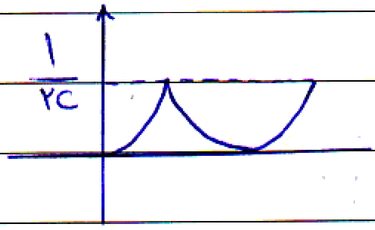


تمرین : ۵-۶-۹-۱۱-۱۲-۱۵-۱۹-۲۴-۲۸

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_s(\lambda)\,d\lambda$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_s(\lambda)\,d\lambda \Rightarrow 0<t<1 \longrightarrow v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} \lambda\,d\lambda = \frac{t^2}{2C}$$

$$1<t<2 \longrightarrow v_C(t) = v_C(1) + \frac{1}{C}\int_{1}^{t} i_s(t)\,d\lambda$$

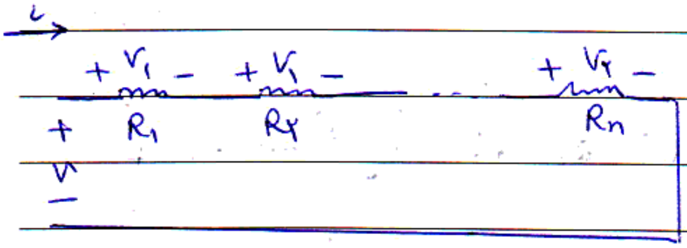


WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل سوم: مدارهای ساده

مقاومت‌ها:

ترکیب سری مقاومتهای اهمی:

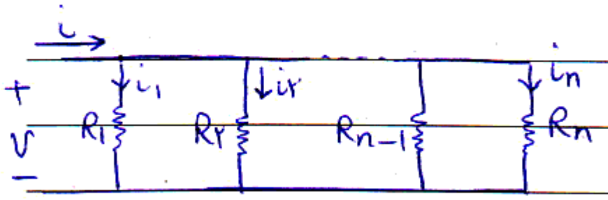


$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$V = R_1 i + R_2 i + \dots + R_n i$$

$$\frac{V}{i} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \qquad R_{eq} = \frac{V}{i} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

مقاومت‌های موازی:



$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_n} \longrightarrow i = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{i}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1} \frac{1}{R_i}}$$

خازن:

برای خازن‌های موازی: $C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$

برای خازن‌های سری: $C_{eq} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$

فصل دوم سوال

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(\underset{t=0}{t})\,dt = x(0)$$

۵-

$$I = \int_{-2}^{4} (t^3+4)\left[\delta(t) + 4\delta(t-2)\right] dt =$$

$$\int_{-2}^{4} (t^3+4)\,\delta(t)\,dt + \int_{-2}^{4} 4(t^3+4)\,\delta(t-2)\,dt = (t^3+4)\Big|_{t=0} + 4(t^3+4)\Big|_{t=2}$$

توجه کنیم که $t=0$ و $t=2$ که صفرهای آرگومان تابع دلتا هستند در محدوده انتگرال گیری هستند

بنابراین داریم: $I = ((0)^3+4)+4(2^3+4) = 52$

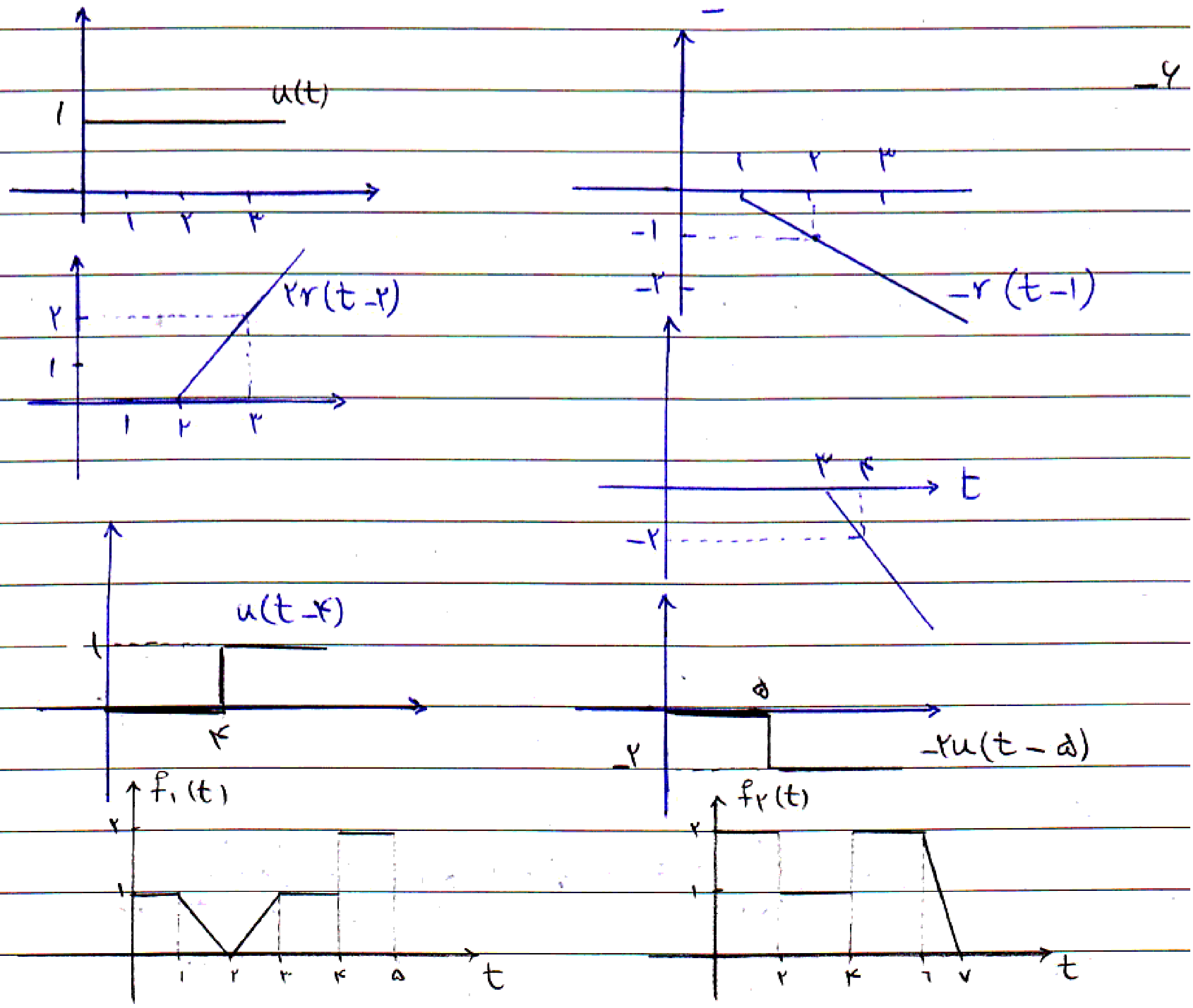
$$I=\int_{-3}^{4} t^2\left[\delta(t)+\delta(t+2{,}5)+\delta(t-5)\right]dt=\int_{-3}^{4} t^2\delta(t)\,dt+$$

$$\int_{-3}^{4} t^2\delta(t+2{,}5)\,dt+\int_{-3}^{4} t^2\delta(t-5)\,dt=t^2\Big|_{t=0}+t^2\Big|_{t=-2{,}5}+\cancel{t^2\Big|_{t=5}}$$

عدد $t=5$ در عبارت سوم از محدوده انتگرال گیری خارج بوده لذا عبارت سوم از جملات

بعدی صفر خواهد بود. بنابراین داریم: $I = 0^2+(-2{,}5)^2 = 6{,}25$

۶-

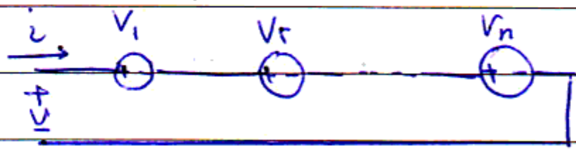


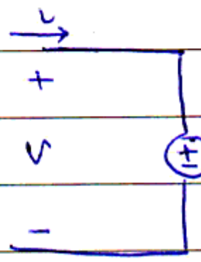
سلف:

ترکیب سری: $L_{eq}=\sum_{i=1}^{N} L_i$

ترکیب موازی: $L_{eq}=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{L_i}}$

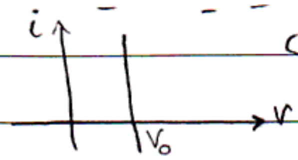
ترکیب سری منابع ولتاژ ایده‌آل:





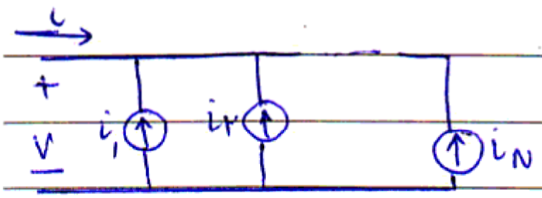
$$V_{eq}=\sum_{i=1}^{N} V_i$$

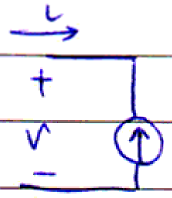
منبع ولتاژ ایده‌آل در واقع یک المان که ولتاژ مشخصی
با مشخصه و نمودار آن



* منابع ولتاژ ایده‌آل را زمانی می‌توان به صورت موازی بست که مقدار آن‌ها باهم برابر باشد.

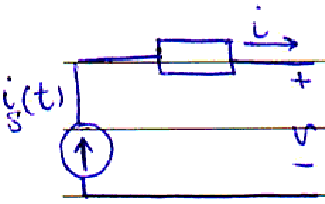
ترکیب موازی منابع جریان ایده‌آل:

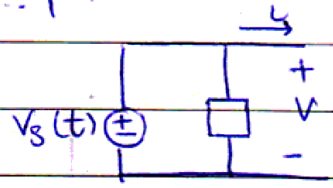




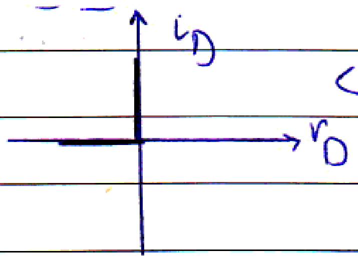
$$i_{eq}=\sum_{i=1}^{N} i_i$$

* منابع جریان ایده‌آل را زمانی می‌توان سری بست که مقدار آن‌ها باهم برابر باشد.

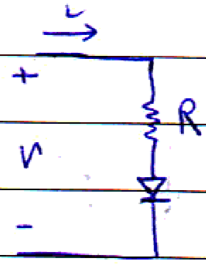




مثال) مشخصه دیود ایده‌آل که مطابق شکل داده شده. در این صورت مشخصه I − V دیود ایده‌آل



مشخصه دیود ایده‌آل

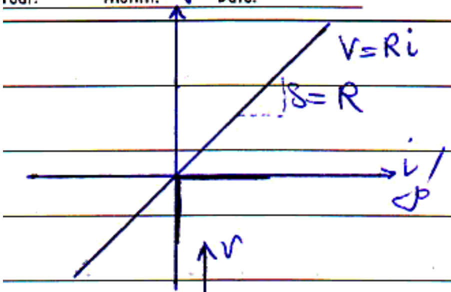


جریان را بدست آورید

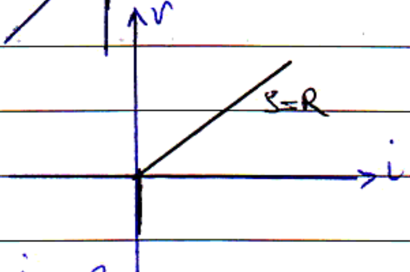
WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date.

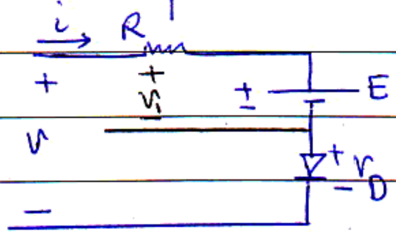
حل :



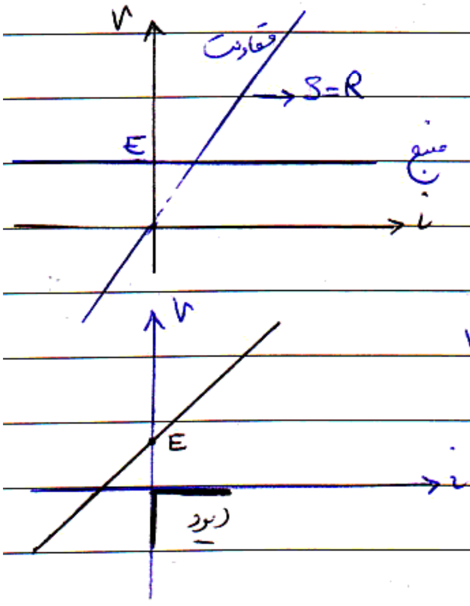
دیود جریان های منفی را حذف می کند بنابراین داریم:



مثال) منحنی V ـ i ؟



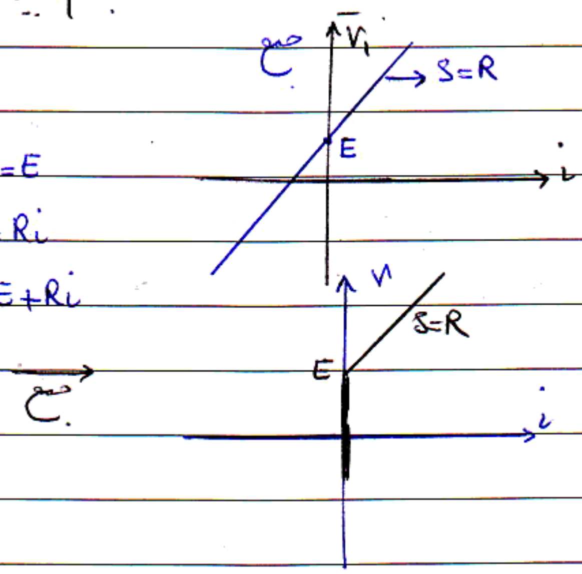
حل : چون سری هستند جریانی که از آن ها می گذرد با هم برابر است.



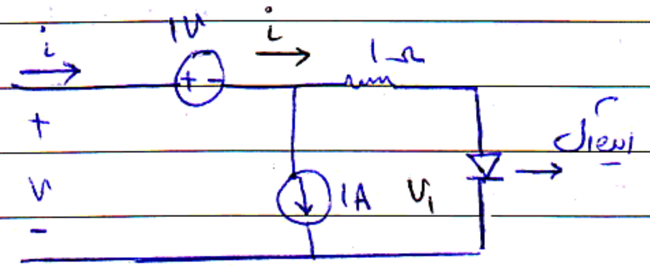
$V_1' = E$

$V_1' = Ri$

$V_1 = E + Ri$



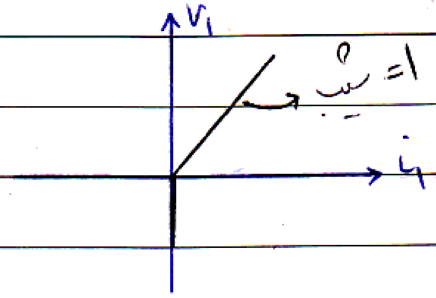
مثال) منحنی V ـ i این مدار را به دست آورید؟ (دیود ایده آل است.)



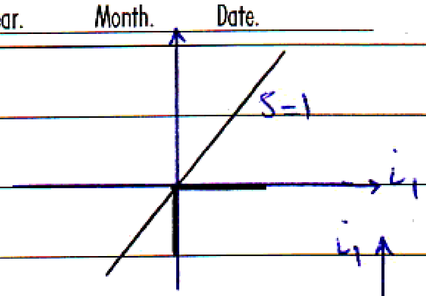
WWW.MOHANDESYAR.COM

Year. Month. Date.

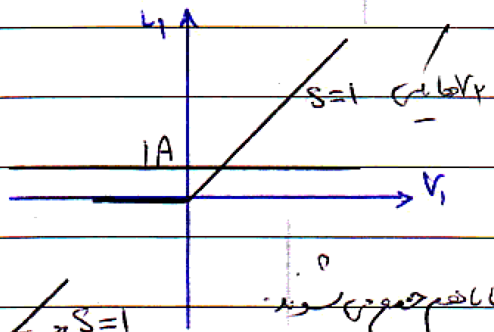
حل:



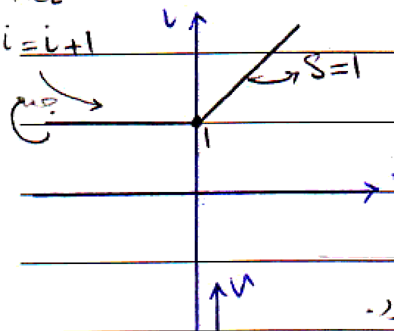
جمع



منحنی را می‌خواهیم

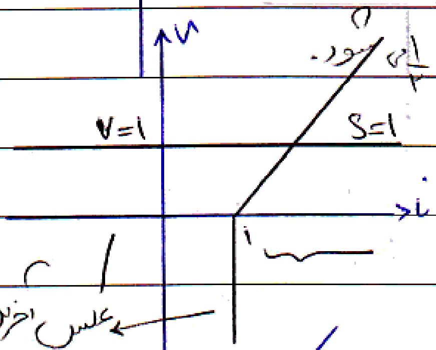


kcl
$i = i + 1$
جمع



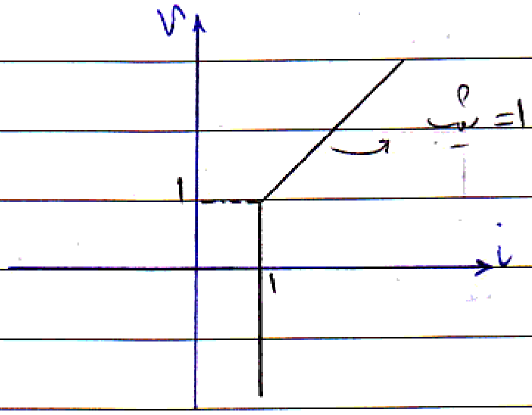
بر حسب v_1

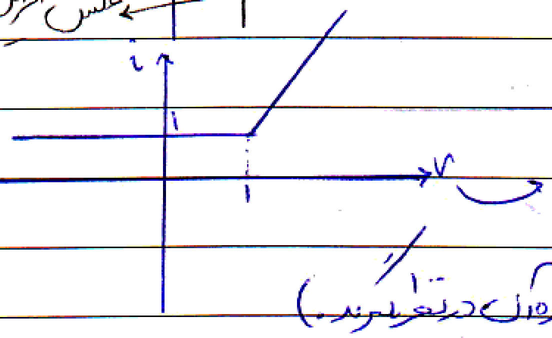
ولتاژهایی هستند موازی را ولتاژ می‌گیریم و جریان‌ها با هم جمع می‌شوند.



اگر ۲ بود $\frac{1}{2}$ می‌شود.

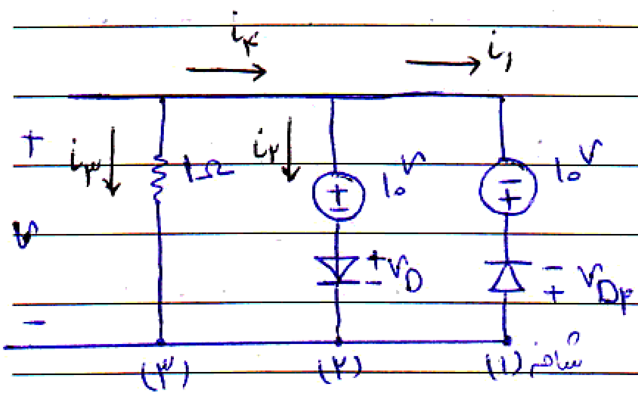
عکس اخرین نمودار





منحنی v ـ i مدار

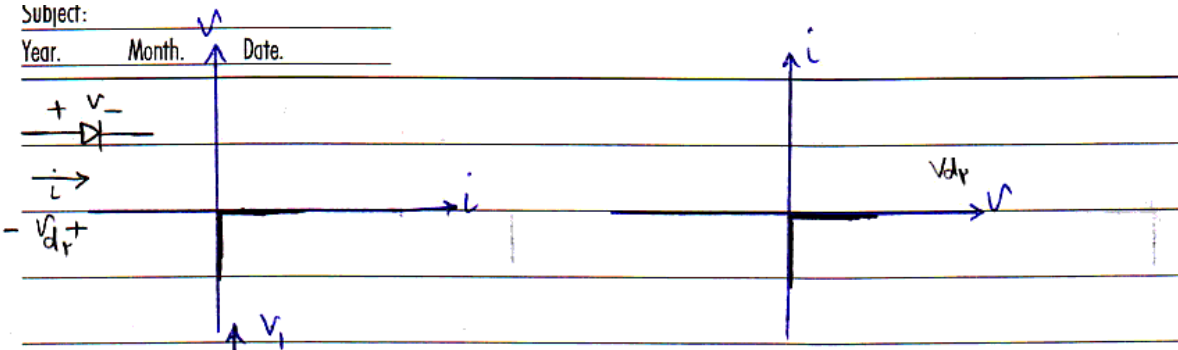
مثال) منحنی v ـ i مدار روبرو را رسم کنید. (دیودها را ایده‌آل در نظر بگیرید.)

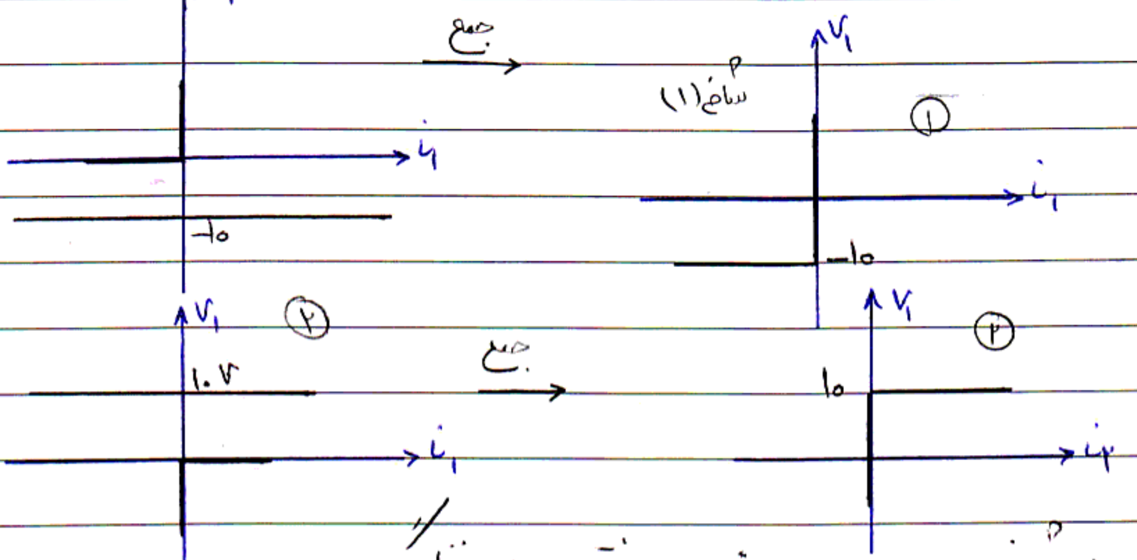


WWW.MOHANDESYAR.COM

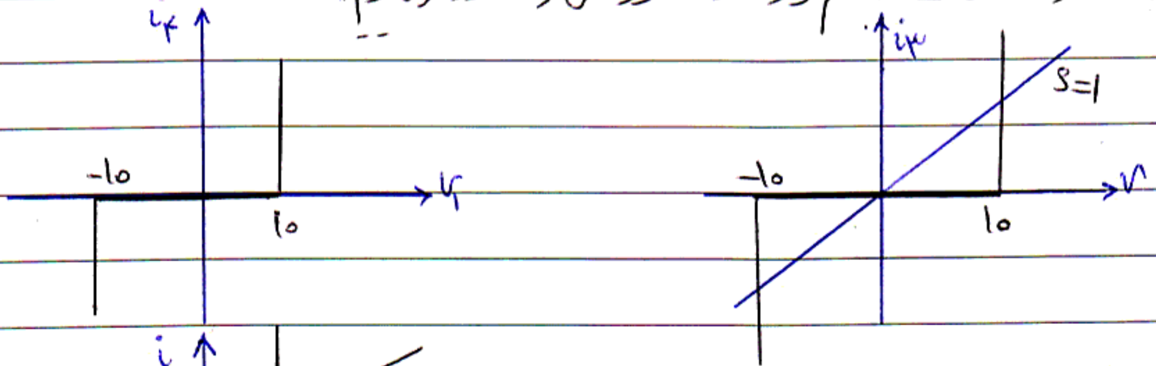
Subject:
Year. Month. Date.

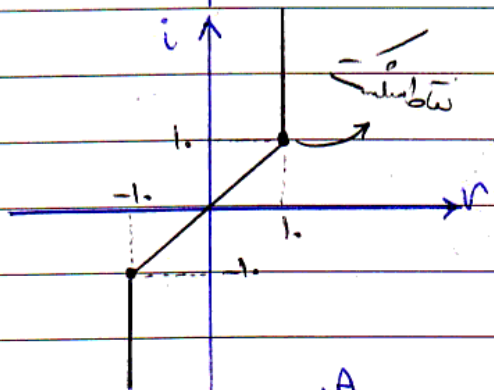
حل:





شاخه‌ی ۱ و شاخه‌ی ۲ باهم موازی‌اند. محور افقی را V در نظر می‌گیریم

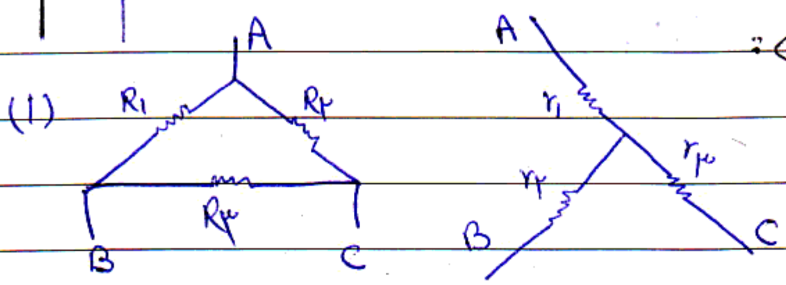




تعداد نقاط شکست در منحنی‌ها معمولاً برابر با تعداد دیودها است.

در این جا ۲ نقطه‌ی شکست داریم = ۲ دیود

تبدیل ستاره مثلث و برعکس:



WWW.MOHANDESYAR.COM

$$R_{AB}(1) = R_{AB}(2)$$

$$R_{AC}(1) = R_{AC}(2)$$

$$R_{BC}(1) = R_{BC}(2)$$

مثلث $\Delta \rightarrow Y$ ستاره

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

ستاره $Y \rightarrow \Delta$ مثلث

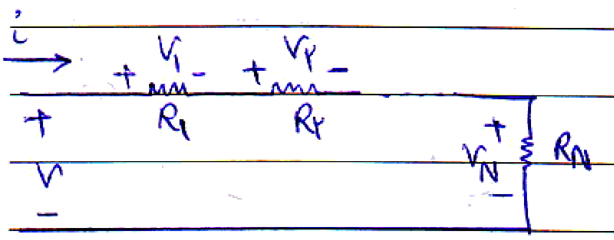
$$R_1 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1}$$

$$R_2 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_2}$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_3}$$

تقسیم ولتاژ و جریان :

فرض کنید n مقاومت به طور سری با هم داشتیم، داریم :



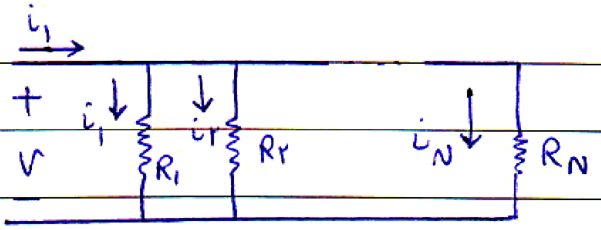
$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} V$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} V$$

$\vdots$

$$V_N = \frac{R_N}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} V$$

WWW.MOHANDESYAR.COM



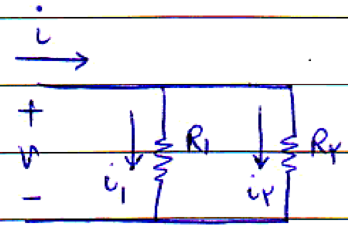
$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N}\, i$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N}\, i$$

$$\vdots$$

$$i_N = \frac{G_N}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N}\, i$$

در حالتیکه دو مقاومت داشته باشیم :



$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\, i \\[2ex] i_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\, i \end{cases}$$

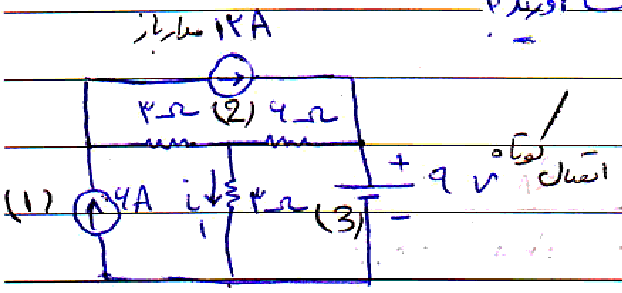
اصل جمع آثار (برهم نهی) :

در یک مدار خطی که شامل چندین منبع ولتاژ و جریان مستقل است، پاسخ مدار برابر است با مجموع پاسخ های مدار به هر یک از منابع مستقل، وقتی سایر منابع مستقل صفر شوند.

مدار خطی : مدار خطی مداری است که شامل اجزای خطی باشد مثل مقاومت خطی، سلف خطی، خازن خطی و ...

صفر کردن منابع :
اگر منبع ولتاژ باشد ← اتصال کوتاه
اگر منبع جریان باشد ← مدار باز

مثال ۱) با استفاده از اصل جمع آثار جریان i را بدست آورید.



WWW.MOHANDESYAR.COM

بسم الله الرحمن الرحیم

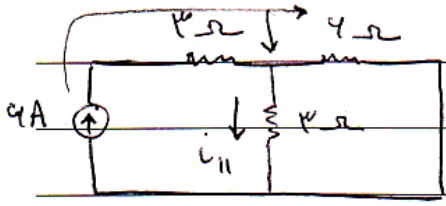
مدارهای الکتریکی ۱

(بخش دوم)

استاد عادلی

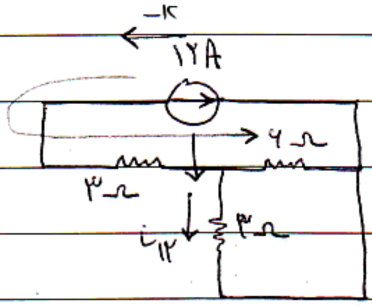
WWW.MOHANDESYAR.COM

صفر کردن منبع ۲ و ۳



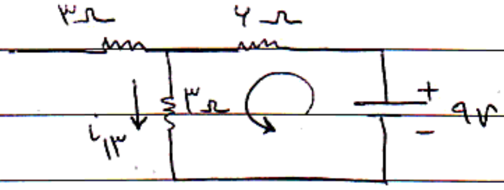
$$i_{11} = \frac{6}{9} \times 6^{A} = 4A$$

منبع (۱) و (۳) صفر



$$i_{12} = \frac{6}{3+6} \times (-12)^{A} = -8A$$

منبع (۱)، (۲) صفر

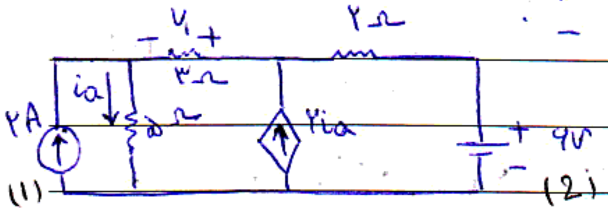


$$KVL: -9 + 6i_{13} + 3i_{13} = 0 \rightarrow i_{13} = 1A$$

$$i_1 = i_{11} + i_{12} + i_{13} = 4 + (-8) + 1 = -3A$$

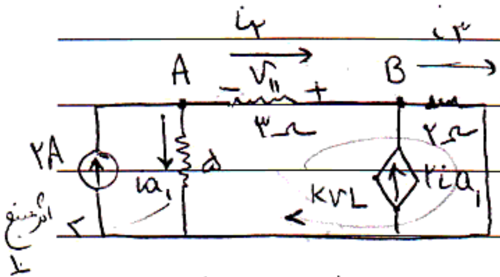
نکته: منابع وابسته را هیچ‌وقت نباید صفر کنیم.

مثال) با استفاده از قضیه جمع آثار V_1 و i_a را بدست آورید؟



مدار خطی است چون منبع وابسته داریم

منبع (۲) را صفر می‌کنیم.



$$V_{11} = -3i_2$$

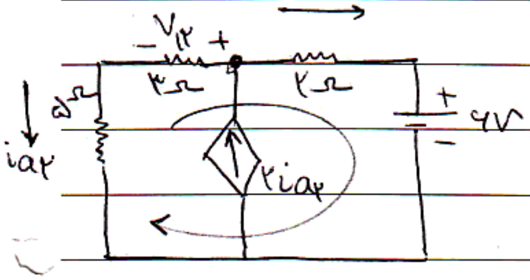
$$KCL\ (A): 2 = i_{a1} + i_2$$

$$KCL\ (B): i_2 + 2i_{a1} = i_3$$

$$KVL: -5i_{a1} + 3i_2 + 2i_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{11} = -1 \\ i_{a1} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM



منبع ۱ صفر

KCL: $i_{a2} + i_3 = 2i_{a2} \rightarrow i_3 = i_{a2}$

KVL: $-5i_{a2} - 3i_{a2} + 2i_{a2} + 6 = 0$

$i_{a2} = 1A \qquad V_{12} = 3V$

$$\begin{cases} i_a = i_{a1} + i_{a2} = \frac{8}{3}\ A \\ v_1 = v_{11} + v_{12} = 2V \end{cases}$$

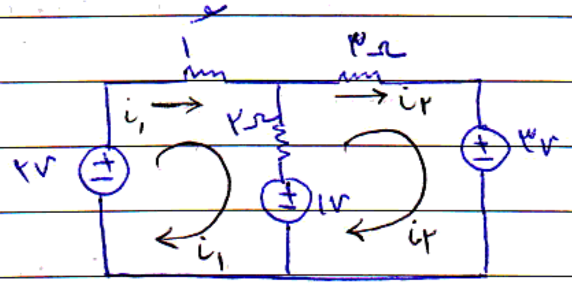
روش جریان خانه mesh

روش ولتاژ گره

روش تجزیه و تحلیل جریان خانه: برای هر خانه یک جریان در نظر می‌گیریم (n مش ← n جریان باید بدست آوریم.)

برای نوشتن KVL جهت خانه را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم اگر جریان در جهت خانه باشد

آن را با علامت مثبت و اگر خلاف جهت خانه باشد آن را با علامت منفی لحاظ می‌کنیم



مثال ۱: ۲ مش داریم. ۲ جریان در نظر می‌گیریم

KVL (1): $-2 + i_1 + 2(i_1 - i_2) + 1 = 0$

KVL (2): $-1 + 2(i_2 - i_1) + 3i_2 + 3 = 0$

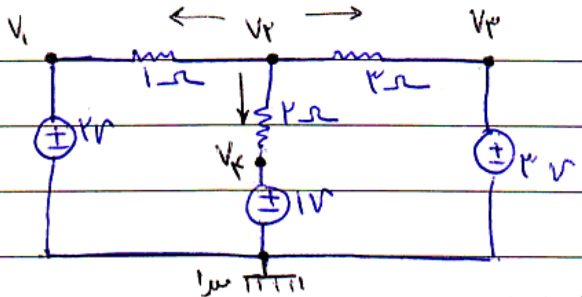
روش کرامر

$$\begin{cases} 3i_1 - 2i_2 = 1 \\ -2i_1 + 5i_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3}{13} \qquad i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}} = \frac{-4}{13}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

تجزیه و تحلیل ولتاژ گره: یک گره را زمین در نظر می‌گیریم و ولتاژهای گره‌های دیگر را بدست می‌آوریم، در این صورت اگر n گره داشته باشیم (n−1) ولتاژ مجهول می‌شود



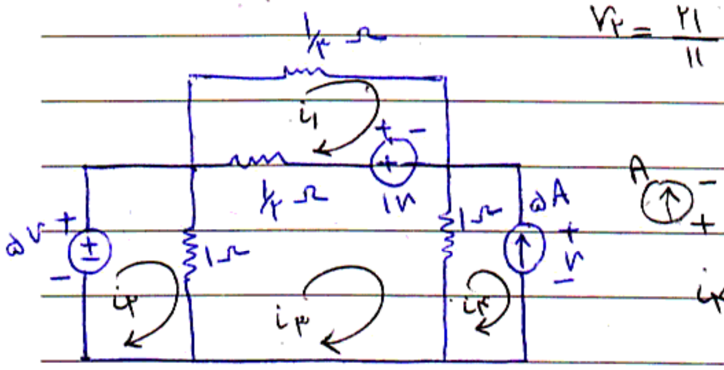
مثال) تجزیه و تحلیل ولتاژ گره را برای این مدار انجام دهید.

$V_1 = 2 \qquad V_4 = 1V \qquad V_3 = 3V$

(2) (1) (3)

$$KCL\,(2):\ \frac{V_2 - V_1}{1} + \frac{V_2 - V_4}{2} + \frac{V_2 - V_3}{3} = 0$$

$$V_2 = \frac{21}{11}\,V$$



مثال) تجزیه و تحلیل جریان: مقدار V را بیابید

۴ مش داریم. $i_2 = -5A$

$V = i_3 - i_4$

$-V + (i_4 - i_3) = 0$

$V = i_3 - i_4$

$$KVL(1):\ \frac{1}{3} i_1 - 1 + \frac{1}{2}(i_1 - i_3) = 0$$

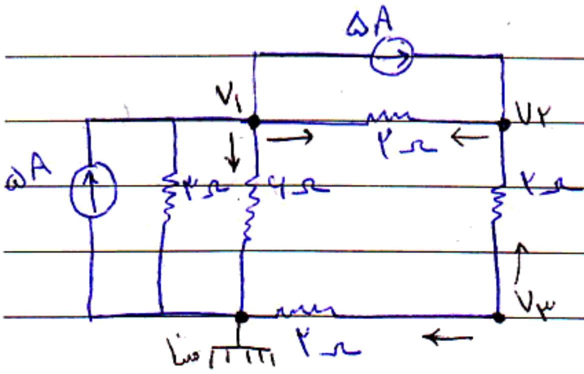
$$KVL(2):\ -5 + (i_2 - i_3) = 0$$

-5

$$KVL(3):\ (i_3 - i_2) + \frac{1}{2}(i_3 - i_1) + 1 + (i_3 - i_4) = 0$$

$$i_1 = 1A \qquad i_2 = \frac{14}{3}A \qquad i_3 = \frac{-1}{3}A$$

مثال)



$$KCL(1):\ 5 = \frac{V_1}{3} + \frac{V_1}{6} + \frac{V_1 - V_2}{2} + 5$$

$$KCL(2):\ 5 = \frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_2 - V_3}{2}$$

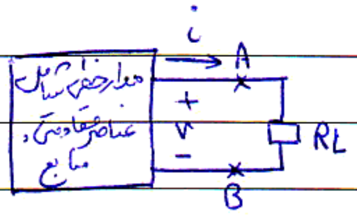
$$KCL(3):\ \frac{V_3 - V_2}{2} + \frac{V_3}{2} = 0$$

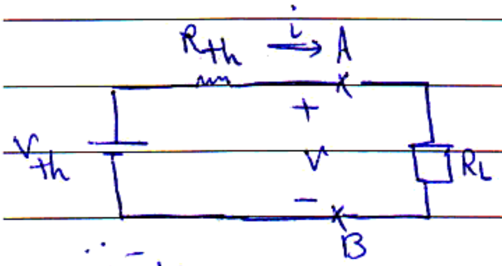
WWW.MOHANDESYAR.COM

$\Rightarrow V_1 = 5V \qquad i_4 = \frac{V_1}{4} = \frac{5}{4}$

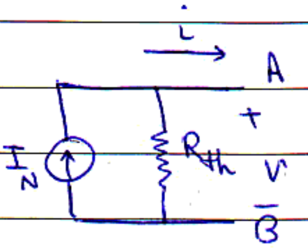
$\begin{cases} V_2 = 10V \\ V_3 = 5V \end{cases}$

معادلهای تونن و نورتن:





معادل تونن



$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$

برای بدست آوردن V_{th}، دو سر A و B را مدار باز می‌کنیم، در این صورت (V_{oc} ولتاژ مدار باز)،

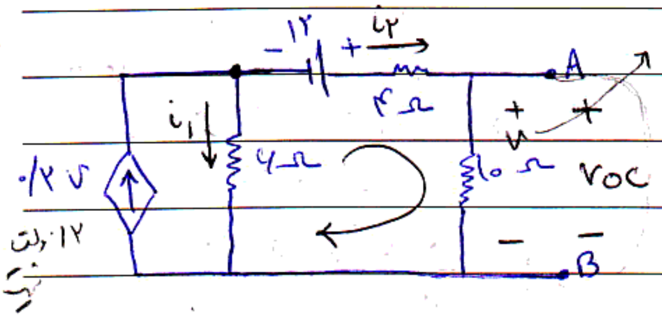
$V_{oc}(AB) = V_{th}$

برای بدست آوردن I_N، دو سر A و B را اتصال کوتاه می‌کنیم، در این صورت جریانی که از این اتصال کوتاه می‌گذرد (I_{SC})؛ $I_{SC}(AB) = I_N$

$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{V_{oc}(AB)}{I_{SC}(AB)}$

ولتاژ دو سر ۱۰ اهم

مثال) معادل تونن و نورتن را از دو سر AB بدست آورید.



WWW.MOHANDESYAR.COM

دو سر AB را مدار باز می‌کنیم :

KCL : $0/2V = i_1 + i_2$

$i_2 = \frac{V}{10} = 0/1V$ } $i_1 = 0/1V$

KVL: $-6i_1 - 12 + 4i_2 + 10i_2 = 0$

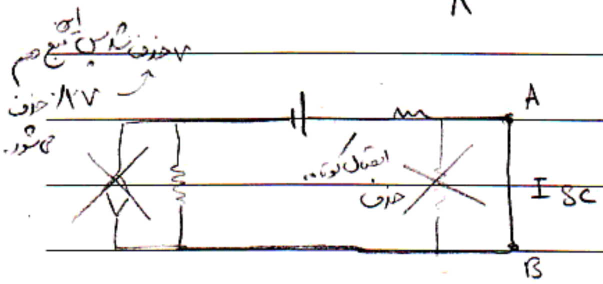
$8i_2 = 12 \rightarrow i_2 = \frac{12}{8}$

$V_{OC} = 10 i_2 = \frac{120}{8} = 15V$

$V_{th} = 15\,V$

حالا سراغ جریان $I_{SC} = I_N$

دو سر AB را اتصال کوتاه می‌کنیم

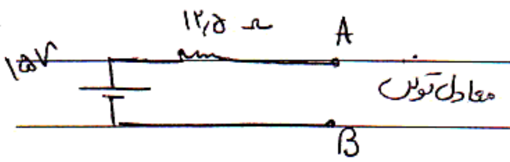


KVL : $\overset{-6I_{SC}}{6I_{SC}} - 12 + 4I_{SC} = 0$

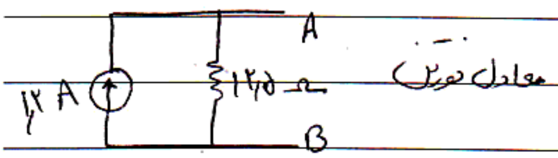
$I_{SC} = 1/2 A$

$I_N = I_{SC} = 1/2\,A$

$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{15}{1/2} = 12/5\,\Omega$



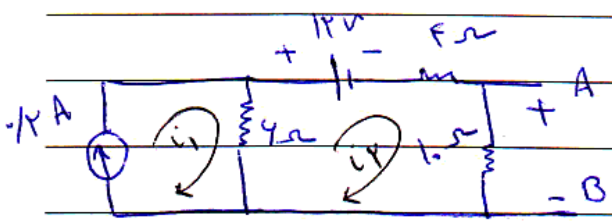
معادل تونن



معادل نورتن

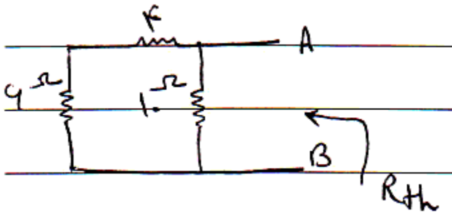
نکته : اگر در مدار منبع وابسته نداشته باشیم R_{th} را با صفر کردن منابع مستقل و محاسبه‌ی مقاومت معادل از دو سر مورد نظر حساب می‌کنیم

مثال) مدار معادل تونن و نورتن را به دست آورید



منبع وابسته نداریم

محاسبه‌ی R_{th} : منابع مستقل را صفر می‌کنیم



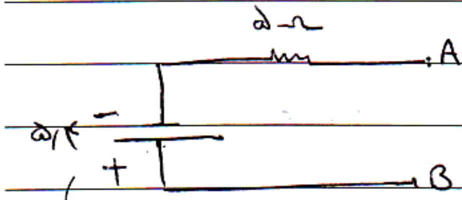
$R_{th} = 5\ \Omega$

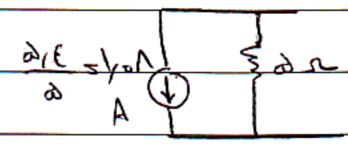
جزء دوم: حل جریان خانه، $i_1 = 0/2$ KVL(2): $6(i_2 - i_1) + 12 + 4i_2 + 10i_2 = 0$

$$i_2 = \frac{-10/8}{20}$$

$$V_{AB}(oc) = 10\, i_2 = -5/4\ V$$

$$V_{th} = V_{AB}(oc) = -5/4\ V$$



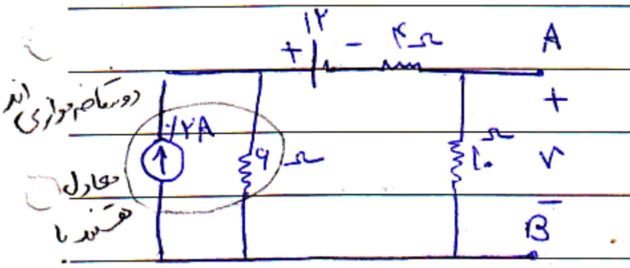


چون ۵/٤- است پس بالا را منفی و پایین را مثبت می‌گیریم.

تمرین‌های سری سوم: ۲ـ ۵ـ ۹ (الف) ـ ۲۴ـ ۳۲ـ ۳۵
۴۰ـ ۴۳ـ ۴۴ـ ۴۶ـ ۵۴ـ ۶۶ـ ۸۹

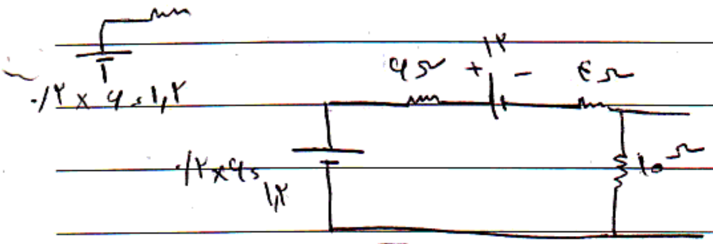
۲ هفته‌ی دیگر

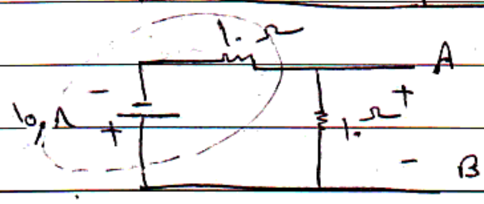
روش دوم روش تبدیل منابع:



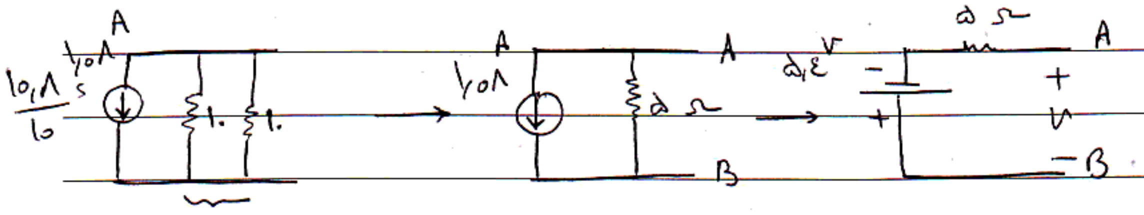
با تبدیل منابع معادل تونن کل مدار را بدست آورید.

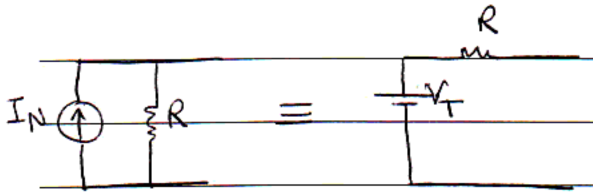
$0/2 \times 6 = 1/2$





WWW.MOHANDESYAR.COM

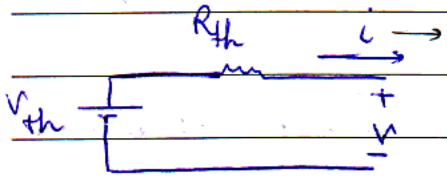




$V_T = I_N R$ تونن

نورتن

یک روش مفید: بدست آوردن مشخصه‌ی $V - I$ دوسر مورد نظر: (همیشه می‌توان استفاده کرد.)

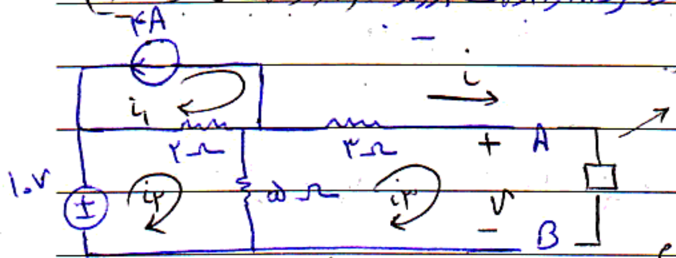


جریان فرضی

$$v = V_{th} - R_{th}\, i$$

اگر سوال v دوسر مورد نظر را برحسب جریان فرضی آن بنویسیم از رابطه‌ی مذکور V_{th} و R_{th} بدست می‌آید.

مثال) با استفاده از مشخصه‌ی $I - V$ معادل تونن دوسر AB را بدست آورید؟ (V را برحسب i بنویسید)



مجهول اضافه می‌شود.

جزء دیگر جریان حلقه

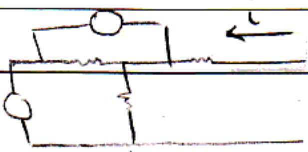
$$\begin{cases} i_1 = -4\,A \\ i_3 = i \end{cases}$$

چون هر دو از شاخه‌ی 3Ω می‌گذرند.

$$KVL(2):\ -10 + 2(i_2 - i_1) + 5(i_2 - i) = 0 \quad *$$

$$KVL(3):\ 5(i - i_2) + 3(i - i_1) + v = 0$$

$$*\quad i_2 = \frac{2 + 5i}{7}$$



$$v = v_{th} + R_{th}\, i$$

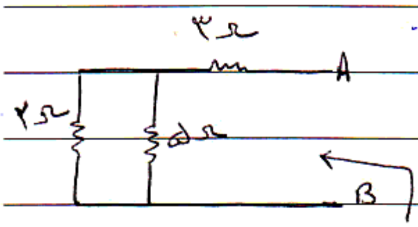
اگر داشتیم

WWW.MOHANDESYAR.COM

$5\left(i-\frac{2+5i}{7}\right)+3(i+4)+v=0 \longrightarrow v=\frac{-74}{7}-\frac{31}{7}i$

$v=V_{th}-R_{th}i \qquad V_{th}=\frac{-74}{7} \qquad R_{th}=\frac{31}{7}$

مثال) در مثال قبل با صفر کردن منابع مستقل، R_{th} را بدست آورید؟

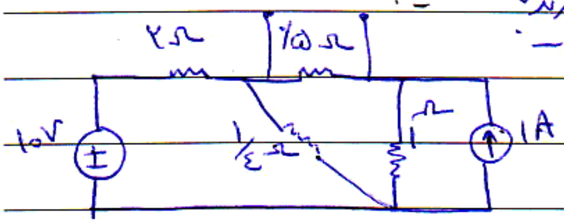


$R_{th}=2\|5+3=\frac{10}{7}+3=\frac{31}{7}\,\Omega$

تمرین) در همین مدار با مدار باز کردن دو سر AB، V_{th} را بدست آورید؟

(ترکیب تونن)

مثال) معادل تونن دو سر مقاومت ۰/۵ را بدست آورید؟

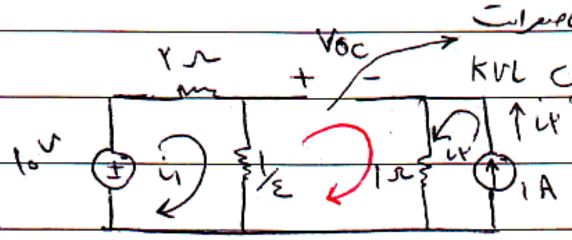


دو سر مدار را مدار باز می‌کنیم (برای محاسبه V_{th})

جریان در این شاخه صفر است

دو حلقه را به صورت مش KVL می‌نویسیم.

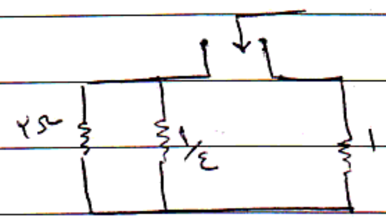
$i_2=1A$ یا $i_2=-1A$



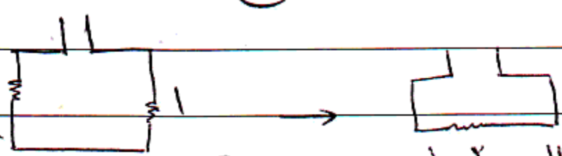
$-10+2i_1+\frac{1}{4}i_1=0 \rightarrow i_1=\frac{40}{9}A$

KVL: $-\frac{1}{4}i_1+V_{oc}+i_2=0 \longrightarrow V_{oc}=\frac{1}{4}\times\frac{40}{9}-1=\frac{1}{9}V \qquad V_{th}=\frac{1}{9}V$

محاسبه R_{th}: منابع مستقل حذف شده است.



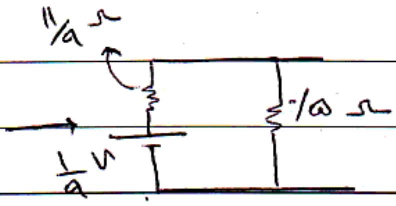
$\frac{2\times\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}}=\frac{2}{9}$



(دو مقاومت سری)

$1+\frac{2}{9}=\frac{11}{9}\,\Omega$

$R_{th}=\frac{11}{9}\,\Omega$



WWW.MOHANDESYAR.COM

تمرین) با تبدیل منابع، معادل تونن شکل قبل را بنویسید؟

خلاصه: ۱) مدار باز کردن ← V_{th}
اتصال کوتاه ← I_N

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N}$$

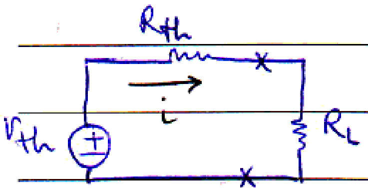
۲) تبدیل منابع

۳) بدست آوردن منحنی $V-I$

۴) ترکیب کردن

قضیه انتقال توان:

در مدار زیر، اگر بخواهیم بیشترین توان به بار R_L تحویل داده شود باید: $R_L = R_{th}$ باشد.



اثبات:

$$i = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L}$$

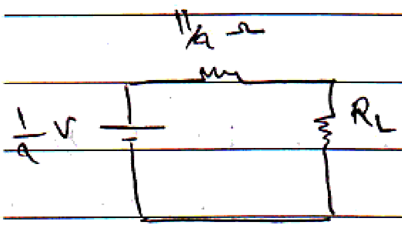
می‌خواهیم max شود پس مشتق می‌گیریم

$$P_L = R_L i^2 = V_{th}^2 \times \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^2}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = V_{th}^2 \times \frac{(R_L + R_{th})^2 - 2R_L(R_L + R_{th})}{(R_L + R_{th})^4}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = V_{th}^2 \times \frac{R_L + R_{th} - 2R_L}{(R_L + R_{th})^3} = 0 \longrightarrow -R_L + R_{th} = 0 \Longrightarrow R_L = R_{th}$$

مثال) در شکل قبل مقاومت ۰/۵ Ω را با R_L تعویض می‌کنیم. R_L چقدر باشد تا بیشترین توان به آن تحویل داده شود؟

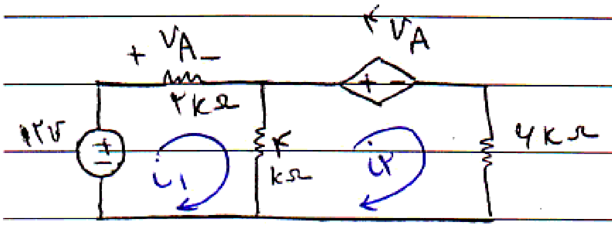


$$R_L = \frac{11}{9}\,\Omega$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

تمرین دوره‌ای از فصل سوم :

۱) در مدار زیر V_A را بدست آورید؟



تجزیه و تحلیل جریان خانه

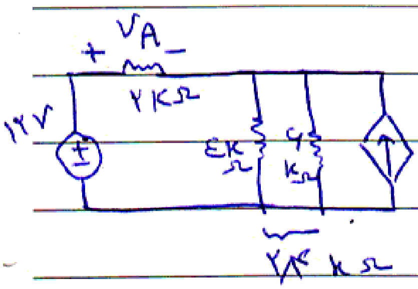
معمولاً اگر تعداد منابع ولتاژ بیشتر باشد از KVL استفاده می‌کنیم و اگر تعداد منابع جریان بیشتر باشد از KCL استفاده می‌کنیم.

$$KVL(1):\ -12+2i_1+4(i_1-i_2)=0$$
$$KVL(2):\ 4(i_2-i_1)+4V_A+6i_2=0$$
$$V_A=2i_1$$

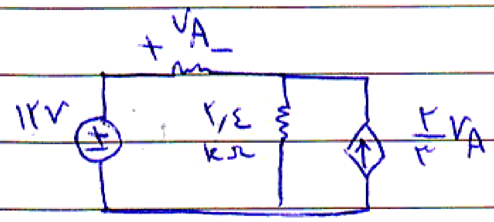
$$\Rightarrow \begin{cases} 6i_1-4i_2=12 \\ 4i_1+10i_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1=\frac{30}{11}\,mA \\ i_2=\frac{-12}{19}\,mA \end{cases}$$

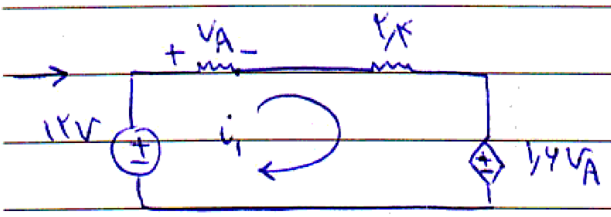
$$V_A=2\times\frac{30}{11}=\frac{60}{11}\,V$$

۲) در مثال قبل با استفاده از تبدیل منابع، V_A را بدست آورید؟



$$\frac{4V_A}{6}=\frac{2}{3}V_A$$





$$KVL:\ -12+2i_1+2/4\,i_1+1/6V_A=0$$
$$V_A=2i_1 \rightarrow i_1=0/5\,V_A$$

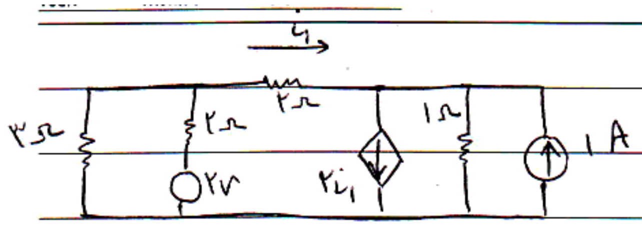
$$-12+V_A+1/2V_A+1/6V_A=0 \rightarrow 3/8V_A=12$$
$$V_A=\frac{12}{3/8}$$

تمرین) i_1 را بدست آورید.

الف) از روش تحلیل ولتاژ گره

ب) از روش تبدیل منابع

WWW.MOHANDESYAR.COM



فصل چهارم : مدارهای مرتبه اول : مدارهای RL و RC

پاسخ : Response : به رفتار متغیری از شبکه مانند ولتاژ یا جریان یک شاخه خاص از مدار گفته می شود.

پاسخ ورودی صفر zero input Resp : پاسخ مدار به شرایط اولیه می گویند.

پاسخ حالت صفر zero state Res. : پاسخ مدار هنگامی که شرایط اولیه مدار صفر است. (یا پاسخ به ورودی)

پاسخ گذرا : Transient Resp. : بخشی از پاسخ که با گذشت زمان صفر می شود.

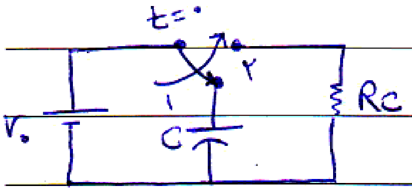
پاسخ ماندگار : Stedy state Resp. : بخشی از پاسخ که با گذشت زمان از بین نمی رود.

پاسخ کامل : پاسخ مدار هنگامی که هم ورودی داریم و هم شرایط اولیه.

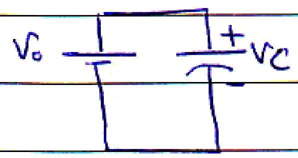
Compelete Resp

WWW.MOHANDESYAR.COM

پاسخ ورودی صفر RC :



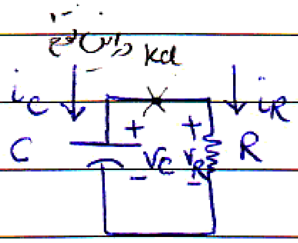
در t<0



$V_C(t) = V_0 \quad , \quad t<0$

$V_C(0^-) = V_0$

در زمان های t>0



$V_C(0^+) = V_C(0^-) = V_0$

$KVL: \; -V_C + V_R = 0$

$KCL: \; i_R + i_C = 0$

$i_R = -i_C = -C\dfrac{dV_C}{dt}$

$-V_C + R i_R = 0$

$-V_C - RC\dfrac{dV_C}{dt} = 0$

$\rightarrow \dfrac{dV_C}{dt} + \dfrac{V_C}{RC} = 0$

جواب : جواب معادله بالا به صورت روبرو است :

$V_C(t) = Ae^{St}$

$ASe^{St} + \dfrac{1}{RC}Ae^{St} = 0 \longrightarrow Ae^{St}\left(S + \dfrac{1}{RC}\right) = 0$

$\underbrace{S + \dfrac{1}{RC} = 0}_{\text{معادله مشخصه مدار}} \longrightarrow \underbrace{S = \dfrac{-1}{RC}}_{\text{فرکانس طبیعی}}$

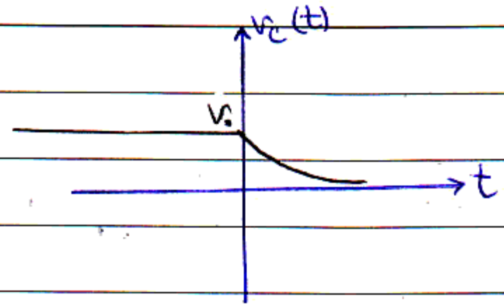
$V_C(t) = Ae^{-t/RC} \qquad t>0$

$V_C(0^+) = V_0 = A$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$A = V_0$

$$\boxed{v_C(t) = V_0 e^{-t/RC}}$$



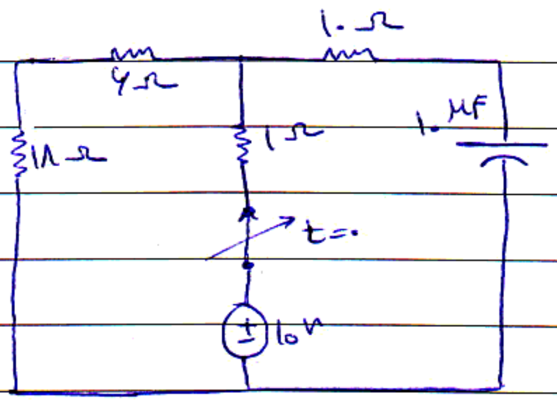
$\tau \triangleq RC \longrightarrow$ ثابت زمانی

معادله جریان خازن:

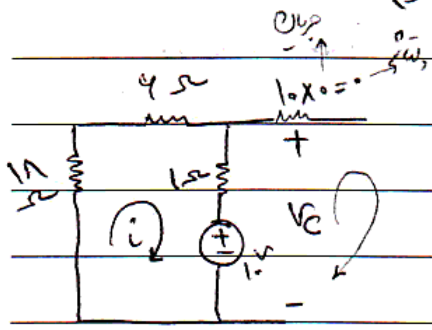
$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(V_0 e^{-t/RC}\right)$$

$$i_C = -\frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \qquad t>0$$

مثال) در مدار روبرو کلید در مدت زمان طولانی بسته بوده است در لحظه $t=0$ باز می‌شود. ولتاژ دو سر خازن را در تمام زمان‌ها بدست آورید



خازن که باز شده و جایش را مدار باز در نظر می‌گیریم. (جریان صفر)
ولی ولتاژ خازن وجود دارد.



$t<0$

$$KVL: 18i + 4i + i + 10 = 0$$

$$i = \frac{-10}{25} = -0.4\,A$$

$$v_C(t) = i + 10 = -0.4 + 10 = 9.6\ V$$

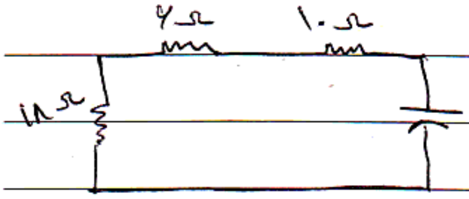
$$v_C(t) = 9.6\ V \qquad t<0$$

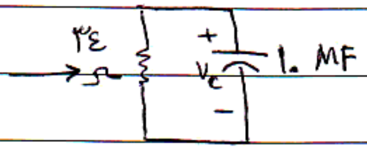
$$v_C(0^-) = 9.6\ V$$

یا مدار:
(روش دوم)

$$-10 - i + 0 + v_C = 0$$

برای $t>0$ ، کلید باز شده است.





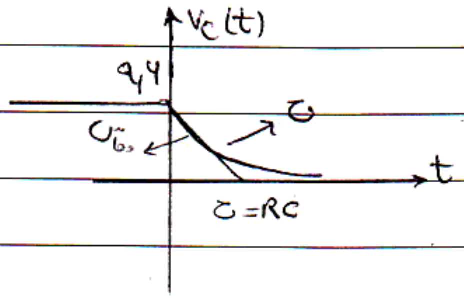
ولتاژ خازن پیوسته است و ناگهانی تغییر نمی‌کند

$V_C(0^+) = V_C(0^-) = 9.6$

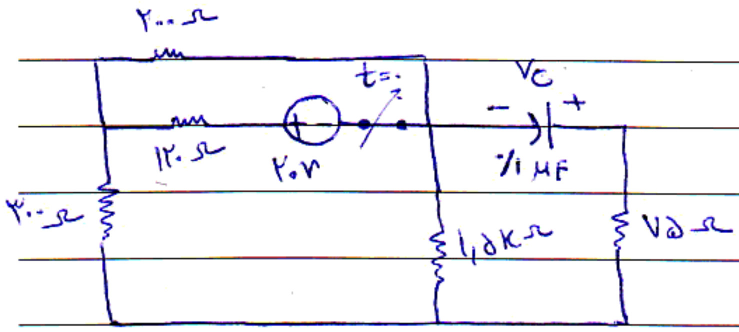
$V_C(t) = V_0 e^{-t/RC}$

$\tau = RC = 34 \times 10 \times 10^{-6}$

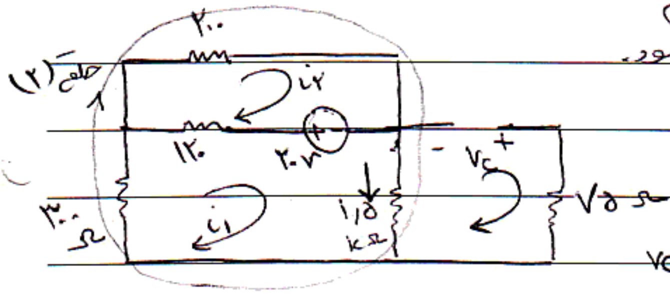
$V_C(t) = 9.6 \times e^{-t/\tau}$



مثال) کلید بسته برای مدت طولانی در وضعیت بسته بوده است و در زمان $t=0$ باز می‌شود. ولتاژ دو سر خازن را برای تمام زمان‌ها بدست آورده و رسم کنید؟



برای $t<0$ کلید بسته است. خازن مدار باز می‌شود.



تجزیه کلی جریان خازن:

$V_C = -1.5^{k}\, i_1 = -1500\, i_1$ $\longrightarrow$ $-V_C + 75\times 0 - 1.5^{k\Omega} i_1 = 0$

KVL (1) : $300\, i_1 + 120(i_1 - i_2) + 20 + 1500 i_1 = 0$ $\qquad -V_C - 1500\, i_1 = 0$

(1) $\rightarrow$ $1920\, i_1 - 120\, i_2 = -20$

(2) $200\, i_2 + 1500\, i_1 + 300\, i_1 = 0$

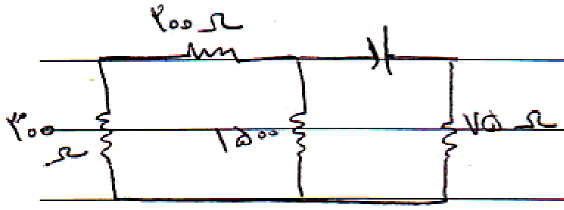
(2) $i_2 = -9 i_1$

(1) , (2) : $1920\, i_1 - 120(-9 i_1) = -20 \rightarrow i_1 = \frac{-20}{3} \times 10^{-3}$

$V_C = -1500 \times \left(\frac{-20}{3} \times 10^{-3}\right) = 10^{V}$ $\quad t<0 \qquad V_C(0^-) = 10\ V$

WWW.MOHANDESYAR.COM

برای $t>0$ مدار رسم می‌شود



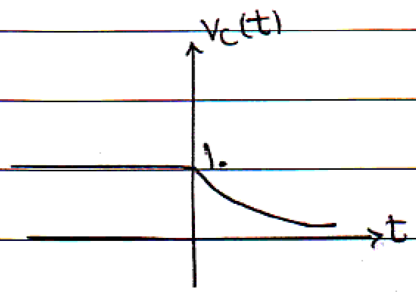
$۵۰۰ \parallel ۱۵۰۰ = ۳۷۵\ \Omega$

$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10\ V$

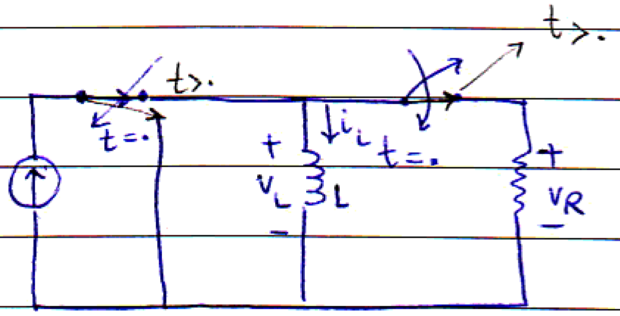
$v_C(t) = v_0\, e^{-t/RC}$

$\tau = RC = ۴۵۰ \times ۰/۱ \times 10^{-4}$ $\tau = ۴۵\ \mu s$

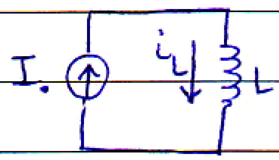
$v_C(t) = 10\, e^{-t/\tau}$



پاسخ ورودی صفر مدار RL :



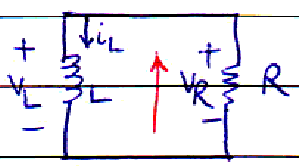
برای $t<0$ (۲ اشباع مدار رسم شود)



$i_L(t) = I_0 \quad t<0$

$i_L(0^-) = I_0$

برای $t>0$ (ابعواد)



$I_L(0^+) = I_L(0^-) = I_0$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v_R = v_L$$

$$\begin{cases} v_R = -R i_L \\ v_L = L \dfrac{di_L}{dt} \end{cases} \qquad -R i_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$L \frac{di_L}{dt} + R i_L = 0 \longrightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0$$

حل معادله :

$$di_L + \frac{R}{L} i_L \, dt = 0$$

$$\frac{di_L}{i_L} + \frac{R}{L} dt = 0 \xrightarrow{\int} \int \frac{di_L}{i_L} + \int \frac{R}{L} dt = c$$

$$\ln(i_L) + \frac{R}{L} t = c \longrightarrow \ln i_L = -\frac{R}{L} t + c$$

$$i_L(t) = e^{-\frac{R}{L} t + c} = \underbrace{e^{c}}_{K} \times e^{-R/L \, t}$$

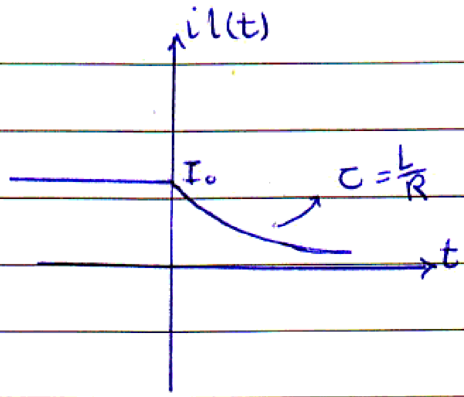
$$i_L(t) = K e^{-\frac{R}{L} t} \qquad t > 0$$

$$\begin{cases} S = -\dfrac{R}{L} \quad \text{فرکانس طبیعی} \longrightarrow \text{قرینه عکس ثابت زمانی} \\ \tau = \dfrac{L}{R} \quad \text{ثابت زمانی} \end{cases}$$

$$t = 0^+ \longrightarrow i_L(0^+) = I_0$$

$$K \times e^{0} = I_0 \longrightarrow K = I_0$$

$$i_L(t) = I_0 e^{-R/L \, t} \qquad t > 0$$



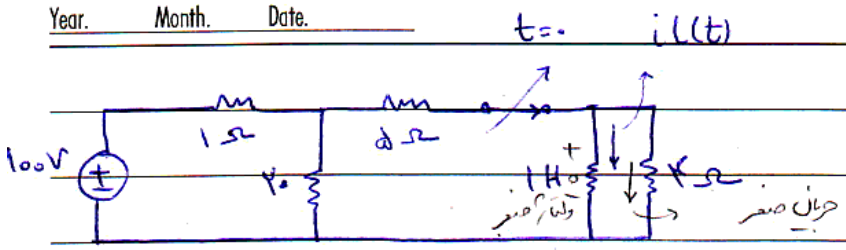
$$v_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(I_0 e^{-R/L \, t} \right)$$

$$\boxed{v_L = -R I_0 e^{-R/L \, t} \qquad t > 0}$$

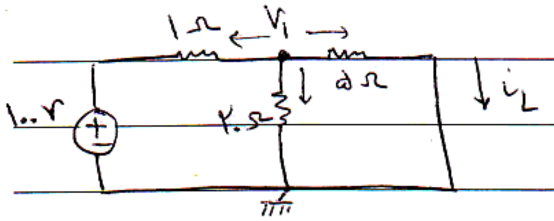
WWW.MOHANDESYAR.COM

Year. Month. Date.

مثال ۱) $i_L(t)$ را برای همه‌ی زمان‌ها بدست آورده و رسم کنید.



در لحظه‌ی $t=0$ کلید باز می‌شود برای $t<0$ کلید بسته است:

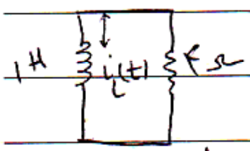


تحلیل ولتاژ گره

$$KCL(1):\ \frac{V_1-100}{1}+\frac{V_1}{20}+\frac{V_1}{5}=0 \longrightarrow V_1=80\,V$$

$$i_L(t)=\frac{V_1}{5}=\frac{80}{5}=16\,A \quad t<0 \Longrightarrow i_L(0^-)=16\,A$$

برای $t>0$:

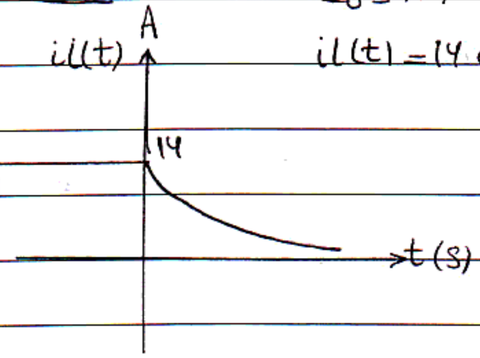


$$i_L(0^+)=I_0$$

$$i_L(t)=I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I_0=16\,A$$

$$i_L(t)=16e^{-\frac{4}{1}t}=16e^{-4t} \quad t>0$$



ثابت زمانی مدار $=\frac{1}{4}$

پاسخ کامل: پاسخ مدارهای همزمان ناشی هم ورودی و هم شرایط اولیه داریم. برای مدارهای خطی معمولاً:

پاسخ کامل = پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر

برای مدارهای مرتبه‌ی (۱) LTI :

$$(1)\begin{cases} Ay'(t)+By(t)=f(t) \\ y(0)=M \end{cases}$$

$y(0)=M \longrightarrow$ شرط اولیه ، $f(t)$: ورودی مدار $\longrightarrow$ در صورت حل، پاسخ کامل را بدست می‌آید.

پاسخ حالت صفر
$$\begin{cases} A y_1'(t) + B y_1(t) = f(t) \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \quad (۲)$$

پاسخ ورودی صفر
$$\begin{cases} A y_2'(t) + B y_2(t) = 0 \\ y_2(0) = M \end{cases} \quad (۳)$$

$$(۲) + (۳) \longrightarrow \begin{cases} A\left(y_1'(t) + y_2'(t)\right) + B\left(y_1(t) + y_2(t)\right) = f(t) \\ y_1(0) + y_2(0) = M \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(y_1 + y_2)' + B(y_1 + y_2) = f(t) \\ y_1(0) + y_2(0) = M \end{cases}$$

پاسخ کامل ← پاسخ حالت صفر ، پاسخ ورودی صفر

$$\begin{cases} y(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y(0) = y_1(0) + y_2(0) = M \end{cases}$$

پاسخ مدار به ورودی : (پاسخ حالت صفر)

۱- هر شکل موج هایی را می توان به صورت زیر نوشت :

$$y(t) = y(+\infty) + \left(y(0^+) - y(+\infty)\right) e^{-t/\tau}$$

τ ← ثابت زمانی

$$y(t) = y(+\infty) + \left(y(t_0^+) - y(+\infty)\right) e^{-\frac{(t - t_0)}{\tau}}$$

۲- برای شبکه های RL ، $\tau = \dfrac{L}{R_{eq}}$. R_{eq} مقاومت دیده شده از دو سر سلف است .

زمانی که منابع را صفر می کنیم

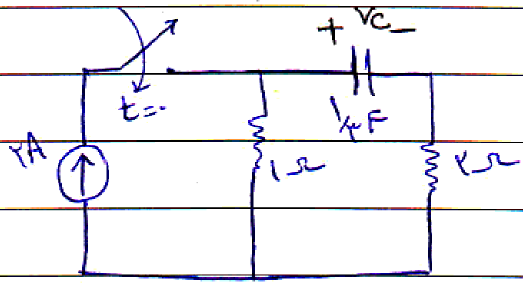
WWW.MOHANDESYAR.COM

۳- برای شبکه‌های RC، $\tau = R_{eq} C$ که R_{eq} مقاومت دیده شده از دو سر خازن است زمانیکه منابع صفر است.

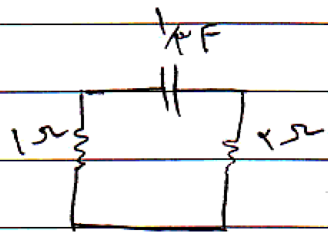
۴- برای تعیین $y(0^+)$، خازن‌ها را مدار باز و سلف‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم

۵- برای تعیین $y(+\infty)$ خازن‌ها را مدار باز و سلف‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم

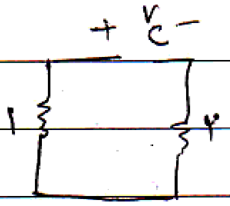
مثال) کلید به مدت زمان طولانی باز بوده است و در زمان $t=0$ بسته می‌شود. ولتاژ خازن را برای $t>0$ به دست آورید.



برای $t<0$ (کلید بسته نشده)



حالت V_c $t=0$

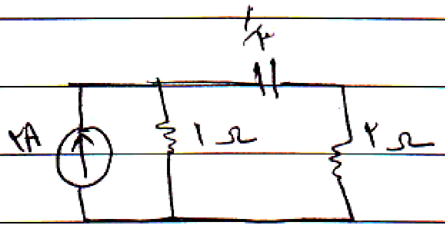


ولتاژ خازن برابر ولتاژ دو سر مقاومت است (خازن مدار باز می‌شود)

$V_c(0^-)=0$

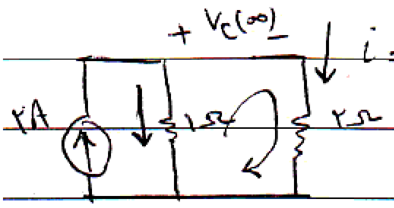
$V_c(0^+)=0$

$t>0$



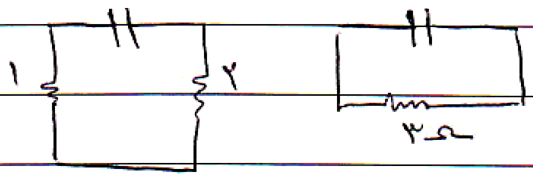
WWW.MOHANDESYAR.COM

خازن در $v_C(+\infty)$ (مدار باز می‌شود)



$$-1\times 2 + v_C(\infty) + 2\times 0 = 0 \rightarrow v_C(\infty) = 2V$$

خاصیت C :



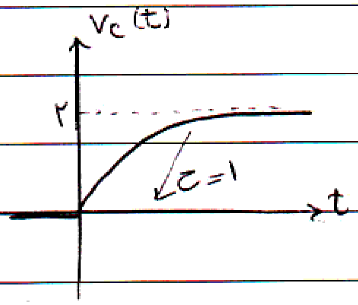
خاصیت R_{eq}

$R_{eq} = 3$

$\tau = R_{eq}\times C = 3\times\frac{1}{3} = 1$ sec $\qquad \Omega\times F = S$

$$v_C(t) = v_C(+\infty) + (v_C(0^+) - v_C(+\infty))e^{-t/\tau}$$

$$v_C(t) = 2 + (0-2)e^{-t/1} = 2-2e^{-t}$$



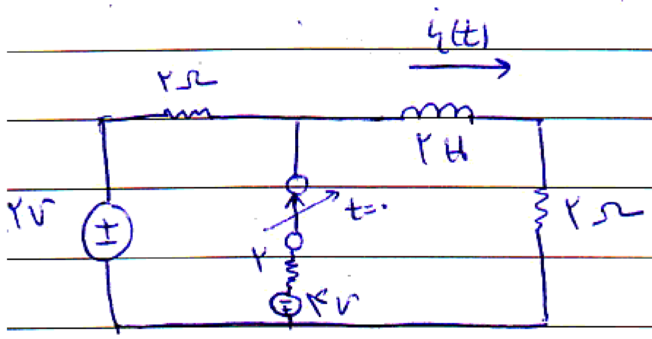
$v_C(\infty) \simeq 2$

$v_C(5\tau) = 2 \qquad 5\tau = 5s$ $\qquad$ ∞ در اینجا معادل 5s است.

u(t) نیز در پاسخ ضرب شده است.

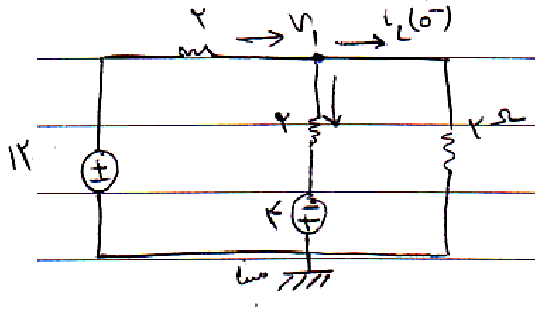
مثال) کلید مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ باز می‌شود. $i_L(t)$ را برای $t>0$ محاسبه کنید.

جواب را رسم کنید.



WWW.MOHANDESYAR.COM

برای $t=0^-$ (سلف اتصال کوتاه می‌شود)

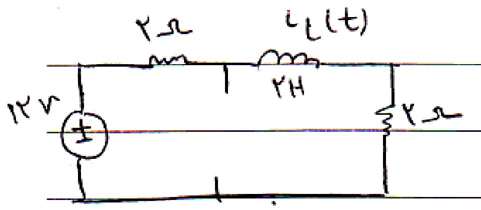


$$\frac{V_1-12}{2}+\frac{V_1-(-4)}{2}+\frac{V_1}{2}=0 \qquad \frac{V_1-12}{2}+\frac{V_1+4}{2}+\frac{V_1}{2}=0$$

$$V_1=\frac{8}{3}\,V$$

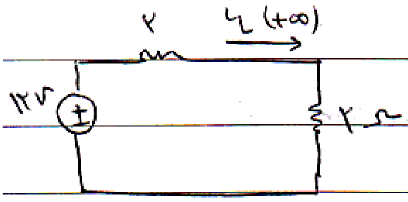
$$i_L(0^-)=\frac{V_1}{2}=\frac{8/3}{2}=\frac{4}{3}\longrightarrow i_L(0^+)=\frac{4}{3}$$

برای $t>0$ (شاخه‌ی وسط مدار باز می‌شود)



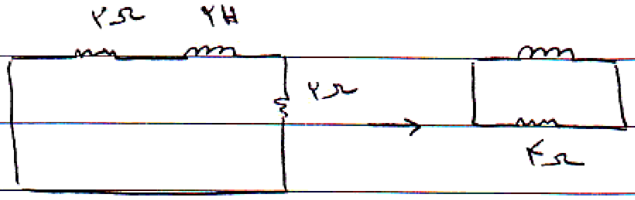
*

$t=+\infty$



$$i_L(+\infty)=\frac{12}{4}=3A$$

محاسبه‌ی R_{eq}:

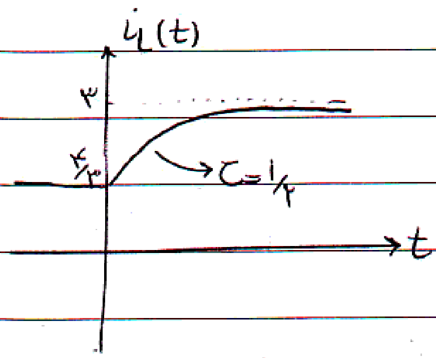


در * منبع را صفر می‌کنیم $R_{eq}=4\Omega$

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ \text{sec}$$

$$i_L(t)=i_L(+\infty)+\left(i_L(0^+)-i_L(+\infty)\right)e^{-t/\tau}$$

$$i_L(t)=3+\left(\frac{4}{3}-3\right)e^{-2t}=3-\frac{5}{3}e^{-2t}$$

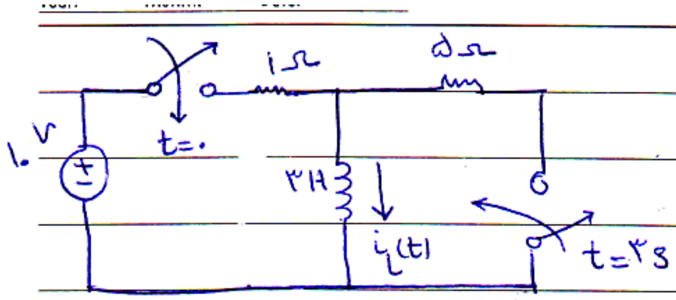


$$\tau=\frac{1}{2}\longrightarrow \text{فرکانس طبیعی}=-2$$

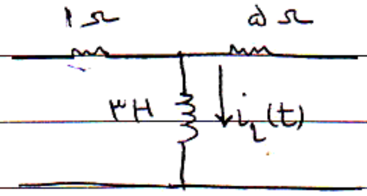
WWW.MOHANDESYAR.COM

سؤال: $i_L(t)$ را برای $t>0$ محاسبه و رسم کنید؟

کلید اول در $t=0$، کلید دوم در $t=3$ بسته می‌شود.



برای $t<0$

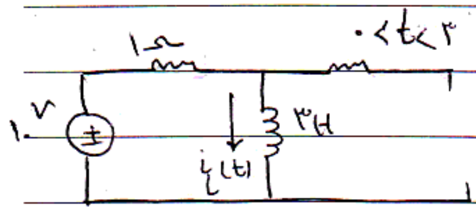


$i_L(t)=0$

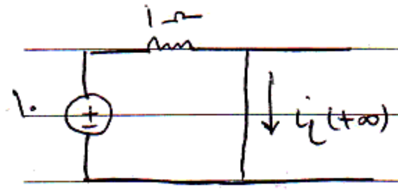
$\rightarrow i_L(0^-)=0$

$i_L(0^+)=0$

$0<t<3$

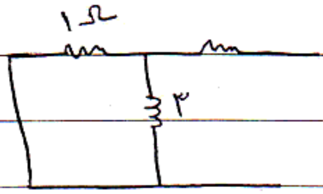


محاسبه‌ی جریان $i_L(+\infty)$



$i_L(+\infty)=10\,A$

محاسبه‌ی τ



$R_{eq}=1\,\Omega$

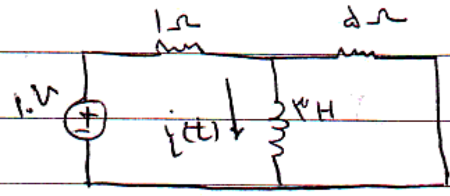
$\tau=\frac{L}{R}=\frac{3}{1}=3\,sec$

$$i_L(t)=i_L(+\infty)+\left(i_L(0)-i_L(+\infty)\right)e^{-t/\tau}$$

$$i_L(t)=10-10\,e^{-t/3}$$

$$i_L(3^-)=10-10\,e^{-3/3}=6.3\,A$$

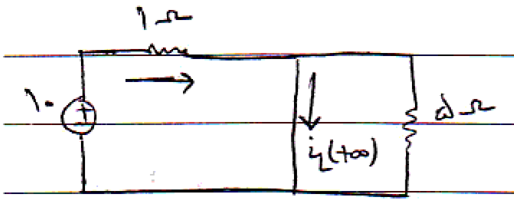
برای $t>3$



$i_L(3^+)=6.3\,A$

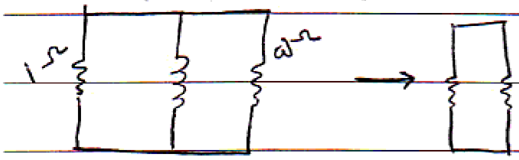
WWW.MOHANDESYAR.COM

محاسبه‌ی $i_L(+\infty)$:



$$i_L(+\infty) = \frac{10}{1} = 10\,A$$

محاسبه‌ی τ :



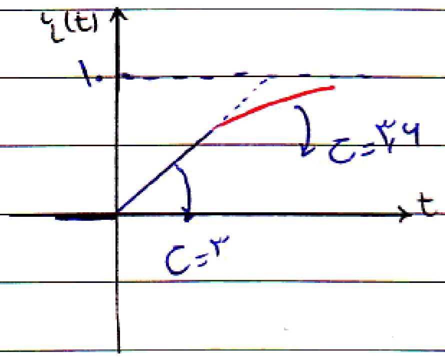
$$1 \parallel 5 = \frac{5}{6} \qquad R_{eq} = \frac{5}{6}\ \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{5/6} = 3.6\,S$$

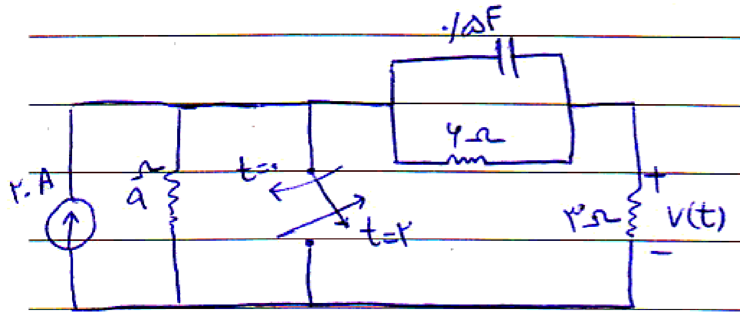
$$i_L(t) = i_L(+\infty) + \left(i_L(t_0^+) - i_L(\infty)\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

$$t_0 = 3$$

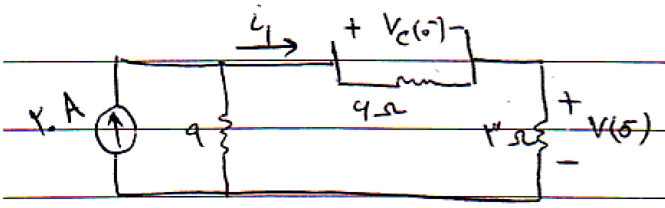
$$i_L(t) = 10 + (2.3 - 10)\, e^{-\frac{(t-3)}{3.6}} \longrightarrow i_L(t) = 10 - 7.7\, e^{-\frac{(t-3)}{3.6}} \qquad t > 3$$



مثال) کلید مدار زیر قبل از بسته شدن در لحظه‌ی $t=0$ مدت زیادی باز بوده است. ولتاژ $v(t)$ را برای تمام زمان‌ها بدست آورید. کلید در $t=0$ بسته می‌شود و در $t=2$ باز می‌شود.



برای $t<0$

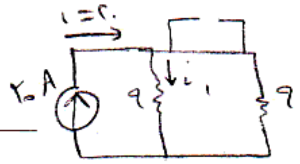


WWW.MOHANDESYAR.COM

تقسیم جریان

Subject:

Year. Month. Date.

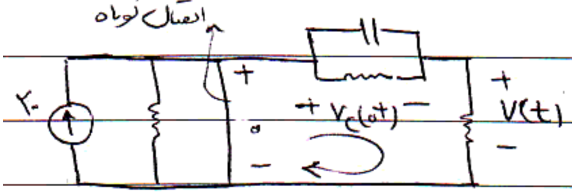


$i_1 = \frac{9}{9+9}\times 20$

$i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\times i$

$i_1 = \frac{9}{9+9}\times 20 = 10\ A$ $\quad v(0^-) = 3 i_1 = 30V \quad V_C(0^-) = 6 i_1 = 60V$

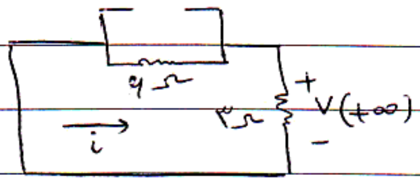
اتصال کوتاه



برای $0<t<2$

$V_C(0^+) = V_C(0^-) = 60$

$V_C(0^+) + V(0^+) = 0 \to V(0^+) = -60V$

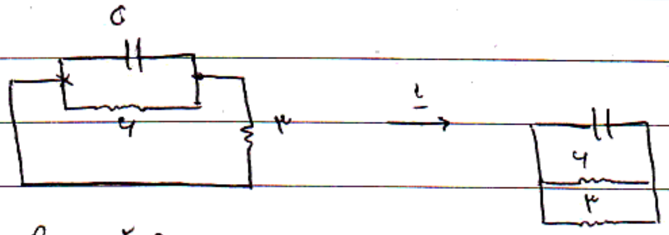


در لحظه $t=+\infty$ خازن را اتصال باز می‌کنیم

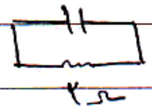
طبق بالا،

$i=0 \to V(+\infty) = 0$

خازن C :



$3 \| 6 = 2$

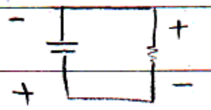


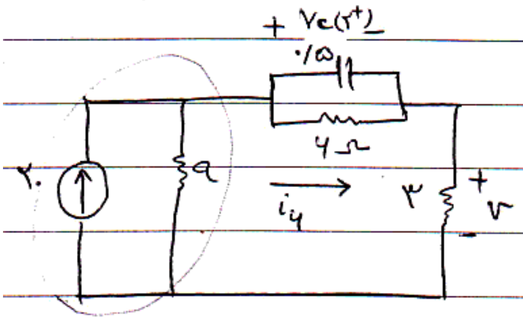
$R_{eq} = 2\Omega$

$\tau = R_{eq} C = 0.5 \times 2 = 1$

$$v(t) = v(+\infty) + \left(v(0^+) - v(+\infty)\right)e^{-t/\tau} \qquad v(t) = -60e^{-t}$$

$v(2^-) = -60\times e^{-2} = -8.12\ V \qquad V_C(2^-) = +8.12V$



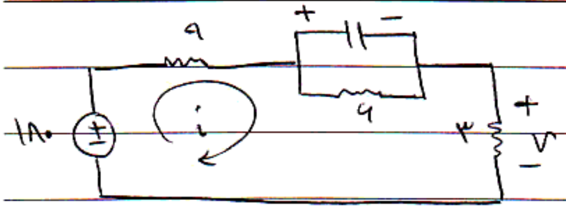


برای $t>2$:

$V_C(2^+) = 8.12$

برای $t=2^+$

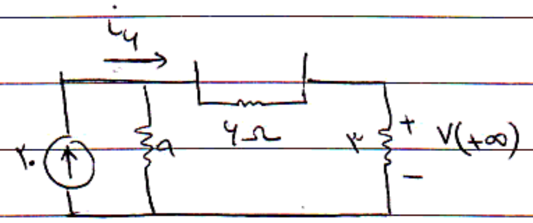
WWW.MOHANDESYAR.COM



$-180 + 9i + 8.12 + 3i = 0$

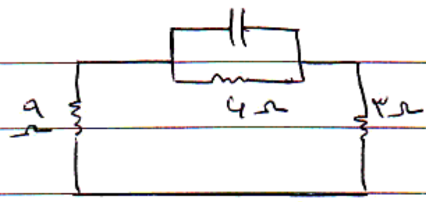
$i \simeq 14.34\ A$

$v(2^+) = 3i = 3 \times 14.34 \simeq 43V$



برای $t = \infty$

$i_4 = 10\ A \rightarrow v(+\infty) = 3 i_4 = 30V$



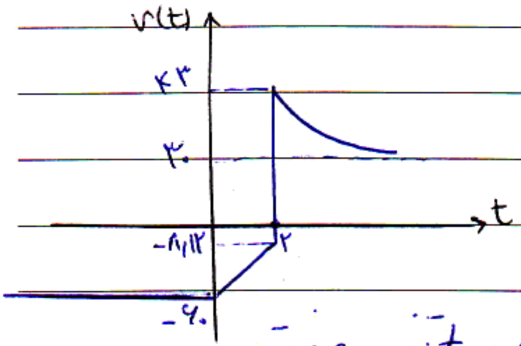
محاسبه τ :

$R_{eq} = 12 \parallel 4 = 4\ \Omega$

$\tau = C R_{eq} = 4 \times 1/2 = 2\ sec$

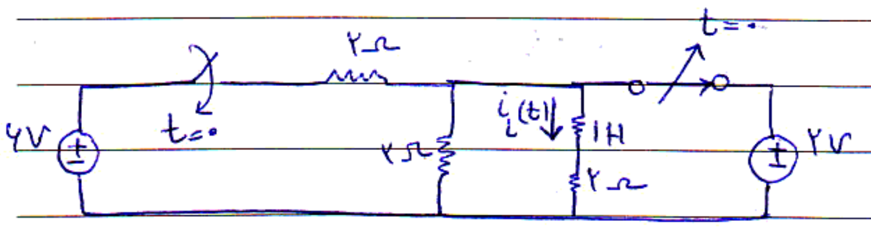
$v(t) = v(+\infty) + \left(v(2^+) - v(\infty)\right) e^{-\frac{(t-2)}{\tau}}$

$v(t) = 30 + (43 - 30) e^{-\frac{(t-2)}{2}} = 30 + 13 e^{-\frac{(t-2)}{2}} \qquad t > 2$



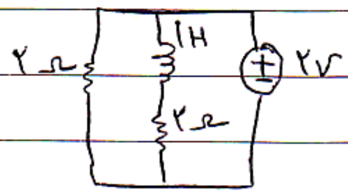
مقدار نهایی $t \rightarrow \infty \rightarrow v(t) = 30$

مثال ۲) کلیدها سال‌های طولانی در وضعیت معرفی بوده و در لحظه‌ی $t = 0$ تغییر وضعیت می‌دهند.



$\frac{di_L}{dt}(0^+) = ?\quad i_L(t) = ?$

$i_L(0^+) = ?$



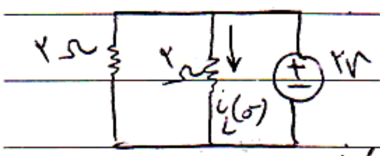
برای $t < 0$

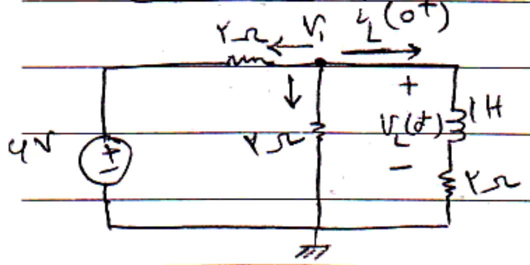
WWW.MOHANDESYAR.COM

در $t=0^-$

$$i_L(0^-) = \frac{2}{2} = 1A$$

$$i_L(0^+) = 1A$$





برای $t>0$

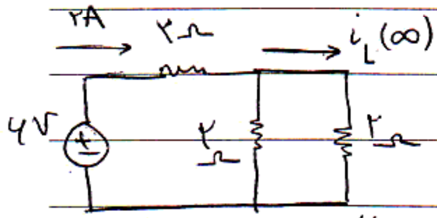
سلف اول سه طبیعی دوم باز

در لحظه‌ی $t=0^+$ مدار را رسم می‌کنیم، ولتاژ گره

$$KCL(1), \quad \frac{V_1-4}{2} + \frac{V_1}{2} + 1 = 0 \longrightarrow V_1 = 2V$$

$$V_1 = V_L(0^+) + 2i_L(0^+) \longrightarrow V_L(0^+) = 2 - 2\times 1 = 0$$

$$L\frac{di_L}{dt}(0^+) = 0 \longrightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$$



برای $t=\infty$ (سلف را به صورت اتصال کوتاه فرض می‌کنیم)

$$i_L(\infty) = 1A$$

مقاومت معادل = ۳ $\longrightarrow I = \frac{4}{2} = 2$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + \left(i_L(0^+) - i_L(\infty)\right)e^{-t/\tau} \longrightarrow i_L(t) = 1A \quad t>0$$

در مدار جریان ثابت است این مسئله است.

$$? = \frac{di_L}{dt}(0^+) \quad , \quad \frac{dv_C}{dt}(0^+) = ?$$

$$V_L(0^+) = L\frac{di_L}{dt}(0^+) \qquad i_C(0^+) = C\frac{dv_C}{dt}(0^+)$$

را محاسبه می‌کنیم.　　　　را محاسبه می‌کنیم

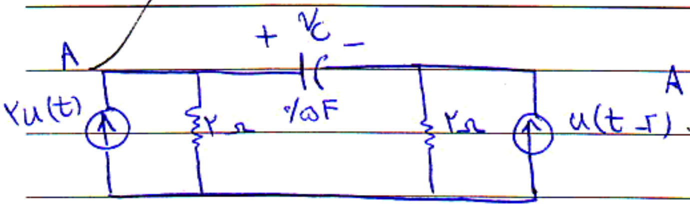
مثال) فرض کن مدار در حالت دائم، ولتاژ خازن را در تمام زمان‌ها محاسبه کنیم؟ $V_C(t) = ?$

WWW.MOHANDESYAR.COM

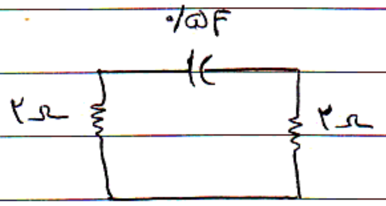
در زمان ۰ همان توضیحات

Subject:

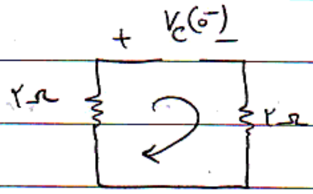
Year. Month. Date.



در زمانهای کمتر از ۲ هیچ جریانی نداریم و در زمانهای دو تا بینهایت منبع جریان عمل انجام می‌شود.



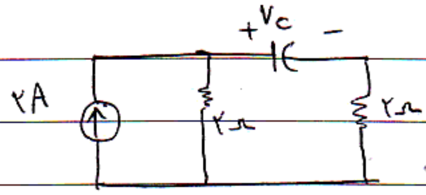
برای زمانهای $t<0$



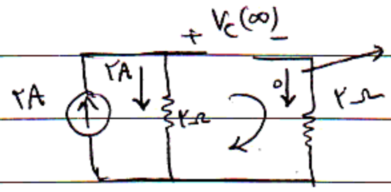
برای $t=0^-$

$i=0$

$V_c(0^-)=0 \qquad V_c(0^+)=0$



برای $0<t<2$

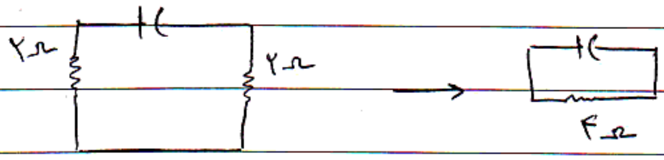


جریان صفر است چون مدار باز است.

برای $t=\infty$

$-2\times2+V_c(\infty)+2\times0=0 \rightarrow V_c(\infty)=4\ V$

محاسبه τ :



$R_{eq}=4\ \Omega$

$\tau=R_{eq}\times C=4\times0/5=2\ s$

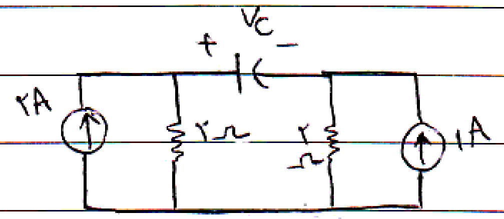
$V_c(t)=V_c(\infty)+\big(\underbrace{V_c(0^+)}_{0}-\overset{\text{ماندگار}}{V_c(+\infty)}\big)e^{-t/\tau}$

$V_c(t)=4\left(1-e^{-t/2}\right)$

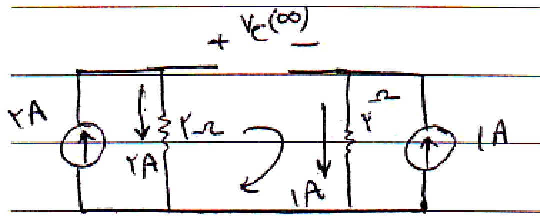
WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v_C(2^-) = 4(1 - e^{-2/2}) = 4(1 - e^{-1}) = 2/53\ V \longrightarrow v_C(2^+) = 2/53\ V$$

برای $t>2$

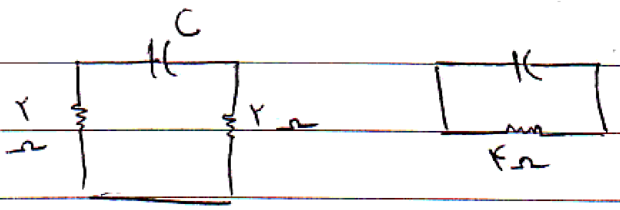


محاسبه $t=\infty$ (خازن را مدار باز در نظر می‌گیریم.)



$$KVL:\ -2\times2 + v_C(+\infty) + 2\times1 = 0 \longrightarrow v_C(+\infty) = 2V$$

محاسبه τ :



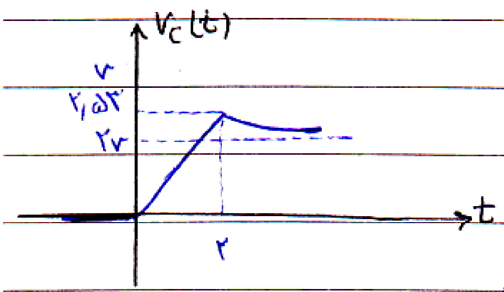
$$R_{eq} = 4$$

$$\tau = 4\times0/5 = 2s$$

$$v_C(t) = v_C(+\infty) + \left(v_C(t_0^+) - v_C(+\infty)\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

$$t_0 = 2$$

$$v_C(t) = 2 + (2/53 - 2)\, e^{-\frac{(t-2)}{2}} \longrightarrow v_C(t) = 2 + 0/53\, e^{-\frac{(t-2)}{2}}$$



مقدار نهایی ولتاژ خازن در $t=\infty$ ، ۲ ولت است.

پاسخ پله : Step Response ؛ پاسخ حالت صفر مدار به ورودی پله ($u(t)$) است، معمولاً

با $s(t)$ نشان داده می‌شود ← ($s(t)$)

پاسخ ضربه : impulse Resp. ؛ پاسخ حالت صفر مدار به ورودی ضربه ($\delta(t)$) است ←
$h(t)$

WWW.MOHANDESYAR.COM

قضیه: در مدارهای LTI، پاسخ ضربه، مشتق زمانی پاسخ پله است.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt} \quad \text{یا} \quad s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\,d\lambda$$

محاسبه‌ی پاسخ ضربه:

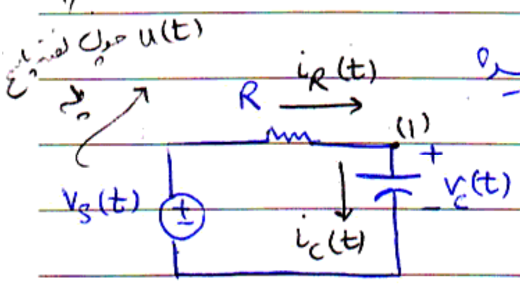
۱- استفاده از پاسخ پالس

۲- استفاده از پاسخ پله (مشتق‌گیری از پاسخ پله)

۳- تعیین شرایط اولیه‌ی صفر مثبت

مثال) یک مدار RC به صورت روبرو داریم. پاسخ پله‌ی مدار را محاسبه کنید؟

و با مشتق‌گیری از آن پاسخ ضربه را معین کنید؟



$$KCL(1):\ i_R(t)=i_C(t) \longrightarrow \frac{V_S(t)-V_C(t)}{R}=C\frac{dV_C(t)}{dt} \longrightarrow$$

$$\frac{dV_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}V_C(t)=\frac{V_S(t)}{RC}$$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

از $V_S(t)=u(t)$ ،

$$t<0 \qquad \frac{dV_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}V_C=0$$

$$t=0^- \longrightarrow 0+\frac{1}{RC}V_C(0^-)=0 \longrightarrow V_C(0^-)=0 \Longrightarrow V_C(0^+)=0$$ ضربه نداریم

پرش دارد، ضربه ندارد

برای $t>0$

$$\frac{dV_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}V_C(t)=\frac{1}{RC}$$

$$t=+\infty \searrow 0+\frac{1}{RC}V_C(+\infty)=\frac{1}{RC} \Longrightarrow V_C(+\infty)=1$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

معادله‌ی مشخصه $\quad s+\frac{1}{RC}=0 \Rightarrow s=\frac{-1}{RC} \longrightarrow \tau=\frac{-1}{s}=RC$

$$v_C(t)=v_C(+\infty)+\left(v_C(0^+)-v_C(+\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \longrightarrow \begin{cases} v_C(t)=1-e^{-t/RC} & t>0 \\ v_C(t)=0 & t<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_C(t)=\left(1-e^{-t/RC}\right)u(t)=s(t)$$

پاسخ پله

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)+\underbrace{\left(1-e^{-t/RC}\right)\delta(t)}_{0}$$

$$h(t)=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t) \qquad \begin{cases} x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t) \\ x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

$\delta(t) \longrightarrow$ تابع ضربه

مثال) مدار قبلی را با تغییر شرایط اولیه صفر بسته حل کنید. $h(t)=?$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C(t)=\frac{v_S(t)}{RC}$$

$$v_S(t)=\delta(t) \longrightarrow v_C(t)=h(t) \qquad \frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C(t)=\frac{\delta(t)}{RC} \qquad *$$

برای $t<0$ $\qquad \frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{RC}v_C=0$

در لحظه‌ی $t=0^-$ $\qquad 0+\frac{1}{RC}v_C(0^-)=0 \Rightarrow v_C(0^-)=0$

برای $t=0$: رابطه‌ی $*$ را در dt ضرب می‌کنیم

ولتاژ خازن ضربه ندارد.

$$dv_C(t)+\frac{1}{RC}v_C(t)\,dt=\frac{\delta(t)}{RC}\,dt \xrightarrow{\int_{0^-}^{0^+}}$$

$$v_C(t)\Big|_{0^-}^{0^+}+\underbrace{\frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+}v_C(t)\,dt}_{0}=\frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt$$

چون ضربه ندارد

$$v_C(0^+)-\underbrace{v_C(0^-)}_{0}=\frac{1}{RC} \Rightarrow v_C(0^+)=\frac{1}{RC}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی ۱

(بخش سوم)

استاد عادلی

WWW.MOHANDESYAR.COM

برای $t>0$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = 0$$

$t=\infty$

$$0 + \frac{1}{RC} v_C(+\infty) = 0$$

$$\rightarrow v_C(+\infty) = 0$$

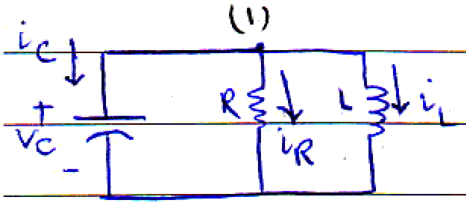
مقدار τ ؛ $\tau = RC$

$$v_C(t) = v_C(+\infty) + \left(v_C(0^+) - v_C(+\infty)\right) e^{-t/\tau}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \qquad t>0$$

فصل ۵ : مدارهای مرتبه دوم

مدار RLC موازی : پاسخ ورودی



$$V_C(0^-) = V_0 \qquad i_L(0^-) = I_0$$

$$* \quad KCL(1): i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = 0$$

۱) $i_L(t)$ را بعنوان متغیر انتخاب می‌کنیم

۲) $V_C(t)$ « «

۱- جریان سلف را در نظر می‌گیریم

$$V_C = V_L = L\frac{di_L}{dt} \longrightarrow i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$i_C = C\frac{d}{dt}\left(L\frac{di_L}{dt}\right) = LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$i_R(t) = \frac{V_C(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$

با جاگذاری در رابطه‌ی *

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$$

$$v_C(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow v_C(0^+) = L\frac{di_L}{dt}(0^+)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{L} = \frac{V_0}{L}$$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \qquad * \text{ جایگذاری در } 1$$

$$\begin{cases} i_L(0^+) = I_0 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = \dfrac{V_0}{L} \end{cases}$$

حالت ۲) $v_C(t)$ به عنوان متغیر

$$i_R(t) = \frac{v_C(t)}{R}$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C = v_L = L\frac{di_L}{dt} \xrightarrow{\int_0^t} i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int v_C(t)\,dt$$

$$\frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} + I_0 + \frac{1}{L}\int v_C\,dt = 0 \xrightarrow{d/dt} \frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt} + C\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 0 + \frac{1}{L}v_C = 0$$

$$\xrightarrow{\times L} LC\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

محاسبه شرایط اولیه: $v_C(0^+) = ?$ $\quad \frac{dv_C}{dt}(0^+) = ?$

$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0$ چون ولتاژ خازن پرش ندارد

$$i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = 0 \xrightarrow{t=0^+} i_R(0^+) + i_C(0^+) + i_L(0^+) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{v_C(0^+)}{R} + i_C(0^+) + I_0 = 0$$

$$i_L(0^+) = -I_0 - \frac{v_C(0^+)}{R} = -I_0 - \frac{v_C(0^+)}{R}$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \qquad i_C(0^+) = C\frac{dv_C}{dt}(0^+) \qquad \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$$

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{-1}{C}\left(I_0 + \frac{V_0}{R}\right)$$

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \Rightarrow v_C(0^+) = V_0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{-1}{C}\left(I_0 + \frac{V_0}{R}\right)$$

$i_L(t)$ بعنوان متغیر $\quad i_L(t) = i_L$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$$

با اتوتون می‌نویسیم $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}$ فرکانس تشدید Resonanse frequency

$\alpha \triangleq \frac{1}{2RC}$ ضریب استهلاک damping constant

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha\dfrac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0 \\ i_L(0^+) = I_0 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = \dfrac{V_0}{L} \end{cases}$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$ معادله‌ی مشخصه

$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی

حالت ۱) $\alpha > \omega_0$ ⟵ ریشه‌ها حقیقی و متمایز (هر دو منفی) : حالت فوق میرا (میرای شدید)

overdamped

$$i_L(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$$

$$i_L(0^+) = K_1 e^0 + K_2 e^0 = K_1 + K_2 = I_0$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

k_1 و k_2 از شرایط اولیه:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = I_0 \\ k_1 s_1 + k_2 s_2 = \dfrac{V_0}{L} = \dfrac{di_L}{dt}(0^+) \end{cases}$$

حالت دوم) $\alpha = \omega_0$ ← ریشه‌ها مضاعف و حقیقی ← میرایی بحرانی critically damped

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 t e^{s_1 t}$$

Conjugate

حالت سوم) $\alpha < \omega_0$ ← ریشه‌ها مختلط‌اند (مزدوج همدیگر) ← زیر میرا (میرایی ضعیف)
under damped

$$s = -\alpha \pm j\omega$$

$$\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad i_L(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$i_L(t) = k_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

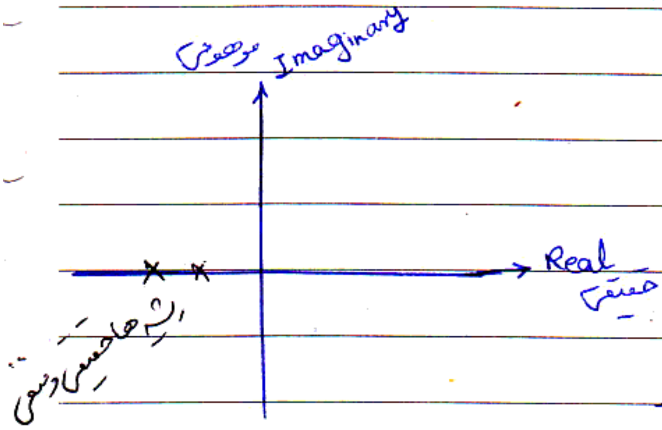
k_1، θ مجهول‌اند و بر اساس شرایط اولیه حساب می‌شوند.

حالت چهارم) $\alpha = 0$ ← ریشه‌ها موهومی خالص (مزدوج همدیگر) ← حالت بدون اتلاف
lossles

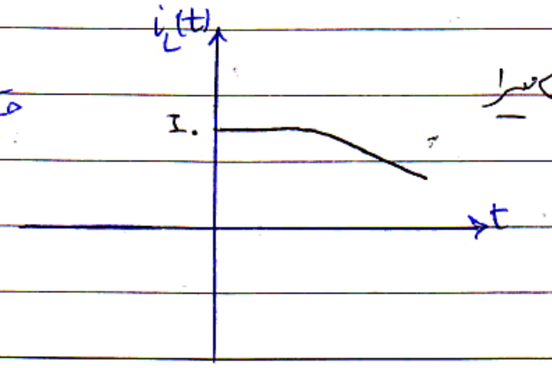
$$i_L(t) = k_1 \cos(\omega_0 t + \theta)$$

θ و k_1 از روی شرایط اولیه به دست می‌آیند.

بررسی وضعیت‌ها در صفحه مختلط:

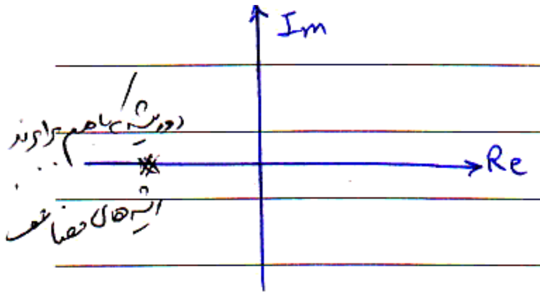


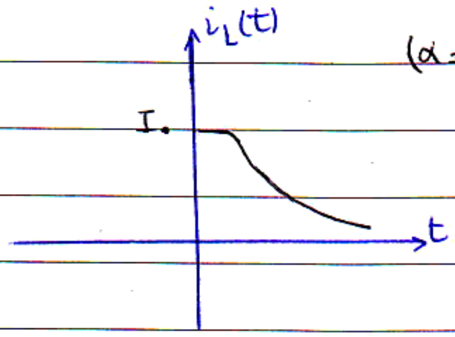
۱- فوق میرا



WWW.MOHANDESYAR.COM

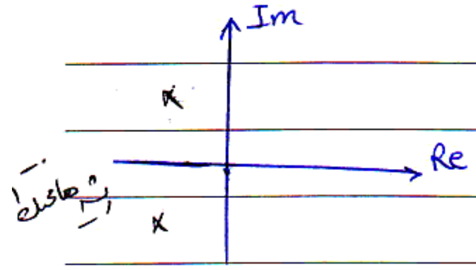
۲- میرای بحرانی $(\alpha = \omega_0)$

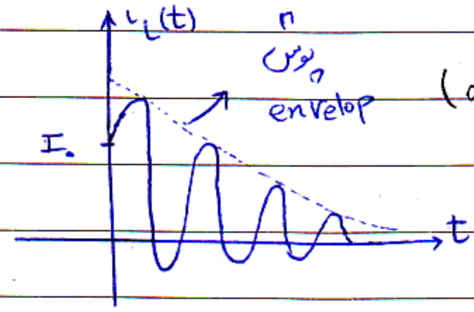




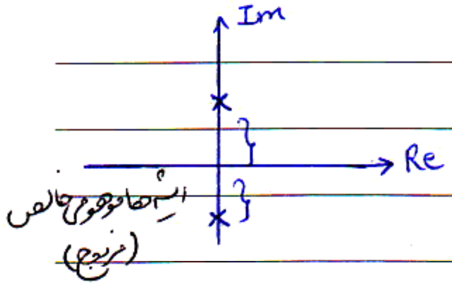
زمان زیادی طول می‌کشد تا میرا شود

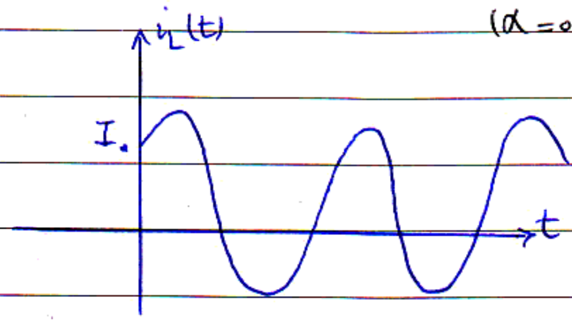
۳- زیرمیرا $(\alpha < \omega_0)$





۴- بی اتلاف $(\alpha = 0)$





ضریب کیفیت : Quality factor

$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

معادله مشخصه $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

برای مدار RLC موازی

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad 2\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{RC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

الف) میرای بحرانی $\alpha = \omega_0 \longrightarrow Q = \frac{1}{2}$

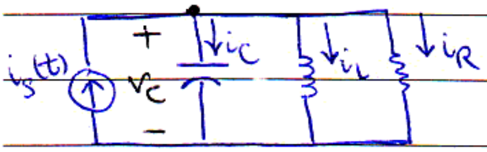
ب) زیرمیرا $\omega_0 > \alpha \longrightarrow Q > \frac{1}{2}$

ج) فوق میرا $\omega_0 < \alpha \longrightarrow Q < \frac{1}{2}$

WWW.MOHANDESYAR.COM

حالت بدون اتلاف $\alpha = 0 \leftarrow Q = \infty$

مدار RLC موازی : پاسخ حالت صفر



$V_C(0^-) = 0 \qquad i_L(0^-) = 0$

$KCL: \; i_s(t) = i_C(t) + i_R(t) + i_L(t)$

$i_L(t)$ را بعنوان متغیر در نظر میگیریم.

$V_C(t) = V_L(t) = L\dfrac{di_L}{dt}$

$i_R(t) = \dfrac{V_C(t)}{R} = \dfrac{L}{R}\dfrac{di_L}{dt}$

$i_C(t) = C\dfrac{dV_C}{dt} = C\dfrac{d}{dt}\left(L\dfrac{di_L}{dt}\right) = LC\dfrac{d^2 i_L}{dt^2}$

$LC\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{di_L}{dt} + i_L(t) = i_s(t) \longrightarrow \dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \underbrace{\dfrac{1}{RC}}_{2\alpha}\dfrac{di_L}{dt} + \underbrace{\dfrac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i_L(t) = \dfrac{i_s(t)}{LC}$

$i_L(0^+) = ? \qquad \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = ?$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \qquad V_C(t) = L\dfrac{di_L}{dt} \Rightarrow V_C(0^+) = L\dfrac{di_L}{dt}(0^+) = 0$

$\rightarrow \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{1}{LC} i_L(t) = \dfrac{i_s}{LC} \\ i_L(0^+) = 0 \\ i_L'(0^+) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha\dfrac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \dfrac{i_s(t)}{LC} \\ i_L(0^+) = 0 \;, \quad \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = 0 \end{cases}$$

$i_s(t) = u(t) \longleftarrow$ پاسخ پله مدار RLC موازی

(فرض می‌کنیم در حالت فوق میرا هستیم. معادله مشخصه دو ریشه حقیقی دارد.)

S_1 و S_2

WWW.MOHANDESYAR.COM

$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow s_1, s_2$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = u(t)\,\omega_0^2$$

$$t>0 \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \omega_0^2 \qquad u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

$$i_L(t) = \underbrace{i_h(t)}_{\text{همگن}} + \underbrace{i_p(t)}_{\text{خاص}}$$

۱) محاسبه‌ی پاسخ همگن:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$$

$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow s_1, s_2 \qquad i_h(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

۲- محاسبه‌ی پاسخ خاص:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \omega_0^2$$

$i_p(t) = A$

جایگذاری $i_p(t)$ درمعادله:

$0 + 2\alpha \times 0 + \omega_0^2 \times A = \omega_0^2 \longrightarrow A = 1$

$i_p(t) = 1$

$\rightarrow \; i_L(t) = 1 + k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad t>0$

برای اینکه شرط $t>0$ را حذف کنیم. $\underline{L}(i_L(t) = 1 + k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t})\,u(t)$

$$\begin{cases} i_L(0^+) = \boxed{1 + k_1 + k_2 = 0} \\ i'_L(t) = k_1 s_1 e^{s_1 t} + k_2 s_2 e^{s_2 t} \\ i'_L(0^+) = \boxed{k_1 s_1 + k_2 s_2 = 0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{s_2}{s_1 - s_2} \\ k_2 = \dfrac{-s_1}{s_1 - s_2} \end{cases}$$

پاسخ ضربه مدار RLC موازی با استفاده از تغییر پارامتر صورت

WWW.MOHANDESYAR.COM

$i_s(t) = \delta(t)$

$$\begin{cases} \underbrace{i_L''(t)}_{\delta''(t)} + 2\alpha \underbrace{i_L'(t)}_{\delta'(t)} + \omega_0^2 \underbrace{i_L(t)}_{\delta(t)} = \dfrac{1}{LC}\,\delta(t) \quad * \\ i_L(0^-) = 0 \\ i_L'(0^-) = 0 \end{cases}$$

یک بار انتگرال نامعین می‌گیریم:

$$i_L'(t) + 2\alpha i_L(t) + \omega_0^2 \int i_L(t)dt = \frac{1}{LC} u(t)$$

$$\xrightarrow{\int_{0^-}^{0^+}} i_L(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + 2\alpha \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)dt}_{0} + \omega_0^2 \int_{0^-}^{0^+} \left(\int i_L(t)dt\right) = \frac{1}{LC}\int_{0^-}^{0^+} u(t)dt$$

$\int i_L \to \delta(t)$ حول ۰

$i_L \to \delta'(t)$

$i_L(0^+) - i_L(0^-) + 0 + 0 = 0$

فرض کردیم جواب درست * نیز هست. بنابراین $\int i_L(t) \to 0$

(انتگرال اول)

$\rightarrow i_L(0^+) = 0$

از دو طرف اصلی (رابطه *) $\int_{0^-}^{0^+}$ می‌گیریم

$$i_L'(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + 2\alpha\, i_L(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \omega_0^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)dt}_{0} = \frac{1}{LC}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$

$$i_L'(0^+) - \underbrace{i_L'(0^-)}_{0} + 2\alpha\left(\underbrace{i_L(0^+)}_{0} - \underbrace{i_L(0^-)}_{0}\right) + 0 = \frac{1}{LC} \Rightarrow i_L'(0^+) = \frac{1}{LC}$$

برای $t>0$

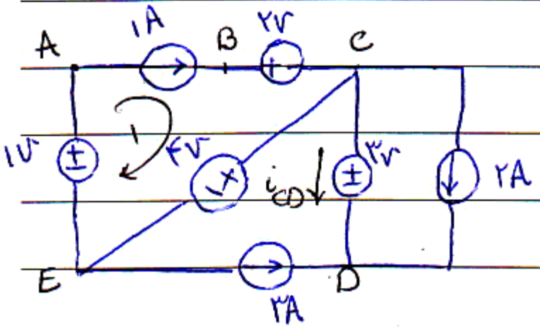
$$\begin{cases} i_L''(t) + 2\alpha i_L'(t) + \omega_0^2 i_L(t) = 0 \\ i_L(0^+) = 0 \\ i_L'(0^+) = \dfrac{1}{LC} \end{cases}$$

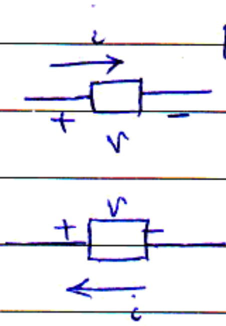
$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

WWW.MOHANDESYAR.COM

حل تمرین ۲ :

تمرین ۱۳ (فصل ۱)





$P=vi$

$P=-vi$

KCL (D) : $i_{CD}+2+3=0 \Rightarrow i_{CD}=-5A$

KVL (1) : $-1+v_{AB}+2+4=0 \Rightarrow v_{AB}=-5V$

KCL (C) : $1=i_{CE}+2-5 \Rightarrow i_{CE}=4A$

$P_{AB}=v_{AB}\times1=-5\times1=-5\,W$ تولید کننده توان

توان منبع 1V $=v_{AE}\times(-1)=1\times(-1)=-1\,W$

توان منبع 4V $=v_{CE}\, i_{CE}=4\times4=16\,W$ گیرنده توان

و بقیه المان‌ها هم همین طور.

تمرین ۹ (فصل ۲) $\frac{df(t)}{dt}=?$

$f(t)=(1-te^{-t})u(t)$

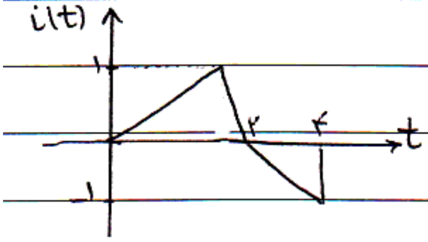
$$\frac{df(t)}{dt}=(-e^{-t}+te^{-t})u(t)+(1-te^{-t})\delta(t) \qquad [x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)]$$

$$\frac{df}{dt}=(t-1)e^{-t}u(t)+\delta(t)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

تمرین ۱۱ فصل ۲)

$i(t) \longrightarrow u(t), r(t)$



$$i(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}t & 0 \le t \le 2 \\ -\frac{1}{2}t+1 & 2< t \le 4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{1}{2}t\left(u(t)-u(t-2)\right) + \left(\frac{-1}{2}t+1\right)\left(u(t-2)-u(t-4)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{t\,u(t)}_{r(t)} - \underbrace{\frac{t}{2}u(t-2)} + \frac{1}{2}t\,u(t-4) + u(t-2) - u(t-4)$$

توضیح $\quad r(t) = t\,u(t) \longrightarrow r(t-2) = (t-2)u(t-2)$

$\frac{t}{2}u(t-2)$

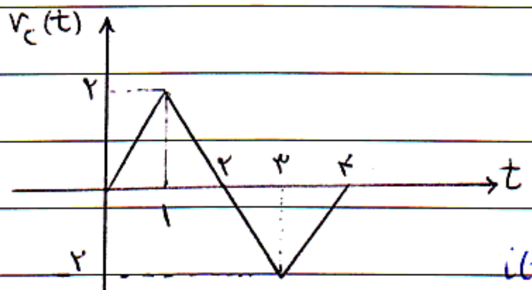
$\frac{1}{2}(t-2+2)u(t-2)$

$\frac{1}{2}(t-2)u(t-2) + u(t-2) \Rightarrow \frac{1}{2}r(t-2) + u(t-2)$ تبدیل به جمع رمپ و پله می‌شوند.

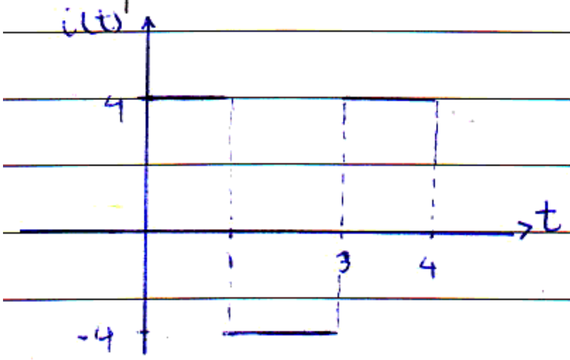
تمرین ۱۲ فصل ۲)

$C = 2F$

$i(t) = ? \quad q(t) = ? \quad p(t) = ? \quad E(t) = ?$



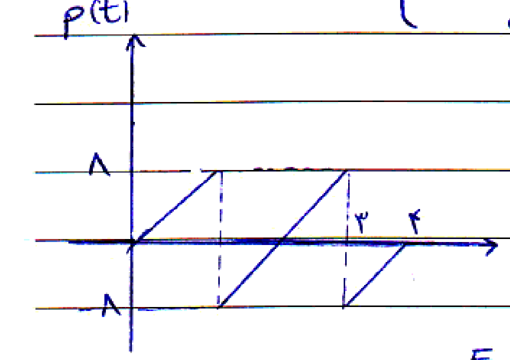
$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt} = 2\frac{dv_c}{dt} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 2\times 2 = 4 & 0< t \le 1 \\ 2\times(-2) = -4 & 1< t \le 3 \\ 2\times 2 = 4 & 3< t \le 4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$



$q(t) = Cv_c(t) = 2v_c(t)$ شیب $v_c(t)$ با نصف و ضرب در ۴

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$p(t)=v(t)\,i(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ (2t)\times 4=8t & 0<t<1 \\ (-2t+4)(-4) & 1\leq t<3 \\ (2t-8)\times 4 & 3<t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

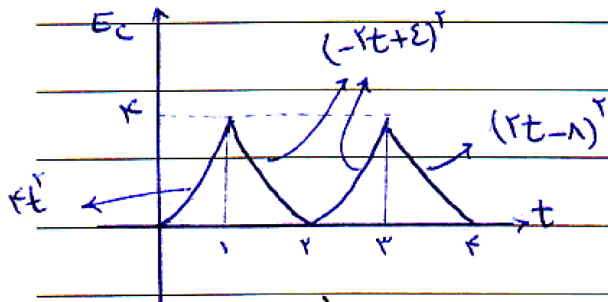


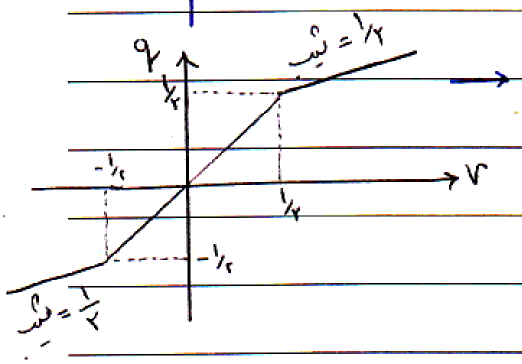
$v_C(0)=0$

$$E=\int p(t)\,dt=\int v(t)\,i(t)\,dt$$

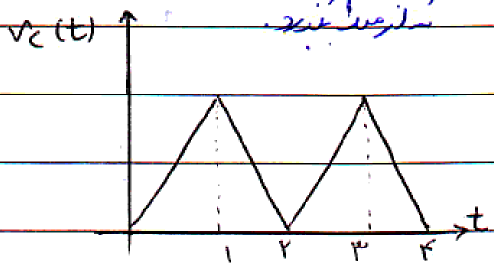
$$E_C=\int v(t)\,C\,\frac{dv_C}{dt}\times dt=C\int_0^t v_C\,dv_C$$

$$\longrightarrow E_C=\frac{1}{2}C\left(v_C^2(t)-v_C^2(0)\right)=\frac{1}{2}Cv_C^2(t)\Rightarrow E_C=v_C^2(t)$$





تمرین ۲۴ فصل ۲ ⟵ خطوط تست حول یک خط شان بست [illegible]

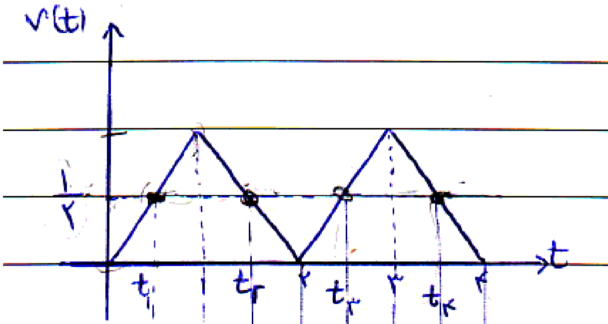


$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{dv}\times\frac{dv}{dt}$$

$$q(v)=\begin{cases} \frac{1}{2}v+\frac{1}{4} & v>\frac{1}{2} \\ v & -\frac{1}{2}<v<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}v-\frac{1}{4} & v<-\frac{1}{2} \end{cases}\qquad\Longrightarrow\frac{dq}{dv}=\begin{cases} \frac{1}{2} & v>\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}<v<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & v<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

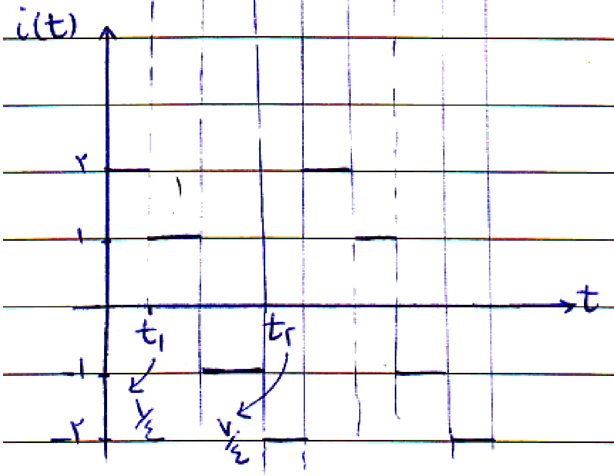
WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v(t)=\begin{cases} 2t & 0<t<1 \\ -2t+4 & 1<t<2 \\ 2t-4 & 2<t<3 \\ -2t+8 & 3<t<4 \\ 0 & else \end{cases} \qquad \frac{dv}{dt}=\begin{cases} 2 & 0<t<1 \\ -2 & 1<t<2 \\ 2 & 2<t<3 \\ -2 & 3<t<4 \\ 0 & else \end{cases}$$



$0<t<t_1$

$\frac{dq}{dv}=1 \;,\; \frac{dv}{dt}=2$



$t_1<t<1$

$\frac{dq}{dv}=\frac{1}{2} \;,\; \frac{dv}{dt}=2 \qquad i(t)=2\times\frac{1}{2}=1$

$1<t<t_2 \qquad \frac{dq}{dv}=\frac{1}{2} \qquad \frac{dv}{dt}=-2 \qquad i(t)=-1$

$t_2<t<2$

$\frac{dq}{dv}=1 \qquad \frac{dv}{dt}=-2 \qquad i(t)=-2$

$v(t)=2t$ محاسبه t_1

$v=\frac{1}{2} \longrightarrow 2t=\frac{1}{2}$

$t=\frac{1}{4} \longrightarrow t_1$

$v(t)=-2t+4$ ، محاسبه t_2

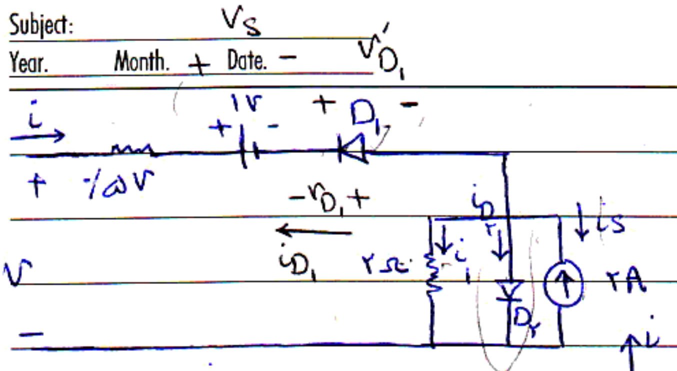
$v(t)=\frac{1}{2}$

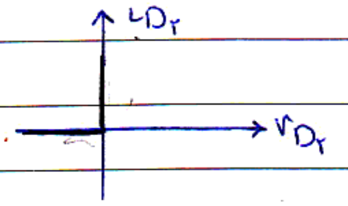
$-2t+4=\frac{1}{2} \longrightarrow t_2=\frac{7}{4}$

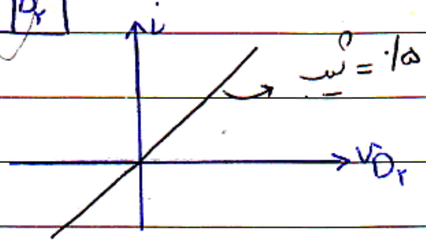
WWW.MOHANDESYAR.COM

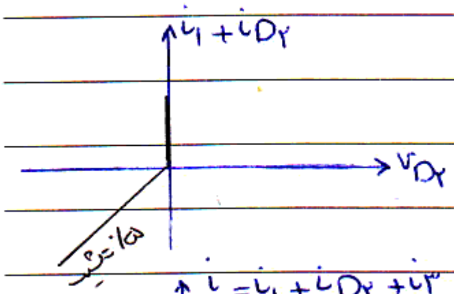
Subject: Year. Month. Date.

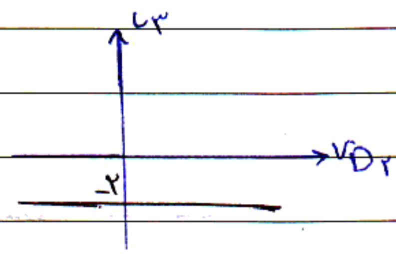
تمرین ۹ فصل ۳

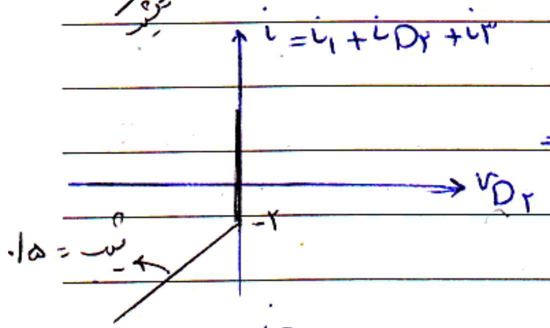






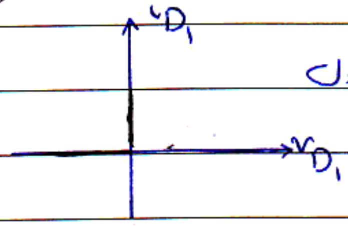




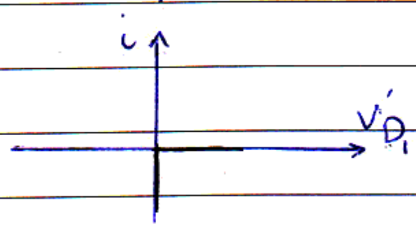


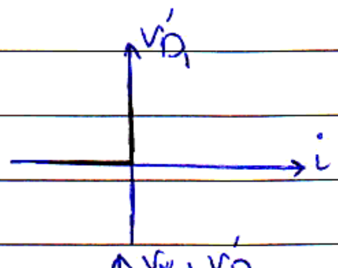
⟸ مجموع ۳ شاخه موازی

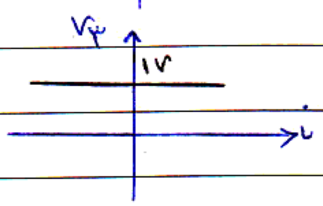
✓

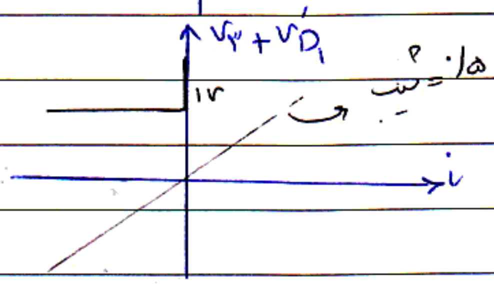


برای دیود ایده‌آل $v'_{D_1} = -v_{D_1}$, $i = -i_{D_1}$



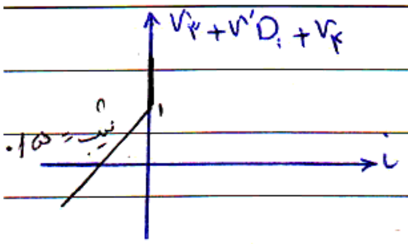


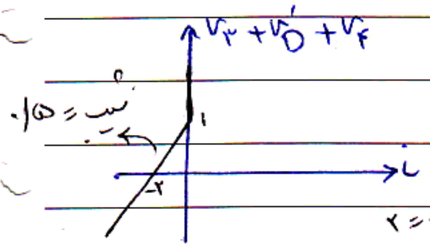


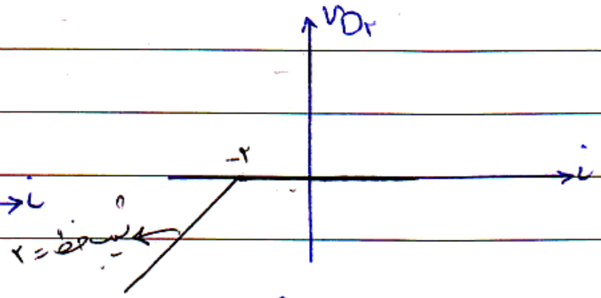


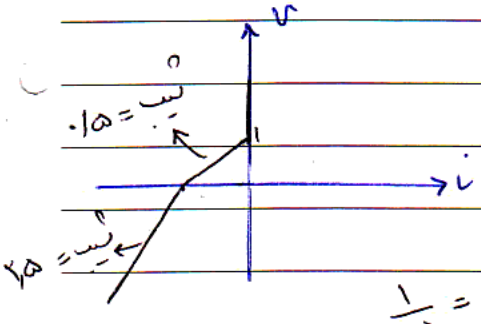
WWW.MOHANDESYAR.COM

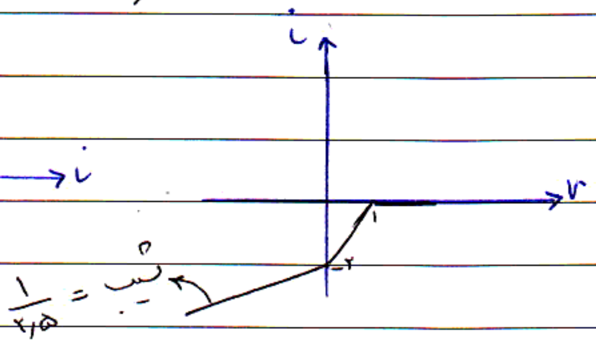
مشخصه سه شاخه سری





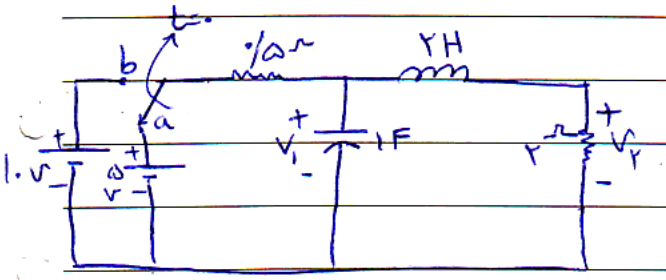






حل یک مثال از فصل ۵:

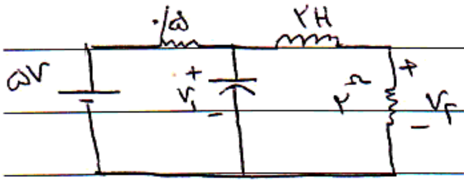
مثال) در مدار زیر پس از آنکه کلید که مدت طولانی در وضع a بوده است در $t=0$ به b منتقل می‌شود.



مقادیر زیر را به دست آورید؟

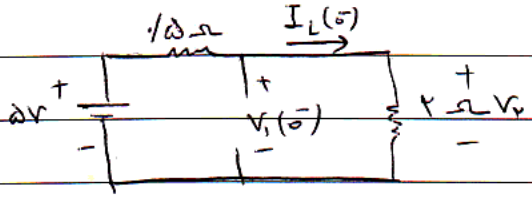
$v_1(0^+)$ ، $v_2(0^+)$ ، $v'_1(0^+)$ ، $v'_2(0^+)$

برای $t<0$



مدار به حالت دائمی رسیده. خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه می‌شود.

برای $t=0^-$



$$I_L(0^-) = \frac{5}{2/5} = 2\,A$$

$$v_1(0^-) = 2 I_L(0^-) = 4\,V$$

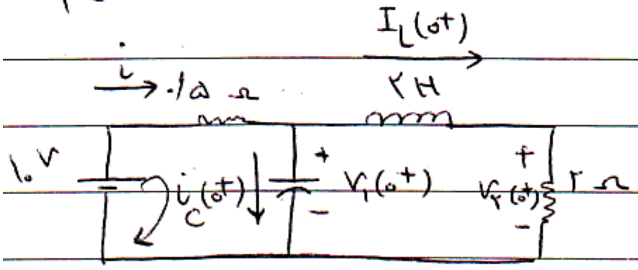
$$v_1(0^-) = v_2(0^-) = 2\times 2 = 4\,V$$

$$\Rightarrow v_1(0^+) = v_2(0^+) = 4\,V$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$V_2(0^-) = ۴V$

برای $t>0$ (کلید در وضعیت b می‌رود.)



$t=0^+$

$I_L(0^+) = I_L(0^-) = ۲A \qquad V_1(0^+) = V_1(0^-) = ۴V$

$V_2(0^+) = ۲\, I_L(0^+) = ۴V$ V_2 در لحظه‌ی $t=0^+$ پرش ندارد.

$i(0^+) = \dfrac{۱۰ - V_1(0^+)}{۰/۵} = \dfrac{۱۰-۴}{۰/۵} = ۱۲\,A \qquad KVL: -۱۰ + ۰/۵\, i + V_1(0^+) = ۰$

$KCL: i(0^+) = I_L(0^+) + i_C(0^+) \qquad ۱۲ = ۲ + i_C(0^+) \rightarrow i_C(0^+) = ۱۰\,A$

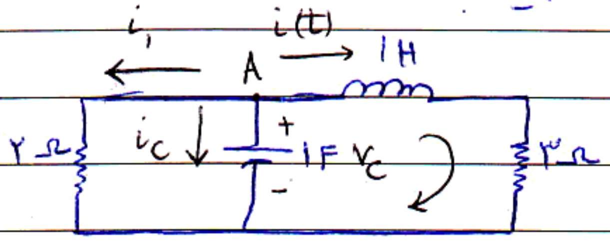
$i_C(t) = C\dfrac{dV_1}{dt} \qquad i_C(0^+) = C\dfrac{dV_1}{dt}(0^+) \longrightarrow \dfrac{dV_1}{dt}(0^+) = \dfrac{۱۰}{۱} \Rightarrow V_1'(0^+) = ۱۰V$

$V_2(t) = ۲\, I_L(t) \Rightarrow V_2'(t) = ۲\, I_L'(t)$

$KVL: V_1(0^+) = V_L(0^+) + V_2(0^+) \longrightarrow ۴ = V_L(0^+) + ۴ \Rightarrow V_L(0^+) = ۰$

$\Rightarrow L\dfrac{dI_L}{dt}(0^+) = ۰ \Rightarrow \dfrac{dI_L}{dt}(0^+) = ۰ \qquad V_2'(0^+) = ۲ I_L'(0^+) = ۰$

مثال) شرایط اولیه را طوری بیابید که تنها فرکانس طبیعی کوچکتر در پاسخ $i(t)$ ظاهر شود؟



$\begin{cases} i_L(0^-) = I_0 \\ V_C(0^-) = V_0 \end{cases}$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$KCL\ (A):\ i_1 + i_C + i = 0$

$i_1 = \dfrac{V_C}{2} \qquad i_C = C\dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{dV_C}{dt} \longrightarrow 0/5V_C + \dfrac{dV_C}{dt} + i(t) = 0 \quad *$

$KVL:\ -V_C + V_L(t) + 3i(t) = 0 \longrightarrow V_C(t) = V_L(t) + 3i(t) = \dfrac{di}{dt} + 3i(t)$

$\xrightarrow{*}\ 0/5\left(\dfrac{di}{dt} + 3i(t)\right) + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{di}{dt} + 3i(t)\right) + i(t) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{d^2i}{dt^2} + 3/5\dfrac{di}{dt} + 2/5\, i(t) = 0 \Rightarrow S^2 + 3/5S + 2/5 = 0 \Rightarrow$ معادله مشخصه

$\begin{cases} S_1 = -2/5 \\ S_2 = -1 \end{cases}$

طبق پاسخ بدون منبع $i(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-2/5t}$

مجهول

① $\boxed{i_L(0^+) = i(0^+) = I_0}$ $\qquad V_C(0^+) = L\dfrac{di}{dt}(0^+) + 3i(0^+)$

$\Rightarrow V_0 = \dfrac{di}{dt}(0^+) + 3I_0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{di}{dt}(0^+) = V_0 - 3I_0}$ ②

از روی رابطه ① درس که داده $i(0^+) = K_1 + K_2 = I_0$

$\dfrac{di(t)}{dt} = -K_1e^{-t} - 2/5K_2e^{-2/5t} \qquad \dfrac{di}{dt}(0^+) = -K_1 - 2/5K_2 = V_0 - 3I$

$\begin{cases} K_1 + K_2 = I_0 \\ -K_1 - 2/5K_2 = V_0 - 3I \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = \dfrac{V_0 - 0/5I_0}{1/5} \\ K_2 = \dfrac{2I_0 - V_0}{1/5} \end{cases}$

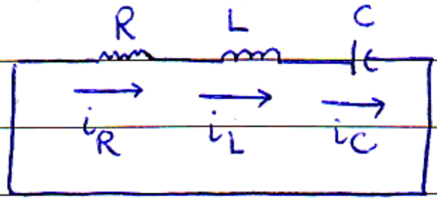
برای اینکه فقط یک مولفه ظاهر شود باید $K_2 = 0$ (S_1 باید حذف شود)

$K_2 = \dfrac{2I_0 - V_0}{1/5} = 0 \Rightarrow V_0 = 2I_0 \qquad K_2 = 0,\ K_1 = \dfrac{2I_0 - 0/5I_0}{1/5} = I_0$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$i(t) = I_0 e^{-t} \quad t>0$ (با این شرط اولیه مدار مرتبه ۲ مانند مدار مرتبه ۱ عمل می‌کند)

پاسخ ورودی صفر مدار RLC سری :



$v_C(0^-) = V_0$

$i_L(0^-) = I_0$

متغیر v_C را برای نوشتن معادله دیفرانسیل مدار انتخاب می‌کنیم

$i_C = i_R = i_L$

$$KVL: v_R + v_L + v_C = 0 \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt} \rightarrow i_R = i_L = i_C$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv_C}{dt}\right) = LC\frac{d^2v_C}{dt^2}$$

$$v_R = Ri_R = RC\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow RC\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } LC} \frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0 \longrightarrow \text{معادله دیفرانسیل مدار}$$

محاسبه شرایط اولیه :

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0$$

$$\begin{cases} i_C(0^+) = C\dfrac{dv_C}{dt}(0^+) \\ i_C(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 \end{cases} \qquad \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{I_0}{C}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v_C}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{v_C}{LC} = 0 \longrightarrow s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC} = 0 \\ v_C(0^+) = V_0 \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+) = \dfrac{I_0}{C} \end{cases}$$

$$\omega_0^2 \triangleq \frac{1}{LC} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$2\alpha = \frac{R}{L}$ $\quad \boxed{\alpha = \frac{R}{2L}}$ $\quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

دوگانی (همزادی) Duality

اگر معادلات حالت‌های یک مدار با معادلات حالت‌های یک مدار دیگر شبیه باشند این دو مدار، دوگان یکدیگر هستند.

معادله دیفرانسیل مدار RLC موازی

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{i_L(t)}{LC} = 0 \\ i_L(0^+) = I_0 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = \dfrac{V_0}{L} \end{cases}$$

کمیت اصلی : KVL ـ جریان ـ حلقه ـ سری ـ خازن ـ مقاومت R ـ منبع ولتاژ ـ مدار باز

کمیت دوگان : KCL ـ ولتاژ ـ گره ـ موازی ـ سلف ـ مقاومت $\frac{1}{R}$ ـ منبع جریان ـ اتصال کوتاه

کمیت اصلی مدار الکتریکی

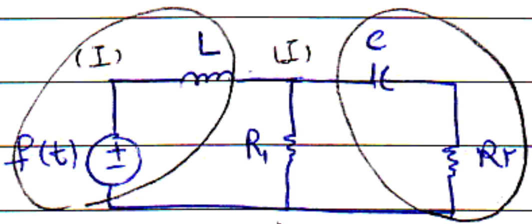
کمیت دوگان مدار معادل اصلی

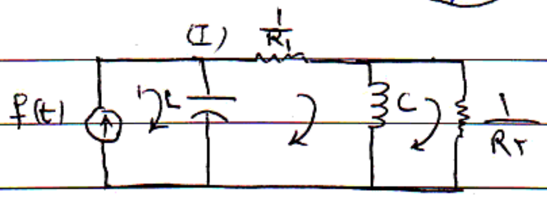
مثال) دوگان KCL را بنویسید.

KCL : جمع جبری جریان‌ها در یک گره برابر صفر است.

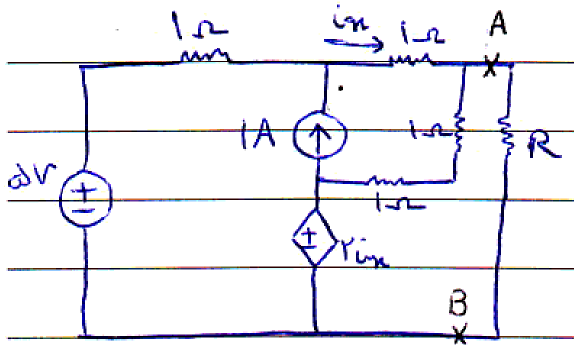
KVL : جمع جبری ولتاژها در یک حلقه برابر صفر است.

مثال) دوگان مدار زیر را بیابید.



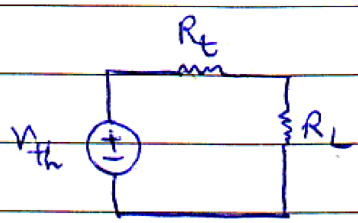


WWW.MOHANDESYAR.COM



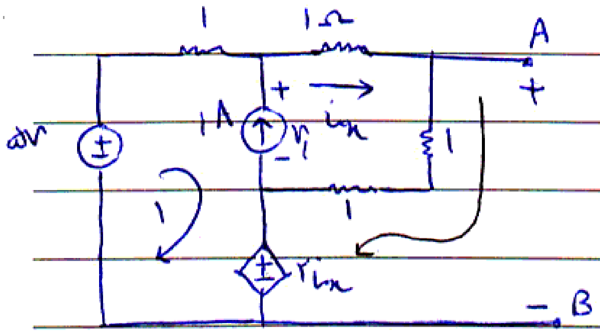
تمرین ۴۹ فصل ۳)

قضیه انتقال توان ماکزیمم



اگر $R_t=R_L$ ← بیشترین توان را جذب می‌کند.

معادل تونن دو سر R را بدست می‌آوریم:



برای محاسبه V_{th} دو سر مقاومت R را از مدار باز می‌کنیم،

$V_{AB}=V_{th}$

KCL: $i_1+1=i_x \rightarrow i_1=i_x-1$

KVL: $-5+i_1+V_1+2i_x=0$

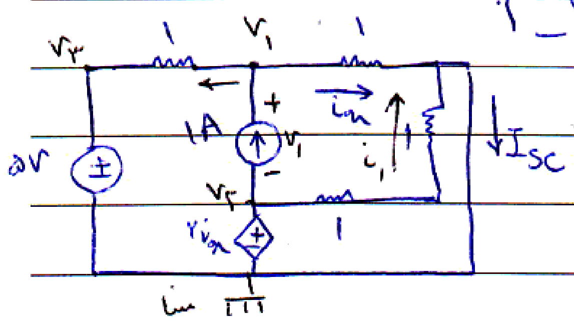
KVL: $-V_1+3i_x=0 \rightarrow V_1=3i_x$

$-5+i_x-1+3i_x+2i_x=0$

$6i_x-6=0 \Rightarrow i_x=1$ A

$V_{AB}=i_x+i_x+2i_x=4i_x \Rightarrow V_{AB}=4V \Rightarrow V_{th}=4V$

برای محاسبه I_N، مقاومت R را اتصال کوتاه می‌کنیم



$V_3=5V$ $\quad V_2=2i_x$

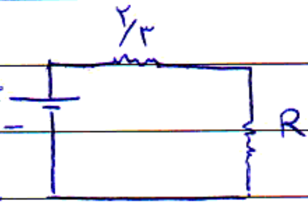
KCL (1): $1=\frac{V_1-5}{1}+\frac{V_1-0}{1}$

$\Rightarrow 2V_1=6 \Rightarrow V_1=3V$ $\quad i_x=\frac{V_1}{1}=3A$

$v_2 = 2i_x = 2\times 3 = 6\,V \qquad i_1 = \frac{v_2 - 0}{2} = \frac{6}{2} = 3\,A$

$KCL: i_1 + i_x = I_{sc} \longrightarrow I_{sc} = 6A \Rightarrow I_N = 6A$

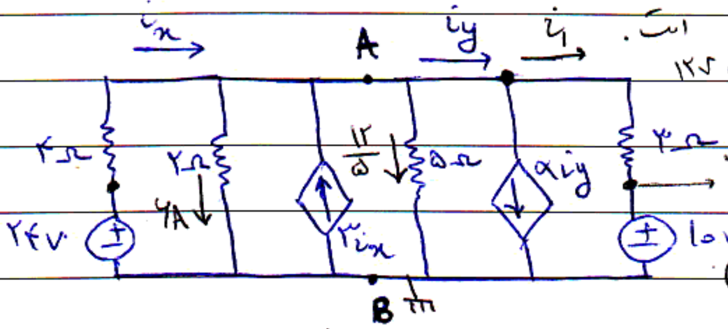
$v_{th} = 4 \quad I_N = 6 \Rightarrow R_{th} = \frac{v_{th}}{I_N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



طبق قضیه انتقال توان ماکزیمم: $R = \frac{2}{3}\,\Omega$

43/3:

$\text{if} \quad v_{AB} = 12V \quad \alpha = ?$



چون همه با هم موازی اند ولتاژ دو سر همه ی المان ها 12V است.

دو روش بکار برید ،

چون ولتاژ را ... مشخص است دیگر آن را در محاسبات منظور نمیکنم

الف) کل نمره

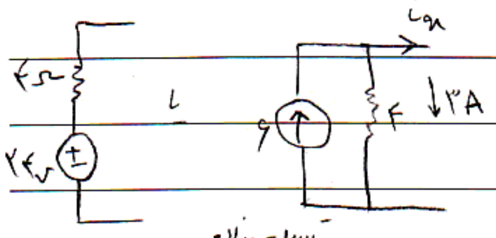
ب) معادل نورتن سمت راست دو سر AB

الف) $i_x = \frac{24 - V_{AB}}{4} = 3A \qquad i_1 = \frac{V_{AB} - 10}{3} = \frac{2}{3}\,A$

$KCL: -i_y + \alpha i_y + i_1 = 0 \longrightarrow i_y(\alpha - 1) = -i_1 \Rightarrow i_y = \frac{2}{3(1-\alpha)}$

$KCL(A): \underbrace{-i_x + 6 - 3i_x}_{-18} + i_y + \frac{12}{5} = 0 \qquad \underbrace{-4(3) + 6}_{-6} + \frac{12}{5} + \frac{2}{3(1-\alpha)} = 0$

$\frac{-30 + 12}{5} = \frac{-2}{3(1-\alpha)} \longrightarrow \frac{27}{5} = \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{22}{27}$

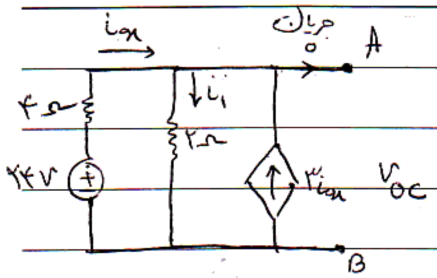


تبدیل منابع

WWW.MOHANDESYAR.COM

چون دو سر ولتاژ باز است.

ب) ابتدا سمت چپ مدار: ولتاژ دو سر AB برابر ۱۲V نیست.

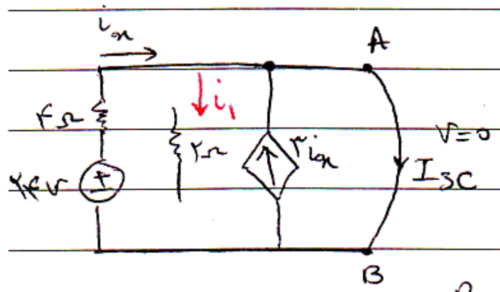


$$i_1 = \frac{V_{oc}}{2}$$

$$V_{oc} = -4i_x + 24$$

$$KCL: -i_x - 3i_x + i_1 = 0 \Rightarrow 4i_x = i_1 \Rightarrow 4i_x = \frac{V_{oc}}{2} \Rightarrow i_x = \frac{V_{oc}}{8}$$

$$V_{oc} = \frac{-V_{oc}}{2} + 24 \Rightarrow V_{oc} = 16$$



$i_1 = 0$

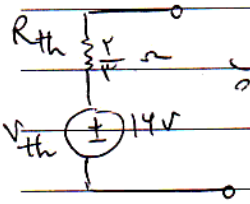
$$KVL: -24 + 4i_x = 0 \Rightarrow i_x = 6A$$

$V = 0$

$$KCL: i_x + 3i_x = I_{sc} \Rightarrow I_{sc} = 24A$$

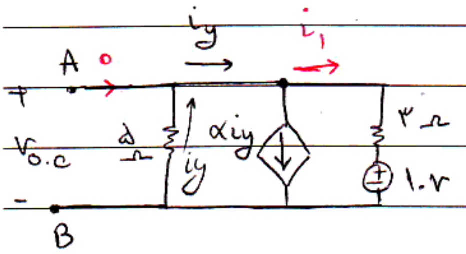
$$V_{oc} = 16V$$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}\,\Omega$$



معادل تونن سمت چپ مدار

حال سمت راست مدار



(1) $KVL: 5i_y + 3i_1 + 10 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{-10 - 5i_y}{3}$

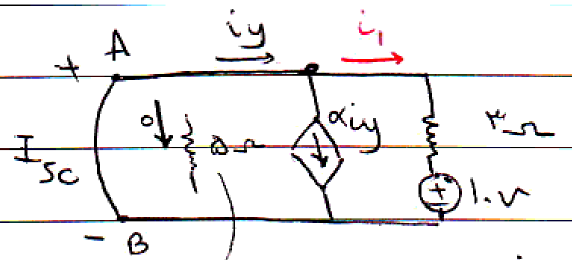
(2) $KCL: i_y = i_1 + \alpha i_y \Rightarrow i_y(1-\alpha) = i_1$

(1), (2) $\Rightarrow i_y(1-\alpha) = \frac{-10-5i_y}{3} \Rightarrow 3i_y(1-\alpha) = -10 - 5i_y$

$$i_y(3 - 3\alpha + 5) = -10$$

$$V_{oc} = -5i_y = \frac{50}{8-3\alpha}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM



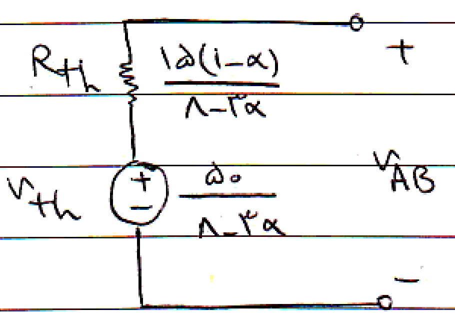
$$KVL:\ 3i_1 + 10 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{-10}{3}$$

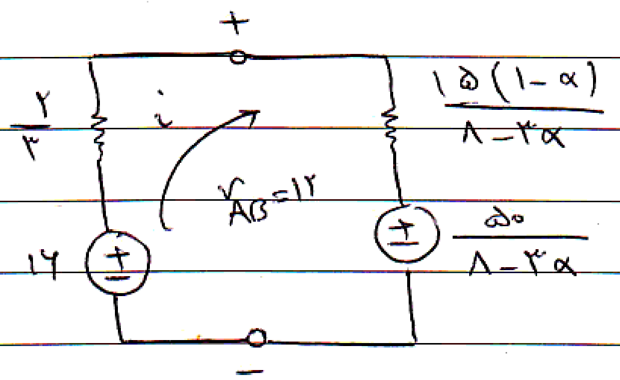
$$KCL:\ -i_y + \alpha i_y + i_1 = 0$$

$$i_y(\alpha - 1) = -i_1 \Rightarrow i_y = \frac{-i_1}{(\alpha-1)} = \frac{+10}{3(\alpha-1)}$$

$$I_{sc} = -i_y = \frac{-10}{3(\alpha-1)} \qquad V_{oc} = -5i_y = \frac{50}{8-3\alpha}$$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{\frac{50}{8-3\alpha}}{\frac{-10}{3(\alpha-1)}} = \frac{15(1-\alpha)}{8-3\alpha}$$





دو قسمت مدار را بهم وصل میکنیم

$$-14 + \frac{2}{3}i + V_{AB} = 0$$

$$\frac{2}{3}i = 4 \Rightarrow i = \frac{12}{2} = 6A$$

$$\underbrace{V_{AB}}_{12V} = \frac{15(1-\alpha)}{8-3\alpha}\underbrace{i}_{6A} + \frac{50}{8-3\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{22}{27}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

معادلات حالت :

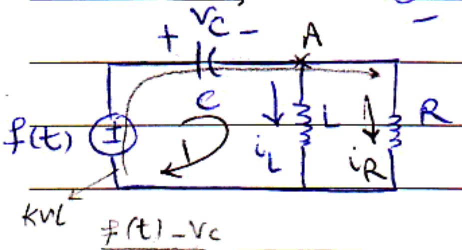
از دو متغیر استفاده می‌شود ، ولتاژ خازن v_C

جریان سلف i_L

بردار حالت $x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$

$$x(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix} \qquad x' = \underbrace{A}_{\text{ماتریس}} x + B \underbrace{f(t)}_{\text{ورودی}}$$

مثال) معادلات حالت را برای این مدار بدست آورید



$\dfrac{f(t) - v_C}{R}$

$v_C(0) = V_0 \; , \; i_L(0) = I_0$

$$KVL(1): \; -f(t) + v_C + L\frac{di_L}{dt} = 0 \quad *$$

$$KCL(A): \; i_C = i_L + i_R$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_L + \frac{f(t) - v_C}{R} \quad *$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -v_C + f(t) \qquad \frac{di_L}{dt} = -\frac{v_C}{L} + \frac{f(t)}{L} \quad ①$$ از * اول بدست آمد

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{-v_C}{RC} + \frac{i_L}{C} + \frac{f(t)}{RC} \quad ②$$

① و ② را به صورت ماتریسی می‌نویسیم ، ضرایب $f(t)$

$$\begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \text{ضرایب } i_L & \text{ضرایب } v_C \\ \left(\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{RC} \end{matrix}\right) \end{array} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{RC} \end{pmatrix} f(t)$$

$i_L \times \qquad \times v_C$

صورت سوال فرض ، $f(t) = u(t) \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad R = \frac{1}{3} \; , \; C = 1F \; , \; L = \frac{1}{2}H$

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \xrightarrow{L}$$ (صفحه بعد)

حل ،

$$L(x) = X(S) \qquad x' = Ax + Bf(t) \xrightarrow{L}$$

$$L(x') = SX(S) - X(0) \qquad SX(S) - X(0) = AX(S) + BF(S)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1 \qquad L(u(t))=\frac{1}{s}$

مثال:

$L^{-1}\frac{s}{(s^2+1)(s-1)}=$

$L^{-1}\frac{As+B}{(s^2+1)}+\frac{C}{(s-1)}$

Subject:
Year. Month. Date.

$sX(s)-AX(s)=X(0)+BF(s)$

$(sI-A)X(s)=X(0)+BF(s)$

ماتریس همانی $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \longrightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}(X(0)+BF(s)) \xrightarrow{L^{-1}} X=$

حل معادله: $X'=\begin{pmatrix}0&-2\\1&-3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}u(t) \xrightarrow{L}$

$sX(s)-X(0)=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}X(s)+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\frac{1}{s}$

$sX(s)-\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}X(s)=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\frac{1}{s}+X(0)$

$\left(sI-\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}\right)X(s)=\begin{bmatrix}\frac{2}{s}\\\frac{3}{s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ از ~~$X(s)$ فاکتور~~ ،

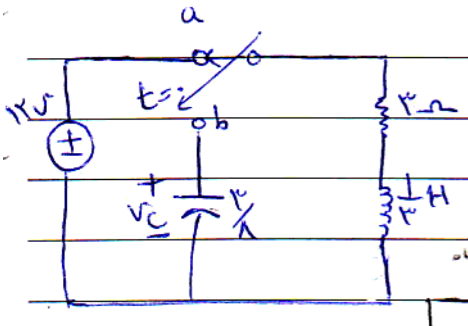
$\begin{pmatrix}s&2\\-1&s+3\end{pmatrix}X(s)=\begin{pmatrix}\frac{s+2}{s}\\\frac{s+3}{s}\end{pmatrix} \qquad sI=\begin{pmatrix}s&0\\0&s\end{pmatrix}$

$X(s)=\begin{bmatrix}s&2\\-1&s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s}\\\frac{s+3}{s}\end{bmatrix} \longrightarrow X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3&-2\\1&s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s}\\\frac{s+3}{s}\end{bmatrix}$

$X(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\\\frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}\end{bmatrix} \xrightarrow{L^{-1}} X=\begin{bmatrix}i_L\\v_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\1+e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$

مثال) در مدار زیر کلید برای مدت طولانی در وضعیت a بوده است. در لحظه $t=0$ کلید به وضعیت b می‌رود.

$v_C(0^-)=0$

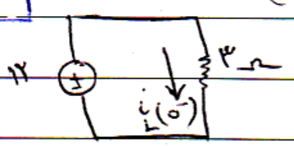


الف) ولتاژ خازن را برای $t\geq 0$ بدست آورید؟

ب) پارامترهای α ، ω_0 و Q را بدست آورید؟

برای $t=0^+$ (خازن در مدار وجود دارد) / حال در مدار، سلف اتصال کوتاه

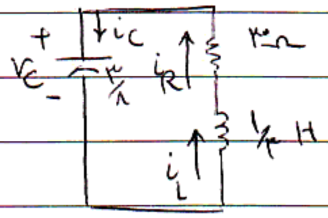
برای $t=0^-$ ← مدار در حالت دائمی



$i_L(0^-)=\frac{12}{3}=4A$

در مدار ضربه نداریم پس: شرایط اولیه $v_C(0^+)=0$ و $i_L(0^+)=4A$

برای $t>0$ کلید به وضعیت b می‌آید و منبع سمت چپ مدار باز می‌شود.



$$v_C+\frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}+3i_R=0$$

$$i_L=i_C=i_R=C\frac{dv_C}{dt}=\frac{3}{8}\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C+\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{8}\frac{dv_C}{dt}\right)+3\times\frac{3}{8}\frac{dv_C}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v_C}{dt^2}+9\frac{dv_C}{dt}+8v_C=0 \longrightarrow s^2+9s+8=0 \quad \begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-8 \end{cases}$$ حالت فوق میرا

$$\Rightarrow v_C(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-8t}$$ K_1 و K_2 مجهول با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شود

$$i_C(0^+)=i_L(0^+)=-4 \longrightarrow C\frac{dv_C}{dt}(0^+)=-4 \longrightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+)=\frac{-4}{C}=\frac{-32}{3}$$

منفی چون در مدار قبلی جهت $i_L(0^+)$ را پایین فرض کرده بودیم

$$\begin{cases} v_C(0^+)=K_1+K_2=0 \\ v_C'(0^+)=-K_1-8K_2=\frac{-32}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1=\frac{32}{21} \\ K_2=-\frac{32}{21} \end{cases} \Rightarrow v_C(t)=\frac{32}{21}\left(e^{-t}-e^{-8t}\right) \quad t\geq 0$$

در RLC سری: $\alpha=\frac{R}{2L}$

$2\alpha=9 \longrightarrow \alpha=4.5$

$\omega_0^2=8 \longrightarrow \omega_0=2\sqrt{2}$

$Q=\frac{\omega_0}{\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$

$$*\ \mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-a}=e^{at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=? \qquad \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

$$\Rightarrow A=2,\ B=-1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s+1}+\mathcal{L}^{-1}\frac{-1}{s+2}$$

$$=2e^{-t}-e^{-2t}$$

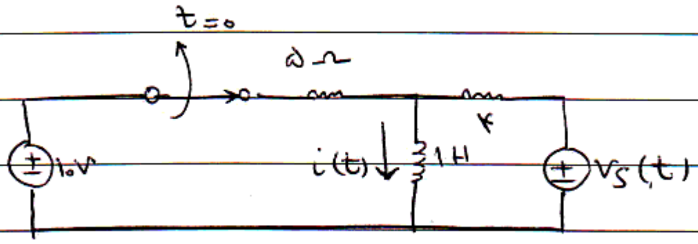
WWW.MOHANDESYAR.COM

WWW.MOHANDESYAR.COM

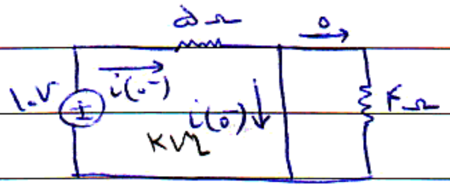
پاسخ تمرینات فصل چهارم : مدارهای مرتبه اول

۱۵- الف) اگر $V_s(t)=10e^{-2t}u(t)$

ب) $V_s(t)=10e^{-4t}u(t)$



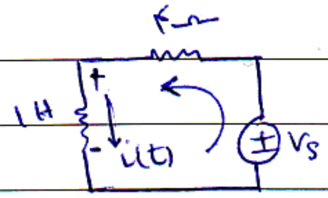
برای $t=0^-$



$i(0^-)=\frac{10}{5}=2A$

$i(0^+)=i(0^-)=2A$ (چون سلف پیوسته است در صورتی که منابع $u(t)$ هستند ($\delta(t)$ نداریم))

برای $t>0$



معادله دیفرانسیل مدار را برحسب $i(t)$ بدست می‌آوریم:

$$KVL:\ -V_s(t)+4i(t)+1\times\frac{di}{dt}=0$$

$$\frac{di}{dt}+4i(t)=V_s(t)\ ,\ t>0$$

$$\frac{di}{dt}+4i=10e^{-2t}\quad t>0 \qquad i(t)=\underbrace{i_h(t)}_{\text{همگن}}+\underbrace{i_p(t)}_{\text{خاص}}$$

محاسبه $i_h(t)$:

$$\frac{di}{dt}+4i=0 \qquad i(t)=Ae^{st}$$

$$\rightarrow \underbrace{s+4=0}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow s=-4 \Rightarrow \boxed{i_h(t)=Ae^{-4t}}$$

جواب خاص $i_p(t)=ke^{-2t} \Rightarrow \frac{di_p}{dt}+4i_p=10e^{-2t}$

$$\Rightarrow -2ke^{-2t}+4ke^{-2t}=10e^{-2t} \rightarrow k=5 \qquad i_p(t)=5e^{-2t}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$i(t)=Ae^{-4t}+5e^{-2t} \quad , t>0$

$i(0^+)=2 \qquad t=0 \longrightarrow A+5=2 \longrightarrow A=-3$

$i(t)=-3e^{-4t}+5e^{-2t} \qquad t>0$

برای اینکه شرط $t>0$ را برای معادله بیان کنیم می‌توانیم در $u(t)$ ضرب کنیم.

ب) $\frac{di}{dt}+4i=10e^{-4t} \qquad t>0$

$i(t)=i_h(t)+i_p(t) \longrightarrow i_h(t)=Ae^{-4t} \qquad S+4=0$

۴- ریشه معادله مشخصه است پس $i_p(t)$ در t ضرب می‌شود

پاسخ خاص: $i_p(t)=Kte^{-4t}$

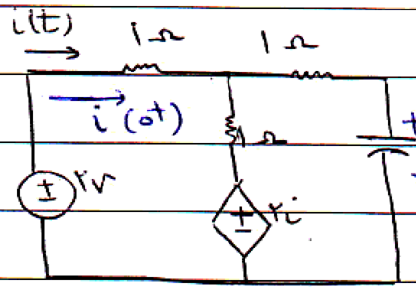
$Ke^{-4t}-4Kte^{-4t}+4Kte^{-4t}=10e^{-4t} \Longrightarrow \boxed{K=10}$

$i(t)=10te^{-4t}+Ae^{-4t} \quad , t>0$

$i(0^+)=2 \Rightarrow A+0=2 \Rightarrow A=2 \qquad i(t)=(10te^{-4t}+2e^{-4t})u(t)$

۱۳- $v_c(0^-)=0$

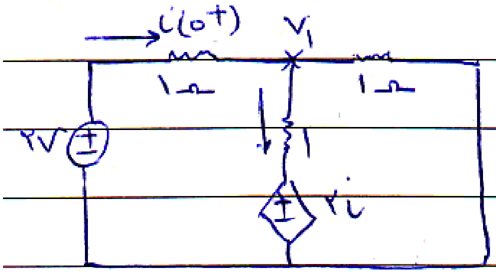
$\forall\ t\geq 0 \ , \ i(t)=?$



در $t=0^+$

$v_c(0^+)=0$

$v_c(0^+)=0$



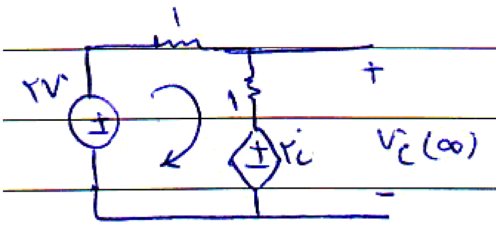
محاسبه $i(0^+)=?$

$KCL\ (1), \quad i(0^+)=\frac{v_1-2i(0^+)}{1}+\frac{v_1}{1}$

$\boxed{v_1=\frac{2}{3}i(0^+)+\frac{2}{3}}$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$i(0^+)=\frac{2-V_1}{1}=2-\left(\frac{2}{3}i(0^+)+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow \boxed{i(0^+)=0.8\,A}$$



محاسبه $V_C(+\infty)$:

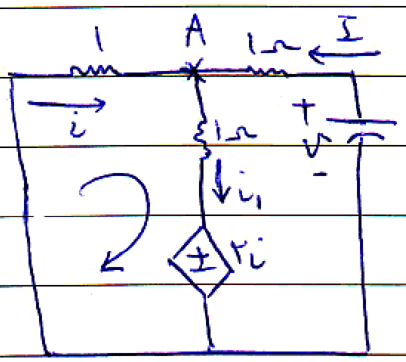
خازن مدار باز میشود، شار تصحیح دو ولتاژ هر چه بود

$$-2+i+i+2i=0 \longrightarrow i=\frac{1}{2}$$

$$V_C(+\infty)=i+2i=\frac{3}{2}$$

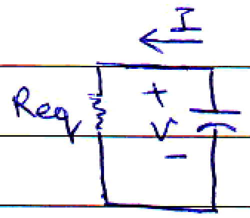
$$\Rightarrow i(0^+)=0.8\,A$$

$$i(+\infty)=\frac{1}{2}\,A$$



محاسبه τ : محاسبه R_{eq}

$$\frac{V}{I}=R_{eq}$$



$$\frac{V}{I}=R_{eq}$$

$$KCL(A):\ i+I=i_1$$

$$KVL:\ i+i_1+2i=0 \Rightarrow 0$$

$$i_1=-3i$$

$$\begin{cases} i=\dfrac{-I}{4} \\ i_1=\dfrac{3I}{4} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &KVL:\ 2i-i_1-I+V=0 \\ &-2\left(\frac{-I}{4}\right)-\left(\frac{3I}{4}\right)-I+V=0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow V=\frac{5}{4}I$$

$$R_{eq}=\frac{V}{I}=\frac{5}{4}\,\Omega \qquad \tau=R_{eq}C=\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}=1\,sec$$

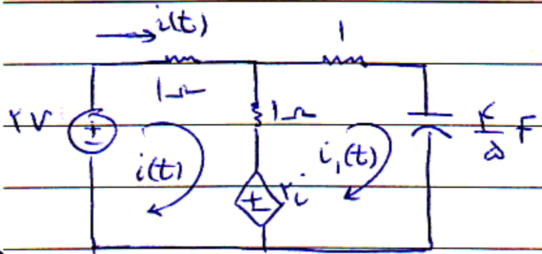
$$i(t)=0.5+(0.8-0.5)e^{-t} \qquad i(t)=0.5+0.3e^{-t} \quad t>0$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\lambda)\,d\lambda$$

Subject:
Year. Month. Date.

روش دوم حل: حل به وسیله معادلات دیفرانسیل



① $KVL(1):\ -2+i(t)+i(t)-i_1(t)+2i(t)=0$

② $KVL(2):\ -2i(t)+i_1(t)-i(t)+0+\frac{1}{4/5}\int_0^t i_1(\lambda)\,d\lambda+i_1(t)=0$

① $\rightarrow \boxed{i_1(t)=4i(t)-2}$ ② $\rightarrow -3i(t)+2i_1(t)+\frac{5}{4}\int_0^t i_1(\lambda)\,d\lambda=0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}}$

$$-3\frac{di}{dt}+2\frac{di_1(t)}{dt}+\frac{5}{4}i_1(t)=0$$

$$-3\frac{di}{dt}+2\frac{d}{dt}\left(4i(t)-2\right)+\frac{5}{4}\left(4i(t)-2\right)=0$$

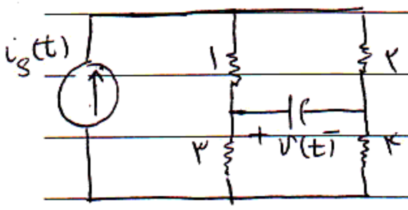
محاسبه $i_h(t)$:

$\frac{di}{dt}+i=\frac{1}{2}$ $\quad i(t)=i_h(t)+i_p(t)$ $\quad \frac{di}{dt}+i=0$ $\quad S+1=0 \rightarrow S=-1$

$i_h(t)=Ae^{-t}$

محاسبه $i_p(t)$: $i_p(t)=C \rightarrow 0+C=\frac{1}{2} \Rightarrow C=\frac{1}{2} \Rightarrow i_p(t)=\frac{1}{2}$

۳۲- پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر را محاسبه کنید.

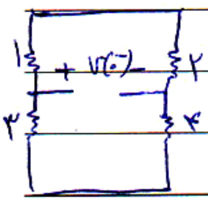


$v(t)=?$

الف) $i_s(t)=u(t)$

$t<0$ مدار بی‌منبع

$t=0^-$ خازن به حالت دائمی می‌رسد می‌توان مدار باز آن را در نظر گرفت.

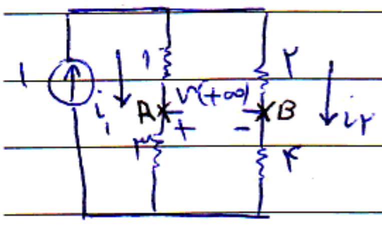


$v(0^-)=0$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$V(0^+) = V(0^-) = 0$

برای $t=+\infty$

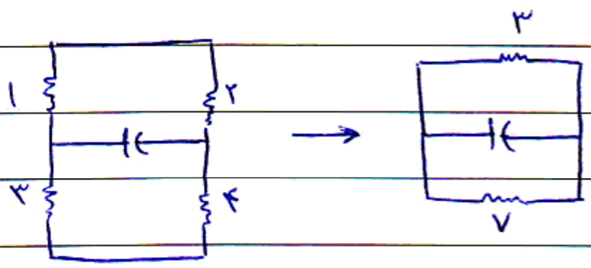


$$i_1 = \frac{6}{10} \times 1 = 0/6$$
$$i_2 = \frac{4}{10} \times 1 = 0/4$$

$$\begin{cases} V_A = 3i_1 = 1/8\,V \\ V_B = 4i_2 = 1/6\,V \end{cases}$$

$$v(+\infty) = V_A - V_B = 0/2\,V$$

محاسبه‌ی R_{eq} : منبع را صفر کرده و مقاومت دو سر خازن را حساب می‌کنیم.

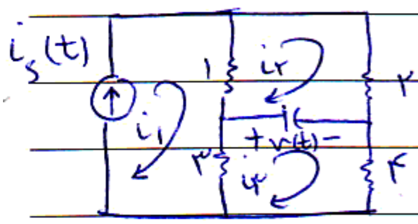


$$R_{eq} = 3 \| 7 = 2/1\ \Omega$$
$$R_{eq}\,c = 2/1 \times 1 = 2/1\ \text{sec}$$

$$v(t) = 0/2 + (0 - 0/2)\, e^{-t/2/1}$$
$$v(t) = 0/2\,(1 - e^{-t/2/1})\, u(t)$$

برای این شرط $t>0$ را صرف‌نظر کنیم.

پاسخ ضربه را با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل مدار حساب می‌کنیم.



محاسبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل مدار برحسب $v(t)$:

$$i_1 = i_s(t)$$

$$KVL(2):\ 2i_2 - v(t) + i_2 - i_s = 0$$

$$KVL(3):\ v + 4i_3 + 3(i_3 - i_s) = 0$$

$$\begin{cases} i_2 = \dfrac{v + i_s}{3} \\ i_3 = \dfrac{3i_s - v}{7} \end{cases}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

بسم الله الرحمن الرحیم

مدارهای الکتریکی ۱

(بخش چهارم)

استاد عادلی

WWW.MOHANDESYAR.COM

$i_C = i_2 - i_3$ $\qquad \int v\,dt = 0$ $\qquad$ از طرفین

س ∘ δ' $\quad \delta \quad \delta(t) \quad \delta$

$$1 \swarrow \quad C\frac{dv}{dt} = \frac{3i_s - v}{7} - \frac{v + i_s}{3} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{10}{21}v = \frac{2}{21}i_s(t) = \frac{2}{21}\delta(t)$$

$v(0^-) = 0$ $\qquad$ در معادله ضربه داریم پس باید $v(0^+)$ [illegible] می‌شود.

$$\int_{0^-}^{0^+} v'(t)\,dt + \frac{10}{21}\int_{0^-}^{0^+} \underbrace{v\,dt}_{0} = \frac{2}{21}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)$$

$$v(0^+) - \overset{0}{v(0^-)} + 0 = \frac{2}{21} \Longrightarrow \boxed{v(0^+) = \frac{2}{21}}$$

برای $t > 0$

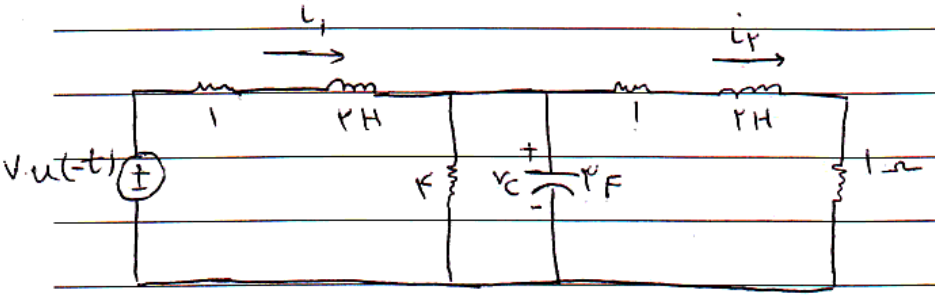
$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{10}{21}v = 0 \\ v(0^+) = \dfrac{2}{21} \end{cases}$$

$$s + \frac{10}{21} = 0 \Longrightarrow s = \frac{-10}{21} \qquad v(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{10}{21}t}$$

$$v(0^+) = \frac{2}{21} = A \longrightarrow A = \frac{2}{21} \qquad v(t) = \frac{2}{21}e^{-\frac{10}{21}t} \quad t > 0$$

$$v(t) = \frac{2}{21}e^{-\frac{10}{21}t}u(t)$$

۲۷



الف) $i_1(0^+)$ ، $i_2(0^+)$ ، $v_C(0^+)$ = ?

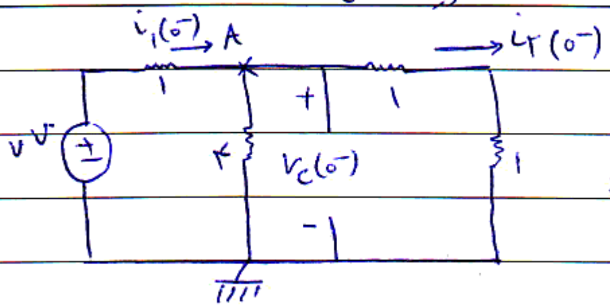
ب) $\dfrac{di_1}{dt}(0^+)$ ، $\dfrac{di_2}{dt}(0^+)$ ، $\dfrac{dv_C}{dt}(0^+)$ = ?

ج) $\dfrac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+)$ ، $\dfrac{d^2 i_2}{dt^2}(0^+)$ ، $\dfrac{d^2 v_C}{dt^2}(0^+)$ = ?

WWW.MOHANDESYAR.COM

$t=0^-$ در

$t<0$ در



$$KCL(A): \frac{v_C(0^-)}{4}+\frac{v_C(0^-)}{1+1}+\frac{v_C(0^-)-7}{1}=0$$

$$\longrightarrow v_C(0^-)=4V$$

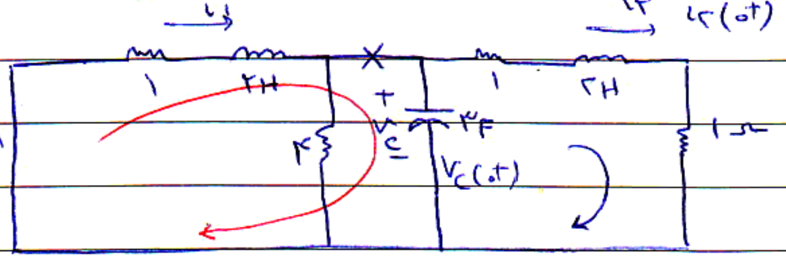
$$i_1(0^-)=\frac{7-v_C(0^-)}{1}=3A \qquad i_2(0^-)=\frac{v_C(0^-)}{2}=\frac{4}{2}=2A$$

الف) در لحظه صفر داریم:

$$v_C(0^+)=4 \ , \ i_1(0^+)=3A \ , \ i_1(0^-)=2A$$

ب) $t=0^+$

اتصال کوتاه



$$v_C(0^+)=i_2(0^+)+2\frac{di_2}{dt}(0^+)+i_2(0^+)$$

$$4=2\times2+2\frac{di_2}{dt}(0^+) \longrightarrow \boxed{\frac{di_2}{dt}(0^+)=0}$$

$$v_C(0^+)=-i_1(0^+)-2\frac{di_1}{dt}(0^+)$$

$$4=-3-2\frac{di_1}{dt}(0^+) \longrightarrow \boxed{\frac{di_1}{dt}(0^+)=-3/5}$$

$$i_1(0^+)=i_2(0^+)+\underbrace{C\frac{dv_C}{dt}(0^+)}_{i_C(0^+)}+\frac{v_C(0^+)}{4}$$

$$3=2+4\frac{dv_C}{dt}(0^+)+\frac{4}{4} \longrightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+)=0$$

$$v_C=2i_2+2\frac{di_2}{dt} \xrightarrow{d/dt}$$

ج) از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dv_C}{dt}=\frac{2di_2}{dt}+2\frac{d^2i_2}{dt^2} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt}(0^+)=\underbrace{2\frac{di_2}{dt}(0^+)}_{0}+2\frac{d^2i_2}{dt^2}(0^+) \ , \ t=0^+$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$0 = 2\times 0 + 2\frac{d^2 i_2}{dt^2} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2 i_2}{dt^2}(0^+) = 0}$$

$$v_C = -i_1 - 2\frac{di_1}{dt} \xrightarrow{d/dt} \frac{dv_C}{dt} = -\frac{di_1}{dt} - 2\frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

$$\frac{dv_C}{dt}(0^+) = -\frac{di}{dt}(0^+) - 2\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+) \qquad , t = 0^+ \Rightarrow$$

$$0 = -(-3.5) - 2\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0^+) \Longrightarrow \frac{d^2 i_1(0^+)}{dt^2} = 1.75 = \left(\frac{7}{4}\right)$$

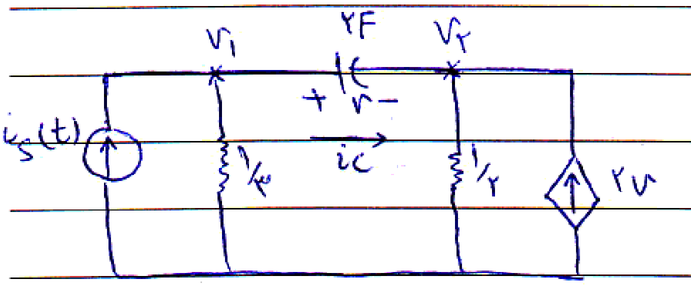
$$KCL \quad i_1 = \frac{v_C}{4} + \underbrace{i_C}_{2\frac{dv_C}{dt}} + i_2 \longrightarrow \frac{d}{dt}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{4}\frac{dv_C}{dt} + 2\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{di_2}{dt}$$

$$t = 0^+ \quad \frac{di_1}{dt}(0^+) = \frac{1}{4}\frac{dv_C}{dt}(0^+) + 2\frac{d^2 v_C}{dt^2}(0^+) + \frac{di_2}{dt}(0^+)$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2}(0^+) = \frac{-3.5}{2}$$

(14



$$KCL\,(1):\quad i_s(t) = \frac{v_1}{1/3} + \frac{2dv}{dt} = 3v_1 + \frac{2dv}{dt} \longrightarrow \boxed{v_1 = \frac{1}{3} i_s - \frac{2}{3}\frac{dv}{dt}}$$

$$KCL\,(2):\quad i_C + 2v = \frac{v_2}{1/2} \longrightarrow \boxed{v_2 = \frac{dv}{dt} + v}$$

$$v = v_1 - v_2 \qquad v = \left(\frac{1}{3} i_s - \frac{2}{3}\frac{dv}{dt}\right) - \left(\frac{dv}{dt} + v\right)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6}{5} v = \frac{1}{5} i_s$$ معادله دیفرانسیل مدار

WWW.MOHANDESYAR.COM

ب) پاسخ پله و پاسخ ضربه: پاسخ پله: $i_s(t)=u(t)$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=\frac{1}{5}u(t)$$

برای $t<0$ $\quad \frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=0$

در $t=0^-$ ← v خازن ثابت $\quad \boxed{0+\frac{4}{5}v(0^-)=0 \rightarrow v(0^-)=0}$

منبع ضربه نداریم ← $v(0^+)=0$

برای $t>0$: $\quad \frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=\frac{1}{5}$

$$v(t)=v_h(t)+v_p(t)$$

$v_h(t)=?$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=0 \rightarrow s+\frac{4}{5}=0 \rightarrow s=-\frac{4}{5}$$

$$v_h(t)=Ae^{-\frac{4}{5}t} \qquad v_p(t)=K \qquad \boxed{0+\frac{4}{5}K=\frac{1}{5} \Rightarrow K=\frac{1}{4}}$$

$$v(t)=\frac{1}{4}+Ae^{-\frac{4}{5}t} \rightarrow v(0^+)=\frac{1}{4}+A=0 \Rightarrow A=\frac{-1}{4}$$

$$v(t)=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{4}{5}t}\right)u(t)$$

پاسخ ضربه: $i_s(t)=\delta(t)$ $\quad \frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=\frac{1}{5}\delta(t) \rightarrow \int_{0^-}^{0^+}$

برای $t<0$: $\quad \frac{dv}{dt}+\frac{4}{5}v=0$

$$v(0^-)=0$$

مسئله را به 0^+ می‌بریم؟

$$\int_{0^-}^{0^+} v'(t)dt+\frac{4}{5}\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} v\,dt}_{0}=\frac{1}{5}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v(0^+) - \underbrace{v(0^-)}_{0} + 0 = \frac{1}{5} \Longrightarrow v(0^+) = \frac{1}{5}$$

برای $t>0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{4}{5} v = 0 \\ v(0^+) = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$v(t) = Ae^{st} \qquad s + \frac{4}{5} = 0 \longrightarrow s = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} v(t) = Ae^{-\frac{4}{5}t} \\ v(0^+) = \dfrac{1}{5} = A \end{cases} \longrightarrow \boxed{v(t) = \frac{1}{5} e^{-\frac{4}{5}t} u(t)}$$

حل مجدد با استفاده از تبدیل لاپلاس :

$$sV(s) - \underbrace{v(0^-)}_{0} + \frac{4}{5} V(s) = \frac{1}{5} \xrightarrow{\mathcal{L}(\delta(t)) = 1}$$

$$\left(s + \frac{4}{5}\right) V(s) = \frac{1}{5} \longrightarrow V_s = \frac{1/5}{s + 4/5} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} v(t) = \frac{1}{5} e^{-\frac{4}{5}t} \quad t>0$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

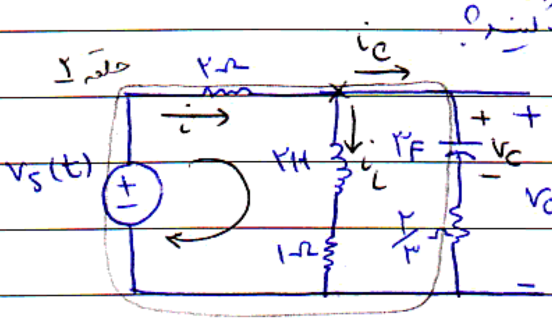
مثال) در مدار زیر:

الف) معادلات حالت را بنویسید؟

ب) ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید؟

~~ج)~~ به ازای چه شرایطی i_L و v_C، $v_o(t)$ را احاطه کنند؟

v_C و i_L متغیرها هستند.



$$x=\begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} \qquad x' = Ax + B\underbrace{f(t)}_{\text{ورودی}}$$

$$KVL: -v_s(t)+2i+2\frac{di_L}{dt}+i_L=0 \quad , \quad KCL: i=i_L+i_C=i_L+3\frac{dv_C}{dt}$$

$$\Rightarrow -v_s(t)+2\left(i_L+3\frac{dv_C}{dt}\right)+2\frac{di_L}{dt}+i_L=0$$

$$\boxed{6\frac{dv_C}{dt}+2\frac{di_L}{dt}=v_s(t)-3i_L} \; **$$

$$\frac{2}{3}i_C=\frac{2}{3}\times 3\frac{dv_C}{dt}$$

$$\text{KVL حلقه ۲}: \; -v_s+2\left(i_L+3\frac{dv_C}{dt}\right)+v_C+2\frac{dv_C}{dt}=0$$

$$8\frac{dv_C}{dt}=v_s-2i_L-v_C \Rightarrow \boxed{\frac{dv_C}{dt}=\frac{-1}{4}i_L-\frac{1}{8}v_C+\frac{1}{8}v_s} \; *$$

$$6\left(\frac{-1}{4}i_L-\frac{1}{8}v_C+\frac{1}{8}v_s\right)+2\frac{di_L}{dt}=v_s(t)-3i_L$$

$$\boxed{\frac{di_L}{dt}=\frac{-3}{4}i_L+\frac{3}{8}v_C+\frac{1}{8}v_s}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

wikipedia.com

Laplace Transform

Subject:

Year. Month. Date.

ضرایب i_L ضرایب v_C

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} v_s$$

تمرین) درصورتیکه (الف $v_s(t)=\delta(t)$ ، ب) $v_s(t)=u(t)$ معادلات حالت را تعیین کرده و $i_L(t)$ و $v_C(t)$ را به دست آورید؟

خروجی $v_o(t)$ را برحسب متغیرهای حالت به دست آورید؟ بعد از تعیین i_L و v_C، $v_o(t)$ را حساب کنید؟

قسمت سوال ج)

$$v_o = v_C + \frac{2}{3} i_C = v_C + \frac{2}{3} \times 3 \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_o = v_C + 2 \frac{dv_C}{dt} = v_C + 2\left(\frac{-1}{4} i_L - \frac{1}{8} v_C + \frac{1}{8} v_s\right)$$

$$\boxed{v_o = \frac{-1}{2} i_L + \frac{3}{4} v_C + \frac{v_s}{4}} \qquad v_o = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \frac{1}{4} v_s$$

فصل ۶: خواص مدارهای LTi

روابط خطی و تغییرپذیری را بررسی کنید؟

تمرین) خطی بودن و تغییرپذیر بودن با زمان را برای روابط روبرو بدست آورید؟ (الف، ب، ج)

ارتباط بین v_1 و i ($i - v_1$)

$$\begin{cases} i(t) = v_1(t)v_2(t) + v_1(t) \\ i(t) = t^2 v_1(t) \\ i(t) = (2\sin t + 1)v_1(t) \end{cases}$$

سیستم LTi در نظر می‌گیریم: معادله دیفرانسیل مدار LTi یک معادله خطی است، ضرایب این معادله ثابت هستند.

ناشی از خطی بودن سیستم

ناشی از تغییرناپذیر بودن با زمان

WWW.MOHANDESYAR.COM

$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$

ورودی — خروجی

مشتق ام y — مشتق ام x

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_1 x^{(1)} + b_0 x(t)$$

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. $\Rightarrow$ پس $y(t)$ شامل ضربه نیست.

$$* \begin{cases} 2y''(t) + 4y'(t) + 10y(t) = \delta''(t)\ \delta'(t)\ \delta(t) \to \delta(t) \\ y(0^-) = y'(0^-) = 0 \end{cases}$$

تعریف شرایط صفر مثبت:

انتگرال گیری از طرفین * :

$$2y'(t) + 4y(t) + 10\int y(t)\,dt = u(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \longrightarrow 2\int_{0^-}^{0^+} y'(t)\,dt + 4\cancel{\int_{0^-}^{0^+} y(t)} + 10\cancel{\int_{0^-}^{0^+}\left(\int y(t)\,dt\right)dt} = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(t)\,dt}_{r(t)|_{0^-}^{0^+}=0}$$

چون $y(t)$ شامل ضربه نیست.

$$2\left(y(0^+) - y(0^-)\right) = \left(t\,\underset{\text{تابع پله واحد}}{u(t)}\right)\Big|_{0^-}^{0^+} = 0$$

$\int y\,dt \to$ ضربه ندارد

$\int y\,dt$	$\delta(t)$
$y(t)$	$\delta'(t)$
y'	δ''
y''	δ'''

$$y(0^+) = y(0^-) = 0$$

$y'(0^+) = ?$ ← از طرفین اصلی (*) از $\int_{0^-}^{0^+}$ انتگرال می‌گیریم:

$$2\int_{0^-}^{0^+} y''\,dt + 4\int_{0^-}^{0^+} y'\,dt + 10\cancel{\int_{0^-}^{0^+} y(t)\,dt} = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt$$

$$2\left(y'(0^+) - \underset{0}{y'(0^-)}\right) + 4\left(\underset{0}{y(0^+)} - \underset{0}{y(0^-)}\right) + 0 = 1 \Rightarrow 2y'(0^+) = 1$$

$$y'(0^+) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2y''(t) + 4y'(t) + 10y(t) = 0 \quad t > 0 \\ y(0^+) = 0 \\ y'(0^+) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

معادله همگن

WWW.MOHANDESYAR.COM

معادله مشخصه: $2s^2+4s+10=0 \longrightarrow s^2+2s+5=0 \Rightarrow s=-1\pm 2j$

$$y(t)=Ke^{-t}\cos(\overset{\omega_d}{2}t+\theta)$$

$K, \theta = ?$

$$y(0^+)=0 \longrightarrow K\cos\theta=0 \Rightarrow \begin{cases} K=0 \xrightarrow{\text{غیر ممکن}} & \\ \cos\theta=0 \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{2} & \end{cases}$$

نمی‌تواند صفر باشد چون در این صورت $y(t)$ صفر می‌شود اما ما دنبال جواب غیر صفر هستیم.

$$y'(t)=-Ke^{-t}\cos(2t+\theta)-2Ke^{-t}\sin(2t+\theta)$$

$$y'(0^+)=-K\cancel{\cos\theta}-2K\cancel{\sin\theta}=\frac{1}{2} \Rightarrow -2K=\frac{1}{2} \Rightarrow K=\frac{-1}{4}$$

$$y(t)=\frac{-1}{4}e^{-t}\cos(2t+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}e^{-t}\sin 2t$$

$s=-1\pm 2j \qquad e^{(-1+2j)t} , e^{(-1-2j)t}$

قسمت‌های حقیقی و موهومی هر جواب یک جواب معادله همگن خواهد بود.

$$e^{-t}e^{2jt}=e^{-t}(\cos 2t+j\sin 2t)=\underbrace{e^{-t}\cos 2t}_{\text{حقیقی}}+j\underbrace{e^{-t}\sin 2t}_{\text{موهومی}}$$

فرمول اویلر $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

$$y(t)=Ke^{-t}\cos 2t+K'e^{-t}\sin 2t \qquad K=0 , K'=\frac{1}{4}$$

$y(t)=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$ اگر شرایط اولیه اعمال شود

$$a_0y^{(m)}+a_1y^{(m-1)}+a_2y^{(m-2)}+\dots+a_my=b_0x^{(N)}+b_1x^{(N-1)}+\dots+b_Nx$$

حالت مناسب if $M>N$ $\qquad h(t)=(K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+\dots+K_me^{s_Mt})u(t)$

$S_1, S_2, \dots, S_M$ ریشه‌های معادله مشخصه همگن معادله

WWW.MOHANDESYAR.COM

حالت های اساسی

$$\begin{cases} M=N \rightarrow h(t)=(k_1 e^{s_1 t}+k_2 e^{s_2 t}+\dots+k_m e^{s_m t})u(t)+A\delta(t) \\ M<N \rightarrow h(t)=(\qquad)u(t)+A\delta(t)+B\delta'(t)+\dots \end{cases}$$

بالاترین مرتبه مشتق $\delta(t)$ برابر با تناقض M و N

مثال) پاسخ ضربه سیستم با معادله زیر را بدست آورید؟ $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3x'''(t)+2x''(t)+x(t)$

$(M<N)$

if $x(t)=\delta(t) \longrightarrow y(t)=h(t)$

$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=3\delta'''(t)+2\delta''(t)+\delta(t)$

ابتدا ریشه های معادله مشخصه سیستم: معادله مشخصه $s^2+5s+6=0 \begin{cases} s_1=-2 \\ s_2=-3 \end{cases}$

حالت سوم

مشتق اول در دو طرف مشتق داریم

$h(t)=(k_1 e^{-2t}+k_2 e^{-3t})u(t)+A\delta(t)+B\delta'(t)$

$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$

$h'(t)=(-2k_1 e^{-2t}-3k_2 e^{-3t})u(t)+(k_1 e^{-2t}+k_2 e^{-3t})\delta(t)+A\delta'(t)+B\delta''(t)$

$t=0$ می گذاریم.

$h'(t)=(\qquad)u(t)+(k_1+k_2)\delta(t)+$

$h''(t)=(4k_1 e^{-2t}+9k_2 e^{-3t})u(t)+(-2k_1 e^{-2t}-3k_2 e^{-3t})\delta(t)+$

$t=0$ می گذاریم.

$(k_1+k_2)\delta'(t)+A\delta''(t)+B\delta'''(t)$

ضرایب

$\delta(t)$: $-2k_1-3k_2+5k_1+5k_2+6A=1$

$\delta'(t)$: $k_1+k_2+5A+6B=0$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$\delta''(t):\ A + 5B = 2 \longrightarrow A = -13$

$\delta'''(t):\ B = 3$

$$\begin{cases} k_1 = -15 \\ k_2 = 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = (-15e^{-2t} + 42e^{-3t})u(t) - 13\delta(t) + 3\delta'(t)$$

مثال ۲) پاسخ ضربه‌ی سیستم با معادله‌ی زیر را بدست آورید؟

$$y'' + y' + y = x'(t) + x(t)$$

$\text{if } x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$

$$h''(t) + h'(t) + h(t) = \delta'(t) + \delta(t) \quad *$$

برای $t<0$: $h''(t) + h'(t) + h(t) = 0 \quad h(t) = 0 \quad t<0$

$h(0^-) = 0 \ , \ h'(0^-) = 0$

شرایط اولیه را صفر بدست می‌آوریم ؛ از رابطه‌ی $*$ انتگرال نامعین می‌گیریم :

$$\int \longrightarrow h'(t) + h(t) + \int h(t)\,dt = \delta(t) + u(t) \Rightarrow \int_{0^-}^{0^+}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} h'\,dt + \cancel{\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt} + \cancel{\int_{0^-}^{0^+}\int h(t)\,dt} = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) + \int_{0^-}^{0^+} u(t)\,dt$$

صفر می‌شود

$h(0^+) - h(0^-) + 0 + 0 = 1 + 0 \qquad (t\,u(t))\Big|_{0^-}^{0^+} = 0$

$h(0^+) = h(0^-) + 1 = 0 + 1 \longrightarrow h(0^+) = 1$

$\int_{0^-}^{0^+} * \text{ از } \Rightarrow \overset{0}{h'(0^+)} - \overset{0}{h'(0^-)} + \overset{1}{h(0^+)} - \overset{0}{h(0^-)} + 0 = 0 + 1 \Rightarrow h'(0^+) = 0$ چون :

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta'(t)\,dt = \delta(t)\Big|_{0^-}^{0^+} = 0$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date.

با جایگذاری h(t) در معادله همگن، ضرایب A و B را پیدا کنید؟

$$\begin{cases} h''(t)+h'(t)+h(t)=0 \\ h(0^+)=1 \\ h'(0^+)=0 \end{cases}$$ برای $t>0$:

$s^2+s+1=0 \qquad s=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad h(t)=Ke^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)u(t)$

محاسبه k و θ :

$$h(0^+)=K\cos\theta=1$$

$$h'(t)=-\frac{1}{2}Ke^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)-K\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)$$

$$h'(0^+)=-\frac{1}{2}K\cos\theta-K\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=0 \Rightarrow tg\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\theta=-\frac{\pi}{6}}$$

$$K\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=1 \rightarrow \boxed{k=\frac{2}{\sqrt{3}}} \qquad h(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$h(t)=(K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t})u(t)$$

$$k_1e^{-\frac{1}{2}t}e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}+K_2e^{-\frac{1}{2}t}e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

$$e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_1e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}+K_2e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)u(t)$$

$$e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+K_1 i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+K_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-K_2 i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

$$h(t)=\left(\underbrace{(K_1+K_2)}_{A}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\underbrace{(K_1-K_2)}_{B}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

$$h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$ تمرین) با این روش هم

محاسبه پاسخ حالت صفر مدار LTI به ورودی دلخواه :

انتگرال کانولوشن

ورودی $x(t) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y(t)$ خروجی

$$\text{if} \quad x(t)=\delta(t) \longrightarrow y(t)=h(t)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

تغییرناپذیری با زمان TI : if $x(t) = \delta(t - t_0) \longrightarrow y(t) = h(t - t_0)$

خطی بودن L : if $x(t) = a\,\delta(t) \longrightarrow y(t) = a\,h(t)$

LTI : if $x(t) = a\,\delta(t - t_0) \longrightarrow y(t) = a\,h(t - t_0)$

$y(t) = x(t) * h(t) = \int^{0^+} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ ؛ $x(t)$ ورودی، $y(t)$ پاسخ حالت صفر

ورودی — Convolution — پاسخ ضربه

خواص کانولوشن :

۱- جابجایی Commutative $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

۲- توزیع‌پذیری Distributive

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

۳) شرکت‌پذیری Associative

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

۴) کانولوشن هر تابعی با تابع ضربه، خودش می‌شود.

$$\begin{cases} x(t) * \delta(t) = x(t) \\ x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \end{cases}$$

۵) $\frac{d}{dt}(x(t) * h(t)) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

در صورتیکه از رابطه‌ی فوق تبدیل لاپلاس بگیریم:

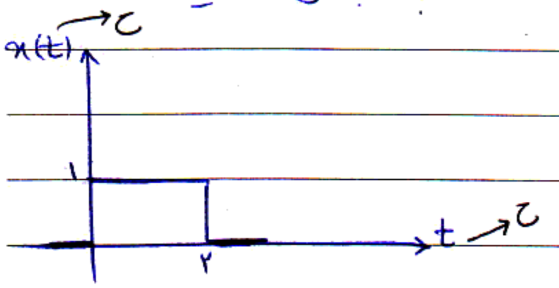
$$Y(S) = H(S)\, X(S)$$

$$Y(S) = \mathcal{L}\,(y(t))$$

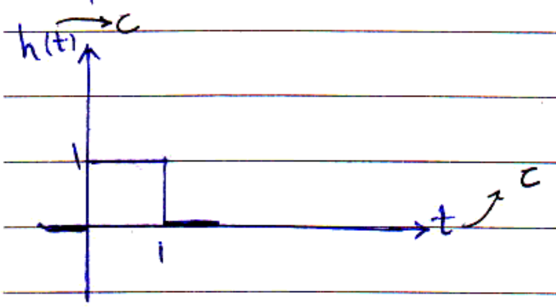
$$X(S) = \mathcal{L}\,(x(t)) \quad , \quad H(S) = \mathcal{L}\,(h(t))$$

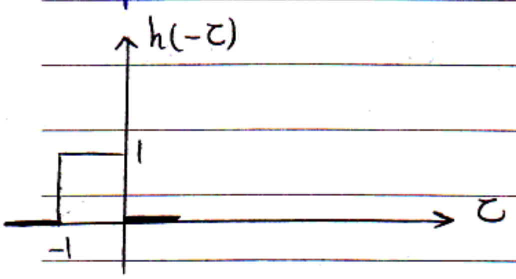
مثال) در یک سیستم LTI، ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ مطابق با شکل‌های زیر داده شده است.

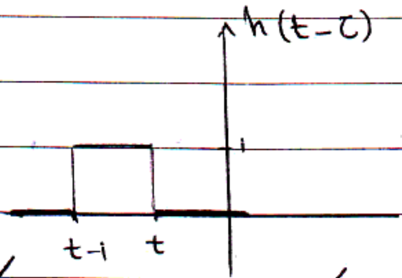
خروجی $y(t)$ را محاسبه کنید؟



با توجه به رابطه‌ی $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

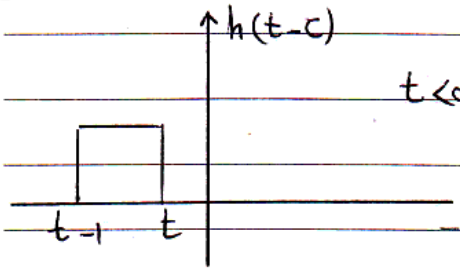






$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

t را از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌دهیم و انتگرال کانولوشن را محاسبه می‌کنیم.



$t < 0 \longrightarrow y(t) = 0$

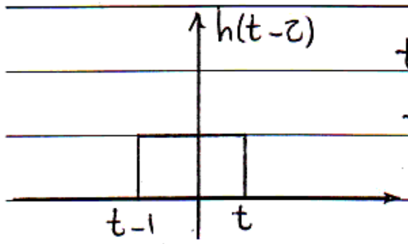
$\longrightarrow$ شکل سمت چپ محور و شکل $x(t)$ سمت راست محور

$\Rightarrow x(\tau)\, h(t-\tau) = 0$

$\Rightarrow \int \cdots = 0$

WWW.MOHANDESYAR.COM

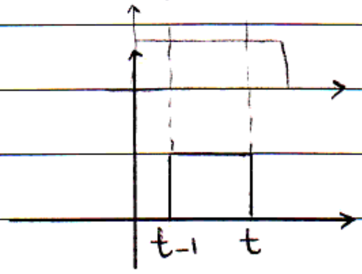
۱۵- شکل h را shift می‌دهیم جلو.



$t>0$, $t-1<0$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ $0<t<1$

$$y(t)=\int_0^t 1\times 1\, d\tau = t$$

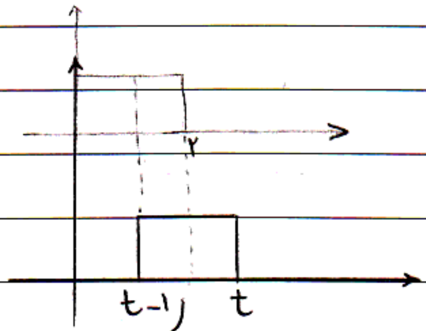
y(t) در تمامی نقاط صفر.



$\begin{cases} t-1>0 \\ t<2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ $1<t<2$

$$y(t)=\int_{t-1}^{t}(1\times 1)\,d\tau = t-(t-1)=1$$

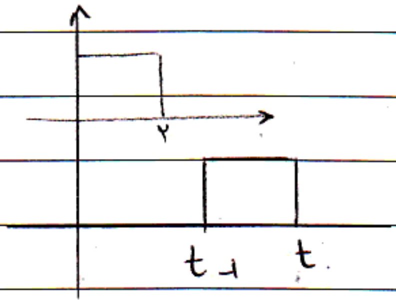
انتگرال روی این محدوده غیر صفر است



$t-1<2$, $t>2$ $\Rightarrow$ $2<t<3$

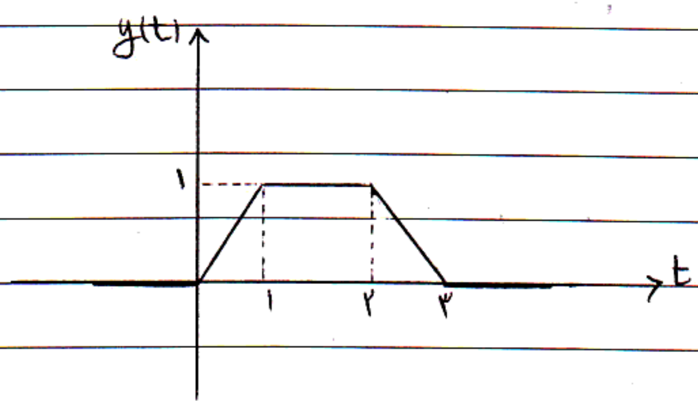
$$y(t)=\int_{t-1}^{2}(1\times 1)\,d\tau = 3-t$$

روی این محدوده انتگرال غیر صفر



$t-1>2 \Rightarrow t>3$

$$y(t)=\int 0 = 0$$



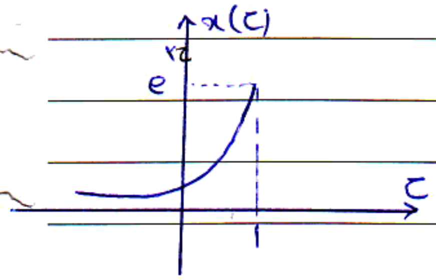
WWW.MOHANDESYAR.COM

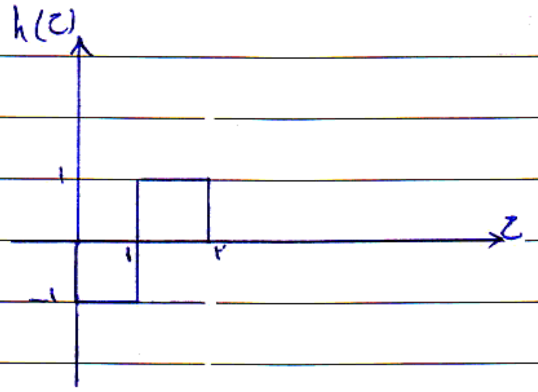
$$x(t)=\begin{cases} e^{\,\cdot} & t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date.

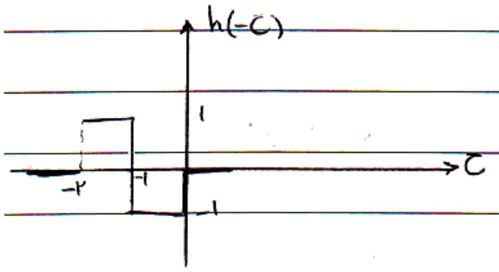
مثال ۱۵) برای یک سیستم LTI، $x(t)$ و $h(t)$ مطابق با شکل های زیر داده شده است. خروجی $y(t)$ را محاسبه کنید؟

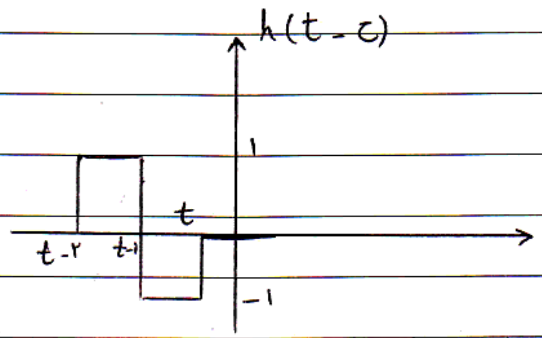
$$x(t)=e^{2t}u(1-t)$$





$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

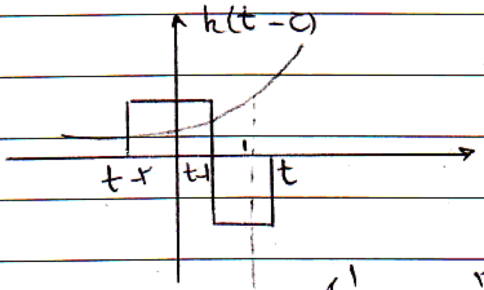




$$t<1 \quad y(t)=\int_{t-2}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{t-2}^{t-1}1\times e^{2\tau}d\tau+\int_{t-1}^{t}(-1)e^{2\tau}d\tau$$

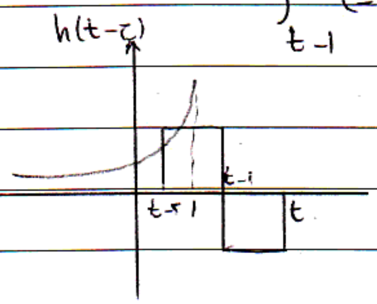
سطح $h(t-\tau)$ همپوشانی با $x(\tau)$

$$=\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{t-1}+\left(\frac{-1}{2}e^{2\tau}\right)\Big|_{t-1}^{t}=\dots$$



$$t>1\ ,\ t-1<1 \Rightarrow 1<t<2$$

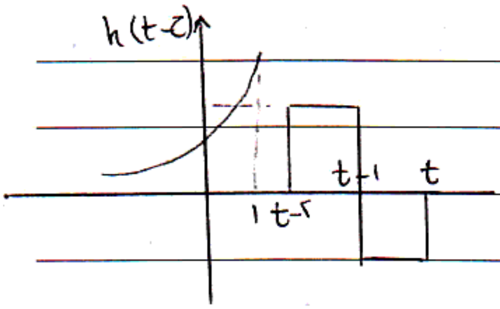
$$y(t)=\int_{t-2}^{1}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{t-2}^{t-1}1\times e^{2\tau}d\tau+\int_{t-1}^{1}(-1)\times e^{2\tau}d\tau=\dots$$



$$t-2<1,\quad t-1>1 \Rightarrow 2<t<3$$

t ها پیوسته هستند از اول تا آخر

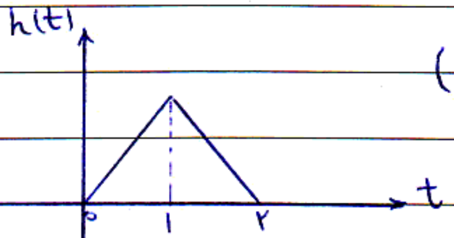
$$y(t)=\int_{t-2}^{1} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{t-2}^{1}(1)e^{2\tau}\,d\tau=\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{1}=\frac{1}{2}\left[e^{2}-e^{2(t-2)}\right]$$



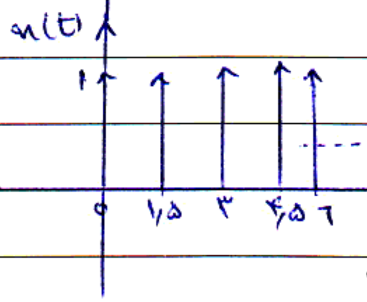
$t-2>1$ یا $t>3$

$$y(t)=\int \;\_\; d\tau=0$$

مثال) کانولوشن $x(t)$ و $h(t)$ را بدست آورید؟ (رسم $y(t)$)



$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$



$x(t)$ شامل ضربه‌هایی با ارتفاع ۱ است.

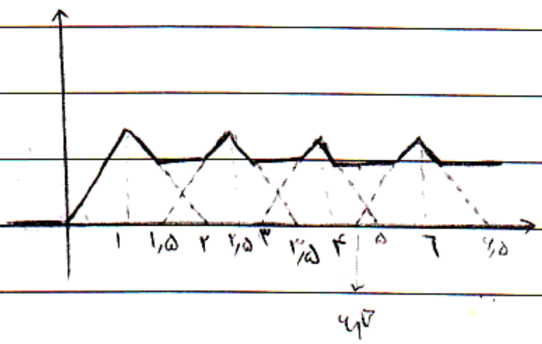
$$x(t)=\delta(t)+\delta(t-1{,}5)+\delta(t-3)+\delta(t-4{,}5)+\dots$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=h(t)*\left(\delta(t)+\delta(t-1{,}5)+\delta(t-3)+\dots\right)$$

$$y(t)=h(t)*\delta(t)+h(t)*\delta(t-1{,}5)+h(t)*\delta(t-3)+\dots$$

خاصیت
$$\begin{cases} x(t)*\delta(t)=x(t) \\ x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0) \end{cases}$$

$$y(t)=h(t)+h(t-1{,}5)+h(t-3)+h(t-4{,}5)+\dots$$



خطوط مثلثی ترتیب رو خطوط هم وصل کرده

WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل ۷ : تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها با توابع سینوسی :

۱- موج سینوسی به سادگی و با بازدهی بالایی قابل تولید است.

۲- تجزیه و تحلیل سینوسی‌ها ساده است. (مشتق و انتگرال سینوسی، سینوسی است.)

۳- در مدارهای LTI دارای یک سینوسی پاسخ دارای فرکانس برابر با فرکانس منبع است.

۴- به کمک سری فوریه می‌توان پاسخ هر موج متناوب را یافت.

اعداد مختلط : Complex Numbers

$z = x + iy$ $\quad x = Re(z)$ قسمت حقیقی Real

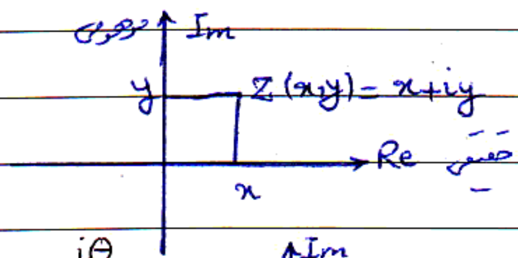
$y = Im(z)$ قسمت موهومی Imaginary

$i = j$ یکه موهومی
واحد موهومی

$i^2 = -1 \quad j^2 = -1$

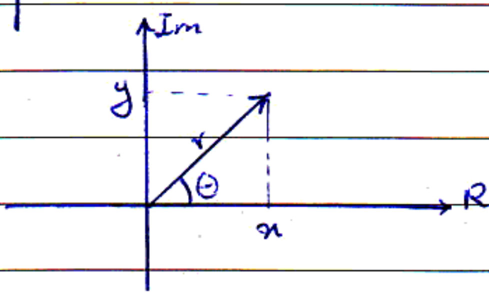
$i^3 = -i \quad j^3 = -j$

نمایش دکارتی :



نمایش قطبی :

$z = re^{i\theta}$



$$\begin{cases} x = Re(z) = r\cos\theta \\ y = Im(z) = r\sin\theta \end{cases}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = tg^{-1} \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

رابطه‌ی اویلر:

Euler's formula $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos\theta = Re\{e^{i\theta}\} \qquad \sin\theta = Im\{e^{i\theta}\}$$

مزدوج مختلط:

$$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$z = re^{i\theta} \longrightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

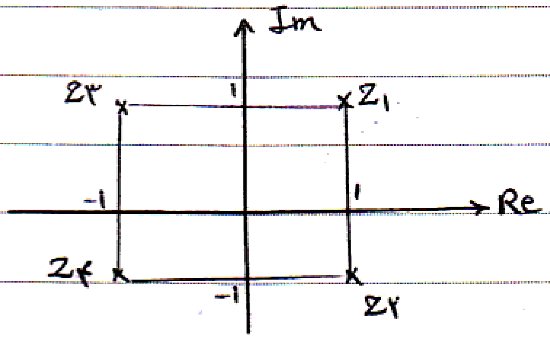
$$z + \bar{z} = 2x = 2\,Re\{z\}$$

$$z - \bar{z} = i2y = i2\,Im\{z\}$$

مثال: اعداد زیر را به شکل قطبی بنویسید.

$$z_1 = 1 + j \qquad z_2 = 1 - j$$

$$z_3 = -1 + j \qquad z_4 = -1 - j$$



WWW.MOHANDESYAR.COM

نکته: تبدیل $z=a+jb$ به شکل قطبی: $r=\sqrt{a^2+b^2}$

الف) $\theta'=tg^{-1}\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$

ب)

۱_ درصورتیکه z در ناحیه اول باشد $\theta=\theta'$

۲_ درصورتیکه z در ناحیه دوم باشد $\theta=\pi-\theta'$ یا $\theta^{\circ}=180-\theta'^{\circ}$

۳_ درصورتیکه z در ناحیه سوم باشد $\theta=-\pi+\theta'$ یا $\theta^{\circ}=-180+\theta'^{\circ}$

۴_ درصورتیکه z در ناحیه چهارم باشد $\theta=-\theta'$

شکل نمایی: $z=re^{i\theta}$

$z_1=r_1e^{i\theta_1}$

$r_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\quad \theta'=tg^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$ $\quad \theta=\frac{\pi}{4}$ $\quad \Rightarrow z_1=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$z_4=r_4e^{i\theta_4}$ $\quad r_4=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\quad \theta'=tg^{-1}\left(\frac{|-1|}{|-1|}\right)=\frac{\pi}{4}$ $\quad \theta_4=-\pi+\theta'=-\frac{3\pi}{4}$

$\rightarrow z_4=\sqrt{2}e^{-j3\pi/4}$ $\quad z_2=\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$ $\quad z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z=5e^{i\pi/3}=5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow z=2/5+2/5\sqrt{3}i$

$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

مثال ۵)

$$z = \frac{1+j}{1-j}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$$

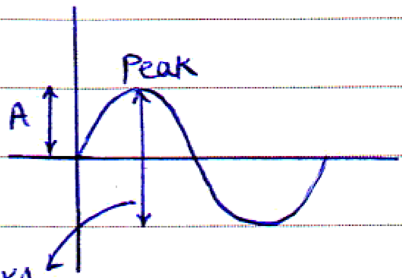
$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) \longrightarrow \boxed{\vec{x} = A\angle\theta}$$

دامنه

فرکانس زاویه‌ای

فاز phase (rad)

$\omega = 2\pi f$ فرکانس



دامنه 0 to peak

peak to peak دامنه $2A$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{A e^{j(\omega t + \theta)}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\underline{A e^{j\theta}} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \boxed{\mathrm{Re}\left\{\vec{x}\, e^{j\omega t}\right\}}$$

فازور $\vec{x} \triangleq A e^{j\theta}$

phasor : phase vector

$$\vec{x} = A e^{j\theta} = A\angle\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &= A\angle\theta \\ \vec{y} &= B\angle\varphi \end{aligned}\right\} \vec{x}\vec{y} = (A e^{j\theta})(B e^{j\varphi}) = AB e^{j(\theta+\varphi)} = AB\angle\theta+\varphi$$

$$\frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \frac{A e^{j\theta}}{B e^{j\varphi}} = \frac{A}{B} e^{j(\theta-\varphi)} = \frac{A}{B}\angle\theta-\varphi$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال: جمع دو جریان $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را بدست آورید.

$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \alpha)$

$i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \beta)$

$\vec{I_1} = I_1 \measuredangle \alpha$ یا $I_1 e^{j\alpha}$ $\qquad i_1(t) = Re\{\underbrace{\vec{I_1}}_{I_1 e^{j\alpha}} e^{j\omega t}\}$

$\vec{I_2} = I_2 \measuredangle \beta$ یا $I_2 e^{j\beta}$ $\qquad i_2(t) = Re\{\vec{I_2}\, e^{j\omega t}\}$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = Re\{\vec{I_1} e^{j\omega t}\} + Re\{\vec{I_2} e^{j\omega t}\} = Re\{\vec{I_1} e^{j\omega t} + \vec{I_2} e^{j\omega t}\}$$

$$= Re\{(\vec{I_1} + \vec{I_2}) e^{j\omega t}\}$$

فرض: $i(t) = Re\{\vec{I} e^{j\omega t}\}$ $\qquad Re\{\vec{I} e^{j\omega t}\} = Re\{(\vec{I_1} + \vec{I_2}) e^{j\omega t}\}$

$\vec{I} \cancel{\cos\omega t} = (\vec{I_1} + \vec{I_2}) \cancel{\cos\omega t}$

$\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$

مجموع فازورها

پس قانون KCL برای فازورها برقرار است.

ـ در حالت دائمی سینوسی:

۱ـ KVL و KCL برقرار است. (روش های جریان خانه و ولتاژ گره)

۲ـ اصل جمع آثار برقرار است (فقط برای حالت دائمی)

۳ـ تونن و نورتن برقرار است.

مثال) $i_1(t) = 5\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ $\qquad i_2(t) = 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{5})$

$i_m(t) = ?$ $\qquad i_s(t) = ?$

ماشین حساب در حالت Deg (درجه) تنظیم شود.

WWW.MOHANDESYAR.COM

$\vec{I_1} = 5 \measuredangle \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\vec{I_2} = 2 \measuredangle \frac{\pi}{5}$

$i_s(t)$ مجموع i_1 , i_2

$$\vec{I_s} = \vec{I_1} + \vec{I_2} = 5 \measuredangle \frac{\pi}{3} + 2 \measuredangle \frac{\pi}{5} = 5\cos\frac{\pi}{3} + j5\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{5} + j2\sin\frac{\pi}{5}$$

$$= 6{,}875 \measuredangle 53{,}2^\circ \longrightarrow i_s(t) = 6{,}875\cos(\omega t + 53{,}2^\circ)$$

I_s فازور i_s $\qquad$ به رادیان تبدیل شود : $53{,}2 \times \frac{\pi}{180}$

$$\vec{I_M} = \vec{I_1} - \vec{I_2} = \overbrace{\left(5\cos\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{5}\right)}^{x} + \qquad i_m(t) = i_1(t) - i_2(t) = ?$$

$$j\overbrace{\left(5\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{5}\right)}^{y} = \underbrace{3{,}2755}_{r=\sqrt{x^2+y^2}} \measuredangle 74^\circ \qquad \theta = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$i_m(t) = 3{,}2755\cos(\omega t + 74^\circ)$$

خواص تابع $Re(\ )$:

۱ـ خاصیت جمع پذیری $\qquad$ $\forall\, a,b$ real

$$Re\{a z_1(t) + b z_2(t)\} = a\,Re\{z_1(t)\} + b\,Re\{z_2(t)\}$$

۲ـ مشتق گیری :

$$\frac{d}{dt} Re\{\vec{A} e^{j\omega t}\} = Re\left\{\frac{d}{dt}(\vec{A} e^{j\omega t})\right\}$$

$$= Re\{(\vec{A} j\omega) e^{j\omega t}\}$$

مثال) پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از فازورها بدست آورید؟

$$0/5 y'' + 1{,}5 y' + y = \cos 2t$$

$$\cos 2t = Re\{e^{j2t}\}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

پاسخ خصوصی $y_p(t) = \mathrm{Re}\{\vec{Y} e^{j2t}\}$

$$0/5\, y_p'' + 1/5\, y_p' + y_p = \cos 2t$$

$$0/5\, \mathrm{Re}\{\vec{Y}(j2)^2 e^{j2t}\} + 1/5\, \mathrm{Re}\{\vec{Y}(j2) e^{j2t}\} + \mathrm{Re}\{\vec{Y} e^{j2t}\} = \mathrm{Re}\{e^{j2t}\}$$

$$\mathrm{Re}\{0/5(j2)^2 \vec{Y} e^{j2t} + 1/5(j2)\vec{Y} e^{j2t} + \vec{Y} e^{j2t}\} = \mathrm{Re}\{e^{j2t}\}$$

$$\mathrm{Re}\{(0/5\times(-4) + 1/5(j2) + 1)\vec{Y} e^{j2t}\} = \mathrm{Re}\{e^{j2t}\}$$

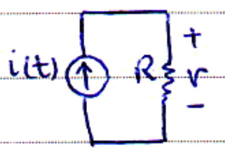
$$(-2+3j+1)\vec{Y} = 1 \longrightarrow (-1+3j)\vec{Y} = 1 \Longrightarrow \vec{Y} = \frac{1}{-1+3j} = \frac{1\, e^{j0}}{\sqrt{10}\, e^{j(1/884)}} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j(-1/884)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = 0/316$$

$$\vec{Y} = 0/316 \measuredangle -108/4^\circ \qquad y_p(t) = 0/316 \cos(2t - 108/4^\circ)$$

مدلسازی عناصر مداری برای تجزیه و تحلیل حالت ماندگار سینوسی :

۱ـ مقاومت



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

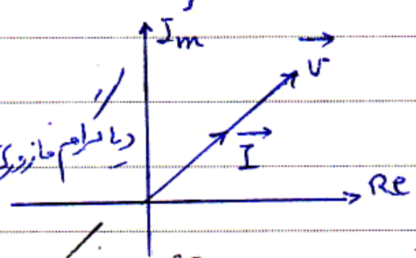
$$i(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\} \qquad \vec{I} = I_m e^{j\varphi}$$

$$\mathrm{Re}\{\vec{V} e^{j\omega t}\} = v(t) = R\,i(t) = R I_m \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{R I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{V} = R I_m e^{j\varphi} = R\vec{I}$$

فازور ولتاژ $\vec{V} = R\vec{I}$ فازور جریان

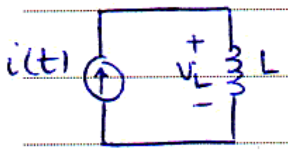
دیاگرام فازوری



$$|\vec{V}| = R|\vec{I}| \quad / \quad \measuredangle \vec{V} = \measuredangle \vec{I}$$

در مقاومت، فازور ولتاژ و جریان یکی است.

۲ـ سلف :



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$\vec{I} = I_m \measuredangle \theta = I_m e^{j\theta}$$

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} \qquad i(t) = Re\left\{\vec{I} e^{j\omega t}\right\}$$

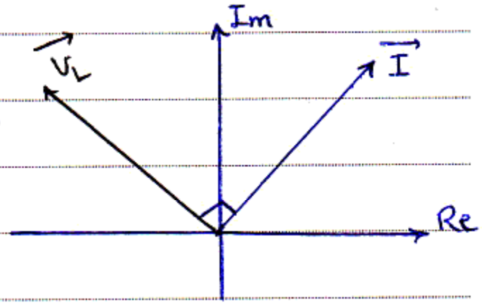
$$v_L = L \frac{d}{dt} Re\left\{\vec{I} e^{j\omega t}\right\} = L\, Re\left\{\vec{I} (j\omega) e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{(j\omega L)\vec{I} e^{j\omega t}\right\}$$

$$v_L \triangleq Re\left\{\vec{V_L} e^{j\omega t}\right\}$$

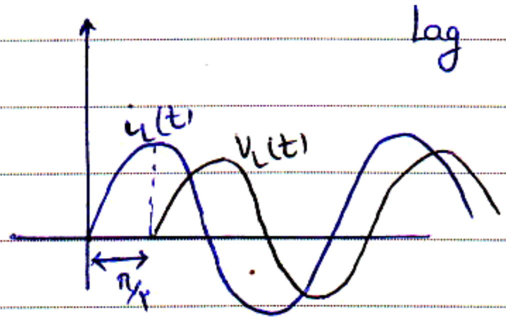
فازور ولتاژ $\vec{V_L} = (j\omega L)\vec{I}$ فازور جریان

امپدانس سلف $X_L = j\omega L$ $\qquad \vec{V} = X_L \vec{I}$

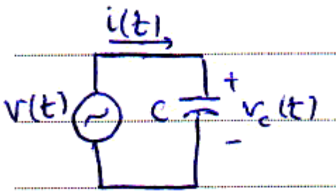
$$|\vec{V_L}| = \omega L |\vec{I}| \qquad \measuredangle \vec{V_L} = \frac{\pi}{2} + \measuredangle \vec{I}$$



ولتاژ نسبت جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ تأخیر فاز دارد. (پس فاز) lag



۳ـ خازن :



$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{V} = V_m \measuredangle \varphi = V_m e^{j\varphi}$$

$$\vec{V_C} = ?$$

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\begin{cases} i(t) = i_c(t) \\ v(t) = v_c(t) = Re\left\{\vec{V}\, e^{j\omega t}\right\} \end{cases}$$

$$i_c(t) = Re\left\{\vec{I}\, e^{j\omega t}\right\} \qquad Re\left\{\vec{I}\, e^{j\omega t}\right\} = C\frac{d}{dt}\left\{Re\left\{\vec{V}\, e^{j\omega t}\right\}\right\}$$

$$Re\left\{\vec{I}\, e^{j\omega t}\right\} = C\, Re\left\{\vec{V}(j\omega)\, e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{\vec{V}(j\omega C)\, e^{j\omega t}\right\}$$

$$\vec{I} = (j\omega C)\vec{V} \quad \text{يا} \quad \vec{V} = \frac{\vec{I}}{j\omega C}$$

فازور جریان خازن

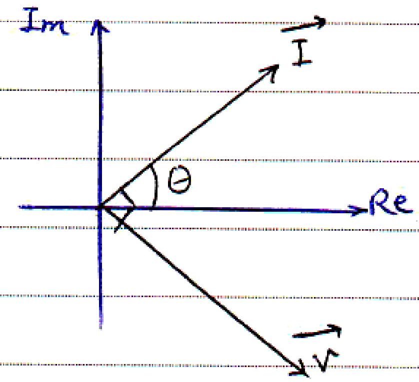
فازور ولتاژ خازن

امپدانس خازن $\quad x_C \triangleq \dfrac{1}{j\omega C}$

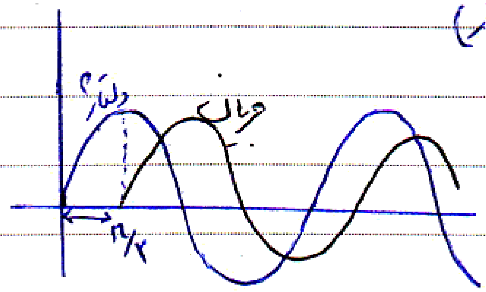
يا $\quad \vec{V} = x_C \vec{I}$

$$|\vec{V}| = \frac{1}{C\omega}|\vec{I}|$$

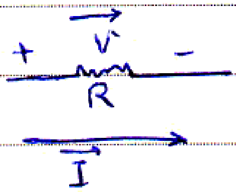
$$\measuredangle \vec{V} = \measuredangle \vec{I} - \pi/2$$



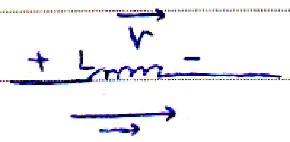
ولتاژ نسبت جریان به اندازه $\frac{\pi}{2}$ تقدم فاز دارد. (پیش‌فاز)



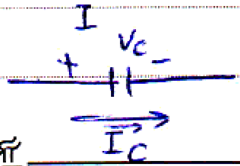
خلاصه:



$$\vec{V} = R\,\vec{I}$$

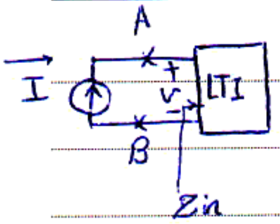


$$\vec{V} = (j\omega L)\vec{I} = x_L \vec{I} \qquad x_L = j\omega L$$



$$\vec{V}_C = \frac{\vec{I}}{j\omega C} = x_C \vec{I}_C \qquad x_C = \frac{1}{j\omega C}$$

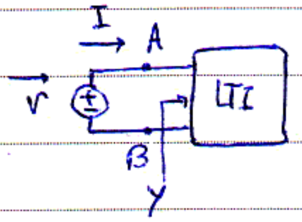
AZADEH



تعریف امپدانس : Impedance

$Z_{in}(j\omega) \triangleq \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$ امپدانس دیده شده از دو سر B , A

واحد امپدانس اهم است.



تعریف ادمیتانس : Admittance

$Y_{in}(j\omega) \triangleq \frac{\vec{I}}{\vec{V}} \rightarrow$ ادمیتانس دیده شده از دو سر B , A

امپدانس و ادمیتانس توابعی از ω نیز هستند.

واحد ادمیتانس ℧ مهو یا S زیمنس.

$Z = R + jX$ راکتانس Reactance

R : مقاومت

$X > 0$ راکتانس القایی

$X < 0$ راکتانس خازنی (خازنی)

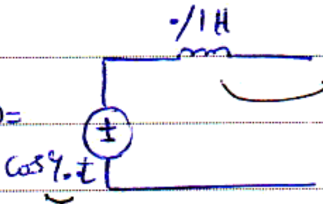
$Y = G + jS$ سوسپتانس Susceptance

G : رسانایی (هدایت)

$S < 0$ سوسپتانس القایی

$S > 0$ سوسپتانس خازنی

مثال) معادل تونن و نورتن :

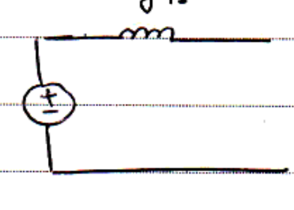


$X_L = j\omega L = j\,400 \times 0/1 = j40$

$\omega = 400$

$\vec{V}_s = 150\angle 0$

مدار معادل در حوزه‌ی فازورها :

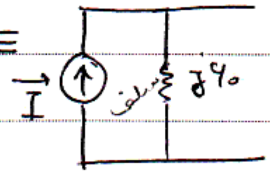


WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\vec{V} = X_L \vec{I} \Rightarrow \vec{I} = \frac{\vec{V}}{X_L}$$

مدار معادل [illegible] $\equiv$



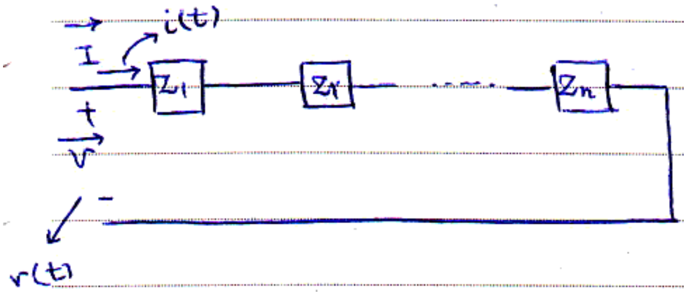
$$\vec{I} = \frac{150\angle 0}{j60} = \frac{150\angle 0}{60\angle \frac{\pi}{2}} = 2/5 \angle -\frac{\pi}{2}$$

نکته:

$$j60 = 60 \angle \frac{\pi}{2}$$

$$-j60 = 60 \angle -\frac{\pi}{2}$$

اتصال سری:

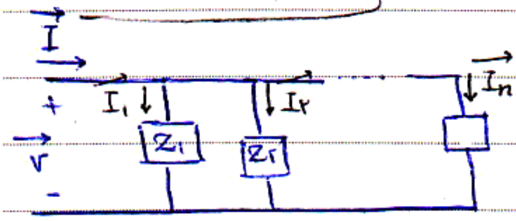


$$\boxed{\vec{V} = \vec{I} \sum_{i=1}^{n} Z_i}$$

$$\vec{V} = Z_1\vec{I} + Z_2\vec{I} + \cdots + Z_n\vec{I} = (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)\vec{I} = \vec{I}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$\boxed{Z_{eq} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \sum_{i=1}^{n} Z_i} \qquad Z = \frac{1}{Y} \qquad \boxed{\frac{1}{Y_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i}}$$

اتصال موازی:



$$KCL: \quad \vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2} + \cdots + \vec{I_n}$$

$$Y = \frac{\vec{I}}{\vec{V}}$$

$$\vec{I} = Y_{eq}\vec{V} \qquad Y_{eq}\vec{V} = Y_1\vec{V} + Y_2\vec{V} + \cdots + Y_n\vec{V} = (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\vec{V}$$

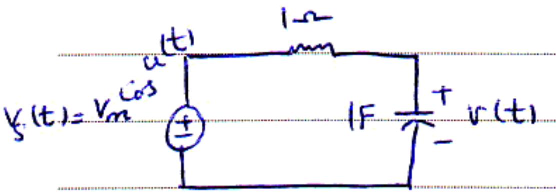
$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\boxed{Y_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Y_i} \quad \text{،} \quad \boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

گذار از حوزه زمان به حوزه ی فازور :

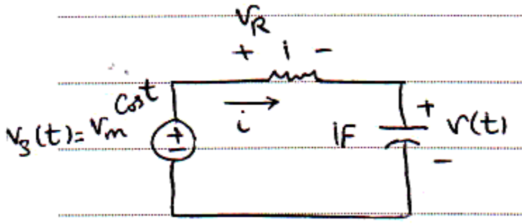
مثال) فرض $v_C(0^-)=V_0$



پاسخ کامل مدار را بدست آورید؟

نیاز به بررسی مدار در حالت $t<0$ نداریم چون شرایط اولیه داده شده و همچنین در مدار ضربه نداریم پس : $v_C(0^+)=V_0$

برای $t>0$:



KVL: $-v_S+v_R+v_C=0$

$$v_C(t)=v(t) \longrightarrow \begin{cases} i_R=i_C=C\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dt} \\ v_R=Ri_R=\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt}+v=v_S(t)=V_m\cos t \implies \frac{dv}{dt}+v=V_m\cos t$$

$$v(t)=\underbrace{v_h(t)}_{\text{همگن}}+v_p(t)$$

محاسبه ی $v_h(t)$:

$$\frac{dv}{dt}+v=0 \qquad v_h(t)=Ae^{st}$$

$$s+1=0 \longrightarrow s=-1 \implies \boxed{v_h(t)=Ae^{-t}} \ *$$

قسمت خاص $v_p(t)$:

$$\frac{dv}{dt}+v=V_m\cos t$$

$$\boxed{v_p(t)=B\cos t+C\sin t}$$ ⟶ چون در معادله اصلی یک جمله Cos دارد

پاسخ خاص به صورت روبرو است.

$$\frac{dv_p}{dt}+v_p=V_m\cos t$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\Rightarrow -B\sin t + C\cos t + B\cos t + C\sin t = V_m \cos t$$

$$(B+C)\cos t + (C-B)\sin t = V_m \cos t$$

$$\begin{cases} B+C = V_m \\ C-B = 0 \end{cases} \Rightarrow B = C = \frac{V_m}{2}$$

$$V_p(t) = \frac{V_m}{2}(\cos t + \sin t)$$

پاسخ کامل: $v(t) = Ae^{-t} + \frac{V_m}{2}(\cos t + \sin t)$

محاسبه‌ی A ، $t > 0$

$$v(0^+) = V_0 \longrightarrow A + \frac{V_m}{2}(1+0) = V_0$$

$$A = V_0 - \frac{V_m}{2} \qquad v(t) = \underbrace{\left(V_0 - \frac{V_m}{2}\right)e^{-t}}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{V_m}{2}(\cos t + \sin t)}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

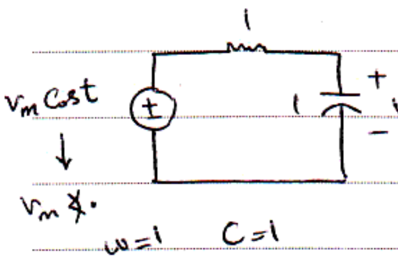
پاسخ گذرا (سریع به سمت صفر میل می‌کند)

پاسخ ماندگار (دائمی)

تا ∞ نوسان می‌کند.

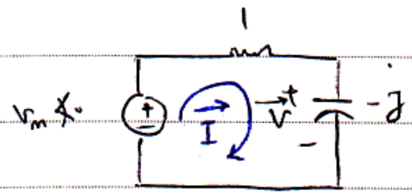
مثال ۲: در مثال قبل با استفاده از فازورها پاسخ حالت دائمی را بدست آورید؟

$$\begin{cases} \frac{1}{j} = -j \\ \frac{1}{i} = -i \end{cases} \qquad t > 0$$



$$X_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j} = -j$$

معادل مدار در حوزه‌ی فازور



$$\text{KVL}: -V_m \measuredangle 0 + \vec{I} + \underbrace{(-j)\vec{I}}_{\vec{V_C} = X_C \vec{I}} = 0 \longrightarrow (1-j)\vec{I} = V_m \measuredangle 0 \longrightarrow \vec{I} = \frac{V_m \measuredangle 0}{1-j}$$

$$\vec{V} = (-j)\vec{I} = \underbrace{\left(\frac{-j}{1-j}\right)}_{\text{به قطبی تبدیل می‌کنیم}} V_m \measuredangle 0 \qquad \frac{-j}{1-j} = \frac{1 \measuredangle -\pi/2}{\sqrt{2} \measuredangle -\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \measuredangle \frac{-\pi}{4}$$