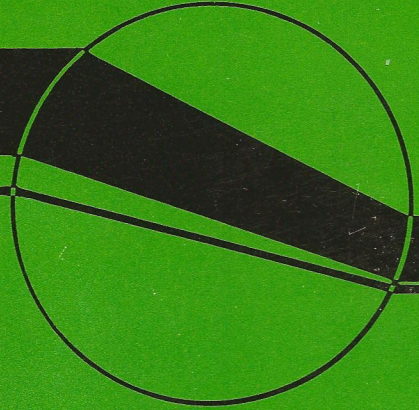




[www.mohandesyar.com](http://www.mohandesyar.com)

عنوان



# آشنایی با دینامیک

ایان پرسپوال، درک ریچاردز

ترجمه نادر رابط



# آشنایی با دینامیک

ایان پرسپوال، درک ریچاردز

ترجمه نادر رابط

---

مرکز نشر دانشگاهی، تهران





*Introduction to Dynamics*  
Ian Percival, Derek Richards  
Cambridge University Press, 1982

آشنایی با دینامیک  
تألیف ایان پرسیوال، درک ریچاردز  
ترجمه نادر رابط  
ویراسته هاله المعی  
مرکز نشر دانشگاهی، تهران  
چاپ اول ۱۳۷۴  
تعداد ۳۰۰۰  
حروفچینی: مرکز نشر دانشگاهی  
چاپ و صحافی: نیل  
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

پرسیوال، ایان، ۱۹۳۱- Percival, Ian

آشنایی با دینامیک/ایان پرسیوال، درک ریچاردز؛ ترجمه نادر رابط.  
- تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴.

شش، ۲۸۶ص. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۷۷۰. فیزیک؛ ۶۶)

ISBN: 964-01-0770-0

عنوان اصلی: Introduction to dynamics

۱. دستگاههای دینامیکی دیفرانسیل پذیر. ۲. دستگاههای هامیلتونی. ۳.  
دینامیک. الف. ریچاردز، درک، Richards, Derek. ب. رابط، نادر، مترجم.  
ج. مرکز نشر دانشگاهی د. عنوان.

۵۱۵/۳۵ QA ۶۱۴/۸/۱ پ ۴۱۵

۱۳۷۴

۷۷۴-۵۰۰۰م

کتابخانه ملی ایران

# بسم الله الرحمن الرحيم

## فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۳	۱. دستگاههای خودگردان مرتبهٔ اول
۳	۱-۱ نظریهٔ پایه
۹	۱-۲ دَوَران
۱۰	۱-۳ مرزهای طبیعی
۱۱	۱-۴ مثالهایی از زیست‌شناسی
۱۲	مسائل
۱۶	۲. تبدیلهای خطی یک صفحه
۱۶	۲-۱ مقدمه
۱۸	۲-۲ تبدیلهای حافظ مساحت
۲۳	۲-۳ تبدیلهای اتساع‌دهنده
۲۷	مسائل
۲۹	۳. دستگاههای خودگردان مرتبهٔ دوم
۲۹	۳-۱ دستگاههای مرتبهٔ $m$ ام
۳۱	۳-۲ جریانهای فاز دستگاههای خودگردان مرتبهٔ دوم
۳۳	۳-۳ نقاط ثابت، تعادل و پایداری
۳۴	۳-۴ تفکیک متغیرها
۳۹	۳-۵ رده‌بندی نقاط ثابت

۴۱	۳-۶ خلاصه رده بندی
۴۴	۳-۷ تعیین نقاط ثابت
۴۵	۳-۸ چرخه های حدی
۴۶	مسائل

۵۱	۴. دستگاههای هامیلتونی پایستار با یک درجه آزادی
۵۱	۴-۱ دستگاههای نیوتونی و هامیلتونی
۵۳	۴-۲ دستگاههای پایستار
۵۵	۴-۳ دستگاههای پایستار خطی
۶۰	۴-۴ پتانسیل مکعبی
۶۱	۴-۵ پتانسیل عام
۶۳	۴-۶ دورانهای آزاد
۶۵	۴-۷ آونگ قائم
۶۷	۴-۸ دَوَران، رخگرد و تناوبها
۶۹	۴-۹ جریانهای حافظ مساحت و قضیه لیوویل
۷۱	مسائل

۷۹	۵. لاگرانژیها
۷۹	۵-۱ مقدمه
۸۱	۵-۲ تبدیل لژاندر
۸۵	۵-۳ معادله حرکت لاگرانژی
۸۷	۵-۴ فرمول بندی
۹۳	مسائل

۱۰۱	۶. نظریه تبدیل
۱۰۱	۶-۱ مقدمه
۱۰۲	۶-۲ نظریه تبدیلهای مستقل از زمان
۱۰۵	۶-۳ تابع مولد $F_1(Q, q)$
۱۰۷	۶-۴ اشکال دیگر تابع مولد
۱۱۰	۶-۵ هامیلتونی تبدیل یافته
۱۱۳	۶-۶ تبدیلهای وابسته به زمان
۱۱۵	۶-۷ هامیلتونیها در تبدیلهای وابسته به زمان
۱۱۸	۶-۸ خاصیت گروهی و تبدیل بنیادی بینهایت کوچک

۱۱۹	مسائل
۱۲۵	۷. متغیرهای زاویه-کنش
۱۲۵	۱-۷ ساده‌ترین متغیرها
۱۲۹	۲-۷ هامیلتونی در نمایش زاویه-کنش
۱۳۲	۳-۷ وابستگی متغیر زاویه به $q$
۱۳۴	۴-۷ توابع مولد
۱۳۷	۵-۷ دورانها
۱۴۰	مسائل
۱۴۷	۸. نظریهٔ پریشیدگی
۱۴۷	۱-۸ مقدمه
۱۵۱	۲-۸ نظریهٔ پریشیدگی مرتبهٔ اول برای دستگاههای هامیلتونی پایستار
۱۶۱	مسائل
۱۷۰	۹. شرایط تند-نوسان و بی‌دررو
۱۷۰	۱-۹ مقدمه
۱۷۱	۲-۹ وجهٔ کشسان توپ میان دو صفحه با حرکت کند
۱۷۴	۳-۹ نوسانگر خطی با بسامد کند-تغییر
۱۸۰	۴-۹ نظریهٔ بی‌درروی عام
۱۸۶	۵-۹ حرکت در یک میدان نوسانی سریع: پریشیدگیهای تند
۱۹۱	مسائل
۱۹۸	۱۰. دستگاههای خطی
۱۹۸	۱-۱۰ مقدمه
۱۹۹	۲-۱۰ دستگاههای مرتبهٔ اول
۲۰۷	۳-۱۰ نوسانگر خطی واداشته
۲۱۰	۴-۱۰ انتشارگرها
۲۱۸	۵-۱۰ شرایط تناوبی و نگاشتهای خطی
۲۲۱	۶-۱۰ نگاشتهای خطی حافظ مساحت
۲۲۷	۷-۱۰ نیروهای تناوبی و تشدید پارامتری
۲۳۱	مسائل

۲۳۸	۱۱. حرکت آشوبناک و نگاشتهای غیرخطی
۲۳۸	۱-۱۱ حرکت آشوبناک
۲۳۹	۲-۱۱ نگاشتها و زمان گسسته
۲۴۱	۳-۱۱ نگاشت لوجیستیک
۲۴۸	۴-۱۱ نگاشتهای حافظ مساحت توان دوم
۲۵۶	۵-۱۱ حرکت منظم و آشوبناک دستگاههای هامیلتونی
۲۵۷	مسائل
۲۵۹	پیوست ۱
۲۶۳	پیوست ۲
۲۶۶	واژه نامه
۲۶۷	فهرست راهنما



## پیشگفتار

علم دینامیک جدید همانقدر که مدیون لاگرانژ و هامیلتون است، مرهون یوانکاره و لیاپونوف هم هست. به همین خاطر، ما در این کتاب دینامیک هامیلتونی را از طریق نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل مطرح می‌کنیم و عمدتاً به هندسه منحنیهای فاز و نظریه پایداری می‌پردازیم. هر موضوع، از نظریه مقدماتی سیستمهای مرتبه اول گرفته تا کشفیاتی که در دهه‌های اخیر در حرکت آشوبناک صورت گرفته است، با استفاده از مثالهای ساده ارائه می‌شود. پیشنهاد ریاضی این کتاب (گذشته از پیوست ۱) محدود به ماتریسهای  $2 \times 2$ ، معادلات دیفرانسیل عادی، و حساب دو متغیره است. آشنایی با مکانیک نیوتونی مقدماتی می‌تواند سودمند باشد، اما مباحث ما زمینه‌های کاربردی دیگری از جمله دینامیک جمعیت‌های زیست‌شناختی را هم در بر می‌گیرند.

برای سادگی، بررسیهایمان را به سیستمهای مرتبه اول و مرتبه دوم، و سیستمهای هامیلتونی با یک درجه آزادی محدود کرده‌ایم. این رهیافت، آنقدرها که ممکن است به نظر برسد، محدودکننده نیست و این امکان را می‌دهد که دانشجویان مقطع کارشناسی را با مباحثی که پیشتر به تدریس یا پژوهش در مقطع کارشناسی ارشد اختصاص داشت آشنا کنیم.

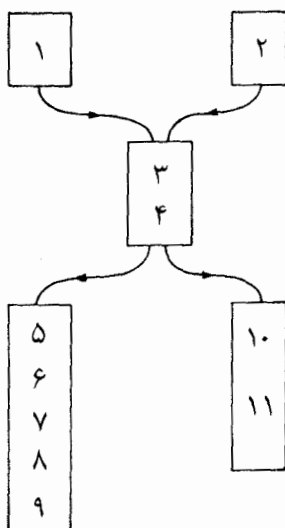
ارتباطهای اساسی‌تر بین فصلهای مختلف کتاب را در نمودار صفحه بعد نشان داده‌ایم، اما پژوهشگران و دانشجویان در سطوح پیشرفته‌تر در خواهند یافت که برای مطالعه کتاب نیاز زیادی به ارجاعهای متقابل ندارند.

ایان پرسوال - لندن

درک ریچاردز - میلتن کینز



ارتباط اساسی میان فصلها



# دستگاههای خودگردان مرتبه اول

## ۱-۱ نظریه پایه

موضوع بحث دینامیک، بررسی حرکت دستگاهها یا تغییر حالت آنها با گذشت زمان  $t$  است. دستگاه مرتبه اول، سادهترین نوع دستگاه دینامیکی است و آن را با دو خاصیت مشخص می‌کنیم:

- (الف) حالت دستگاه را با یک تک متغیر حقیقی  $x$ ، که می‌تواند به عنوان مختصه نقطه‌ای از فضای انتزاعی یک بعدی به نام فضای فاز تلقی شود، نمایش می‌دهیم.
- (ب) حرکت دستگاه را با یک تابع زمانی  $x(t)$ ، که در معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر صادق است، نمایش می‌دهیم

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = v(x, t) \quad (1-1)$$

در این معادله  $v$  تابع سرعت معلوم و به اندازه کافی خوش رفتاری از  $x$  و  $t$  است که مقدار آن برای  $x$  و  $t$  خاص برابر سرعت فاز است. معادله دیفرانسیل ۱-۱ معادله حرکت یا معادله تغییرات دستگاه است.

واپاشی پرتوزا، تغییرات جمعیت در گونه‌های زیست‌شناختی، واکنشهای ساده شیمیایی، سقوط



جسم سبک در مایعی بسیار چسبنده و تخلیه بار خازنی الکتریکی در یک مقاومت، همگی نمونه‌هایی از دستگاههای دینامیکی مرتبه اول هستند. دستگاههای مکانیکی نیوتونی، به استثنای موارد به‌غایت حدی مثل جسم سبک در مایع چسبنده، دستگاههای مرتبه اول نیستند و از این رو این دستگاهها را بعداً بررسی خواهیم کرد.

در بقیه این فصل، منحصراً به دستگاههای خودگردان مرتبه اول توجه می‌کنیم، زیرا از سادگی خاصی برخوردارند. دستگاه خودگردان در معرض هیچگونه تأثیر خارجی که وابسته به زمان باشد نیست، بنابراین تابع سرعت مستقل از زمان است و معادله حرکت عبارت است از

$$\dot{x} = v(x) \quad (2-1)$$

شرایطی که حرکت یک دستگاه خودگردان را تعیین می‌کنند مستقل از زمان هستند، از این رو گاهی آنها را با عنوان دستگاه با شرایط مستقل از زمان مشخص خواهیم کرد. هرگاه  $x_0$  حالت دستگاه را در زمان  $t_0$  نشان دهد، آنگاه از ۲-۱ زمان  $t$  را به صورت تابعی از  $x$  به دست می‌آوریم

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)} \quad (3-1)$$

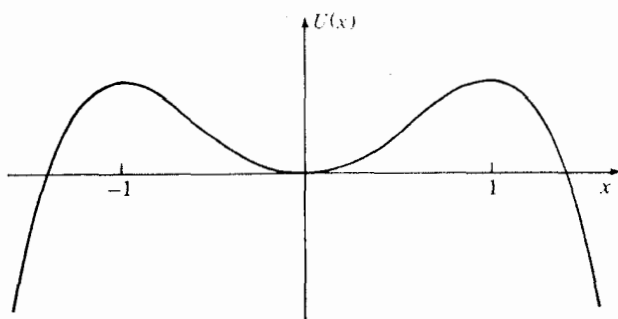
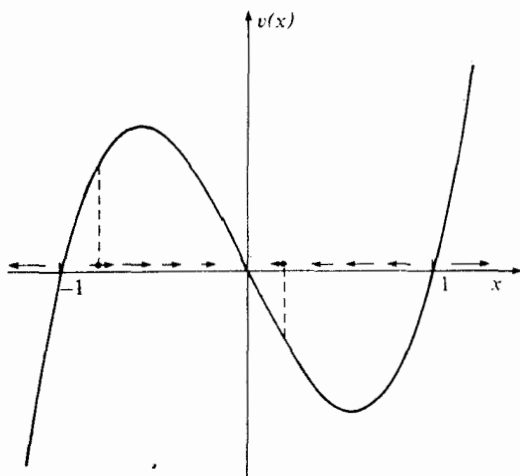
البته به شرطی که این انتگرال وجود داشته باشد. تابع معکوس هم  $x$  را به صورت تابعی از  $t$  به دست می‌دهد. توجه کنید که بستگی  $x$  به  $t$  و  $t_0$  تنها از طریق فاصله زمانی  $t - t_0$  است. این خاصیت منحصراً به دستگاههای خودگردان است.

بدون توجه به حل معادله ۲-۱ یا انتگرال‌گیری ۳-۱، می‌توانیم رفتار کیفی دستگاه را از راه ترسیم تعیین کنیم. چنان‌که در نیمه بالایی شکل ۱-۱ ترسیم شده است، تابع سرعت  $v(x)$  را (که در اینجا برای مثال  $v(x) = -x + x^3$  انتخاب شده است) با مجموعه‌ای از پیکانها به صورت زیر نمایش داده‌ایم:

مجموعه مناسبی از مقادیر  $x$  را که با  $x_s$  نشان می‌دهیم در نظر می‌گیریم، و برای هر  $x_s$  پیکانی به طول متناسب با  $v(x_s)$  در روی محور  $x$  یا در نزدیکی آن رسم می‌کنیم، به طوری که مرکز آن در  $x_s$  باشد و بسته به علامت  $v(x_s)$  در جهت مثبت یا منفی  $x$  قرار گیرد.

شاره‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت  $v(x_s)$  در فضای فاز همواره در جریان است. پیکانها نمایانگر سرعت شاره هستند که آن را جریان فاز می‌نامیم، و  $v(x)$  میدان سرعت آن است. در مثال بالا، شاره تراکم‌پذیر است. حالت متغیر دستگاه به ذره‌ای می‌ماند که با شاره کشانده می‌شود. میدان سرعت  $v(x)$  یک دستگاه خودگردان مرتبه اول را می‌توان با گرادیان منفی تابع پتانسیل





شکل ۱-۱ نمودارهای  $v(x) = -x + x^3$  و  $U(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^5$  با پیکانهایی که جریان فاز را نشان می‌دهند.

$U(x)$ ، به این صورت بیان کرد

$$v(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (۴-۱ \text{ الف})$$

که در آن به ازای مقداری ثابت برای  $U_0$  داریم

$$U(x) = U_0 - \int_0^x dx' v(x') \quad (۴-۱ \text{ ب})$$

حالت‌های دستگاه مانند آب‌هایی که از تپه‌ها به دره‌ها سرازیر می‌شوند، از بیشینه تابع پتانسیل  $U(x)$ ، چنان که در پایین شکل ۱-۱ نمایان است، به طرف «پایین» جاری می‌شوند.

مقادیری از  $x$  را که در هر یک از آنها میدان سرعت  $v(x)$  صفر می‌شود، با  $x_k$  مشخص می‌کنیم

$$v(x_k) = 0 \quad (5-1)$$

از این‌رو، دستگاهی که در آغاز در  $x_k$  بوده است، همیشه در آنجا می‌ماند. نقاط  $x_k$  نمایانگر حالت‌های تعادل هستند و نقاط ثابت نامیده می‌شوند. در همه نقاط دیگر حالت دستگاه تغییر می‌یابد. دستگاهی که در فاصله باز بین دو نقطه ثابت واقع باشد، نمی‌تواند از هیچکدام آنها بگذرد. این فواصل باز، به انضمام فاصله‌هایی که از یک نقطه ثابت تا بینهایت گسترده‌اند، همانند نقاط ثابت ناوردا هستند. چنین نقاط ثابت و فاصله‌هایی، مجموعه‌های ناورداي حالت‌هایی با این خاصیت را نمایش می‌دهند که هر گاه یک دستگاه، یکبار در چنان مجموعه‌ای قرار بگیرد، برای همیشه در آن مجموعه باقی می‌ماند. ما معمولاً فقط آن مجموعه‌های ناورداي بنیادی را بررسی می‌کنیم که نمی‌توانند به مجموعه‌های ناورداي کوچکتری تجزیه شوند.

کل فضای فاز یک دستگاه از مجموعه‌های ناوردا ساخته شده است، و این مجموعه‌ها اطلاعات ارزنده‌ای از رفتار دستگاه را در دوره‌های زمانی به دلخواه طولانی فراهم می‌آورند. دستگاهی که در شکل ۱-۱ نمایانده شده است، سه نقطه ثابت در  $x = 0, \pm 1$  و چهار مجموعه ناورداي یک‌بعدی بنیادی دارد که عبارت‌اند از فاصله‌های  $(-\infty, -1)$ ،  $(-1, 0)$ ،  $(0, 1)$ ،  $(1, \infty)$  که از یک یا دو طرف با نقاط ثابت محدود شده‌اند.

هر گاه تابع سرعت  $v(x)$  فقط جوابهای صفر ساده داشته باشد، دو نوع نقطه ثابت خواهیم داشت. نوع اول نقاط پایدار  $x_k$  هستند که در پیرامون آنها  $v(x)$  تابعی نزولی از  $x$  است، به‌طوری که حالت‌های همسایه به سوی  $x_k$  میل می‌کنند، و نوع دیگر نقاط ناپایدار  $x_k$  هستند که در اطراف آنها  $v(x)$  تابعی صعودی از  $x$  است، در نتیجه حالت‌های همسایه، چنان که در شکل ۱-۲ نمایانده شده است از  $x_k$  دور می‌شوند.

### مثال ۱-۱

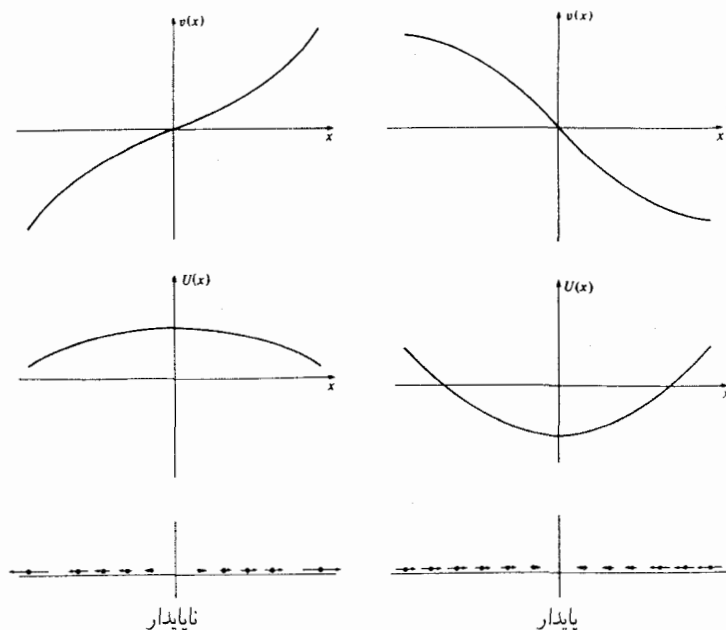
معادله میدان سرعت به‌صورت  $v(x) = 0$  است. هر نقطه‌ای، یک نقطه ثابت است. دستگاه همیشه و همه جا در سکون است

$$x = x_0 \quad (6-1)$$

هر نقطه فاز و هر مجموعه نقاط فاز، یک مجموعه ناورداست.



## نظریه پایه ۷



شکل ۲-۱ میدانهای نوعی سرعت  $v(x)$ ، تابع پتانسیل  $U(x)$  و جریانه‌ها در همسایگی نقاط ثابت پایدار و ناپایدار.

### مثال ۲-۱

میدان سرعت به صورت  $v(x) = a$  و  $a \neq 0$  است. اگر در  $t = 0$ ،  $x = x_0$  باشد، داریم

$$x = x_0 + at \quad (۷-۱)$$

و نمودار فاز چنین می‌شود

$$a > 0 \quad \begin{array}{c} \text{---} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ | \\ 0 \end{array} \quad (۸-۱)$$

این همان مورد جریان یکنواخت است، و تمام فضای فاز  $(-\infty, \infty)$  تنها مجموعه ناورد است.

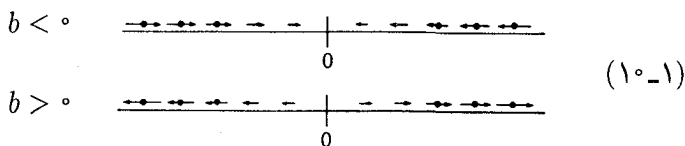
### مثال ۳-۱

میدان سرعت به صورت  $v(x) = bx$  و  $b \neq 0$  است که در آن صورت داریم

$$x = x_0 e^{bt} \quad (۹-۱)$$



و نمودارهای فاز به صورت زیرند



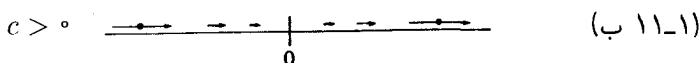
فقط یک نقطه ثابت در  $x = 0$  وجود دارد که به ازای  $b < 0$  پایدار و به ازای  $b > 0$  ناپایدار است. مثال اخیر از اهمیت خاصی برخوردار است، چون حرکت را در همسایگی نزدیک ثابت ترین نقاط توصیف می کند. مثال بعدی یک مورد استثنایی است. سه مثال اول، نمونه های دستگاههای خطی هستند که حرکتشان در یک معادله دیفرانسیل خطی صادق است.

### مثال ۴-۱

میدان سرعت به صورت زیر است

$$v(x) = cx^2 \quad (۱۱-۱ \text{ الف})$$

و نمودار فاز آن



یک نقطه ثابت در  $x = 0$  وجود دارد که هم پایدار است و هم ناپایدار. حالت های همسایه از سمت چپ به آن نزدیک می شوند، اما از سمت راست آن را ترک می کنند. سبب این است که  $x = 0$  یک صفر مضاعف تابع سرعت است.

میدان سرعت ۱۱-۱ دارای خاصیتی است که ناپایداری ساختاری نامیده می شود. دو مثال قبلی را در نظر بگیرید. هرگاه به میدان سرعت، میدان اختلال کوچک  $\varepsilon w(x)$  را بیفزاییم که در آن  $w(x)$  محدود و مشتق پذیر باشد، آنگاه، به ازای  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک ساختار مجموعه های ناورد بدون تغییر می ماند. اما هرگاه این کار را با میدان ۱۱-۱ انجام دهیم، مثلاً با افزودن  $w(x) = 1$ ، در آن صورت هر قدر هم که  $\varepsilon$  کوچک باشد، شمار صفرهای  $v(x)$  به ۲ افزایش و یا به ۰ کاهش می یابد. دستگاهی که ساختار خود را تحت چنین اختلال کوچکی حفظ کند، پایدار ساختاری است. در غیر این صورت، مانند مثال ۴-۱، ناپایداری ساختاری خواهد داشت.

باید مراقب بود که پایداری حالتها یا نقاط فاز، از پایداری ساختاری دستگاهها یا معادلات دیفرانسیل تمیز داده شوند. برای رعایت سادگی، دستگاههای پایدار ساختاری را به سبب نوعی بودنشان بیشتر بررسی می کنیم.

دستگاهی که میدان سرعت ۱۱-۱ را دارد، یک ویژگی مهم دیگر یعنی حرکت مختوم را هم نمایان می کند. فرض کنید در لحظه  $t = 0$  داریم  $x = x_0 > 0$ ، در این صورت جواب معادله

دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$x = (x_0^{-1} - ct)^{-1}, \quad t < (cx_0)^{-1} \quad (۱۲-۱)$$

حرکت در زمان بحرانی  $t = (cx_0)^{-1}$ ، وقتی که  $x$  به سمت بینهایت میل می‌کند، یکباره پایان می‌پذیرد، و بعد از این زمان، نامعین است. همه میدانهای سرعت، حرکت دستگاه را در همه زمانها معین نمی‌کنند. در عمل، اعتبار خود معادله حرکت پیش از فرا رسیدن زمان بحرانی از بین می‌رود. به‌ازای  $x_0 < 0$ ، دیگر زمان بحرانی مثبتی وجود ندارد، ولی تعیین حرکت گذشته دستگاه هم به مشکلات مشابهی بر می‌خورد.

به‌طور کلی، یک حرکت را هنگامی مختوم تلقی می‌کنیم که جواب معادله حرکتی باشد که به‌ازای هر نقطه معین در محور زمان حقیقی، نامعین باشد. بعضی اوقات این پیشامد، وقتی که  $x$  بینهایت می‌شود، روی می‌دهد. حرکت مختوم، در دستگاههایی که در فواصل ناوردای بیرونی میدانهای سرعت چند جمله‌ای مشخصی قرار دارند، حرکت نوعی به‌شمار می‌رود. هرگاه که  $v(x)$  یک چند جمله‌ای درجه دوم یا بزرگتر باشد، حرکت مختوم هم پیش می‌آید.

## ۲-۱ دوران

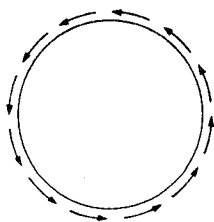
فضای فاز همیشه سرتاسر خط حقیقی را نمی‌گیرد. در برخی از انواع حرکت که با دوران حول یک محور متمایز می‌شوند، می‌توان فضای فاز را یک دایره تلقی کرد. در این موارد بهتر است یک مختصه  $\theta$  در گستره  $[2\pi, 0]$  انتخاب و آغاز و پایان آن را معلوم کنیم. معادله این نوع حرکت برای یک دستگاه خودگردان به‌صورت

$$\dot{\theta} = v(\theta) \quad (۱۳-۱)$$

است، که در آن  $v(\theta)$  باید یک تابع تناوبی از  $\theta$  با تناوب  $2\pi$  باشد و  $v(\theta) = v(\theta + 2\pi)$  برای این دستگاهها، امکان حرکت محدود، بی هیچ نقطه ثابتی، وجود دارد. برای مثال

$$\dot{\theta} = \omega = \text{مقدار ثابت} \quad (۱۴-۱ \text{ الف})$$

که دوران یکنواخت با تناوب  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  را نشان می‌دهد.



(۱۴-۱ ب)

هر حرکت دایره‌ای بدون نقطه ثابت، یک دوران نامیده می‌شود و تناوب آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$T = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{v(\theta)} \quad (15-1)$$

### ۳-۱ مرزهای طبیعی

هرگاه متغیر  $x$ ، فاصله یک ذره از نقطه‌ای در فضا، یا جمعیت بزرگی از اشیاء مانند یاخته‌های زنده، یا اتمهای پرتوزا را نشان بدهد، آنگاه مقادیر منفی  $x$  بی‌معنی‌اند. در این صورت فضای فاز یک مرز طبیعی در  $x = 0$  دارد. انضمام نقطه مرزی به فضای فاز معمولاً سودمند است. در شرایط متعارف، برای دستگاههای مرتبه اول، چنانچه حرکت خاتمه نپذیرد، سرعت در یک مرز طبیعی صفر است.

برای دستگاههای خودگردان مرتبه اول، مثالهای میدان سرعت با مرز طبیعی چنین به دست می‌آیند که هر میدان سرعت با نقاط ثابت را که در نظر گرفتیم، فضای فازش را به مجموعه ناوردایی که با یک یا چند نقطه ثابت، به انضمام همین نقاط، محدود شده‌اند منحصر کنیم. به عنوان مثال، نمودار فاز رابطه ۱-۱۰، گذشته از محور حقیقی منفی، افت نمایی جمعیتی با یک مرز طبیعی در  $x = 0$  را نشان می‌دهد.

مثال ۵-۱ دستگاهی که در مرز طبیعی‌اش خاتمه می‌پذیرد.  
معادله حرکت این دستگاه به صورت زیر است

$$\dot{x} = v(x) = -\sqrt{x} \quad (x \geq 0) \quad (16-1)$$

که در آن ریشه دوم را مثبت منظور می‌کنیم. این دستگاه یک مرز طبیعی در  $x = 0$  دارد و  $x$  همیشه کاهنده است. جواب عمومی معادله حرکت از  $dx/\sqrt{x} = -dt$  به دست می‌آید که عبارت است از

$$2\sqrt{x} = C - t$$

و در آن،  $C$  یک مقدار ثابت است، بنابراین

$$x = \frac{1}{4}(C - t)^2, \quad (t \leq C) \quad (۱۷-۱)$$

این دستگاه در  $t = C$  به مرز طبیعی می‌رسد. پس از این زمان، معادله ۱۷-۱ دیگر در معادله ۱۶-۱ صدق نمی‌کند اما جوابی برای معادله

$$\dot{x} = \sqrt{x} \quad (۱۸-۱)$$

یعنی برای ۱۶-۱ با علامت مخالف است. فراتر از  $t = C$  حرکتی که در ۱۶-۱ صدق کند امکان ندارد. با این حال، معادله ۱۷-۱ یک حرکت ممکن را که در آن، به ازای  $t \leq C$  دستگاه در معادله ۱۶-۱ و به ازای  $t \geq C$  در ۱۸-۱ صادق است تعریف می‌کند. بعضی اوقات دستگاههای هامیلتونی با کمیت‌های پایسته، این گونه حرکت می‌کنند. دستگاهها و قضایای کلی‌تر از این نوع را در مسائل ۸ و ۹ خواهیم آورد.

## ۴-۱ مثالهایی از زیست‌شناسی

دینامیک جمعیت‌های زیست‌شناختی شاخه‌ای از بوم‌شناسی است. جمعیت‌های حشرات، پرندگان، ماهیها و پستانداران با زاد افزایش و با مرگ کاهش می‌یابند. این فرایندها به عوامل بسیاری بستگی دارند که درباره‌شان خیلی کمتر از عواملی که بر حرکت اهرمها، قرقره‌ها، پرتابه‌ها و سیاره‌ها اثر می‌گذارند، می‌دانیم. با این همه، الگوهای ساده شده می‌توانند در فهم چگونگی تغییرات این جمعیتها برحسب زمان به ما کمک کنند.

هرگاه جمعیت یک گونه در ناحیه‌ای مشخص به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توان این جمعیت را با یک متغیر پیوسته،  $x$ ، نشان داد. اگر آهنگ زاد و مرگ سرانه جمعیتها،  $B(x)$  و  $D(x)$ ، بستگی به جمعیت  $x$  داشته باشد، اما به فضا، زمان و یا هر عامل دیگر بستگی نداشته باشد، در این صورت، جمعیت یک دستگاه خودگردان مرتبه اول با معادله حرکت  $\dot{x} = v(x)$  و معادله سرعت

$$v(x) = [B(x) - D(x)]x, \quad [B(x) \geq 0, D(x) \geq 0] \quad (۱۹-۱)$$

است. در جمعیتها،  $x \geq 0$  است، بنابراین  $x = 0$  همیشه یک مرز طبیعی است.

### مثال ۶-۱ رشد و زوال نمایی

ساده‌ترین فرض این است که آهنگ زاد،  $B$ ، و آهنگ مرگ،  $D$ ، مقادیر ثابت مستقل از جمعیت هستند. در این صورت معادلات مثال ۳-۱، با  $b = B - D$  مصداق می‌یابند. اگر مورد ویژه



$B = D$  را مستثنی کنیم، مرز طبیعی در  $x = 0$  تنها نقطه ثابت است. هرگاه  $D$  از  $B$  فراتر رود، جمعیت به طور نمایی به سوی صفر می‌رود. در صورتی که  $B$  از  $D$  تجاوز کند، جمعیت به طور نمایی و بدون حد و مرز افزایش می‌یابد، نمودارهای فاز با نیمه دست راست نمودارهای ۱-۱۰ مطابقت دارند.

### مثال ۷-۱ معادله لوجیستیک

در عمل، جمعیت یک منطقه محصور، برای همیشه نمی‌تواند بدون اندازه افزایش باید، چون عوامل محدودکننده‌ای از قبیل رقابت برای غذا و فضای حیاتی وجود دارند. ساده‌ترین فرض پذیرفتنی این است که این عوامل آهنگ زاد را بدون تغییر می‌گذارند، اما آهنگ مرگ سرانه را متناسب با جمعیت می‌کنند، به طوری که می‌توان نوشت

$$B(x) = b, \quad D(x) = cx, \quad (x \geq 0, b > 0, c > 0) \quad (20-1)$$

که بنابر آن، معادله تغییر حالت به صورت

$$\dot{x} = bx - cx^2 \quad (21-1)$$

است. این معادله به نام معادله لوجیستیک معروف است، و جمعیت‌های واقعی بسیاری با تقریب خوب از آن پیروی می‌کنند. حل این معادله لوجیستیک و یا تحلیل آن مشکل نیست، بنابراین به عنوان مسئله ۱۳ منظور شده است. جواب این مسئله یک جمعیت پایدار است. باری، همیشه هم وضعیت به این سادگی نیست. اتفاق می‌افتد که یک گونه، طعمه شکارگونه دیگر می‌شود، به طوری که معادله جمعیت آنها با همدیگر جفت می‌شوند و دستگاہهای مرتبه دوم می‌سازند، که در فصل ۳ به آن می‌پردازیم.

برخی اوقات یک گونه، فصل تولیدمثل معینی دارد، به طوری که تغییرات جمعیت نه به وسیله معادله دیفرانسیل، بلکه با یک معادله تفاضلی یا یک نگاشت نمایش داده می‌شود. به این موارد به طور مختصر در فصل ۱۱ پرداخته‌ایم. در هر دو موارد یاد شده، پدیده‌های جدید و جالب توجهی در وابستگی زمانی جمعیت نمایان می‌شوند.

### مسائل

۱. سه دستگاه مرتبه اول دارای معادلات سرعت زیرند، کدام یک از آنها خودگردان است؟

$$v(x, t) = e^x \quad (\text{الف})$$

$$v(x, t) = t \quad (\text{ب})$$

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ x^2 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۲. برای توابع سرعت زیر، نمودارهای فاز را رسم کنید، و نقاط ثابت و مجموعه‌های ناوردای دستگاهها را پیدا کنید

(الف)  $v(x) = (a - x)(x - b) \quad (-\infty < x < \infty, b > a > 0)$

(ب)  $v(x) = (a - x)(b - x) \quad (-\infty < x < \infty, b > a > 0)$

بدون حل معادلات حرکت، در هر مورد رفتار کیفی را پس از  $t = 0$  به ازای  $a < x(0) < b$  مورد بحث قرار دهید.

۳. زاویه تیغ یک مخلوطکن را با  $\psi$  نشان می‌دهیم و حرکت آن را با معادله دیفرانسیل

$$\dot{\psi} = a + b \sin \psi \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi, a > 0, b > 0)$$

تعیین می‌کنیم. مطلوب است نقاط ثابت و مجموعه‌های ناوردای حرکت برای سه مورد  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $a > b$ . به ازای کدام مقادیر  $a$  و  $b$ ، حرکت یک دوران است؟ تناوب آن را پیدا کنید.

۴. آیا دستگاه مثال ۱-۱ پایدار ساختاری است؟ جواب را با دلیل بیان کنید.

۵. به ازای کدام مقادیر مثبت  $a$  و  $b$  دستگاهی با تابع سرعت

$$v(x) = (a - x)(x - b), \quad (-\infty < x < \infty, b > 0, a > 0)$$

پایدار ساختاری است؟

۶. به ازای کدام مقادیر  $a$  و  $b$  تیغه مخلوطکن مسئله ۳ پایدار ساختاری است؟

۷. درباره نوع حرکت دستگاههایی که دارای توابع سرعت

(الف)  $v(x) = x \sin x, \quad (-\infty < x < \infty)$

(ب)  $v(x) = x \cos x, \quad (-\infty < x < \infty)$

هستند بحث کنید، و تعیین کنید که کدام یک از آنها پایدار ساختاری است.

۸. به ازای کدام مقادیر مثبت  $\alpha$ ، تابع سرعت

$$v(x) = x^\alpha \quad (x > 0, \alpha > 0)$$

مربوط به یک حرکت مختوم است؟

۹. مسائل مربوط به مکانیک هامیلتونی (همه ریشه‌های دوم غیرمنفی هستند) و ویژگیهای مهم حرکت در دستگاههایی را که دارای توابع سرعت زیرند، بیان کنید



$$v(x) = a\sqrt{x-b} \quad (a > 0, x \geq b) \quad (\text{الف})$$

$$v(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (|x| \leq 1) \quad (\text{ب})$$

۱۰. (الف) فرض کنید که  $A < B$  است و

$$0 < v_1(x) \leq v_2(x) \quad (A \leq x \leq B)$$

$v_1(B)$  و  $v_2(B)$  متناهی هستند.

اگر  $T_i$  مدت زمانی باشد که دستگاه  $S_i$  با تابع سرعت  $V_i$  لازم دارد تا از حالت  $x = A$  به حالت  $x = B$  برود، نشان دهید که  $T_2 \leq T_1$  است.

(ب) اگر  $f(x)$  و  $f'(x)$  در فاصله‌ای پیرامون  $x = B$  وجود داشته باشند که مقادیرشان در عبارات زیر صدق کند

$$f(B) = 0, \quad f'(B) < 0$$

نشان دهید که حرکت تعریف شده با

$$v(x) = \sqrt{f(x)}$$

در  $x = B$  خاتمه می‌پذیرد.

(ج) حرکتی را که دارای تابع سرعت

$$v(x) = \sqrt{g(x)}$$

است و در آن  $g(x)$  یک چند جمله‌ای با  $N$  صفر حقیقی متمایز است، توصیف کنید.

مسائل مربوط به واکنشهای شیمیایی

۱۱. اکسید نیتریک (NO) و اکسیژن ( $O_2$ ) به صورت زیر با هم ترکیب می‌شوند



هرگاه غلظت  $NO_2$  را با  $C(t)$  نشان دهیم، معلوم می‌شود که در معادله دیفرانسیل

$$dC/dt = k(\alpha - C)^2(\beta - C), \quad (C \geq 0, C(0) = 0)$$



صدق می‌کند، که در آن  $k$  یک مقدار ثابت مثبت برای واکنش و  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب غلظت‌های اولیه  $\text{NO}$  و  $\text{O}_2$  و هر دو بزرگتر از صفر هستند. رفتار کیفی غلظت  $\text{NO}_2$  را به ازای  $\alpha > 2\beta$  و  $\alpha < 2\beta$  مورد بحث قرار دهید.

۱۲. دی‌اکسید گوگرد با اکسیژن ترکیب می‌شود و  $\text{SO}_3$  می‌دهد



غلظت  $\text{SO}_3$  در معادله

$$dC/dt = k(\alpha - C)C^{-\frac{1}{2}}, \quad (C \geq 0, C(0) = 0)$$

صدق می‌کند که در آن  $C(t)$  غلظت وابسته به زمان،  $k$  یک مقدار مثبت ثابت برای واکنش و  $\alpha > 0$  غلظت اولیه  $\text{SO}_3$  است. تغییرات غلظت  $C(t)$  را برای مدت زمانهای کوتاه و طولانی مورد بحث قرار دهید.

مسائل زیست‌شناختی

۱۳. نمودار فاز را برای جمعیتی که در معادله لوجیستیک ۱-۲۱ صدق می‌کند بکشید و آنچه را که در شروع نمودار با هر مقدار مثبتی روی می‌دهد، توصیف کنید.

۱۴. اصلاحات گوناگونی در معادله لوجیستیک انجام شده است. فرض کنید که جمعیتی از معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = ax[1 - b(e^x - 1)] \quad (x > 0, a > 0, b > 0)$$

پیروی کند. تغییرات این جمعیت با زمان را به‌طور کیفی توصیف کنید.

سایر مسائل

۱۵. از جرم یک قطره مایع کروی در اثر تبخیر کاسته می‌شود. آهنگ کاهش با سطح آن متناسب است. معادله دیفرانسیل شعاع قطره را به‌صورت تابعی از زمان،  $R(t)$ ، به‌دست آورید، و تغییرات شعاع را به‌طور کیفی توصیف کنید.

۱۶. هرگاه مقاومت هوا برای یک متحرک را متناسب با توان دوم سرعت آن بگیریم، سرعت لحظه‌ای در سقوط اجسام،  $V(t)$  از معادله

$$dV/dt = g - kV^2 \quad (g > 0, k > 0)$$

به‌دست می‌آید. به‌ازای مقادیر اولیه غیر منفی دلخواه از  $V(0)$ ، تغییرات  $V(t)$  با زمان را توصیف کنید. رفتار حدی در  $t \rightarrow \infty$  چگونه است؟



## تبدیل‌های خطی یک صفحه

### ۱-۲ مقدمه

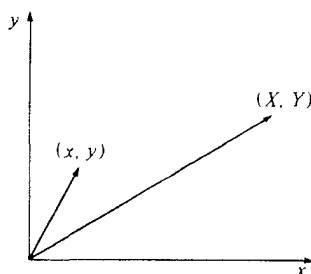
وقتی که به نظریهٔ دستگاه‌های مرتبهٔ دوم می‌رسیم، بسیاری از خواص تبدیل‌های خطی یک صفحه و نمایش ماتریس آنها را لازم خواهیم داشت. لذا برای آسانی کار آنها را به اختصار در این فصل شرح می‌دهیم.

یک صفحهٔ حقیقی با دستگاه مختصات قائم  $Oxy$  را در نظر بگیرید. یک تبدیل خطی یا نگاشت خطی این صفحه به خودش را که مبدأ را بدون تغییر بگذارد، می‌توان با یک ماتریس  $2 \times 2$  حقیقی نمایش داد

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (۱-۲)$$

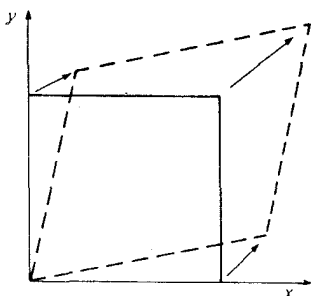
نگاشت یک نقطه با بردار موضع  $\mathbf{r} = (x, y)$  عبارت است از  $\mathbf{R} = (X, Y)$  که در آن

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (۲-۲ الف)$$



(۲-۲)

تبدیل هر شکل هندسی از تبدیل نقاطی که آن را تشکیل داده‌اند، به دست می‌آید. چون تبدیل خطی است، خطوط راست تبدیل به خطوط راست می‌شوند. برای مثال، یک مربع را می‌توان به صورتی که در ۲-۳ دیده می‌شود، تبدیل کرد.



(۳-۲)

در یک تبدیل خطی، مساحت هر ناحیه‌ای ممکن است تغییر نکند یا تغییر نکند. مطلوب این است که تبدیل صفحه وارونپذیر باشد، بنابراین دترمینان

$$\delta = \text{Det} A = ad - bc \quad (۴-۲)$$

نباید صفر شود. نسبت دو مساحت  $\delta$  است، بنابراین اگر تبدیل انجام‌یافته مساحت را حفظ کند، دترمینان واحد است

$$\delta = 1 \iff \text{حفظ مساحت} \quad (۵-۲)$$

تبدیل‌های حافظ مساحت، بویژه در دینامیک هامیلتونی دارای اهمیتند. تبدیل‌های خطی را می‌توان به انواع متمایز، بسته به بویژه مقدارهای  $A$ ،  $\lambda_1$ ،  $\lambda_2$  که جوابهای معادله مشخصه زیر هستند، رده‌بندی کرد.

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0 \quad (۶-۲)$$

این معادله را که در آن  $I$  ماتریس واحد است، می‌توان به صورت

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0 \quad (۷-۲)$$

هم نوشت، که در آن  $\tau$  رد ماتریس  $A$  است

$$\tau = \text{Tr} A = a + d \quad (۸-۲)$$

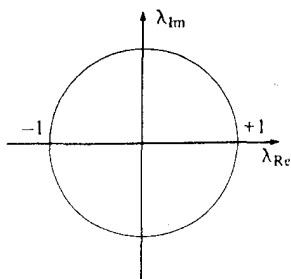
در تبدیلیهای حافظ مساحت، رده‌بندی فقط به رد ماتریس،  $\tau$ ، بستگی دارد. رابطه ویژه مقادارها با دترمینان و رد ماتریس به صورت زیر است:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \tau, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \delta \quad (۹-۲)$$

## ۲-۲ تبدیلیهای حافظ مساحت

جوابهای معادله مشخصه ۲-۷، برای تبدیلیهای حافظ مساحت، با  $\delta = ۱$  به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \tau \pm \left[ \left( \frac{1}{\tau} \tau \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۱۰-۲)$$

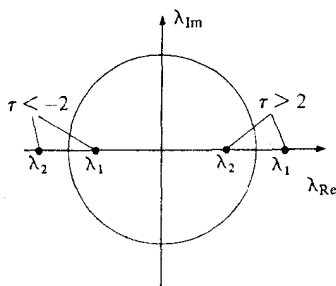


(۱۱-۲)

این جوابها، همیشه روی محور حقیقی، یا روی دایره واحد در صفحه مختلط قرار دارند و این که در کجا قرار دارند، به مقدار  $\tau$  بستگی دارد. مقدار  $\tau$  یا مواضع ویژه مقادارها، می‌توانند برای رده‌بندی تبدیلیها به سه نوع متمایز مورد استفاده قرارگیرند.

نوع ۱:

$|T| > ۲$  و ویژه مقادارها حقیقی و متمایزند

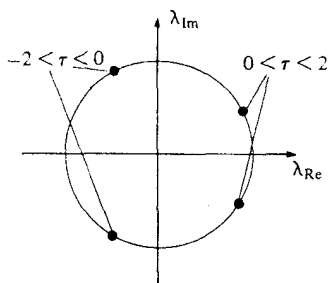


(۱۲-۲)

برای اینکه از ابتدا مشخص باشد، قرار می‌گذاریم همیشه  $\lambda_1$  را بزرگتر از  $\lambda_2$  انتخاب کنیم.

نوع ۲:

$|\tau| < 2$  و ویژه مقادارها مزدوج هستند



(۱۳-۲)

در این مورد، ویژه مقادارها را اغلب به این صورت می‌نویسیم

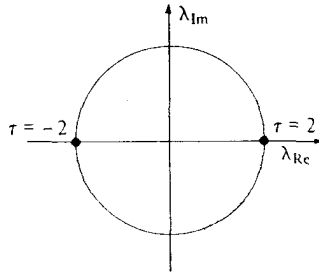
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\omega = e^{i\theta} \\ \lambda_2 &= \alpha - i\omega = e^{-i\theta} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{حقیقی } \alpha, \omega, \theta \\ 0 < \theta < \pi \end{array} \right\} \quad (۱۴-۲)$$

$$\text{Sgn } \omega = \text{Sgn } c.$$

برای مشخص بودن و به خاطر سهولت بعدی، علامت زاویه را برای  $\omega$  و عنصر  $c$  ماتریس  $A$  یکی انتخاب می‌کنیم.

نوع ۳:

$|\tau| = 2$  و ویژه مقادارها حقیقی و متساوی‌اند



(۱۵-۲)

ویژه مقدارها عبارت‌اند از

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \text{و یا} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad (۱۶-۲)$$

معمولاً، مورد خاصی را که  $A$  برابر با ماتریس واحد شود، از نوع ۳ مستثنی می‌کنیم. ماتریس  $A$  که تبدیل را نمایش می‌دهد، می‌تواند با یک تغییر خطی مختصات ساده شود. این تغییر مختصات با یک ماتریس غیرتکین  $M$  نشان داده می‌شود. بنابر نظریه استاندارد، تغییر ماتریس  $A$  به ماتریس  $B$  به این صورت است

$$B = MAM^{-1} \quad (۱۷-۲)$$

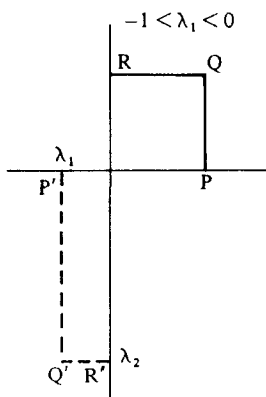
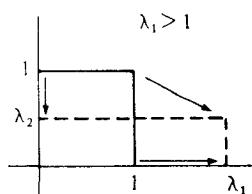
چون دترمینان یک حاصلضرب، برابر با حاصلضرب دترمینانهاست، ویژه مقدارهای  $B$  با ویژه مقدارهای  $A$  یکی هستند، بنابراین نوع تبدیلی که  $B$  نشان می‌دهد با نوع تبدیلی که  $A$  نشان می‌دهد، یکی است. برای هر نوع می‌توانیم، بسته به عناصر  $A$ ، ماتریس  $M$  را طوری انتخاب کنیم که  $B$  یک شکل استاندارد ساده داشته باشد. این شکل استاندارد برای هر نوع فرق می‌کند و نوع استاندارد متفاوتی از یک تبدیل خطی را نشان می‌دهد. این تبدیلهای استاندارد را به‌وسیله اثر آنها روی مربع واحد، که گوشه‌های آن در

$$(\circ, \circ), (\circ, 1), (1, 1), (1, \circ)$$

قرار دارند نشان می‌دهیم. برای ماتریس  $A$  با عناصر  $a, b, c, d$  از معادله ۱-۲ ویژه مقدارهای  $\lambda_1, \lambda_2$  می‌توانیم ماتریس تبدیل  $M$ ، شکل استاندارد  $B$  و اثر آنها را روی مربع واحد بنویسیم. برای نوع ۱، ویژه مقدارهای حقیقی و متمایز  $\lambda_1 > \lambda_2$  داریم

$$M = \begin{pmatrix} c & \lambda_1 - a \\ c & \lambda_2 - a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \circ \\ \circ & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (۱۸-۲)$$

که اثرشان روی مربع واحد به صورت زیر است



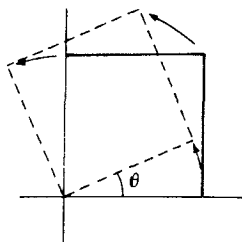
(۱۹-۲)

به ازای  $\lambda_i$  مثبت تبدیل با  $B$  یک فشردن استاندارد و تبدیل با  $A$  یک فشردن است. در  $\lambda_i$  منفی یک بازتابش در مبدأ نیز وجود دارد.

برای نوع ۲، با ویژه مقدارهای مختلط  $\lambda = \alpha \pm i\omega = e^{\pm i\theta}$  ماتریس تبدیل  $M$  و شکل استاندارد  $B$  عبارت‌اند از

$$M = \begin{pmatrix} c & \alpha - a \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (۲۰-۲)$$

و اثر آنها روی مربع واحد به صورت زیر است



(۲۱-۲)

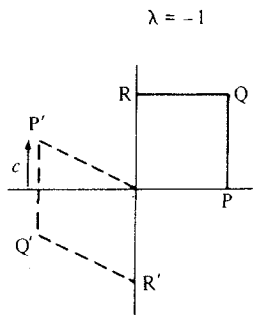
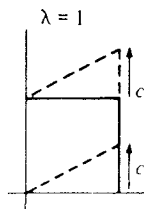
تبدیل با  $B$  یک دوران به اندازه زاویه  $\theta$  در گستره  $-\pi < \theta < \pi$ ، و تبدیل با  $A$  یک دوران تعمیم یافته است.

برای نوع ۳، با ویژه مقدارهای حقیقی متساوی،

$$M = \begin{pmatrix} a-d & 2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ c & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda = \pm 1) \quad (۲۲-۲)$$



و اثر روی مربع واحد



(۲۳-۲)

یا  $\lambda = 1$  است و تبدیل با  $B$  یک برش استاندارد در جهت  $y$  است، و یا  $\lambda = -1$  است و تبدیل یک بازتابش در مبدأ است که یک برش به دنبالش می‌آید. مورد ویژه  $b = 0$  و یا  $c = 0$  را در مسئله ۵ مطرح کرده‌ایم. جواب تبدیل با  $A$  یک برش است.

## مثال ۱-۲

تبدیلی که با ماتریس  $A$  زیر نمایش داده می‌شود از چه نوع است؟

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (24-2)$$

شکل استاندارد  $B$  را به دست آورید و نوع تبدیلی را که نمایش می‌دهد، توصیف کنید. نقاط  $B^n(\cdot)$  و  $B^n(\cdot)$  را برای عدد صحیح  $n$ ، با  $-2 \leq n \leq 2$  رسم کنید.

چون  $\delta = 1$  است، پس تبدیل حافظ مساحت است و چون  $\tau = \frac{5}{3} > 2$  است از نوع ۱ است. ماتریس  $B$  از ویژه مقادیر تشکیل می‌شود

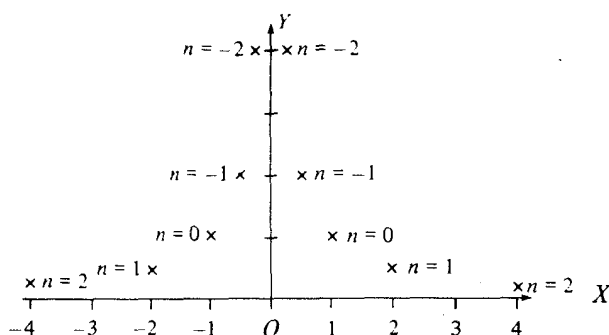
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (25-2)$$

و یک فشردن را نمایش می‌دهد. ماتریس  $B^n$  به صورت

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \quad (26-2)$$

و یک فشردن با ضریب  $2^n$  است. نقاط به دست آمده از اعمال  $B^n$  روی  $(\cdot)$  و  $(\cdot)$  در طرح زیر نشان داده شده‌اند.





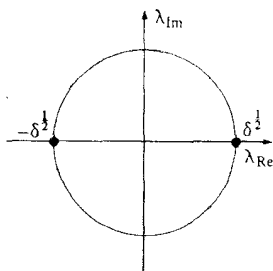
(۲۷-۲)

## ۳-۲ تبدیل‌های اتساع‌دهنده

این بخش برای دینامیک هامیلتونی لازم نیست.

هرگاه  $A$  حافظ مساحت نباشد، جوابهای  $\lambda$ ی ویژه مقدارهای معادله مشخصه (۷-۲) برحسب رد  $\tau$  و دترمینان  $\delta$  از رابطه ۲۸-۲ به دست می‌آیند:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \tau \pm \left[ \left( \frac{1}{\tau} \tau \right)^2 - \delta \right]^{\frac{1}{2}} \quad (28-2)$$



(۲۹-۲)

اگر  $\delta > 0$  باشد، ویژه مقدارها روی محور حقیقی، یا روی دایره قرار دارند

$$|\lambda|^2 = \delta \quad (\delta > 0) \quad (30-2)$$

در صفحه مختلط، اگر  $\delta < 0$  باشد، جوابها همیشه روی محور حقیقی قرار دارند. شرایطی که انواع مختلف را از هم متمایز می‌کنند به قرار زیرند:

$$\text{نوع ۱: } \tau^2 > 4\delta : \text{ویژه مقدارها حقیقی و متمایز} \quad (31-2)$$

$$(۳۲-۲) \quad \text{نوع } ۲: \tau^2 < 4\delta : \text{ویژه مقدارها مزدوج مختلط}$$

$$(۳۳-۲) \quad \text{نوع } ۳: \tau^2 = 4\delta : \text{ویژه مقدارها حقیقی و متساوی}$$

برای  $\delta > 0$  نمودارها و معادله‌های  $۱۲-۲$  و  $۱۶-۲$  می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، مشروط بر این که به یاد داشته باشیم که دایره‌ها در صفحه مختلط شعاع  $\delta^{\frac{1}{2}}$  دارند، مانند  $۲۹-۲$ ، که  $\tau$  باید با  $\tau/\delta^{\frac{1}{2}}$  جایگزین شود، و معادله‌های  $۱۴-۲$  با معادلات  $۳۴-۲$  جایگزین شده‌اند:

$$(۳۴-۲) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\omega = \delta^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} \\ \lambda_2 = \alpha - i\omega = \delta^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha, \omega, \theta \text{ حقیقی} \\ 0 < \theta < \pi \end{array} \right\}$$

برای دترمینان منفی  $\delta$ ، باید  $A$  از نوع ۱ باشد، و ویژه مقدارها، با  $\lambda_1 > 0$  و  $\lambda_2 < 0$  حقیقی‌اند. برای همه  $A$ هایی که غیرتکین و حقیقی‌اند، ماتریسهای  $M$  دقیقاً همانهایی هستند که در تبدیلیهای حافظ مساحت بودند، یعنی ماتریسهای معادلات  $۱۸-۲$ ،  $۲۰-۲$  و  $۲۲-۲$ ، اما شکلهای استاندارد  $B$  همیشه همانها نیستند. با وجود این به آسانی به دست می‌آیند. هرگاه  $A$  دارای دترمینان مثبت  $\delta$  باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$(۳۵-۲) \quad A = \delta^{\frac{1}{2}} A_{AP} \quad (\delta > 0)$$

که در آن  $A_{AP}$  حافظ مساحت است، از این رو

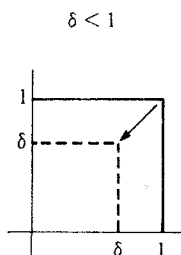
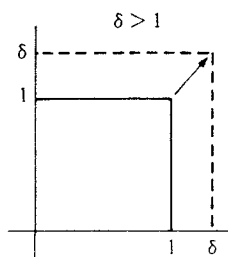
$$(۳۶-۲) \quad A = \delta^{\frac{1}{2}} M B_{AP} M^{-1} = M(\delta^{\frac{1}{2}} I B_{AP}) M^{-1}$$

که در آن  $B_{AP}$  به یکی از سه شکل استاندارد برای یک تبدیل حافظ مساحت خواهد بود، و

$$(۳۷-۲) \quad \delta^{\frac{1}{2}} I = \begin{pmatrix} \delta^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \delta^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

ماتریس بالا یک اتساع را نمایش می‌دهد، این ماتریس همه ابعاد خطی را در ضریب  $\delta^{\frac{1}{2}}$  و همه مساحتها را در ضریب  $\delta$  ضرب می‌کند. اثر آن روی یک مربع واحد در  $۳۸-۲$  ملاحظه می‌شود.





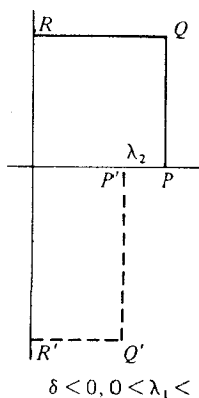
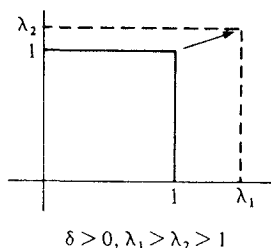
(۳۸-۲)

یک اتساع با ضریبی کمتر از واحد معمولاً یک انقباض خوانده می‌شود، اما استفاده از یک واژه مشترک برای همه مقادیر مثبت  $\delta$ ، منظور ما را بهتر برآورده می‌کند. کلیه ماتریسهای که  $\delta$ ی منفی دارند، از نوع ۱ هستند و در پاراگراف بعدی بررسی می‌شوند.

ماتریسهای  $B$  و تبدیلهای استاندارد برای انواع سه‌گانه به صورت زیرند

نوع ۱:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ مختلف}) \quad (۳۹-۲)$$



(۴۰-۲)

برای  $\lambda_1 < \lambda_2 > 1$  تبدیل استاندارد یک فشردن و اتساع است و یا به عبارت دیگر یک اتساع ناهمسانگرد. همه مؤلفه‌های  $x$  در  $\lambda_1$  و همه مؤلفه‌های  $y$  در  $\lambda_2$  ضرب شده‌اند. برای یک ویژه مقدار منفی ( $\delta < 0$ )، تبدیل استاندارد، یک فشردن، اتساع و باز تابش در یک محور است. برای دو ویژه مقدار منفی ( $\delta > 0$ )، تبدیل استاندارد، یک فشردن، اتساع و باز تابش در مبدأ است.

نوع ۲:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} = \delta^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (41-2)$$

تبدیل استاندارد یک دوران و اتساع است.

نوع ۳:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda = \pm \delta^{\frac{1}{2}}) \quad (42-2)$$

تبدیل استاندارد یک برش و اتساع برای  $\lambda = \delta^{\frac{1}{2}}$  است، و هرگاه  $\lambda = -\delta^{\frac{1}{2}}$  باشد، یک بازتابش در مبدأ هم به اینها اضافه می‌شود.

## مثال ۲-۲

تبدیلی که با ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (43-2)$$

انجام می‌شود، از چه نوع است و شکل استاندارد  $B$  آن چیست؟ نام تبدیلی که با  $B$  ساخته می‌شود چیست؟ طرح نقاط  $B^n$  را برای عدد صحیح  $n$ ، با  $-4 \leq n \leq 4$  رسم کنید.  
درمیان  $\delta = 2$  است، بنابراین تبدیل با  $A$  حافظ مساحت نیست و ایجاد یک اتساع می‌کند.  
رد ماتریس  $\tau = 2$  است، از این رو، بنابر ۳۲-۲، تبدیل از نوع ۲ است، و بنابر ۲۸-۲، ویژه مقادیر عبارتند از

$$\lambda = 1 \pm (-1)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm i \quad (44-2)$$

چون عنصر چپ پایینی  $A$  منفی است، پس  $\omega$  هم منفی است، و

$$\begin{aligned} \alpha + i\omega &= 1 - i \\ &= \delta^{\frac{1}{2}}(\cos \theta + \sin \theta) \end{aligned} \quad (45-2)$$

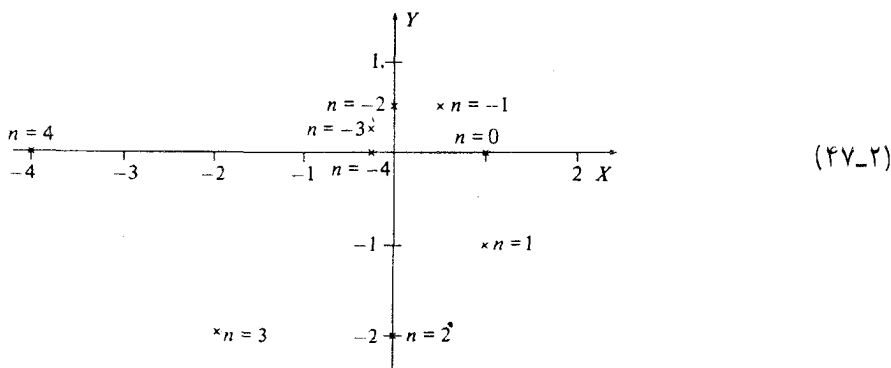


$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = -\frac{1}{4}\pi$$

ماتریس

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(-\frac{1}{4}\pi) & -\sin(-\frac{1}{4}\pi) \\ \sin(-\frac{1}{4}\pi) & \cos(-\frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix} \quad (۴۶-۲)$$

با ماتریس  $A$  یکی است، و یک دوران به اندازه زاویه  $-\frac{1}{4}\pi$  (دوران  $45^\circ$  در جهت ساعتگرد) و یک اتساع به اندازه  $\sqrt{2}$  را نشان می‌دهد. بی آنکه به محاسبه بیشتری نیاز باشد،  $B^n$  یک دوران به اندازه  $-\frac{1}{4}n\pi$  و یک اتساع به اندازه  $2^{n/2}$  را نمایش می‌دهد، لذا نقطه مطلوب عبارت‌اند از



مسائل

۱. نوع و شکل استاندارد  $B$ ی ماتریسهای  $A$ ی زیر را به دست آورید.  $B$  چه نوع تبدیلی را نشان می‌دهد و آیا حافظ مساحت است یا نه.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (ب)} ; \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ (د)} ; \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ (ج)}$$

۲. نشان دهید که اگر  $B = MAM^{-1}$  باشد،  $\text{Det} B = \text{Det} A$  است و ویژه مقادیرهای  $A$  با ویژه مقادیرهای  $B$  یکی هستند.



۲۸ تبدیلیهای خطی یک صفحه

۳. تبدیلی که به وسیله ماتریس

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

نشان داده می شود از چه نوع است و شکل استاندارد  $B$  ی آن چیست؟ آیا  $B$  یک فشرش، یک دوران یا یک برش را نمایش می دهد؟ طرح نقاط  $B^n$  را برای اعداد صحیح  $n$  در صفحه  $(X, Y)$  رسم کنید.

۴. نشان دهید که هرگاه یک ماتریس حقیقی  $M$  با دترمینان مثبت وجود داشته باشد که  $A$  را به وسیله معادله ۲-۱۷ به شکل استاندارد  $B$  واگرداند، آنگاه یک ماتریس حقیقی  $M'$  با همان خواص وجود دارد که نمایانگر یک تبدیل حافظ مساحت است. این ماتریس  $M'$  را، صریحاً، برحسب عناصر و ویژه مقدارهای  $A$  برای نوع ۱ و نوع ۲ به دست آورید.

۵. نشان دهید که اگر

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

از نوع ۳ و  $b = 0$  باشد، باید در شکل استاندارد باشد و لذا  $M$  می تواند ماتریس واحد باشد. نشان دهید که اگر  $c = 0$  و  $b \neq 0$  باشد، ماتریس

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$  را به شکل استاندارد وا می گرداند.

۶. ماتریسهای نمایانگر تبدیلیهای زیر را به دست آورید:

(الف) یک دوران به زاویه  $120^\circ$ ؛

(ب) یک فشرش استاندارد که  $(1)$  را به  $(3)$  تبدیل می کند.

۷. نشان دهید که هرگاه  $A$  نمایانگر یک دوران کلی باشد، آنگاه  $b \neq 0$  و  $c \neq 0$  است.





## دستگاههای خودگردان مرتبه دوم

### ۱-۳ دستگاههای مرتبه $n$ ام

اکثر دستگاهها، از دستگاههای مرتبه اول که در فصل نخست آنها را توصیف کردیم، بسیار پیچیده ترند. غیر از موارد حدی بسیار استثنایی، همه دستگاههای مکانیکی نیوتونی نظیر هر دستگاهی با بیش از یک مؤلفه، یا بیش از یک جهت حرکت، از مراتب بالاتر از مرتبه اول هستند.

یک دستگاه مرتبه  $n$ ام با دو خاصیت تعیین می شود

(۱) حالت دستگاه با  $n$  متغیر حقیقی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  و یا با یک متغیر بردار  $\mathbf{r}$  حقیقی  $n$  بعدی، که آنها را می توان به عنوان مختصات در یک فضای انتزاعی  $n$  بعدی به نام فضای فاز تلقی کرد، نمایش داده می شود.

(۲) حرکت دستگاه با یک تابع برداری از زمان  $\mathbf{r}(t)$ ، که در یک معادله دیفرانسیل برداری مرتبه اول حرکت به شکل زیر صدق کند، نمایش داده می شود

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (1-3)$$

که در آن  $\mathbf{v}$  یک تابع سرعت برداری و به اندازه کافی خوشرفتار از  $\mathbf{r}$  و  $t$  است، و مقدار آن به ازای  $\mathbf{r}$  و  $t$  خاص، سرعت فاز است.

معادله دیفرانسیل ۱-۳ معادله حرکت یا معادله تغییرات دستگاه است. شرایط لازم در  $v$  برای این که جواب ۱-۳ معین و یکتا باشد، در پیوست ۱ آمده است.

وقتی که تابع سرعت، مستقل از زمان است، دستگاه خودگردان است. در آن صورت، جواب تنها از طریق تفاضل  $t - t_0$  به زمان  $t$  و زمان اولیه  $t_0$  بستگی دارد برای دستگاه‌های مرتبه بالاتر معمولاً جوابی مانند ۱-۳ وجود ندارد، لذا روشهای کیفی در آنها از اهمیت بیشتری برخوردارند. طی یک حرکت خاص دستگاه که با تابع  $\mathbf{r}(t)$  توصیف شده است، حالت‌های دستگاه به صورت یک منحنی پیوسته در فضای فاز، به نام منحنی فاز، نمایان می‌شوند. در اکثر دستگاه‌ها حرکت در هر زمان با حالت دستگاه در یک زمان خاص، که معمولاً در  $t = 0$  است، تعیین می‌شود. در آن صورت معادلات دیفرانسیل ۱-۳ یک جواب یکتای  $\mathbf{r}(t)$ ، به‌ازای مقدار معلوم  $\mathbf{r}(0)$  یعنی شرایط اولیه معلوم دارند. دستگاه‌هایی که حرکت مختوم دارند، از این قاعده مستثنی هستند. مجموعه همه حرکت‌های ممکن جریان فاز خوانده می‌شود.

برای دستگاه‌های مرتبه دوم، فضای فاز می‌تواند یک صفحه، یا بخشی از یک صفحه، یا یک استوانه، یا سطح پیچیده‌تری باشد. ابتدا فرض می‌کنیم که یک صفحه است و بردار  $\mathbf{r}$  مؤلفه‌های دکارتی  $(x, y)$  را دارد، به‌طوری که

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (2-3)$$

معادله دیفرانسیل برداری، برحسب مؤلفه‌ها به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = u_x(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = u_y(x, y, t) \end{aligned} \quad (3-3)$$

که دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول جفت شده برای  $x(t)$  و  $y(t)$  هستند. اگر دستگاه خودگردان باشد،  $t$  به‌عنوان شناسه در  $u_x$  و  $u_y$  نمی‌آید، و در این صورت یک معادله دیفرانسیل برای منحنی فاز، با حذف زمان از معادله ۳-۳ به دست می‌آید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y(x, y)}{u_x(x, y)} \quad (4-3)$$

به‌عنوان مثال، ذره‌ای مقید به حرکت در یک بعد، تحت کشش نیروی  $F$  که تابع موضع ذره  $x$  است ولی به زمان و نیز به سرعت بستگی ندارد، در معادله حرکت نیوتون صدق می‌کند:

$$m = \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = F(x) \quad (5-3)$$



اگر  $y = \dot{x}$  و  $\mathbf{r} = (x, y)$  قرار دهیم، می‌توانیم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ۳-۵ را به صورت دو معادله مرتبه اول جفت شده

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = F(x)/m \quad (۶-۳)$$

یا یک معادله برداری

$$\dot{\mathbf{r}} = (y, F(x)/m) \quad (۷-۳)$$

بنویسیم که دارای شکلهای استاندارد ۳-۳ و ۱-۳، با سرعت فاز

$$v(x, y) = (y, F(x)/m) \quad (۸-۳)$$

هستند. بنابراین دستگاه از مرتبه دوم است. توجه کنید در حالی که جزء اول بردار سرعت فاز یک سرعت فیزیکی است، جزء دوم آن یک شتاب فیزیکی است.

به‌طور کلی، هر مجموعه متناهی از معادلات دیفرانسیل جفت شده که حرکت یک دستگاه را تعیین می‌کند می‌تواند با تعیین مشتقات بالاتر به‌عنوان متغیر وابسته جدید، به شکل استاندارد ۱-۳ بیان شود، همچنانکه در مثال اخیر شده است. کمترین تعداد معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جفت شده که در این فرایند به‌دست می‌آیند، به تعداد مرتبه دستگاه است. یک دستگاه نیوتونی غیرمقید با  $N$  درجه آزادی، یک دستگاه از مرتبه  $2N$  است.

## ۳-۲ جریانهای فاز دستگاههای خودگردان مرتبه دوم

اکنون فقط دستگاههای خودگردان مرتبه دوم را در نظر می‌گیریم و حرکتهای ممکن چنین دستگاهی را با یک نمودار در صفحه فاز که نمودار فاز نامیده می‌شود، نمایش می‌دهیم. بدین طریق می‌توانیم رفتار کیفی دستگاه را بدون نیاز به جواب صریح، به‌دست بیاوریم. شیوه کار مشابه با روشی است که برای دستگاههای مرتبه اول به‌کار گرفتیم و خواننده با آن آشناست.

تابع سرعت  $v(\mathbf{r})$  را با مجموعه‌ای از پیکانها که بزرگی و جهتشان با سرعت موضعی متناسب است، به شرح زیر نمایش می‌دهیم. یک شبکه مناسب از نقاط واقع در صفحه فاز را انتخاب می‌کنیم و از هر نقطه  $P$ ، پیکان کوتاهی که مرکز آن روی  $P$  است برای نشان دادن بردار سرعت رسم می‌کنیم. طول پیکان با بزرگی سرعت متناسب است و جهتش با جهت آن یکی است.

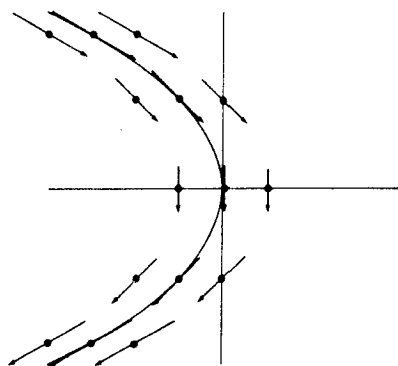
## مثال ۱-۳

مورد خاص ذره‌ای را که آزادانه در جهت عمود بر میدان گرانشی زمین سقوط می‌کند در نظر

می‌گیریم، میدان گرانش را یکنواخت فرض می‌کنیم. بردار سرعت فاز عبارت است از

$$v(x, y) = (y, -g) \quad (9-3)$$

و نمودار فاز به صورت زیر است



(۱۰-۳)

پیکانها، جریان فاز را نشان می‌دهند و کل نمودار به نمایش جریان یک شاره شبیه است. هر یک مسیر، با حرکت ذره‌ای که به وسیله شاره کشانده شود نمایش داده می‌شود. منحنی فاز را می‌توان با دنبال کردن پیکانها و درونیابی، هر کجا که لازم باشد، ترسیم کرد. منحنی فاز باید در مرکز پیکانها بر آنها مماس باشد.

مثالی که انتخاب کرده‌ایم، یکی از آن دستگاه‌های استثنایی است که جواب تحلیلی برایشان امکان‌پذیر است. معادلات حرکت ۶-۳ را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g \quad (11-3)$$

با جوابهای

$$x(t) = x_0 + y_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad y(t) = y_0 - gt \quad (12-3)$$

که در آن  $(x_0, y_0)$  نقطه فاز در  $t = 0$  است. تابع برداری  $(x(t), y(t))$  حرکت را معین می‌کند. بنا به معادله ۴-۳، منحنیهای فاز در معادله

$$\frac{dy}{dx} = -g/y \quad (13-3)$$

صدق می‌کند، که جوابهای آن

$$x = x_1 - y^2/2g \quad (۱۴-۳)$$

است که در آن  $x_1$  ارتفاع است وقتی  $y = 0$  باشد. نمودار ۳-۱۰ یک منحنی فاز این حرکت را نشان می‌دهد. باید تأکید کنیم که جوابهای تحلیلی معمولاً قابل حصول نیستند، از این رو روش تحلیلی به ندرت می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. اما جوابهای تحلیلی موضعی که در بخشی از فضای فاز تقریباً معتبرند، عموماً قابل حصول و بسیار مفیدند، به‌ویژه در همسایگی نقاط ثابت.

### ۳-۳ نقاط ثابت، تعادل و پایداری

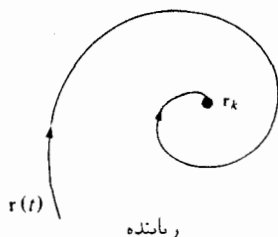
نقطه  $r_k$  که در آن سرعت فاز  $v(r_k)$  صفر است، نقطه ثابت نام دارد، و یک دستگاه را در تعادل نمایش می‌دهد:

$$v(r_k) = 0 \iff r_k \text{ یک نقطه ثابت است} \quad (۱۵-۳)$$

بنابراین برای یک آونگ مقید به حرکت در یک صفحه قائم، نقاط ثابت، نقاطی در فضای فاز هستند که آونگ را در وضعیت قائم رو به پایین و قائم رو به بالا نمایش می‌دهند. یک دستگاه در حال تعادل در همان حالت می‌ماند، اما احتمال بسیار اندکی وجود دارد که دقیقاً در حالت تعادل باشد؛ بنابراین رفتار دستگاه با پایداری نقطه ثابت تعیین می‌شود، و دستگاههای مرتبه بالا حساستر از دستگاههای مرتبه اول رفتار می‌کنند. در آونگ مثال ما، پایداری برای دو نقطه ثابت به‌وضوح متفاوت است. هرگاه

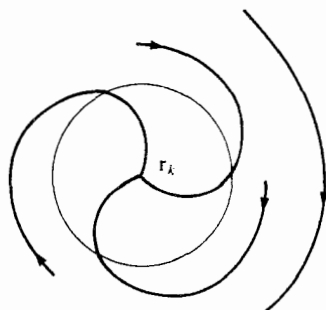
$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r_k \quad (۱۶-۳ \text{ الف})$$

باشد، می‌گوییم نقطه ثابت  $r_k$  یک ریباینده حرکت  $r(t)$  است



(۱۶-۳ ب)

نقطه  $r_k$  قویاً پایدار یا پایدار مجانبی است، هرگاه یک ریباینده برای حرکت در امتداد همه منحنیهای فازی که از یک همسایگی از  $r_k$  می‌گذرند باشد.

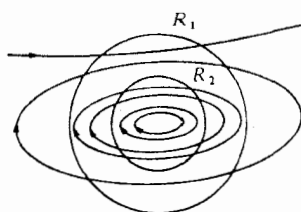


(۱۷-۳)

نقطه ثابت قویاً پایدار

انتخاب درون یک دایره به مرکز  $r_k$  به عنوان همسایگی، در بیشتر موارد بسیار مفید است. هر پایداری، پایداری قوی نیست. برای تعریف پایداری به طور کلی، به توضیحات زیر نیازمندیم: یک ناحیه  $R_1$  از فضای فاز را وقتی می‌گوییم شامل حرکت از ناحیه‌ای دیگر از فضای فاز،  $R_2$  است که تمام حرکت به مبدأ  $R_2$  در زمان  $t = 0$  به ازای  $t \geq 0$  درون  $R_1$  بماند، یعنی

$$r(0) \in R_2 \Rightarrow r(t) \in R_1 \quad (t \geq 0) \quad (3-18 \text{ الف})$$



(۱۸-۳ ب)

واضح است که  $R_2$  تماماً درون  $R_1$  است. یک نقطه ثابت  $r_k$  هنگامی پایدار است که هر همسایگی  $r_k$  شامل حرکت از همسایگی دیگری از  $r_k$  باشد. در ۱۸-۳ ب جریان پیرامون یک نقطه ثابت را که پایدار است، اما نه قویاً پایدار، نشان داده‌ایم. یک چنین پایداری برای دستگاههای هامیلتونی مهم است. نقطه ثابتی که پایدار نیست، ناپایدار است. همه نقاط قویاً پایدار، پایدارند، اما عکس این درست نیست.

### ۴-۳ تفکیک متغیرها

نقاط ثابت بسیار متنوع‌اند. ما فقط نقاط ثابت منزوی، در دستگاههای مرتبه دوم را بررسی می‌کنیم و چند مثال ساده را با استفاده از روش جداسازی متغیرها، که در آن یک دستگاه مرتبه دوم به یک زوج دستگاه مرتبه اول مستقل ساده شده است، مطرح می‌کنیم. آنگاه این مثالهای ساده چارچوبی را تشکیل می‌دهند که بعداً بر پایه آن نظریه رده‌بندی عام بنا می‌شود.

یک دستگاه مرتبه دوم تفکیک پذیر است، اگر مختصات  $(x_1, x_2)$  آن، چنان باشند که معادلات حرکت به شکل زیر در آید

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1), \quad \dot{x}_2 = u_2(x_2) \quad (۱۹-۳)$$

ما، هم دستگاههایی را در نظر می‌گیریم که در مختصات دکارتی تفکیک پذیر هستند، و هم دستگاههای دیگری که در مختصات قطبی تفکیک می‌شوند.

روشن است که هرگاه  $x_1 = a$  نقطه‌ای ثابت در یک دستگاه مرتبه اول باشد، و  $x_2 = b$  نقطه‌ای ثابت در یک دستگاه مرتبه اول دیگر، آنگاه

$$r_1 = (a, b) \quad (۲۰-۳)$$

یک نقطه ثابت در دستگاه مرتبه دوم مرکب از این دو است. علاوه بر این، جریان در همسایگی  $r_1$  با جریانهای همسایگیهای  $x_1 = a$  و  $x_2 = b$  تعیین خواهد شد.

اکنون می‌توانیم نظریه نقاط ثابت دستگاههای مرتبه اول را که در فصل نخست ارائه شد، برای مثالهایی در دستگاههای مرتبه دوم، به کار بگیریم. رجوع به فصل اول به خاطر این مثالها، خواننده را یاری خواهد کرد.

همه مثالهای ما خطی‌اند چون که آسانترین مثالها هستند، اما همینها می‌توانند برای رده‌بندی نقاط ثابت دستگاههای غیرخطی نیز مورد استفاده قرار گیرند، چنانکه بعداً نشان خواهیم داد.

### مثال ۲-۳ تفکیک پذیری دکارتی

دو دستگاه از نوع مثال ۳-۱ را با هم ترکیب می‌کنیم تا معادله‌های حرکت

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y \quad (۲۱-۳)$$

را به دست آوریم، که جوابهایشان عبارت‌اند از

$$x = x_0 e^{\lambda_1 t}, \quad y = y_0 e^{\lambda_2 t} \quad (۲۲-۳)$$

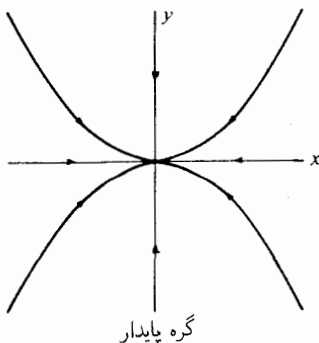
منحنیهای فاز برای دستگاه مرتبه دوم، با حذف  $t$  از معادلات بالا به دست می‌آیند

$$(x/x_0)^{\lambda_2} = (y/y_0)^{\lambda_1} \quad (۲۳-۳)$$

شکل این منحنیهای فاز، به پایداری تعادل در هر زیر دستگاه بستگی دارد. اگر هر دوی آنها پایدار یا ناپایدار باشند،  $\lambda_1/\lambda_2$  مثبت است و منحنیهای فاز سهمیهای تعمیم یافته هستند که از مبدأ

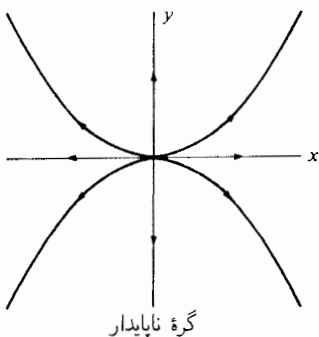
می‌گذرند، مثل این گره پایدار برای  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$





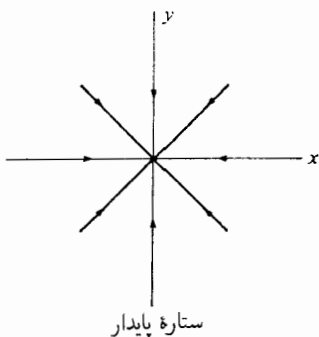
(۲۴-۳)

یا شبیه این گره ناپایدار برای  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$



(۲۵-۳)

و یا شبیه این ستاره پایدار برای  $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$

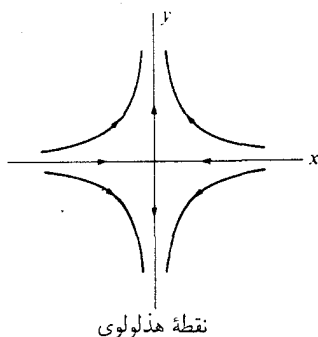


(۲۶-۳)

همه گره‌های پایدار، قویاً پایدار هستند. هرگاه  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  باشد، نقطه ثابت یک گره پایدار، شبیه ۲۴-۳ است، اما به اندازه یک زاویه قائمه دوران یافته است؛ همین‌طور اگر  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  باشد نقطه ثابت یک گره ناپایدار است شبیه ۲۵-۳، اما به اندازه زاویه قائمه دوران یافته است. ستاره ناپایدار، وقتی  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  است به وجود می‌آید و با واگرداندن پیکانها در ستاره پایدار حاصل می‌شود.



اگر یکی از زیر دستگاهها پایدار و دیگری ناپایدار باشد، به طوری که  $\lambda_1/\lambda_2$  منفی بشود، منحنیهای فاز، هذلولیهای تعمیم یافته‌ای شبیه به این نقطه هذلولوی با  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  می‌شوند،



(۲۷-۳)

هر گاه  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  باشد، پیکانها و گردانده می‌شوند. نقاط هذلولوی ناپایدارند.

**مثال ۳-۳ تفکیک‌پذیری قطبی**  
فرض کنید که یک دستگاه در مختصات قطبی تفکیک‌پذیر است

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta \quad (۲۸-۳)$$

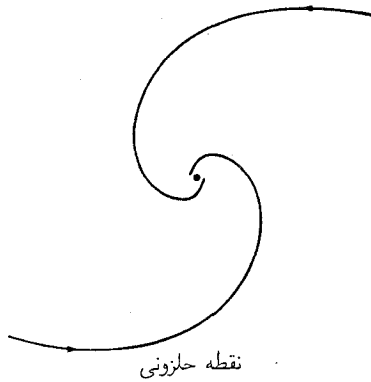
در این صورت فضای فاز دستگاه مرتبه اول در  $r$ ، یک مرز طبیعی در  $r = 0$  دارد که باید یک نقطه ثابت باشد، و فضای فاز دستگاه مرتبه اول در  $\theta$ ، باید یک دایره باشد. به دلیل خطی بودن، معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \omega \quad (۲۹-۳)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\omega$  مقادیر ثابت حقیقی هستند که یک نقطه ثابت در مبدأ فضای  $r$  را مشخص می‌کنند. دستگاههای مرتبه اول که با معادلات ۲۹-۳ نمایش داده می‌شوند، در فصل اول به صورت مثالهای ۱-۳ و ۱-۲ آمده‌اند.

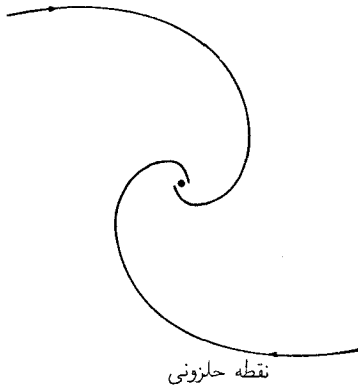
با ترکیب این مثالها، ملاحظه می‌کنیم که نمودارهای فاز، شبیه این نقطه حلزونی به‌ازای  $\alpha < 0$  و  $\omega > 0$  هستند

(۳۰-۳)



و یا شبیه این نقطه حلزونی به ازای  $\omega < 0, \alpha < 0$

(۳۱-۳)



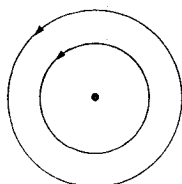
اینها نقاط حلزونی قویاً پایدار هستند. برگرداندن علامت هر دوی  $\omega$  و  $\alpha$  پیکانهایی روی نمودارها را برمی گرداند، و نقاط حلزونی ناپایدار را حاصل می کند. جوابهای معادلات ۲۹-۳ عبارت اند از

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \omega t + \theta_0. \quad (۳۲-۳)$$

بنابراین منحنیهای فاز حلزونی دارای معادلات

$$r = r_0 \exp[\alpha(\theta - \theta_0)/\omega] \quad (۳۳-۳)$$

هستند. اگر  $\omega = 0$  باشد، باز هم ستاره به دست می آید؛ اما به ازای  $\alpha = 0$  و  $\omega > 0$ ، نمودارهای فاز شبیه این هستند:



نقاط بیضوی

(۳۴-۳)

این، یک نقطه بیضوی یا مرکز بیضوی پایدار است که در آن بیضی‌ها به صورت دایره در آمده‌اند. نقاط بیضوی پایدارند، اما نه قویاً پایدار. تغییر علامت  $\omega$ ، پیکانها را برمی‌گرداند و پایداری را نگه می‌دارد.

در مختصات دکارتی متعامد، معادلات حرکت ۲۹-۳ به صورت زیرند

$$\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \quad (۳۵-۳)$$

که برای بخش بعدی لازمند.

### ۵-۳ رده‌بندی نقاط ثابت

نظریه عام، به طور عمده مبتنی بر مثالهای خاص فوق است. برای ساده‌تر شدن، فرض کنیم که مبدأ مختصات به نقطه ثابتی که پایداری آن مورد بررسی است انتقال یافته است، و تابع سرعت می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$v(\mathbf{r}) = A\mathbf{r} + O(|\mathbf{r}|^2) \quad (۳۶-۳)$$

که در آن  $A$  ماتریس  $2 \times 2$ ، حقیقی، غیرتکین است

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (۳۷-۳)$$

در نزدیکی مبدأ، جمله‌های غیرخطی  $\mathbf{r}$  می‌توانند نادیده گرفته شوند، به طوری که پایداری را می‌توان به صورت حرکت خطی تحلیل کرد:

$$\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} \quad (۳۸-۳)$$

یا

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (۳۹-۳)$$

فرض کنیم  $R = (X, Y)$  مختصات برداری جدید باشد که از  $r$  با تبدیل خطی وارون پذیر به دست آمده است.

$$R = Mr \quad (40-3)$$

که در آن  $M$  یک ماتریس  $2 \times 2$ ، غیرتکین ثابت است. در دستگاه مختصات جدید معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\dot{R} = BR, \quad B = MAM^{-1} \quad (41-3)$$

بنا بر نظریه عام از فصل دوم، می‌توان برای هر ماتریس  $A$ ، یک ماتریس تبدیل پیدا کرد که برای آن،  $B$  از نوع ۱، ۲ یا ۳ است. هر کدام از اینها نقاط ثابت متفاوتی به دست می‌دهند.

نوع ۱: ویژه مقدارهای  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  حقیقی و متمایزند  
معادلات حرکت در مختصات  $(X, Y)$  عبارت‌اند از

$$\dot{X} = \lambda_1 X, \quad \dot{Y} = \lambda_2 Y \quad (42-3)$$

که همان شکل معادلات ۲۱-۳ را دارند و نقطه ثابت یک گروه پایدار یا ناپایدار، یک ستاره، یا یک نقطه هذلولوی، برای شرایط مختلف  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  است، چنان که در مثال ۲-۳ نشان داده‌ایم.

نوع ۲: ویژه مقدارها مختلط‌اند  $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ ،  $\lambda_2 = \alpha - i\omega$ ، همان شکل معادلات ۳۵-۳ را دارند و نقطه ثابت یک نقطه حلزونی پایدار یا ناپایدار یا یک نقطه بیضوی است. چنان که در مثال ۳-۳ نشان داده‌ایم.

نوع ۳: ویژه مقدارها حقیقی و متساویند  
اینها باید به صورت دو مورد جداگانه بررسی شوند. اگر  $b = c = 0$  باشد،  $a = d$  است؛ معادلات حرکت با ۲۱-۳ به دست می‌آیند و نقطه ثابت یک ستاره پایدار یا ناپایدار است.  
هرگاه  $c \neq 0$  باشد، آنگاه از فصل دوم داریم

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ c & \lambda \end{pmatrix} \quad (43-3)$$

و معادلات حرکت ۴۱-۳ و جوابهای آنها به صورت زیر در می‌آیند

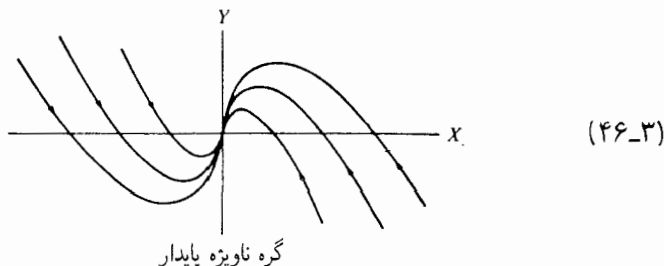
$$\begin{aligned} \dot{X} &= \lambda X & \dot{Y} &= cX + \lambda Y \\ X &= X_0 e^{\lambda t} & Y &= (Y_0 + cX_0 t) e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (44-3)$$



برای  $t$  به اندازه کافی بزرگ، جمله  $Y_0$  می‌تواند نادیده گرفته شود و می‌توان با حذف  $t$  به معادله منحنیهای فاز دست یافت

$$Y/X = \frac{c}{\lambda} \ln(X/X_0) \quad (45-3)$$

فرض کنید  $\lambda < 0$  باشد، در آن صورت  $\lambda^{-1} \ln(X/X_0)$  برای زمانهای به اندازه کافی کوتاه، منفی و برای زمانهای به اندازه کافی طولانی مثبت است، و چون  $X$  علامتش را نگه می‌دارد،  $Y$  علامت عوض می‌کند. همچنین از معادلات ۴۴-۳ نتیجه می‌شود که هرگاه  $Y \rightarrow 0, (Y/X) \rightarrow \infty$  و منحنیهای فاز بر محور  $Y$  مماس هستند و نمودار زیر را برای آنچه یک گره ناویژه پایدار خوانده می‌شود حاصل می‌کنند، با  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  و  $b \neq 0$  یا  $c \neq 0$ .

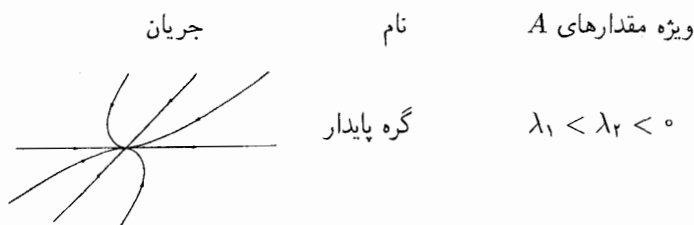


گره ناویژه پایدار

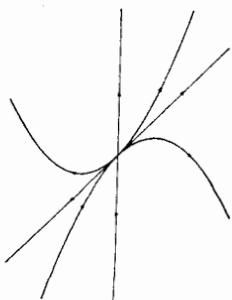
چنانچه  $\lambda > 0$  باشد، یک گره ناویژه ناپایدار، با جهت‌های وارونه، به دست می‌آید. با این بحث، بررسی نقاط ثابت با استفاده از مختصات  $R = (X/Y)$  تکمیل می‌شود. نوع تعادل در دستگاه مختصات اصلی  $r = (x, y)$  بدون تغییر است، اما شکل آن در تبدیل  $r = M^{-1}R$  تغییر می‌کند، لذا تنوع در جریانهای پیرامون نقاط ثابت بسیار بیشتر است. بعضی از این جریانها را در خلاصه زیر تصویر کرده‌ایم.

### ۳-۶ خلاصه رده‌بندی

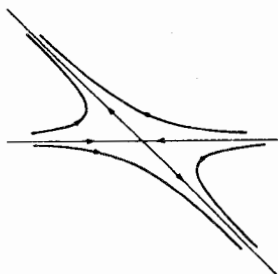
انواع مختلف نقاط ثابت به صورت زیرند



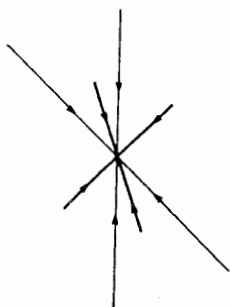
گره ناپایدار  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



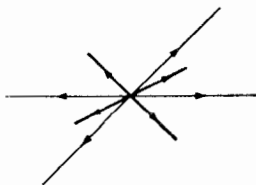
نقطه هذلولوی  
(ناپایدار)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

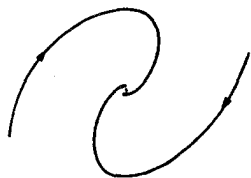


ستاره پایدار  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$   
 $b = c = 0$



ستاره ناپایدار  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$   
 $b = c = 0$

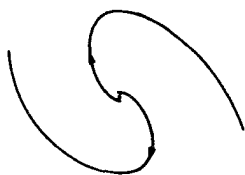




نقطه حلزونی پایدار

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + i\omega$$

$$\alpha < 0, \omega < 0$$



نقطه حلزونی ناپایدار

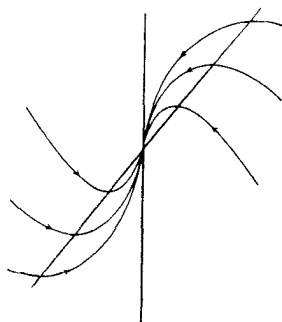
$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + i\omega$$

$$\alpha > 0, \omega < 0$$



نقطه بیضوی

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = i\omega$$



گره ناویژه پایدار

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

$$b \neq 0, c \neq 0$$

گره ناویژه ناپایدار با  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  نمودار مشابهی با پیکانهای برگشته دارد. مواردی را که در آنها ویژه مقادیر صفرند، بررسی نکرده‌ایم.

## ۷-۳ تعیین نقاط ثابت

هرگاه تابع سرعت  $v(x, y)$  یک دستگاه مرتبه دوم را داشته باشیم، می‌توانیم بسیاری از خصوصیات رفتاری دستگاه را با مطالعه جریان فاز آن توجیه کنیم. در نمودار فاز، هر نقطه ثابت، ساختار جریان فاز را در همسایگی خود نشان می‌دهد، و این دو با هم، اغلب اطلاعات خوبی از سرشت جریان در سراسر فضای فاز به ما می‌دهند.

برای یک دستگاه مفروض، ابتدا دستگاه معادلات

$$v_x(x, y) = 0, \quad v_y(x, y) = 0 \quad (47-3)$$

را حل می‌کنیم، تا موضع نقاط ثابت  $\mathbf{r}_k$  را تعیین کنیم، و سپس ماتریس  $A$  را برای جریان خطی شده در همسایگی هر  $\mathbf{r}_k$ ، به دست می‌آوریم. این کار را با استفاده از بسط تیلور روی معادله سرعت در پیرامون هر  $\mathbf{r}_k$ ، انجام می‌دهیم، اولین جمله غیر صفر در این بسط، جمله خطی است، بنابراین

$$\begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial v_x / \partial x & \partial v_x / \partial y \\ \partial v_y / \partial x & \partial v_y / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_k \\ y - y_k \end{pmatrix} + O(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2 \quad (48-3)$$

که در آن، مشتقها در  $\mathbf{r}_k$  محاسبه شده‌اند، از این‌رو، در پیرامون

$$\mathbf{v} = A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) + O(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2 \quad (49-3)$$

که در آن

$$A = \begin{pmatrix} \partial v_x / \partial x & \partial v_x / \partial y \\ \partial v_y / \partial x & \partial v_y / \partial y \end{pmatrix} \quad (50-3)$$

در عمل، این ماتریس را به‌عنوان تابعی از  $x$  و  $y$  محاسبه می‌کنیم، و آنگاه در نقاط ثابت، مقادیر را قرار می‌دهیم.

## مثال ۳-۴

نقاط ثابت دستگاهی را که مختصه  $x$  آن در معادله دیفرانسیل

$$\ddot{x} - \dot{x}^2 + x^2 - x = 0 \quad (51-3)$$

صدق می‌کند، پیدا کنید و نوع و پایداری آنها را معین سازید.





معادله از مرتبه دوم است، پس برای این که آن را به شکل استاندارد در آوریم، می‌نویسیم

$$v_x = \dot{x} = y \quad (۵۲-۳)$$

به طوری که  $v_y = \dot{y} = y^2 - x^2 + x$ .  
نقاط ثابت در ریشه‌های  $v_x = 0 = v_y$  هستند، یعنی در مبدأ  $(0, 0)$  و نقطه  $(1, 0)$ .  
ماتریس  $A$  عبارت است از

$$\begin{pmatrix} \partial v_x / \partial x & \partial v_x / \partial y \\ \partial v_y / \partial x & \partial v_y / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x & 2y \end{pmatrix} \quad (۵۳-۳)$$

در مبدأ ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  و ویژه مقادیر عبارت‌اند از  $\lambda = \pm 1$ ، که حقیقی‌اند و لذا مبدأ، یک نقطه ثابت هذلولوی است که ناپایدار است. در نقطه  $(1, 0)$ ، ماتریس  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  و ویژه مقادیر عبارت‌اند از  $\lambda = \pm i$ ، لذا این یک نقطه ثابت بیضوی است که پایدار است، اما نه قویاً پایدار.

### ۳-۸ چرخه‌های حدّی

در دستگاه‌های مرتبه اول، همه حرکتها به نقاط ثابت یا به بینهایت میل می‌کنند. این، در مورد دستگاه‌های مرتبه دوم صادق نیست. دستگاهی را در نظر بگیرید که در مختصات قطبی تفکیک‌پذیر است و حرکت شعاعی نقطه ثابتی به جز مبدأ دارد، مثلاً

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r(r - R) \quad (R > 0), \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (۵۴-۳)$$

روشن است که دایره  $r = R$  ناورداست، و نقاط ثابت به‌طور نامعین دور آن می‌چرخند، از این جهت به یک چرخه معروف است. در همسایگی  $r = R$  حرکت شعاعی به‌صورت خطی

$$\dot{s} = \lambda s \quad (s = r - R, \lambda = \alpha R) \quad (۵۵-۳)$$

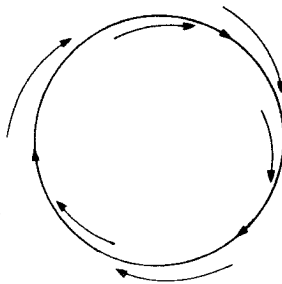
است، به طوری که حرکت از معادله

$$r - R = (r_0 - R)e^{\lambda t} \quad \theta = \omega t + \theta_0 \quad (۵۶-۳)$$

و منحنیهای فاز از

$$r = R + (r_0 - R) \exp[\lambda(\theta - \theta_0)/\omega] \quad (۵۷-۳)$$

به دست می‌آیند. به ازای  $\lambda < 0$ ، در همسایگی چرخه، وقتی که  $t \rightarrow \infty$  حرکت به سوی چرخه میل می‌کند، که در نمودار فاز نمایان است.



(۵۸-۳)

چرخه حد رباینده

رباینده، یک مجموعه ناوردای قویاً پایدار است. اگر  $\lambda$  مثبت باشد، جهت پیکانها رو به خارج چرخه است. دستگاهها از چرخه‌هایی که ناپایدار هستند دور می‌شوند.

چرخه‌های حدی معمولاً پایدار ساختاری هستند، و از اهمیت بسیاری در نظریه نوسانگرها برخوردارند، ولی ما آنها را به تفصیل بررسی نخواهیم کرد.

در معادلات ۵۴-۳ فرض کنید که  $\alpha = 0$  باشد. در آن صورت همه دایره‌های به مرکز مبدأ چرخه هستند، اما هیچکدام چرخه حدی نیستند. این مورد با تفصیل بیشتری، هنگام مطالعه دستگاههای هامیلتونی بررسی خواهد شد.

## مسائل

۱. نمودار فاز دستگاههایی را که دارای معادلات سرعت زیرند، رسم کنید

$$v(r) = (a, x) \quad (\text{ب}) \quad v(r) = (a, b) \quad (\text{الف})$$

$$v(r) = (2xy, y^2 - x^2) \quad (\text{د}) \quad v(r) = (x^2, y) \quad (\text{ج})$$

در این معادلات  $a$  و  $b$  مقادیر ثابتند، و  $b > a > 0$

۲. نقاط ثابت دستگاههای خطی زیر را رده‌بندی کنید و معلوم کنید که آیا ناپایدارند، پایدارند، یا قویاً پایدارند:

$$\dot{x} = 3x + 4y \quad \dot{y} = 2x + y \quad (\text{الف})$$

$$\dot{x} = 3x \quad \dot{y} = 2x + y \quad (\text{ب})$$

$$\dot{x} = x + 2y \quad \dot{y} = -2x + 5y \quad (\text{ج})$$

$$\dot{x} = x + 2y \quad \dot{y} = -5x + 4y \quad (\text{د})$$

۳. در دستگاههای خطی زیر، نقاط ثابت را رده‌بندی، و پایداری را بحث کنید

$$\dot{x} = x + 3y \quad \dot{y} = -6x + 5y \quad (\text{الف})$$

$$\dot{x} = x + 3y + 4 \quad \dot{y} = -6x + 5y - 1 \quad (\text{ب})$$

$$\dot{x} = x + 3y + 1 \quad \dot{y} = -6x + 5y \quad (\text{ج})$$

$$\dot{x} = 3x + y + \quad \dot{y} = -x + y - 6 \quad (\text{د})$$

۴. برای هر یک از دستگاههای زیر، نقاط ثابت منفرد را بیابید و آنها را رده‌بندی کنید

$$\dot{x} = -4y + 2xy - 8 \quad \dot{y} = 4y^2 - x^2 \quad (\text{الف})$$

$$\dot{x} = y - x^2 + 2 \quad \dot{y} = 2(x^2 - y^2) \quad (\text{ب})$$

۵. حرکت یک نوسانگر خطی میرا با معادله زیر توصیف شده است

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (0 < \alpha < 2\omega)$$

معادله را در شکل استاندارد بیان کنید و تابع سرعت فاز را به دست آورید. نقاط ثابت در کجا قرار دارند و نوع آنها چیست. نمودار فاز را رسم کنید آنچه را که به ازای  $\alpha \rightarrow 0$  و  $\alpha = 0$  در حرکت و نقاط ثابت رخ می‌دهد، توصیف کنید.

۶. معادلات مرتبه دوم زیر را در شکل استاندارد بنویسید، و نقاط ثابت منزوی آنها را پیدا و رده‌بندی کنید.

$$\ddot{x} - \dot{x} + x^2 - 2x = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\ddot{x} - \dot{x}^2 + x + 5 = 0 \quad (\text{ب})$$

۷. جمعیت یک میزبان،  $H(t)$ ، و یک انگل،  $P(t)$ ، به طور تقریبی با معادلات زیر توصیف می‌شوند:

$$\frac{dH}{dt} = (a - bP)H, \quad \frac{dP}{dt} = \left(c - \frac{dP}{H}\right)P, \quad H > 0$$

که در آن  $a, b, c$  و  $d$  مقادیر ثابت مثبت هستند. با تغییری مناسب در مقیاسها، نشان دهید که این معادلات را می‌توان به صورت ساده‌تر

$$\frac{dy}{d\tau} = (1 - x)y, \quad \frac{dx}{d\tau} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

در آورد، که در آن  $H, P$  و  $t$  به ترتیب متناسب‌اند با  $x, y$  و  $\tau$  و  $\alpha = c/a$  است. نقاط ثابت این معادلات را بیابید و رده‌بندی کنید. برای مورد  $\alpha = \frac{1}{2}$ ، جریان فاز را در راستای خطوط زیر



رسم کنید.

$$(الف) \quad y = x \quad (ب) \quad x = 1$$

$$(ج) \quad x = 0 \quad (د) \quad y = \beta x$$

در مورد اخیر، مقادیر ثابت  $\beta$  را بزرگتر و نیز کوچکتر از یک بگیرید. با استفاده از این داده‌ها، تمام منحنی فاز را رسم کنید.

۸. یک جمعیت روباه،  $F$ ، از یک جمعیت خرگوش،  $H$ ، تغذیه می‌کند. آهنگ مطلق زاد روباهها، با جمعیت روباهها و مقدار غذای دست یافتنی متناسب است یعنی با  $FH$ . خرگوشها در مصاف با روباهها می‌میرند و آهنگ مطلق زادشان با جمعیت خودشان متناسب است. آهنگ مرگ روباهها هم با جمعیت خودشان متناسب است. با این مفروضات نشان دهید که آهنگ تغییر جمعیت خرگوشها و روباهها به ترتیب از معادلات

$$\frac{dH}{dt} = aH - bHF \quad (H > 0)$$

$$\frac{dF}{dt} = cHF - dF \quad (F > 0)$$

پیروی می‌کنند، که در آنها  $a, b, c$  و  $d$  مقادیر ثابت مثبتی هستند که باید تعیین شوند. نقطه ثابت دستگاه را پیدا کنید و حرکت در همسایگی آن را توصیف کنید، و بگویید این توصیف برای جمعیت خرگوشها و روباهها چه معنا می‌دهد؟

۹. نشان دهید که در مسئله ۸، همه منحنیهای فاز بسته‌اند. یک نمودار نوعی از  $F(t)$  رسم کنید. اگر جمعیت خرگوشها، ناگهان در اثر یک بیماری واگیردار به شدت کاهش می‌یافت و خرگوشهای باقیمانده مصون از این بیماری می‌شدند آثار گوناگونی را که این رویداد می‌توانست روی دستگاه داشته باشد به‌طور کیفی بحث کنید.

۱۰. یک آونگ قائم میرا، دارای معادله حرکت

$$\ddot{\psi} + \alpha\dot{\psi} + \omega^2 \sin \psi = 0 \quad (\alpha > 0)$$

است که در آن  $\psi$  زاویه بین آونگ و راستای روبه پایین عمودی است. موضع و سرشت نقاط ثابت را تعیین کنید. برای نشان دادن همه خصوصیات کیفی حرکت، منحنیهای فاز را در یک ناحیه به اندازه کافی بزرگ فضای فاز رسم کنید. آنچه را که به ازای  $\alpha \rightarrow 0$  و  $\alpha = 0$  در حرکت و نقاط ثابت رخ می‌دهد، توصیف کنید.



۱۱. چرخه‌های حدّی دستگاه زیر را پیدا کنید:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

۱۲. همهٔ نقاط ثابت و چرخه‌های حدّی (اگر باشند) جریان دو بعدی به معادلهٔ

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(a \sin br^2)/r^2 + c(x\hat{\mathbf{y}} - y\hat{\mathbf{x}})$$

را رده‌بندی کنید.  $a$ ،  $b$  و  $c$  مقادیر ثابت و مثبت هستند و

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} \quad r = |\mathbf{r}|$$

۱۳. یک قایق پارویی در عرض رودخانه‌ای به پهنای  $a$  چنان رانده می‌شود که نوک آن همیشه به سوی یک نقطهٔ ثابت در ساحل مقابل است. حرکت قایق نسبت به آب رودخانه با تندی ثابت  $u$  و جریان آب رودخانه نسبت به ساحل با تندی  $v$  صورت می‌گیرد. نشان دهید که

$$\dot{x} = -ux/r, \quad \dot{y} = v - uy/r, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

است، که در آن، مبدأ مختصات را بر نقطهٔ ثابت که نوک قایق به سوی آن است و محور  $y$  را بر ساحل مقابل قرار داده‌ایم. خط  $x = a$  ساحل دیگر است. نشان دهید که منحنیهای فاز از معادلهٔ

$$r + y = a^\alpha x^{1-\alpha} \quad (\alpha = v/u)$$

به‌دست می‌آیند. این منحنیها را برای  $\alpha < 1$ ، در همسایگی مبدأ رسم کنید. در صورتی که  $\alpha > 1$  باشد، چه اتفاق می‌افتد؟

۱۴. نشان دهید برای دستگاهی که با معادلات

$$\dot{x} = -y + xr^2 \sin(\pi/r), \quad \dot{y} = x + yr^2 \sin(\pi/r), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

توصیف شده است. مبدأ، یک نقطهٔ ثابت بیضوی است. معادلات بالا را در مختصات قطبی بنویسید و بدین‌وسیله نشان دهید:



۵۰ دستگاہهای خودگردان مرتبۀ دوم

(الف) دایره‌های  $r = \frac{1}{n}$ ,  $(n = 1, 2, \dots)$  منحنیهای فازند؛

(ب) مسیرهای بین هر دو دایرۀ متوالی، حلزونیهایی به سمت مبدأ یا در جهت دور شدن از مبدأ هستند؛

(ج) منحنیهای فاز در بیرون  $r = 1$  نامحدودند.

## دستگاههای هامیلتونی پایستار با یک درجه آزادی

### ۴-۱ دستگاههای نیوتونی و هامیلتونی

دستگاههای دینامیکی اصلی، دستگاههای نیوتونی بودند و نمونه کلاسیکی کار نیوتون، تلقی وی از منظومه شمسی به عنوان مجموعه ای از اجسام است که بنابر قوانین دینامیکی بنیادی او در اثر یک نیروی معین، که در این مورد از قانون عکس مجذور حاصل می شود، حرکت می کنند. چنین دستگاهی، در معنایی که در این بخش بیان خواهیم کرد، هامیلتونی هم هست. البته شمار درجات آزادی آن بسیار زیاد است، درحالی که ما فقط به یک درجه آزادی خواهیم پرداخت. اکثر دستگاههای فصلهای ۱ و ۳، هامیلتونی نبودند. دستگاههای هامیلتونی، رده ای محدود اما پراهمیت در دستگاههای دینامیکی تشکیل می دهند که با نظریه اختصاصی شان در این فصل آشنا می شویم.

پیکربندی یک دستگاه دینامیکی با یک درجه آزادی، به وسیله نقطه ای در فضای پیکربندی یک بعدی با مختصه  $q$  نمایش داده می شود. یک مثال می تواند ارتفاع ذره ای باشد که مقید به حرکت عمودی است، یا زاویه دوران آونگی که حرکتش مقید به یک صفحه عمودی است.

فرض کنید که یک دستگاه دینامیکی از قوانین حرکت نیوتون پیروی می کند: در این صورت

پیکربندی در زمان  $t$ ، حرکت را در سرتاسر زمان معین نمی‌کند؛ بلکه یک اندازه حرکت  $p$  نیز لازم است. مختصه  $q$  و اندازه حرکت  $p$ ، در فضای فاز دوبعدی نقطه‌ای چون  $(q, p)$  را در فضا مشخص می‌کنند که نمایانگر یک حالت دستگاه است. حالت دستگاه در زمان  $t$ ، حرکت را برای سرتاسر زمان معین می‌کند. دستگاه نیوتونی با یک درجه آزادی، یک دستگاه دینامیکی مرتبه دوم است.

هرگاه  $q$  جابه‌جایی ذره‌ای به جرم  $m$  در یک جهت معلوم، و  $p$  اندازه حرکت خطی آن در همان جهت باشد، و فرض کنیم که نیروی متناظر وارد بر ذره از تابع  $F(q, t)$  به دست آید، آنگاه معادله حرکت و تعریف اندازه حرکت، از شکل استاندارد ۳-۳ حاصل می‌شوند؛ به این صورت

$$\dot{q} = p/m \quad (۱-۴ \text{ الف})$$

$$\dot{p} = F(q, t) \quad (۱-۴ \text{ ب})$$

حرکت دستگاه از جواب این معادلات که دارای شکل استاندارد ۱-۳ برای دستگاه‌های مرتبه دوم است، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{r} = (q, p) \quad \mathbf{v}(q, p, t) = (p/m, F(q, t)) \quad (۲-۴)$$

که در آن  $v$  سرعت فاز است. یادآوری می‌کنیم که این سرعت فاز با سرعت  $\dot{q}$  ذره در فضای پیکربندی عادی، یکی نیست.

چون دستگاه فقط یک درجه آزادی دارد، نیرو در معادله ۱-۴ ب می‌تواند همیشه از یک پتانسیل  $V(q, t)$  مشتق شود

$$F(q, t) = -\frac{\partial V}{\partial q}(q, t) \quad (۳-۴)$$

که در آن

$$V(q, t) = -\int_{q_0}^q dq' F(q', t) \quad (۴-۴)$$

قسمت دست راست ۱-۴ الف هم می‌تواند به صورت یک مشتق بیان شود

$$p/m = \frac{d}{dp} \left( \frac{p^2}{2m} \right) \quad (۵-۴)$$



تابع هامیلتونی یا هامیلتونی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(q, t) \quad (۶-۴)$$

به طوری که معادلات ۱-۴ را می‌توان به صورت معادله هامیلتون حرکت نوشت که عبارت‌اند از

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \quad (۷-۴ \text{ الف})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \quad (۷-۴ \text{ ب})$$

و سرعت فاز عبارت است از

$$v = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{-\partial H}{\partial q} \right) \quad (۸-۴)$$

در مثالهایی که مطرح کردیم، هامیلتونی ۶-۴ مجموع یک انرژی جنبشی  $p^2/2m$  و یک انرژی پتانسیل  $V(q, t)$  است. اما دستگاههای بسیاری وجود دارند که هامیلتونی آنها به این شکل نیست.

دستگاه هامیلتونی با یک درجه آزادی، یک دستگاه مرتبه دوم است که حرکت آن با معادلاتی به صورت ۷-۴ تعیین می‌شود. علاوه بر دستگاههای مکانیکی معروف، دستگاههای هامیلتونی الکتریکی، زیست‌شناختی، هواشناختی، و اقتصادی هم وجود دارند.

در همه موارد، مختصه  $q$  معادله ۷-۴ به مختصه تعمیم یافته و کمیت  $p$  به اندازه حرکت مزدوج آن معروف‌اند. زوج  $(q, p)$  متغیرهای مزدوج خوانده می‌شوند. به طور کلی، نه لازم است که  $q$  پیکربندی دستگاه را نمایش دهد و نه لازم است که  $p$  یک اندازه حرکت فیزیکی باشد، هر چند که اکثراً این معنا را دارند. به سبب همین عمومیت و کلیت است که برای جابه‌جایی ذره، عوض  $x$  از  $q$  استفاده می‌کنیم، و علامتگذاری به کار رفته در فصل ۳ را تغییر می‌دهیم.

## ۲-۴ دستگاههای پایستار

یک دستگاه هامیلتونی خودگردان، دارای تابع هامیلتونی

$$H = H(q, p) \quad (۹-۴)$$

است که مستقل از زمان است، و دستگاه پایستار نامیده می‌شود.



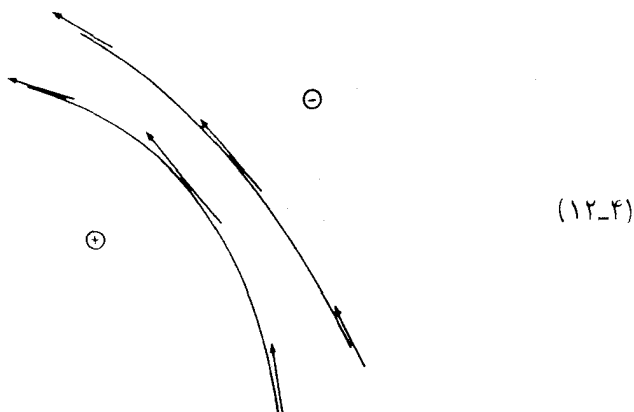
برای یک حرکت معلوم، با استفاده از معادلات هامیلتون ۷-۴، آهنگ تغییر مقدار هامیلتونی از روابط

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left( -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0.\end{aligned}\quad (۱۰-۴)$$

به دست می‌آید، به طوری که مقدار هامیلتونی همیشه پایسته است، و به همین دلیل، دستگاه پایستار خوانده می‌شود. در دستگاه‌های نیوتونی، این مقدار با انرژی برابر است. گرادیان تابع هامیلتون عبارت است از

$$\nabla H(q, p) = \left( \frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) \quad (۱۱-۴)$$

از ۱۰-۴ و ۱۱-۴ ملاحظه می‌شود که سرعت فاز  $v = (\dot{q}, \dot{p})$  دستگاه پایستار، با گرادیان هامیلتونی برابر، و در جهت عمود بر آن است.



(۱۲-۴)

چون هامیلتونی پایسته است، حرکت در راستای منحنیهای  $H$  ثابت واقع می‌شود.

به سبب این خواص، نمودار فاز یک دستگاه هامیلتونی با پُر بند، یا منحنیهای  $H$  ثابت کشیده می‌شود. تفاوت بین مقادیر  $H$  در پُر بندهای همسایه، در سرتاسر صفحه فاز یکی است. این شبیه یک نقشه پُر بند جغرافیایی است که در آن  $H(q, p)$  نمایانگر ارتفاع از سطح دریای نقطه  $(q, p)$  است. از ۸-۴ چنین بر می‌آید که بزرگی سرعت فاز، با فاصله بین پُر بندهای همسایه، نسبت عکس دارد. اراضی «مرتفع» و «پست» می‌توانند با علائم  $\oplus$  و  $\ominus$  نموده شوند. در آن صورت،

منحنیهای فاز، که آنها هم پربند هستند، با اختصاص دادن علایم  $\oplus$  به چپ و  $\ominus$  به راست مشخص می‌شوند. تمامی اطلاعات دربارهٔ حرکت یک دستگاه هامیلتونی پایستار، به وسیلهٔ این نمودار فاز ساده شده، فراهم می‌شود و نیازی به ترسیم شبکهٔ پیکانها در صفحهٔ فاز که در دستگاههای خودگردان عام در فصلهای یک و سه به کار گرفتیم، نیست.

پربندهای تابع هامیلتونی  $H(q, p)$ ، مجموعه‌های ناوردای دستگاه هستند. دستگاههای هامیلتونی نقاط ثابتی دارند که آنها نیز مجموعه‌های ناوردایند. نقاط ثابت در جایی که  $v = 0$  است پیش می‌آیند، به طوری که در معادلهٔ ۸-۴ گرادیان هامیلتونی صفر می‌شود

$$\left( \frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) = \nabla H = 0 \quad \text{نقاط ثابت} \quad (۱۳-۴)$$

در نقاط ثابت، دستگاه در تعادل است. موضع و سرشت این نقاط در تعیین طرح کلی حرکت به ما کمک می‌کند. در بخش زیر، دستگاههای خطی، این مطلب به وضوح نمایانده شده است.

## ۳-۴ دستگاههای پایستار خطی

مانند فصل پیش، نخست چند مثال ساده از رفتار دستگاههای خطی می‌آوریم، و آنگاه نشان می‌دهیم که این مثالها می‌توانند برای یک تحلیل عام به کار گرفته شوند. مثالهایمان را از مکانیک نیوتونی یک ذره به جرم  $m$ ، که در پتانسیل مستقل از زمان  $V(q)$  حرکت می‌کند، برگزیده‌ایم. بنابراین دستگاه پایستار است، و هامیلتونی آن عبارت از

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (۱۴-۴)$$

است، که معادلهٔ حرکت نیوتون را از آن به دست می‌آوریم

$$m\ddot{q} = -dV/dq = F(q) \quad (۱۵-۴)$$

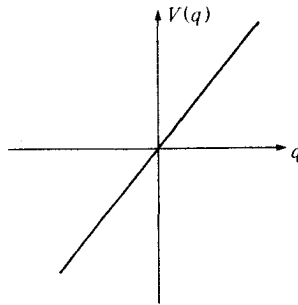
در این معادله  $F(q)$  نیرو است.

برای این که معادلات حرکت خطی باشند، پتانسیل  $V(q)$ ، حداکثر باید درجهٔ دوم باشد.

## مثال ۱-۴ میدان نیروی یکنواخت

تابع پتانسیل عبارت است از

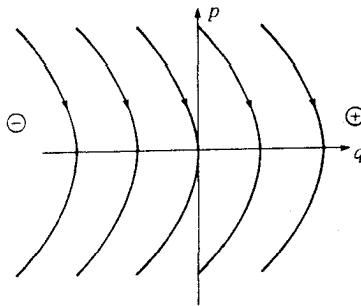
$$V(q) = aq \quad (a > 0) \quad (۱۶-۴ \text{ الف})$$



(۱۶-۴ ب)

و پربندهای انرژی سهمی‌های زیر هستند

$$aq = E - p^2/2m \quad (۱۷-۴ الف)$$



(۱۷-۴ ب)

هیچ نقطه ثابتی وجود ندارد. مثال ۱-۳ از فصل پیش یک مورد خاص است. در این بخش از روشهای مؤثرتری استفاده می‌کنیم که فقط برای دستگاه‌های هامیلتونی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

معادله حرکت از حل معادله ۱۵-۴ با جواب

$$q = q_0 - \frac{a}{2m}(t - t_0)^2 \quad p = -a(t - t_0) \quad (۱۸-۴)$$

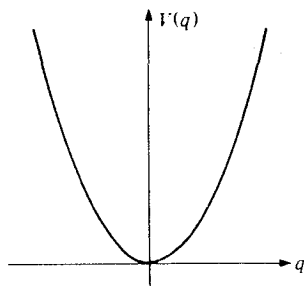
به دست می‌آید، که در آن  $t_0$  زمانی است که به ازای آن  $p = 0$  و  $q = q_0$  است.

مثال ۲-۴ نوسانگر خطی

این نوسانگر را نوسانگر ساده هماهنگ نیز می‌نامند. نیرو تابع خطی از  $q$  و همواره متوجه مبدأ است،

است، بنابراین تابع پتانسیل مربعی است

$$V(q) = \frac{1}{2} a q^2 \quad (a > 0) \quad (۱۹-۴ \text{ الف})$$

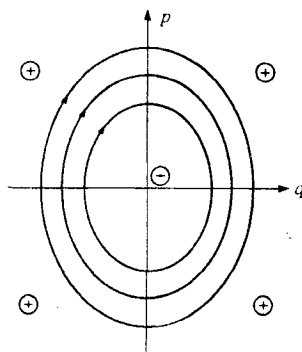


(۱۹-۴ ب)

پربندهای انرژی بیضیهای

$$p^2 + m^2 \omega^2 q^2 = 2mE \quad (\omega^2 = a/m) \quad (۲۰-۴ \text{ الف})$$

به مرکز نقطه ثابت  $q = p = 0$  هستند که یک نقطه بیضوی است، نظیر مثال ۳-۳ و بخش ۳-۶



(۲۰-۴ ب)

معادله حرکت عبارت است از

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \quad (۲۱-۴)$$

با جواب

$$q = A \cos(\omega t + \delta), \quad p = -m\omega A \sin(\omega t + \delta) \quad (۲۲-۴)$$

بنابراین حرکت تناوبی است، با تناوب

$$T = 2\pi/\omega \quad (۲۳-۴)$$

که مستقل از دامنه  $A$  است. این از ویژگی‌های دستگاه‌های خطی است. انرژی و دامنه با رابطه

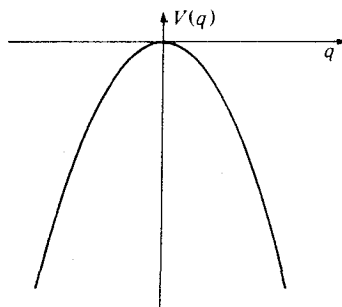
$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \quad (۲۴-۴)$$

به همدیگر مربوط‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که ذره حول نقطه ثابت  $q = p = 0$  نوسان می‌کند یا آزادی دارد.

### مثال ۳-۴ نیروی رانشی خطی

تابع نیرو خطی و متوجه به بیرون از مبدأ است، بنابراین تابع پتانسیل یک پتانسیل سدی مربعی است

$$V(q) = -\frac{1}{2} a q^2 \quad (a > 0) \quad (۲۵-۴ \text{ الف})$$



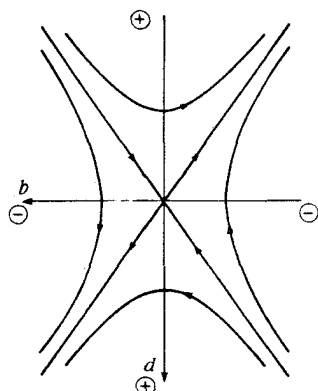
(۲۵-۴ ب)

پربندهای انرژی، هذلولیهای زیرند

$$\begin{aligned} 2mE &= p^2 - m^2 \gamma^2 q^2 \quad (\gamma^2 = a/m) \\ &= (p + m\gamma q)(p - m\gamma q) \end{aligned} \quad (۲۶-۴)$$

یک نقطه ثابت در مبدأ  $p = q = 0$  وجود دارد و پربندهای انرژی از خطوط راست  $p = \pm m\gamma q$  مار بر این نقطه ثابت، همراه با هذلولیهای مجانب این خطوط، تشکیل یافته‌اند: نقطه ثابت یک نقطه هذلولوی است و مسلماً ناپایدار است، نظیر مثال ۳-۲ و بخش ۳-۶.





(۲۷-۴)

به طور کلی، منحنی فازی که با یک نقطه هذلولوی تلاقی کند، به خم ممیزه معروف است، در این مثال خطوط راست قطری  $p = \pm m\gamma q$ ، خم ممیزه هستند. خم ممیزه، مرز بین منحنیهای فاز با خواص مختلف را مشخص می‌کند، بنابراین یک منحنی فاز بسیار مهم است.

در این مثال، منحنیهای فاز واقع در سمت چپ خطوط راست، نمایانگر حرکت متوجه به سد از چپ و برگشت آنند، چون که انرژی ( $E < 0$ ) برای غلبه بر سد ناکافی است. برای منحنیهای واقع در راست هم وضعیت مشابه با طرف چپ است. منحنیهای بالای خطوط راست، نمایانگر حرکت با انرژی کافی ( $E > 0$ ) برای غلبه بر سد و عبور از آن از طرف چپ و منحنیهای پایین خطوط راست نمایانگر حرکت از روی سد از طرف راستند.

خم ممیزه چپ بالایی، نمایانگر یک نزدیکی مجانبی با  $E = 0$  به بالای سد از طرف چپ، و خم ممیزه راست پایینی، نمایانگر یک نزدیکی مجانبی از طرف راست است. خمهای ممیزه راست بالایی و چپ پایینی، نمایانگر حرکت از نزدیک بالای سد به بینهایت در هر دو جهت است. معادله حرکت عبارت است از

$$\ddot{q} = \gamma^2 q \quad (28-4)$$

با جواب

$$q = A_+ e^{\gamma t} + A_- e^{-\gamma t}, p = m\gamma(A_+ e^{\gamma t} - A_- e^{-\gamma t}) \quad (29-4)$$

و با انرژی

$$E = -2m\gamma^2 A_+ A_- \quad (30-4)$$

علائم  $A_+$  و  $A_-$  نوع حرکت را تعیین می‌کنند.

## ۴-۴ پتانسیل مکعبی

اکنون می‌پردازیم به توصیف ویژگیهای کیفی حرکت یک ذره به جرم واحد، در پتانسیل مکعبی

$$V(q) = \frac{1}{4}\omega^2 q^2 - \frac{1}{3}Aq^3 \quad (A > 0) \quad (31-4)$$

تابع  $V(q)$  دارای صفر مضاعف در مبدأ و یک صفر دیگر در  $q = 3\omega^2/2A$  است. همچنین دارای نقاط ساکن در

$$0 = \partial V / \partial q = \omega^2 q - Aq^2 \quad (32-4)$$

است، یعنی در مبدأ و در  $q_1 = \omega^2/A$ . در نزدیکی مبدأ جمله توان سوم، در مقایسه با جمله توان دوم کوچک است و تابع پتانسیل شکل تقریبی ۴-۱۹ را دارد، که یک مینیموم است. از این رو نقطه  $q_1$  باید یک ماکزیموم باشد، و مقدار پتانسیل در آنجا برابر است با

$$V(q_1) = \omega^6/6A^2 \quad (33-4)$$

هامیلتونی دستگاه عبارت است از

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}\omega^2 q^2 - \frac{1}{3}Aq^3 \quad (34-4)$$

نقاط ثابت در  $(0, 0)$  و  $(0, q_1)$  قرار دارند، که اولی یک نقطه ثابت بیضوی، نظیر مثال ۴-۲، و دومی یک نقطه ثابت هذلولوی، نظیر مثال ۴-۳ است، چون پتانسیل در  $q_1$  ماکزیموم است. پربند انرژی که از نقطه ثابت هذلولوی می‌گذرد، خم‌میزه است، لذا انرژی عبارت است از  $E_s = V(q_1)$  و معادله‌اش عبارت است از

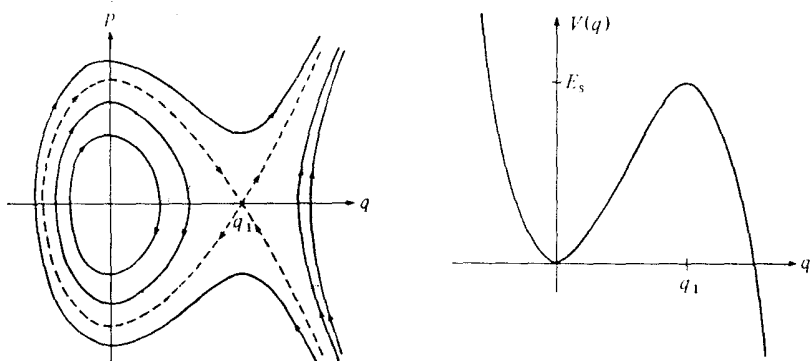
$$\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}\omega^2 q^2 - \frac{1}{3}Aq^3 = \omega^6/6A^2 \quad (35-4)$$

این معادله محور  $p$  را به‌ازای  $q = 0$ ، یعنی در  $p = \pm \omega^3/A\sqrt{3}$  قطع می‌کند. در ترسیم نمودار فاز، ابتدا تابع پتانسیل را رسم می‌کنیم و سپس خم‌میزه را. در این صورت، ترسیم بقیه نمودار فاز دیگر مشکل نیست، و در شکل ۴-۱۹ نشان داده شده است.

حرکت ذره به انرژی بستگی دارد، هرگاه انرژی بزرگتر از  $E_s$  باشد، ذره از طرف راست نزدیک می‌شود، در نزدیکی  $q_1$  توسط سد پتانسیل کند می‌شود، در نزدیکی مبدأ بار دیگر شتاب







شکل ۱-۴ پتانسیل مکعبی معادله ۴-۳، و نمودار فاز.

می‌گیرد، و در سد پتانسیل به طرف چپ مبدأ باز می‌تابد، تا احتمالاً، با تندی افزاینده به سمت راست سد باز گردد. در انرژیهای کمتر از  $E_s$  حرکت می‌تواند دو جور باشد: ممکن است که ذره حول مینیموم پتانسیل در مبدأ نوسان کند؛ بسامد زاویه‌ای این نوسان، در صورتی که انرژی نزدیک صفر باشد، به  $\omega$  می‌رسد. یا این که ممکن است ذره از طرف راست نزدیک شود و پیش از رسیدن به  $q_1$ ، باز بتابد.

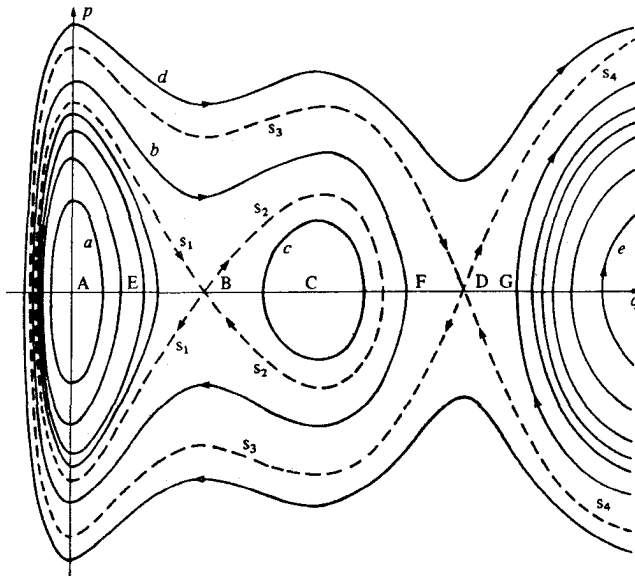
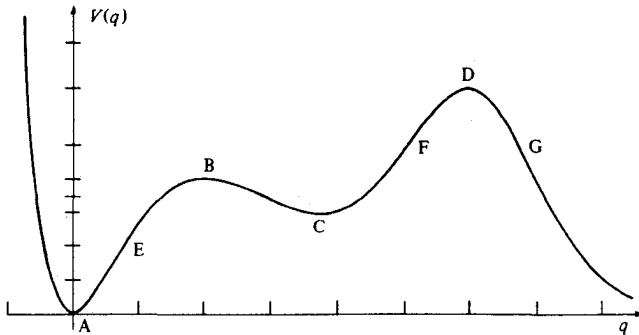
## ۴-۵ پتانسیل عام

به طور کلی، نمودار فاز ذره‌ای که روی خط حقیقی حرکت می‌کند، دارای هر دوی نقاط ثابت بیضوی و هذلولوی، متناظر با مینیمومها و ماکزیمومهای تابع پتانسیل  $V(q)$  است. معمولاً حرکت در همسایگی نقاط ثابت، شبیه حرکت خطی متناظرش است که در بخش پیش توصیف شد. نقاط هذلولوی به وسیلهٔ خمهای ممیزه‌ای به هم متصل‌اند که فضای فاز را به نواحی ناوردا با انواع مختلف حرکت تقسیم کرده‌اند.

این خصوصیات، در مثال شکل ۴-۲، که در آن ذره در پتانسیل  $V(q)$  حرکت می‌کند نمایانده شده‌اند. نقاط ثابت در  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  قرار دارند.  $A$  و  $C$  بیضوی و در مینیمومهای پتانسیل هستند، در حالی که  $B$  و  $D$  هذلولوی و در ماکزیمومهای آن قرار دارند.

خم ممیزه  $s_1$  با آغاز از  $B$ ، حرکت نوسانی در چاه پتانسیل نقطهٔ  $A$  (مثلاً منحنی فاز  $a$ ) را، از حرکت نوسانی در دو چاه نقطهٔ  $A$  و  $B$  (مثلاً منحنی فاز  $b$ ) با انرژی کافی برای گذشتن از سد پتانسیل نقطه  $B$ ، جدا می‌کند. خم ممیزهٔ  $s_2$  با آغاز از  $B$ ، حرکتی مانند  $C$  در چاه نقطهٔ  $C$  را از حرکتی مانند  $b$  جدا می‌کند.

خم ممیزهٔ  $s_3$  حرکت نوسانی نظیر  $b$  در چاههای پتانسیل را از حرکت غیرنوسانی نظیر  $d$  جدا



شکل ۲-۴ نمودار فاز و پتانسیل پیچیده. برای وضوح بیشتر، انرژی منحنیهای فاز متساوی الفاصله نیستند. این انرژیها در محور قائم نمودار بالایی علامتگذاری شده‌اند. خمهای ممیزه  $s_1$  و  $s_2$ ، منحنیهای فازی هستند که در نقاط ثابت هذلولوی، متناظر با ماکزیمومهای پتانسیل، به پایان می‌رسند. E، F و G نقاط عطف حرکت برای منحنیهای فازی هستند که روی آنها قرار دارند.

می‌کند؛ در این حرکت (d) ذره از بینهایت با انرژی کافی نزدیک می‌شود تا از سدهای پتانسیل در B و D بگذرد، اما از سد پتانسیل بلندتر سمت چپ A برگشت می‌یابد و به سوی بینهایت در سمت راست باز می‌گردد. خم ممیزه  $s_4$  حرکت نظیر d را از حرکت نظیر e جدا می‌کند؛ در این حرکت (e) یک ذره از بینهایت در سمت راست، انرژی کافی برای گذشتن از سد نقطه D ندارد، لذا از آنجا برگشت می‌یابد و به سوی بینهایت سمت راست باز می‌گردد.

به‌طور کلی در یک حرکت معلوم نقطه‌ای مانند E، F یا G در پیکربندی یا در فضای فاز، که

در آن علامت اندازه حرکت تغییر می‌یابد، به نقطه عطف معروف است.

حرکت در خم ممیزه  $s_1$  به آهستگی، B را به سوی چپ ترک می‌کند، از چاه می‌گذرد، به سوی B برمی‌گردد، و به صورت مجانبی به آن نزدیک می‌شود، اما هرگز به بالای سد پتانسیل نمی‌رسد. هر مسئله پتانسیل برای یک درجه آزادی را می‌توان بدین طریق بحث کرد، به شرط این‌که  $dV/dq$  معین و فقط دارای صفرهای ساده باشد. در غیر این صورت ممکن است مشکلاتی بروز کند.

در این مثال، و مثالهای بخش پیش، نقاط ثابت بیضوی و هذلولوی، تنها انواع نقاط ثابت منزوی هستند. هیچ‌کدام از انواع دیگر پیش نمی‌آیند. این امر کلیت دارد و مستقیماً از این واقعیت ناشی می‌شود که منحنیهای فاز، پربندهای هامیلتونی ثابت هستند. بنابر معادلات هامیلتون، در نقاط ثابت، هامیلتونی باید مانا باشد، و تنها سه نوع نقطه مانا با پایداری ساختاری در توابع دو متغیره حقیقی وجود دارند: ماکزیموم، مینیموم و نقاط زین اسبی. دو نقطه اول، نقاط بیضوی هستند، گرچه هرگاه هامیلتونی به صورت  $4-14$  باشد هرگز ماکزیموم وجود ندارد، و نقطه سوم یک نقطه هذلولوی است. تعادل دستگاههای هامیلتونی، هرگز قویاً پایدار نیست.

## ۶-۴ دورانهای آزاد

فضای پیکربندی همیشه سرتاسر خط حقیقی  $(-\infty, \infty)$  را شامل نمی‌شود. در حرکت دورانی، فضای پیکربندی یک دایره است و انتخاب یک مختصه  $\psi$  با مرزهای مشخص در گستره  $(0, 2\pi)$ ، کار را آسانتر می‌کند. در این صورت تابع هامیلتونی  $H(\psi, p)$ ، یک تابع تناوبی از  $\psi$  با تناوب  $2\pi$  است.

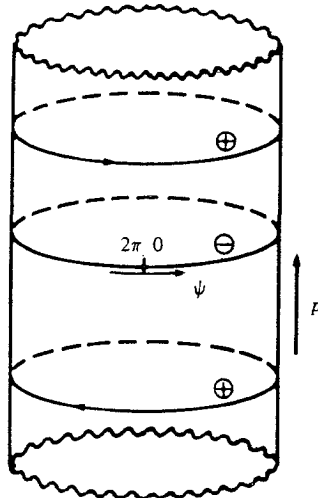
برای جسمی که حول یک محور ثابت، آزادانه می‌چرخد، تابع هامیلتونی فقط یک تابع از اندازه حرکت زاویه‌ای  $p$  به صورت زیر است

$$H(\psi, p) = p^2/2G \quad (\text{دورانهای آزاد}) \quad (36-4)$$

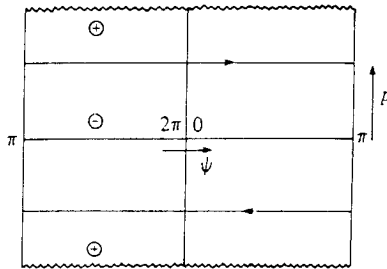
که در آن  $G$  گشتاور لختی است و آن را برابر با یک خواهیم گرفت.

اندازه حرکت زاویه‌ای می‌تواند هر مقدار در  $(-\infty, \infty)$ ، بسته به آهنگ و جهت دوران، داشته باشد، بنابراین فضای فاز را می‌توان با یک استوانه بینهایت دراز، چنان‌که در شکل ۳-۴ نموده شده است، نمایش داد.

پربندهای  $H$  ثابت، یا مقدار ثابت انرژی، در شکل ۳-۴ نمایانده شده‌اند، که به صورت باز کرده‌اش روی صفحه کاغذ در ۴-۳۷ به شکل مربع مستطیلی که دو ضلع آن خط  $\psi = \pi$  را نشان می‌دهند، ملاحظه می‌شود.



شکل ۳-۴ نمایش استوانه‌ای فضای فاز برای یک جسم دارای دوران آزاد که پربندهای مقدار ثابت  $H$  را نشان می‌دهد.



(۳۷-۴)

معادله‌های هامیلتون حرکت،

$$\dot{\psi} = p, \quad \dot{p} = 0 \quad (۳۸-۴)$$

دارای جواب

$$\psi = pt + \psi_0, \quad p = p_0 \quad (۳۹-۴)$$

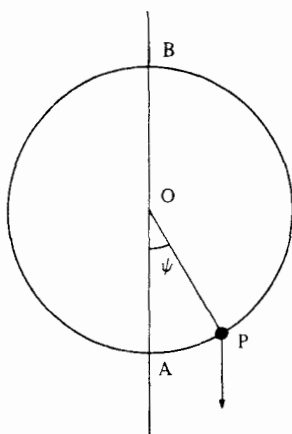
هستند، که در آن  $(\psi_0, p_0)$  حالت دستگاه در زمان  $t = 0$  را نشان می‌دهند. بدین ترتیب خط  $p = 0$  از نقاط ثابت، که نه بیضوی هستند و نه هذلولوی تشکیل یافته است. چنان‌که از حضور نقاط ثابت غیر منزوی می‌توان انتظار داشت، دستگاه، پایدار ساختاری نیست. یک تغییر کوچک وابسته به  $\psi$  در هامیلتونی، رفتار برای اندازه حرکت‌های کوچک را کاملاً تغییر می‌دهد که در مثال زیر نمایان می‌شود.

## ۷-۴ آونگ قائم

هرگاه یک نیروی مستقل از زمان، یا پایسته، به دستگاه بخش پیش اعمال شود هامیلتونی جدید به صورت

$$H(\psi, p) = p^2/2G + V(\psi) \quad (۴۰-۴)$$

خواهد بود، که در آن  $V(\psi)$  تابع پتانسیل تناوبی در  $\psi$ ، با تناوب  $2\pi$  است. ساده‌ترین مثال، مورد آونگ قائم است. جرم  $m$  در نقطه  $P$  از نقطه ثابت  $O$  با یک میله سبک به طول  $l$  آویزان است و مقید به حرکت در صفحه قائم مار بر  $O$  در اثر نیروی یکنواخت رو به پایین  $F$  است.



(۴۱-۴)

اگر  $\psi$  زاویه بین میله  $OP$  و خط قائم رو به پایین  $OA$  باشد، تابع هامیلتونی انرژی عبارت است از

$$H(\psi, p) = p^2/2G - Fl \cos \psi \quad (۴۲-۴)$$

برای سادگی، گشتاور لختی را برابر واحد می‌گیریم؛  $G = ml^2 = 1$ . مورد کلی را می‌توان با مقیاس‌بندی مناسب به دست آورد. یک مقدار ثابت  $\alpha$  را به صورت  $\alpha = (Fl)^{1/2}$  تعریف می‌کنیم. با توجه به اینها، هامیلتونی به صورت زیر در می‌آید

$$H(\psi, p) = \frac{1}{2}p^2 - \alpha^2 \cos \psi \quad (۴۳-۴)$$

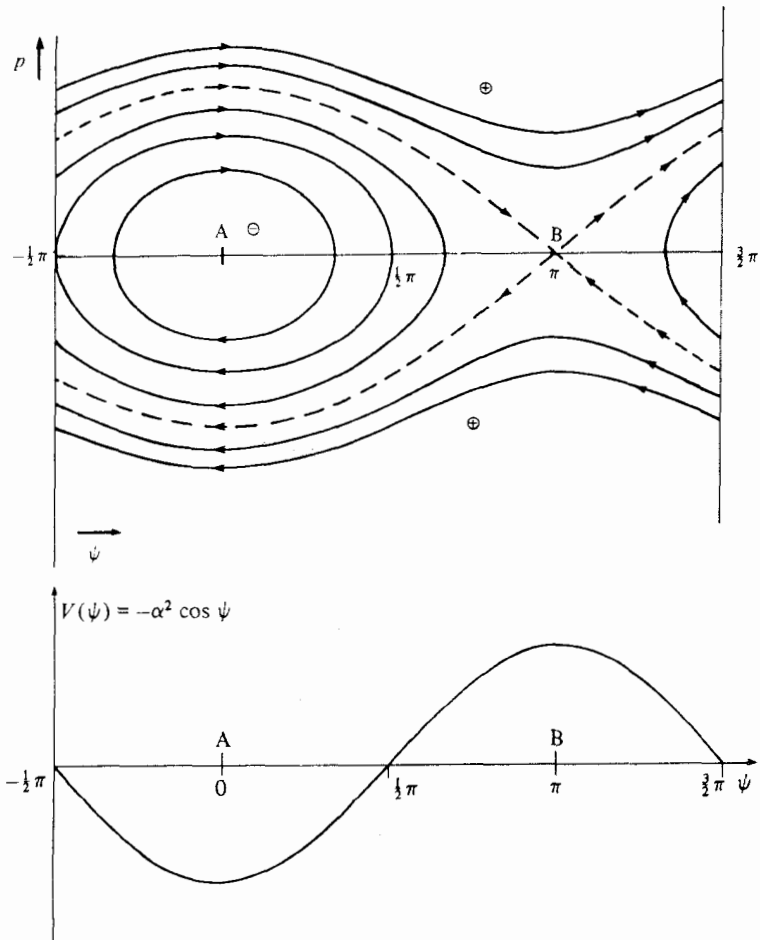
هامیلتونی به این شکل، در نظریه حرکت ذره در شتاب‌دهنده‌ها و پلاسماها، در نظریه دوران مولکولی، در برخی نظریه‌های تقریبی حرکت سیاره‌ای، و در نظریه عام دستگاه‌های دارای چند درجه آزادی، پیش می‌آید.

معادلات هامیلتون عبارت‌اند از

$$\dot{\psi} = p$$

$$\dot{p} = -\alpha^2 \sin \psi \quad (۴۴-۴)$$

که عموماً نمی‌توانند برحسب توابع مقدماتی حل شوند. نمودار فضای فاز استوانه‌ای در شکل ۴-۴ دیده می‌شود، که در  $\psi = \frac{3}{4}\pi$  برای واضح‌تر نشان دادن هر دو نقطه ثابت، تقسیم شده است. این



شکل ۴-۴ نمودار فضای فاز استوانه‌ای و پتانسیل در آونگ قائم

نقاط ثابت عبارت‌اند از

$$(\psi, p) = (\pi, 0) \quad (\psi, p) = (0, 0) \quad (۴۵-۴)$$

نقطه ثابت در A بیضوی است و متناظر با مینیموم پتانسیل در  $\psi = 0$ ، در وضعیتی است که آونگ در راستای قائم رو به پایین متوجه است، نقطه ثابت در B هذلولوی است و متناظر با ماکزیموم پتانسیل در  $\psi = \pi$ ، در وضعیتی است که آونگ در راستای قائم رو به بالاست. خم ممیزه مار بر B، پربند انرژی  $\alpha^2$  است. معادله آن به طور تحلیلی به دست می‌آید، (ن.ک. مسئله ۴) و فضای فاز را به سه ناحیه که در هر کدامشان حرکت به صورت تناوبی است، تقسیم می‌کند. در نواحی بالا و پایین، آونگ دوران ساعتگرد یا پاد ساعتگرد انجام می‌دهد، درست مانند مورد دوران آزاد. اما در ناحیه مرکزی، نوع جدیدی از حرکت حول محور قائم رو به پایین وجود دارد. این حرکت تازه، هر قدر هم که  $\alpha$  کوچک باشد، پیش می‌آید.

## ۴-۸ دوران، رخگرد و تناوبها

حرکت تناوبی، بسته به این که طی یک دوره حرکت، علامت سرعت تغییر بکند یا نه، به دو نوع تقسیم می‌شود.

در حالت کلی هرگاه حرکت یک دستگاه تناوبی و مختصه  $q$  به صورت تابعی از زمان بیان شده باشد، آنگاه حرکت را چنانچه در طی یک دوره حرکت

$$\text{علامت } \dot{q} \text{ همواره یکی باشد دوران} \quad (۴۶-۴)$$

و چنانچه

$$\text{علامت } \dot{q} \text{ تغییر کند رخگرد} \quad (۴۷-۴)$$

می‌نامیم. نوسان و ارتعاش با رخگرد یکی هستند. واضح است در صورتی که فضای پیکربندی سرتاسر خط حقیقی باشد، دوران نمی‌تواند روی دهد، چون،  $\dot{q}$ ی که به طور پیوسته افزایش یا کاهش می‌یابد، نمی‌تواند یک حرکت تناوبی ارائه دهد. ولی اگر فضای پیکربندی یک دایره باشد، هم دوران و هم رخگرد می‌توانند روی دهند. بنابراین نوع حرکت تناوبی بستگی به توپولوژی فضای پیکربندی دارد. توجه داشته باشید هنگامی که فضای فاز در یک صفحه نمایانده می‌شود، حرکت در یک دایره یا هر منحنی بسته دیگر متناظر با رخگرد است. در فضای فاز، دوران به صورت نمودار یک تابع تناوبی از  $q$  پدیدار می‌شود.



در هر دو مورد، مدت زمانی که دستگاه برای رسیدن به یک نقطه معین لازم دارد، به شرطی که هامیلتونی شکل بخصوص

$$H(q, p) = p^2/2m + V(q) \quad (48-4)$$

را داشته باشد، می‌تواند به صورت یک انتگرال روی مختصه  $q$  حاصل شود. اندازه حرکت به صورت تابعی از انرژی  $E$  به دست می‌آید

$$p = \pm [2m(E - V(q))]^{1/2} \quad (49-4)$$

بنابراین، با استفاده از معادله اول هامیلتون،

$$\dot{q} = \pm \left[ \frac{2}{m} (E - V(q)) \right]^{1/2} \quad (50-4)$$

و

$$\int^t dt' = \pm \left( \frac{1}{2} m \right)^{1/2} \int^q \frac{dq'}{[E - V(q')]^{1/2}} \quad (51-4)$$

می‌توان از این نتیجه برای به دست آوردن تناوب  $T$  در دوران و رخگرد استفاده کرد. در دوران، نقطه عطف وجود ندارد: اگر  $q = \psi$  زاویه پیکربندی باشد، داریم

$$T = \int_0^T dt = \left( \frac{1}{2} m \right)^{1/2} \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{[E - V(\psi)]^{1/2}} \right|. \quad (52-4)$$

برای رخگرد، تناوب دو برابر انتگرال بین نقاط عطف  $q_1$  و  $q_2$  است که در

$$V(q_1) = V(q_2) = E \quad (q_1 < q_2) \quad (53-4)$$

صدق می‌کنند، یعنی

$$T = (2m)^{1/2} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{[E - V(q)]^{1/2}}. \quad (54-4)$$

انتگرال‌گیری عددی گاوسی یک روش بسیار مؤثر عملی برای به دست آوردن تناوب حرکت‌های رخگردی است.

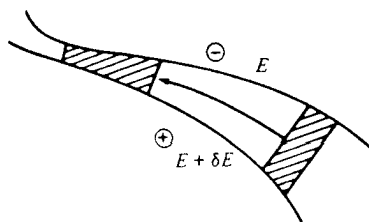




## ۹-۴ جریانهای حافظ مساحت و قضیه لیوویل

در بخش ۱-۴ با دستگاههای هامیلتونی به صورت تعمیم دستگاههای نیوتونی آشنا شدیم، اما از یک نقطه نظر کاملاً متفاوت، می توان آنها را به عنوان دستگاههایی تلقی کرد که تحول آنها مساحت را در فضای فاز حفظ می کند. بحث در این باره محتوای قضیه معروف به قضیه لیوویل است، و به سبب اهمیتی که دارد آن را از دو طریق اثبات خواهیم کرد، یکی به روش هندسی برای دستگاههای پایستار، و دیگر به طریق تحلیلی برای دستگاههایی که هامیلتونی آنها می تواند یک تابع صریح زمان باشد.

برای دستگاههای پایستار، یک عنصر فضای فاز باریک مستطیل شکل بین دو پربند انرژی همسایه را در نظر می گیریم؛ در این صورت سرعت فاز با فاصله موضعی دو پربند متناسب معکوس دارد



(۵۵-۴)

ولی طول عنصر فضای فاز موازی با پربندهای انرژی، با سرعت فاز متناسب است، بنابراین مساحت عنصر پایسته است. مساحت محصور در هر منحنی بسته را می توان به چنین عنصرهایی تقسیم کرد، بنابراین جریان، مساحت را حفظ می کند. در مورد شارها، این به معنای یک جریان تراکم ناپذیر است.

دستگاهی که تحت تأثیر نیروهای وابسته به زمان است، یا در یک چارچوب مرجع دوار، یا چارچوب غیرلخت دیگر نمایش داده می شود، دارای تابع هامیلتونی  $H(q, p, t)$  ای است که صریحاً وابسته به زمان است. برای یک حرکت بخصوص چنین دستگاهی، آهنگ تغییر مقدار هامیلتونی با زمان، عبارت است از

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (۵۶-۴)$$

و با استفاده از معادله هامیلتون داریم

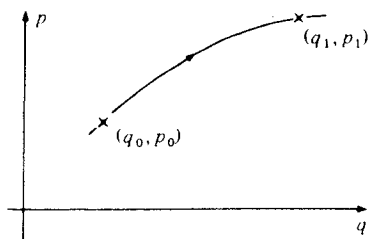
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left( \frac{-\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (۵۷-۴)$$

بدین قرار در هر زمان، تعییرات مقدار  $H$  برای حرکت، از ورودش  $H$  در نقطه جریان در صفحه فاز که یک نقطه ثابت تلقی می شود به دست می آید. مقدار هامیلتونی پایسته نیست. بنابراین استدلال پیشین نمی تواند برای اثبات حفظ مساحت مورد استفاده قرار گیرد. با وجود این، مساحت چنان که اکنون نشان می دهیم حفظ شده است.

فرض می کنیم هامیلتونی  $H(q, p, t)$  وابسته به زمان است، به طوری که معادلات هامیلتون عبارت اند از

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (58-4)$$

و فرض می کنیم  $(q_0, p_0)$  و  $(q_1, p_1)$  نقاط فاز در زمانهای  $t_0$  و  $t_1$  برای حرکت در امتداد یک منحنی فاز بخصوص هستند



(59-4)

در این صورت، برای فواصل زمانی کوتاه  $\delta t$  بین  $t_0$  و  $t_1$ ، یعنی  $t_1 = t_0 + \delta t$  داریم

$$q_1 = q(t_0 + \delta t) = q_0 + \delta t \frac{\partial}{\partial q_0} H(q_0, p_0, t_0) + O(\delta t^2)$$

$$p_1 = p(t_0 + \delta t) = p_0 - \delta t \frac{\partial}{\partial p_0} H(q_0, p_0, t_0) + O(\delta t^2) \quad (60-4)$$

با تلقی  $q_1$  و  $p_1$  به عنوان توابعی از  $(q_0, p_0)$  به ازای  $t_0$  و  $\delta t$  ثابت، معلوم می شود که ژاکوبی تبدیل  $(q_1, p_1) \leftarrow (q_0, p_0)$  به صورت زیر است

$$\frac{\partial(q_1, p_1)}{\partial(q_0, p_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q_0} & \frac{\partial p_1}{\partial q_0} \\ \frac{\partial q_1}{\partial p_0} & \frac{\partial p_1}{\partial p_0} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0} & -\delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0^2} \\ \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_0^2} & 1 - \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0} \end{vmatrix} + O(\delta t^2)$$

$$= 1 + O(\delta t^2) \quad (۶۱-۴)$$

بنابراین مساحت محصور با هر منحنی بسته، به مقداری متناسب با حداکثر  $\delta t^2$  تغییر می‌کند. هر فاصله زمانی  $T$  می‌تواند به  $N$  فاصله کوچک به مدت  $\delta t = \frac{T}{N}$  تقسیم شود، به طوری که تغییرات کل در مساحت متناسب با  $N(T/N)^2$  است، که با کاهش  $\delta t$  به صفر میل می‌کند. بدین ترتیب هر جریان صادق در معادلات هامیلتون حافظ مساحت است همچنین می‌توان نشان داد که هر گاه تابع سرعت یک جریان حافظ مساحت به اندازه کافی خوش رفتار باشد، آن جریان در معادلات هامیلتون صدق می‌کند. چنین جریانی، هامیلتونی نام دارد. در اینجا، تشابه بین هامیلتونیهای مستقل از زمان و وابسته به زمان تمام می‌شود. نظریه عام هامیلتونیهای وابسته به زمان ناقص است، و فقط برای رده‌های خاصی از وابستگی زمانی، یک نظریه عام وجود دارد. با برخی از این دستگاهها، بعداً، در فصلهای ۹، ۱۰ و ۱۱ سروکار خواهیم داشت.

### مسائل

۱. هامیلتونی  $H(q, p)$  مستقل از  $q$  است، نشان دهید که مقدار  $p$  ثابت می‌ماند و مقدار  $q$  به طور خطی با زمان افزایش می‌یابد. نمودار فاز را برای

$$H(q, p) = p \quad (\text{الف})$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^2 \quad (\text{ب})$$

$$H(q, p) = \sin \alpha p \quad (\alpha > 0) \quad (\text{ج})$$

در یک ناحیه به اندازه کافی بزرگ فضای فاز رسم کنید، تا خصوصیات کلی حرکت را نشان بدهید. نقاط ثابت، چنانچه وجود دارند، در هر مورد کجا واقع‌اند؟

۲. نشان دهید که دستگاهی که حرکت آن دارای تابع سرعت

$$(v_x(x, y, t), v_y(x, y, t))$$

است، تنها موقعی یک هامیلتونی با مختصه  $x$  و اندازه حرکت مزدوج  $y$  است که  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$  باشد.

۳. خصوصیات کیفی حرکت یک ذره به جرم واحد را که در پتانسیلهای زیر حرکت می‌کند،



توصیف کنید. در هر مورد نمودار فاز را رسم کنید و معادلهٔ خمهای ممیزه را، هر جا که وجود داشته باشند، به دست آورید.

$$V(q) = q^{-2} - 2q^{-1} \quad (q > 0) \quad (\text{الف})$$

$$V(q) = Aq^2 e^{-q^2} \quad (A > 0) \quad (\text{ب})$$

۴. نشان دهید که خم ممیزهٔ آونگ قائم با هامیلتونی معادلهٔ ۴۳-۴ به صورت  $p = \pm 2\alpha \cos \frac{1}{2}\psi$  است.

۵. (الف) یک ذره به جرم  $m$  در پتانسیل مکعبی دلخواه

$$V(q) = Aq^3 + Bq^2 + Cq + D \quad (A > 0)$$

حرکت می‌کند، نشان دهید که  $V(q)$  می‌تواند با تبدیل خطی مناسب به یک مختصهٔ پیکربندی  $Q$ ، با پتانسیل

$$W(Q) = AQ^2 + FQ$$

بدون اثر گذاردن روی حرکت، جایگزین شود. نشان دهید که  $F$  از

$$F = C - B^2/3A$$

به دست می‌آید.

(ب) همهٔ نقاط ثابت حرکت در پتانسیل  $W(Q)$  را برای همهٔ مقادیر حقیقی  $F$  بیابید و تفاوت عمده بین حرکت به ازای  $F > 0$  و حرکت به ازای  $F < 0$  را توصیف کنید. در مورد  $F = 0$  چه ویژگی وجود دارد؟

۶. ذره‌ای به جرم  $m = 1 \text{ kg}$  و به موضع  $x$  روی یک خط، در پتانسیل

$$V(x) = -\frac{1}{2}m\alpha^2 x^2$$

حرکت می‌کند، که در آن  $\alpha = 1 \text{ s}^{-1}$  است. وابستگی صریح  $x$  به  $t$  را برای حرکت از  $x = 0$  به ازای  $x > 0$  و انرژی کل صفر، به دست آورید. هرگاه ذره با همین انرژی از نقطهٔ  $x_0 = 10^{-9}$  متر شروع به حرکت کند، نزدیک به چند ثانیهٔ کامل طول می‌کشد تا به نقطهٔ  $x_1 = 10^{-1}$  متر برسد.

۷. یک ذره به جرم واحد در پتانسیل

$$V(q) = -\frac{1}{4}q^3$$

حرکت می‌کند. شروع حرکت در زمان  $t = 0$  و از موضع  $q = 1$  با اندازه حرکت  $p = 1$  است. ادامه حرکت را پیدا کنید؛ نشان دهید حرکت در یک زمان  $t = T$  خاتمه می‌یابد و  $T$  را پیدا کنید.

۸. یک ذره به جرم  $m$  در پتانسیل

$$V(q) = -Aq^\gamma \quad (A > 0, \gamma > 0)$$

در زمان  $t = 0$  و از موضع  $q = 1$  با اندازه حرکت  $p = \sqrt{2mA}$  شروع به حرکت می‌کند. برای  $\gamma \neq 2$ ، رابطه بین  $q$  و  $t$  به ازای  $t > 0$  را برحسب  $m$ ،  $A$  و  $\gamma$  به دست آورید. در کدام مقادیر  $A$ ،  $m$  و  $\gamma$  حرکت خاتمه می‌یابد و با این مقادیر، در چه زمانی خاتمه می‌یابد؟ هرگاه  $\gamma = 2$  باشد، چه اتفاق می‌افتد؟

۹. (الف) منحنی فاز حرکت یک ذره به جرم  $m$  در پتانسیل

$$V(q) = -Aq^\alpha \quad (A > 0)$$

را رسم کنید. معادله خم ممیزه را بنویسید و حرکت  $q_s(t)$  را روی خم ممیزه معلوم کنید. نشان دهید که این حرکت مختوم است.

(ب) در زمان  $t = 0$ ، ذره از نقطه‌ای با  $q_0 > 0$  و  $p_0 > 0$  آغاز به حرکت می‌کند. یک عبارت انتگرالی برای زمان  $t$  که ذره در آن به نقطه  $q > q_0$  می‌رسد، به دست آورید و از آنجا نشان دهید که حرکت مختوم است.

۱۰. برای هامیلتونی

$$H(q, p) = p + \sqrt{1 - p^2} \sin q \quad (|p| \leq 1)$$

نمودار فاز را رسم کنید، نقاط ثابت را بیابید و حرکت را توصیف کنید.

۱۱. تابع پتانسیل و پربندهای هامیلتونی

$$H(q, p) = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^4 - \frac{1}{4}q^2$$



را رسم کنید. معادله خم ممیزه را بنویسید و یک توصیف کیفی از حرکت ارائه کنید. تناوب تقریبی نوسانهای کوچک، در همسایگی هر یک از نقاط ثابت را به دست آورید.

۱۲. یک ذره به جرم  $m$  دارای موضع  $r > 0$  است و تحت کنش نیروی

$$F(r) = -kr + \alpha/r^3 \quad (k > 0, \alpha > 0)$$

حرکت می‌کند. تابع پتانسیل  $V(r)$  را که در نقطه ثابت صفر است تعیین کنید و یک توصیف کیفی از حرکت ارائه دهید. تناوب نوسانها حول نقطه ثابت پایدار را، به صورت تابعی از انرژی  $E$  برای کلیه  $E$ هایی که در آنها حرکت نوسانی است به دست آورید (پوست ۲ را ببینید).

۱۳. یک دستگاه با زاویه پیکربندی  $\psi$ ، دارای هامیلتونی

$$H(\psi, p) = \frac{1}{4}p^2 + p \sin \psi \quad (|\psi| \leq \pi)$$

است. سرشت و موضع نقاط ثابت را تعیین کنید. با ترسیم نمودار فاز به طور واضح نشان دهید که در کجا رخگرد و در کجا دوران وجود دارد. نشان دهید که تناوب حرکت رخگرد در انرژی  $E$  به صورت

$$T = 4 \int_0^\alpha \frac{dx}{(\cos^2 x - 2|E|)^{1/2}}$$

است که در آن  $\cos^2 \alpha = 2|E|$  است.

۱۴. یک ذره باردار الکتریکی به جرم  $m$ ، روی یک خط راست بین دو بار ثابت  $C_1$  و  $C_2$  به فاصله  $2l$  از هم، مقید است. نیروی خالص وارد بر ذره از مجموع دو نیرو به بزرگی  $\mu/r_j^2$ ، که در آن  $r_j$  فاصله ذره از بار  $C_j$  است، به دست می‌آید، و هر دو بار ثابت ذره را دفع می‌کنند. هامیلتونی را به دست آورید و نمودار فاز را رسم کنید. ذره از وضعیت سکون و فاصله  $kl$  از نقطه میان  $C_1$  و  $C_2$  شروع به حرکت می‌کند؛ که در آن  $1 < k < \infty$  است. نشان دهید که ذره حرکت رخگرد دارد و تناوب آن  $T$  عبارت است از

$$T = 2 \left[ \frac{ml^2(1 - k^2)}{\mu} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$$

۱۵. نشان دهید که معادله حرکت

$$\ddot{q} + G(q)\dot{q}^2 - F(q) = 0$$



را می‌توان با انتخاب اندازه حرکت مزدوج

$$p = f(q)\dot{q} \quad \text{که در آن} \quad f(q) = \exp \left[ 2 \int^q dq' G(q') \right]$$

به صورت هامیلتونی نوشت. نشان دهید که این هامیلتونی عبارت است از

$$H(q, p) = p^2 / [2f(q)] + V(q)$$

که در آن تابع پتانسیل به صورت زیر است

$$V(q) = - \int^q dq' F(q') f(q')$$

۱۶. (الف) حرکت دستگاهی، با هامیلتونی  $H(q, p)$  تعیین شده است. نشان دهید هرگاه یک تابع  $f(q, p)$  بتواند به صورت یک تابع مشتق‌پذیر از  $H$  بیان شود، آنگاه مقدار  $f(q, p)$  در امتداد همه منحنیهای فاز ثابت است.

(ب) نشان دهید چنانچه  $g(q, p)$  در امتداد همه منحنیهای فاز یک مقدار ثابت باشد، می‌تواند به صورت تابعی از  $H$  بیان شود.

۱۷. حرکت دورانی دستگاهی را با زاویهٔ پیکربندی  $(0 \leq \psi \leq 2\pi)$  و هامیلتونی

$$H(\psi, p) = p^2 / 2m + V(\psi)$$

در نظر بگیرید. نشان دهید که تناوب  $T$  دوران، می‌تواند به صورت تابعی از انرژی  $E$  به شکل

$$T(E) = \sqrt{2m} \frac{d}{dE} \int_0^{2\pi} d\psi [E - V(\psi)]^{\frac{1}{2}}$$

نوشته شود. و از آنجا نشان دهید که هرگاه

$$V(\psi) = V_0(\psi) + \varepsilon V_1(\psi)$$

باشد، آنگاه به ازای  $\varepsilon$  به اندازهٔ کافی کوچک، تناوب را می‌توان به صورت تقریبی

$$T(E) = T_0(E) + \varepsilon T_1(\varepsilon)$$

نوشت که در آن  $T_0(E)$ ، تناوب فقط برای  $V_0(\psi)$  است و

$$\begin{aligned} T_1(E) &= -\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{d}{dE} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{V_1(\psi)}{[E - V_0(\psi)]^{1/2}} \\ &= -\frac{d}{dE} \int_0^{T_0} dt V_1(\psi_0(t)) \end{aligned}$$

که در آن  $\psi_0(t)$  حرکت در پتانسیل  $V_0$  است.

۱۸. حرکت ارتعاشی دستگاهی با مختصه پیکربندی  $q$  و هامیلتونی

$$H(q, p) = p^2/2m + V(q)$$

را در نظر بگیرید که بین حدهای  $q_1$  و  $q_2$  در ارتعاش است. نشان دهید که تناوب می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \frac{d}{dE} \int_{q_1}^{q_2} dq [E - V(q)]^{1/2}$$

بنابراین نشان دهید که هرگاه

$$V(q) = V_0(q) + \varepsilon V_1(q)$$

باشد به ازای  $\varepsilon$  کوچک، تناوب را می‌توان به صورت تقریبی

$$T(E) = T_0(E) + \varepsilon T_1(E)$$

که در آن

$$T_1(E) = -\sqrt{2m} \frac{d}{dE} \int_{q_1}^{q_2} dq \frac{V_1(q)}{[E - V_0(q)]^{1/2}}$$

است.  $\dot{q}_1$  و  $\dot{q}_2$  حدهای حرکت در  $V_0(q)$  با انرژی  $E$  هستند. در مورد این حدها دقت کنید.

۱۹. با بهره‌گیری از نتایج مسئله قبل، تغییرات تقریبی در تناوب یک نوسانگر خطی با هامیلتونی

$$H(q, p) = p^2/2m + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$





را که از پتانسیل‌های اضافی

$$\varepsilon V_1(q) = \frac{1}{4} \varepsilon m q^4 \quad (\text{الف})$$

$$\varepsilon V_2(q) = \frac{1}{4} \varepsilon m q^4 \quad (\text{ب})$$

ناشی می‌شوند، بیاید فقط تصحیحات مرتبه اول  $\varepsilon$  را منظور کنید.

۲۰. یک ذره به جرم  $m$  در یک چاه پتانسیل یک بعدی  $V(q)$  حرکت می‌کند. از چاه پتانسیل، به جز این که در  $V(q) = V(-q)$  و  $V(0) = 0$  صدق می‌کند، معلوماتی در دست نداریم. تناوب نوسان اندازه‌گیری شده، و وابستگی  $T(E)$  آن به انرژی  $E$  به دست آمده است. نشان دهید که هرگاه  $q(w)$  تابع وارون  $V(q)$  به صورت

$$w = V(q) \iff q = g(w)$$

باشد، آنگاه داریم

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{2m} \right)^{\frac{1}{4}} \int_0^w dE \frac{T(E)}{(w-E)^{\frac{1}{4}}}$$

۲۱. دستگاه معادلات

$$\dot{x} = \alpha(y)f(x), \quad \dot{y} = \beta(x)f(y)$$

را در نظر بگیرید، که در آنها  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $f$  توابع اختیاری و به اندازه کافی خوش رفتار هستند. با تعریف متغیرهای جدید  $(q, p)$

$$x = F(q), \quad y = G(p)$$

نشان دهید که دستگاه را می‌توان به صورت هامیلتونی

$$H(q, p) = \int dG \frac{\alpha(G)}{f(G)} - \int dF \frac{\beta(F)}{f(F)}$$

نوشت که در آن  $G(p)$  و  $F(q)$  در روابط ضمنی زیر داده شده‌اند

$$q = \int \frac{dF}{f(F)}, \quad p = \int \frac{dG}{f(G)}$$



۲۲. در بررسی یک مدل فعالیت الکتریکی عصبی، معادلات

$$\dot{x} = (a - by)x(1 - x)$$

$$\dot{y} = -(c - dx)y(1 - y)$$

به دست آمده‌اند که در آنها  $a, b, c$  و  $d$  مقادیر ثابت مثبت‌اند. با استفاده از نتایج مسئله پیش، نشان دهید که این معادلات را می‌توان به صورت هامیلتونی

$$H = ap - b \ln(1 + e^p) + cq - d \ln(1 + e^q)$$

نوشت که در آن

$$x = \frac{e^q}{1 + e^q}, \quad y = \frac{e^p}{1 + e^p}$$

است. از اینجا هم نشان دهید که اگر  $b > a$  و  $d > c$  باشد در آن صورت همه منحنیهای فاز منحنیهای بسته هستند. چنانچه  $a < b$  یا  $d < c$  باشد، چه پیش می‌آید؟



## لاگرانژیها

### ۱-۵ مقدمه

در فصل گذشته، هامیلتونیهای برخی از دستگاههای پایستار ساده را، مستقیماً از معادلات حرکت نیوتون، با تعریف اندازه حرکتیهای مزدوج

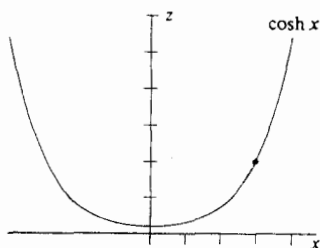
$$p = m\dot{q} = m \frac{dq}{dt} \quad (۱-۵)$$

به دست آوردیم.

با وجود این، چون نمیتوان به معادلات هامیلتون، همیشه از این طریق رسید روش کلیتری برای یافتن اندازه حرکتیهای  $p$  لازم است.

برای نمونه معادله حرکت یک مهره، که تحت تأثیر نیروی گرانش روی یک سیم به شکل منحنی  $z = \cosh x$ ، به نرمی سر می خورد، چنان که در مثال ۵-۶ هم نشان داده ایم عبارت است از

$$\ddot{x} \cosh x + \dot{x}^2 \sinh x + g \tanh x = 0 \quad (۲-۵ الف)$$



(۲-۵) ب

با قرار دادن  $p = m\dot{x}$  زوج معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x = p/m \\ \dot{p} &= v_p = -(m^2 g \tanh x + p^2 \sinh x)/(m \cosh x)\end{aligned}\quad (۳-۵)$$

از مسئله ۲-۴ معلوم می‌شود که دستگاه بالا در این نمایش هامیلتونی نیست چون که

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \neq -\frac{\partial v_p}{\partial p} \quad (۴-۵)$$

در مثال ۶-۵ نشان داده می‌شود که معادله ۲-۵ می‌تواند با قرار دادن  $p = m\dot{x} \sinh^2 x$  به شکل هامیلتونی در آید.

پیکربندی یک دستگاه مکانیکی با یک درجه آزادی، به وسیله یک تک مختصه تعمیم یافته  $q$  نمایش داده می‌شود. طی حرکت،  $q$  تغییر می‌یابد و سرعت تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{سرعت تعمیم یافته} = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \quad (۵-۵)$$

سرعت تعمیم یافته، لازم نیست یک سرعت فیزیکی باشد؛ مثلاً اگر  $q$  یک زاویه باشد،  $\dot{q}$  یک سرعت زاویه‌ای است.

حالت یک دستگاه را می‌توان به وسیله یک نقطه در فضای فاز دوبعدی که در آن استفاده از دستگاههای مختصات مختلف امکان‌پذیر است، نمایش داد. معادلات هامیلتون، حرکت یک ذره در دستگاه مختصات  $(q, p)$  را توصیف می‌کنند، معادله لاگرانژ حرکت یک ذره در دستگاه مختصات  $(q, \dot{q})$  را توصیف می‌کند. به طور کلی تبدیل بین این دو دستگاه مختصات، یا این دو طرز نمایش، مانند معادله ۱-۵ یک تغییر مقیاس ساده نیست، و از این رو است که نمایش حرکت در هر کدام از آنها کاملاً متفاوت با دیگری به نظر می‌آید؛ بالاخص، حرکت در نمایش  $(q, \dot{q})$  معمولاً حافظ مساحت نیست. این ویژگی را در مثال ۶-۵ نشان داده‌ایم.



در فرمولبندی هامیلتونی،  $q$  و  $p$  متغیرهای مستقل هستند. در فرمولبندی لاگرانژی هم، مشابه آن،  $q$  و  $\dot{q}$  متغیرهای مستقل هستند. بنابراین، جا دارد که بنویسیم  $u = \dot{q}$ ، به طوری که  $(q, u)$  حالت دستگاه را تعریف کند.

پیکربندی یک دستگاه مکانیکی به صورت تابعی از  $q$  و گاهی هم تابعی از  $t$  داده می شود. بدین ترتیب، تندی حرکت و از آنجا هم انرژی جنبشی به طور طبیعی به صورت تابعی از  $q$  و  $t$  بیان می شوند؛ چون  $u = \dot{q}$  است. به این سبب فرمولی کردن معادلات حرکت در نمایش  $(q, u)$ ، معمولاً آسانتر از فرمولی کردن آنها در نمایش  $(q, p)$  است. اما، از آنجا که جریان در نمایش  $(q, p)$  حافظ مساحت است، فهمیدن آن هم آسانتر است.

بنابراین لازم است طریقی در تبدیل این دو طرز نمایش به همدیگر داشته باشیم، که آن هم با تبدیل لژاندر فراهم می شود.

## ۲-۵ تبدیل لژاندر

تبدیل بین دو طرز نمایش را می توان با به دست آوردن  $p$  به صورت تابعی از  $q$ ،  $u$ ، و  $t$  یعنی  $p(q, u, t)$  یا پیدا کردن تابع  $u$  از  $q$ ،  $p$  و  $t$  یعنی  $u(q, p, t)$  انجام داد. در این تبدیل، متغیرهای  $q$  و  $t$  اجزای ثابت هستند، لذا آنها را همیشه به طور صریح نخواهیم نوشت. متغیر  $u$  بر حسب  $p$ ، با نخستین معادله از معادلات هامیلتون، ۷-۴ الف تعریف می شود،

$$u = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (۶-۵)$$

یعنی  $u$  شیب هامیلتونی نسبت به  $p$  است. نمودار تابع  $H(p)$ ، می تواند به دو طریق مشخص شود. نخست با تعریف صریح تابع  $H(p)$ ؛ دیگر با تعریف تابع  $L(u)$  هرگاه  $H(p)$  یک تابع محدب باشد، یعنی

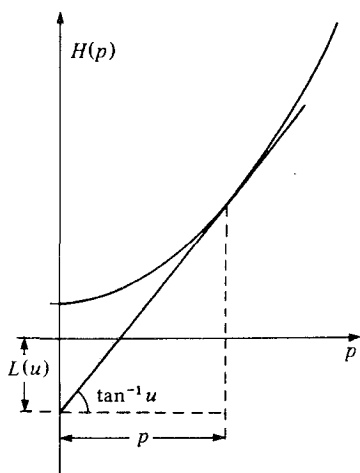
$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} > 0 \quad (۷-۵)$$

به طوری که  $-L(u)$  فاصله از مبدأ محل تقاطع مماس (به شیب  $u$ ) با محور  $H$  باشد، چنان که در شکل ۱-۵ الف نشان داده ایم.

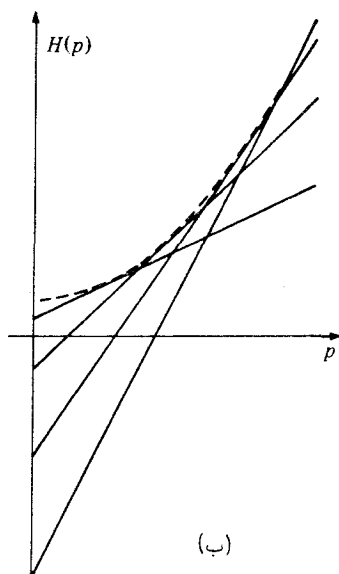
بدین ترتیب پوش خطوط راست به ضریب زاویه  $u$  که محور  $H$  را در  $-L(u)$  قطع می کنند چنان که در شکل ۱-۵ ب هم نشان داده ایم نمودار  $H(p)$  خواهد بود. بنا به این تعریف، رابطه بین  $L(u)$  و  $H(p)$  عبارت است از

$$u = [L(u) + H(p)]/p \quad (۸-۵)$$





(الف)



(ب)

شکل ۱-۵. شکل الف نمودار  $H(p)$  را با یک مماس به ضریب زاویه  $u = \frac{\partial H}{\partial p}$  که محور  $H$  را در  $-L(u)$  قطع کرده است، نشان می‌دهد.  $L$  تابع لاگرانژی است. شکل ب نشان می‌دهد که چگونه پوش این مماسها، منحنی  $H(p)$  را تشکیل می‌دهند.

اکنون بار دیگر وابستگی صریح همه توابع به متغیرهای  $q$  و  $t$  را مطرح می‌کنیم. هرگاه  $H(q, p, t)$  تابع هامیلتونی باشد، لاگرانژی متناظرش  $L(q, u, t)$  از معادله ۸-۵ به دست می‌آید

$$L(q, u, t) = pu - H(q, p, t) \quad (9-5)$$

که در آن  $p$  به صورت تابعی از  $u$ ،  $q$  و  $t$ ، از طریق رابطه ضمنی

$$u = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \quad (10-5)$$

داده می‌شود.

### مثال ۱-۵

لاگرانژیهای متناظر با هامیلتونیهای زیر را پیدا کنید.

$$H(p) = \frac{1}{2m} p^2 \quad (\text{یک ذره آزاد}) \quad (\text{الف})$$

$$H(p) = \frac{1}{\beta} p^\beta \quad (\text{ب})$$

در قسمت (الف) از معادله ۹-۵ داریم

$$L(u) = pu - \frac{p^2}{2m}$$

که در آن  $p$  برحسب  $u$  از معادله ۱۰-۵ به دست می آید.

$$u = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{یا} \quad p = mu$$

بنابراین

$$L(u) = mu^2 - \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

در قسمت (ب)

$$\begin{aligned} L(u) &= pu - \frac{p^\beta}{\beta} \quad (u = p^{\beta-1}) \\ &= \frac{1}{\alpha} u^\alpha \quad \text{و} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \end{aligned}$$

مثال ۲-۵

لاگرانژی متناظر با هامیلتونی زیر را پیدا کنید

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(q, t) \quad (۱۱-۵)$$

از معادلات ۹-۵ و ۱۰-۵ داریم

$$\begin{aligned} L(q, u, t) &= pu - \left[ \frac{p^2}{2m} + V(q, t) \right] \quad (p = mu) \\ &= \frac{1}{2}mu^2 - V(q, t) \\ &= \text{انرژی پتانسیل} - \text{انرژی جنبشی} \end{aligned} \quad (۱۲-۵)$$

در به دست آوردن هامیلتونی از لاگرانژی باید توجه داشته باشیم که اندازه حرکت  $p$  گرادیان

لاگرانژی نسبت به  $u$  است. این را می توان در مشتق گیری از تابع ۹-۵ نسبت به  $u$  ملاحظه کرد، با



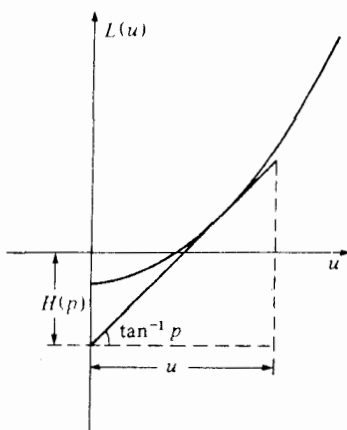
یادآوری این که  $p$  تابعی از  $u$  است و  $q$  و  $t$  مقادیر ثابت گرفته می‌شوند

$$\frac{\partial L}{\partial u} = p + \left( u - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial u} \quad (۱۳-۵)$$

و نظر به این که  $u = \dot{q} = \partial H / \partial p$  است،

$$p = \frac{\partial L}{\partial u}(q, u, t) \quad (۱۴-۵)$$

چنان که در مسئله ۲ نشان دادیم،  $L(u)$  محدب است، چون که  $H(p)$  محدب است. پس این امکان را داریم که هامیلتونی را از لاگرانژی به طریقی مشابه با ترسیم معکوس، رسم کنیم: هامیلتونی  $H(p)$ ، فاصله (منفی) از مبدأ تقاطع مماس به ضریب زاویه  $p$  با محور  $L$  است.



بنابر آنچه گذشت داریم

$$H(q, p, t) = up - L(q, u, t) \quad (۱۶-۵)$$

که در آن  $u$  به صورت تابعی از  $q$ ،  $p$  و  $t$ ، با حل معادله ۱۴-۵ به عنوان یک تابع ضمنی برای  $u$ ، به دست می‌آید.

مقایسه معادلات ۱۶-۵ با ۹-۵ و ۱۴-۵ با ۱۰-۵ تارن کامل رابطه بین لاگرانژی و هامیلتونی را نمایان می‌کند.

فرمولبندی یک مسئله مکانیک به صورت یک لاگرانژی، چنان که در بخش ۴-۵ نشان دادیم، غالباً آسانتر است، پس از آن می‌توان، با استفاده از معادلات ۱۴-۵ و ۱۶-۵، هامیلتونی را به دست آورد.



### ۳-۵ معادله حرکت لاگرانژی

در به دست آوردن معادله حرکت بر حسب  $q$  و  $u$ ، باید به خاطر داشته باشیم که لاگرانژی و هامیلتونی هر دو تابعی از  $q$  و  $t$  هستند که قبلاً آنها ثابت نگه می‌داشتیم. با دیفرانسیل‌گیری از لاگرانژی معادله ۹-۵ نسبت به  $q$  و با به یاد داشتن این‌که  $p$  هم تابعی از  $q$  است، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q} &= u \frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}\quad (۱۷-۵)$$

چون‌که  $u = \partial H / \partial p$  است.

با استفاده از دومین معادله از معادلات هامیلتون ۷-۴ ب، داریم

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (۱۸-۵)$$

و چون از معادله ۱۴-۵،  $p = \partial L / \partial u$  است، نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (۱۹-۵)$$

و یا بر حسب  $\dot{q}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (۲۰-۵)$$

این، معادله حرکت لاگرانژ است، که یک تک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم هم‌ارز با زوج معادلات جفت شده مرتبه اول هامیلتون است. معمول این است که به جای  $u$ ، برای نشان دادن سرعت تعمیم‌یافته از  $\dot{q}$  استفاده شود. از لحاظ مشتق‌گیری جزئی  $\dot{q}$  مثل هر متغیر مستقل دیگر منظور می‌شود.

### مثال ۳-۵

معادله حرکت لاگرانژ را برای لاگرانژی زیر پیدا کنید.

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q, t)$$



داریم

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

به طوری که معادله ۵-۲۰ به صورت زیر در می آید

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

که اگر  $q$  مختصه دکارتی یک ذره باشد، معادله حرکت نیوتون است. امتیاز فرمولبندی لاگرانژی بر نیوتونی این است که شکل معادله حرکت ۵-۲۰، تحت تغییرات مختصه تعمیم یافته  $q$ ، ناورداست، چنان که در فصل بعد خواهیم دید (همچنین در مسئله ۷).

#### مثال ۵-۴

نشان دهید که لاگرانژیهای  $L$  و  $\bar{L}$  که فقط به مقدار مشتق زمانی کامل یک تابع با  $q$  و  $t$  متفاوت اند، یک حرکت را توصیف می کنند.

هرگاه

$$\bar{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

(۵-۲۱ الف)

$$= L + \dot{q} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (۵-۲۱ ب)$$

آنگاه

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right) \quad (۵-۲۲)$$

و از آنجا هم

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (۵-۲۳)$$

بدین ترتیب، هرگاه  $q(t)$  در معادلات حرکت حاصل از  $\bar{L}$  صدق کند، در معادلات حرکت حاصل از  $L$  هم صدق خواهد کرد.

این تبدیل، اغلب در ساده کردن مسائل با لاگرانژیهای وابسته به زمان سودمند است، برای نمونه به مثال ۷-۵ نگاه کنید.

توجه داشته باشید که این دو لاگرانژی، دو اندازه حرکت متفاوت و لذا دو هامیلتونی متفاوت تعریف می‌کنند. اگر  $p = \partial L / \partial \dot{q}$  و  $\bar{p} = \partial \bar{L} / \partial \dot{q}$  باشد، در آن صورت از ۷-۲۱ ب داریم

$$\bar{p} = p + \frac{\partial f}{\partial q} \quad (۷-۲۴)$$

اندازه حرکت‌های  $p$  و  $\bar{p}$  فقط وقتی برابرند، که  $f$  مستقل از  $q$  باشد. بستگی بین هامیلتونیهای  $\bar{H}(q, \bar{p}, t)$  و  $H(q, p, t)$  که از  $\bar{L}$  و  $L$  ایجاد می‌شوند در فصل بعد بررسی می‌شوند، ولی برای کاربردهای بخصوصی، مراجعه به مثال ۷-۵، مسئله ۱۸ و مسئله ۱۹ سودمند است.

## ۷-۴ فرمولبندی

لاگرانژی آن دستگاه‌های دینامیکی که دارای انرژی جنبشی  $T(q, \dot{q}, t)$  و انرژی پتانسیل  $V(q, t)$  هستند، عبارت است از

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}, t) &= \text{انرژی پتانسیل} - \text{انرژی جنبشی} \\ &= T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \end{aligned} \quad (۷-۲۵)$$

و هامیلتونی آنها مستقیماً از ۷-۱۶ به دست می‌آید. در بسیاری موارد، انرژی جنبشی، تابع مربعی از سرعت تعمیم یافته  $\dot{q}$  است

$$T = \frac{1}{2} m G(q, t) \dot{q}^2 \quad (۷-۲۶)$$

که در آن  $G$  تابعی غیر صفر فقط از  $q$  و  $t$  است. در این صورت اندازه حرکت

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m G(q, t) \dot{q} \quad (۷-۲۷)$$

است و از ۷-۱۶ هامیلتونی به صورت

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= \frac{p^2}{2mG(q, t)} + V(q, t) \\ &= \text{انرژی پتانسیل} + \text{انرژی جنبشی} \end{aligned} \quad (۷-۲۸)$$



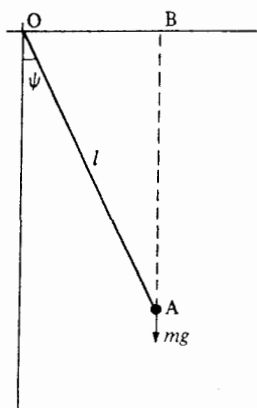
به دست می‌آید. بنابراین انرژی جنبشی بر حسب اندازه حرکت هم مربعی است.

در صورتی که  $G(q, t) = G(q)$  و  $V(q, t) = V(q)$  هیچکدام به طور صریح وابسته به زمان نباشند، تابع هامیلتونی برابر انرژی کل دستگاه و پایسته است. در این صورت از روشهای پربند که در فصل ۴ توصیف شدند، می‌توان برای درک کیفیت حرکت استفاده کرد. هرگاه یکی یا هر دوی  $V$  و  $G$  به طور صریح وابسته به زمان باشند، روشهای توصیف شده در فصلهای ۹ و ۱۰ می‌توانند به کار گرفته شوند.

در اکثر مثالهایی که بررسی می‌کنیم، انرژی جنبشی یک ذره به جرم  $m$ ، از عبارت  $\frac{1}{2}mw^2$  که در آن  $w$  تندی ذره است، به دست می‌آید. اما در اغلب موارد، ذره توسط یک میله یا سیم مقید شده است، لذا ارتباط بین  $w$  و مختصهٔ پیکربندی  $q$  یا  $\psi$  همیشه ساده نیست. انرژی پتانسیل گرانشی یک ذره در همسایگی سطح زمین معمولاً  $mgh$  گرفته می‌شود، که در آن،  $h$  ارتفاع و  $g$  شتاب ناشی از گرانی است که مقدار ثابت گرفته می‌شود. برای انرژی پتانسیل، چشمه‌های زیادی می‌توانند وجود داشته باشند، مثل دو مرکز نیرو. در آن صورت انرژی پتانسیل کل، از مجموع مقادیری که هر چشمه به سهم خود پدید می‌آورد، حاصل می‌شود.

### مثال ۵-۵

لاگرانژی و هامیلتونی یک آونگ را که در یک صفحهٔ قائم حرکت می‌کند، بیابید. در اینجا پیکربندی دستگاه را می‌توان با زاویهٔ  $\psi$  بین آونگ و راستای قائم رو به پایین تعیین کرد. سرعت تعمیم‌یافته  $u = \dot{\psi}$ ، سرعت زاویه‌ای OA است.



انرژی جنبشی جرم  $m$  در A عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m (\text{تندی})^2 = \frac{1}{2} mw^2 = \frac{1}{2} ml^2 u^2$$

و انرژی پتانسیل



$$V = -mgAB = -mgl \cos \psi$$

به طوری که لاگرانژی به صورت

$$L(\psi, u) = \frac{1}{2} ml^2 u^2 + mgl \cos \psi \quad (29-5)$$

در می آید. اندازه حرکت مزدوج  $\psi$  عبارت است از

$$p = \frac{\partial L}{\partial u} = ml^2 u \quad \text{یا} \quad u = \dot{\psi} = \frac{1}{ml^2} p$$

در این مورد  $p$  اندازه حرکت زاویه ای جرم  $m$  حول محور عمود بر صفحه کاغذ در نقطه  $O$  است. تابع هامیلتونی از معادله ۱۶-۵ عبارت است از

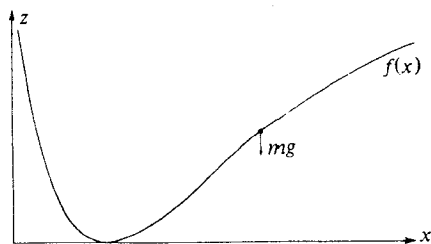
$$\begin{aligned} H(\psi, p) &= pu - \left( \frac{1}{2} ml^2 u^2 + mgl \cos \psi \right) \quad \left( u = \frac{p}{ml^2} \right) \\ &= \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \psi \end{aligned} \quad (30-5)$$

حرکتی که این هامیلتونی تعیین می کند، در بخش ۷-۴ توصیف شده است.

### مثال ۵-۶

برای حرکت یک مهره به جرم  $m$  که روی سیمی به شکل منحنی  $z = f(x)$  به نرمی می لغزد، توابع لاگرانژی و هامیلتونی را پیدا کنید. مورد خاص  $f(x) = \cosh x$  را به تفصیل بررسی کنید. محورها  $z$  و  $x$  به ترتیب عمودی و افقی هستند.

در این مثال می توان از  $x$  به عنوان مختصه تعمیم یافته استفاده کرد و سرعت تعمیم یافته  $\dot{x}$ ، به موازات محور  $x$  است.



انرژی پتانسیل عبارت است از

$$V(x) = mgz = mgf(x)$$

و انرژی جنبشی هم

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$$

است. اما داریم  $\dot{z} = \dot{x} \, df/dx$  به طوری که

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 [1 + f'(x)^2]$$

که به شکل معادله ۲۶-۵ است.

لاگرانژی عبارت است از

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 [1 + f'(x)^2] - mgf(x) \quad (31-5)$$

و اندازه حرکت مزدوج  $x$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} [1 + f'(x)^2]$$

است که تابعی از هر دوی  $\dot{x}$  و  $x$  است.

در این صورت، هامیلتونی هم به شکل ۱۶-۵ است.

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \dot{x}p - \left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 [1 + f'(x)^2] - mgf(x) \right\}, \quad \left( \dot{x} = \frac{p}{m[1 + f'(x)^2]} \right) \\ &= \frac{p^2}{2m[1 + f'(x)^2]} + mgf(x) \end{aligned} \quad (32-5)$$

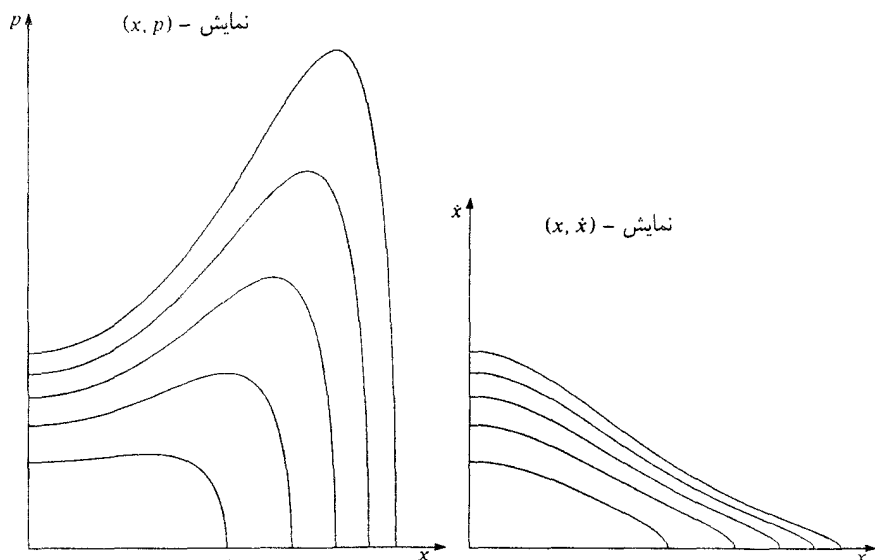
نظر به اینکه  $f(x)$  مستقل از زمان است،  $H$  یک مقدار ثابت حرکت می‌شود. در مورد خاص  $z = \cosh x$  داریم

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m \cosh^2 x} + mg \cosh x \quad (33-5)$$

این رابطه، پربندهای  $(x, p)$  را، چنان‌که در شکل ۲-۵ نشان داده‌ایم، با  $x$  و  $p$  به عنوان مختصات دکارتی تعریف می‌کند. پربندهای  $(x, \dot{x})$  هم که در معادله

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \cosh^2 x + mg \cosh x \quad (34-5)$$



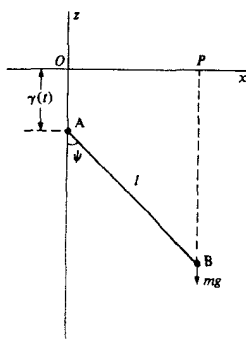


شکل ۲-۵ نمودار پربندهای هامیلتونی ۳۳-۵ را در نمایشهای  $(x, p)$  و  $(x, \dot{x})$  نشان می‌دهد. جریان در نمایش  $(x, p)$  حافظ مساحت است اما در نمایش  $(x, \dot{x})$  این‌طور نیست.

حاصل از بیان انرژی برحسب  $(x, \dot{x})$ ، صدق می‌کنند، نشان داده می‌شوند.

### مثال ۷-۵

یک آونگ که شامل جرم  $m$  متصل به میله سبک و صلب به طول  $AB$  است، می‌تواند آزاد در صفحه قائم حرکت کند. انتهای  $A$  میله مقید به حرکت قائم است و فاصله آن از یک نقطه ثابت  $O$ ، به وسیله تابع زمان  $\gamma(t)$  داده شده است. توابع لاگرانژی و هامیلتونی آن را پیدا کنید.



مختصه تعمیم‌یافته عبارت است از زاویه  $\psi$  بین  $AB$  و قائم رو به پایین. برای تعیین تندی جرم  $m$ ، نوشتن مختصات آن نسبت به محورهای  $Ox$  و  $Oz$ ، چنان‌که در نمودار دیده می‌شود،

سودمند است، که عبارت‌اند از

$$x = l \sin \psi$$

$$z = -l \cos \psi - \gamma(t)$$

انرژی پتانسیل برابر است با

$$V(z, t) = mgz = -mg[l \cos \psi + \gamma(t)]$$

و انرژی جنبشی هم عبارت است از

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\text{تندی})^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x} + \dot{z})^2 \\ &= \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \psi + (l \dot{\psi} \sin \psi - \dot{\gamma})^2] \\ &= \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\psi}^2 - 2l \dot{\psi} \dot{\gamma} \sin \psi + \dot{\gamma}^2] \end{aligned}$$

بدین ترتیب لاگرانژی به صورت زیر است

$$L = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\psi}^2 - 2l \dot{\psi} \dot{\gamma} \sin \psi) + mgl \cos \psi + h(t) \quad (35-5)$$

که در آن

$$h(t) = \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 + mg \gamma$$

تابعی فقط از  $t$  است و، چنان‌که در مثال ۴-۵ نشان داده شد، می‌تواند نادیده گرفته شود. اندازه حرکت مزدوج  $\psi$  عبارت است از

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = m(l^2 \dot{\psi} - l \dot{\gamma} \sin \psi)$$

و پس از چند دستکاری، هامیلتونی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$H(\psi, p, t) = \frac{(p + ml \dot{\gamma} \sin \psi)^2}{2ml^2} - mgl \cos \psi \quad (36-5)$$





یک هامیلتونی دیگر را می‌توان با استفاده از نتیجه مثال ۴-۵ راحت‌تر به دست آورد. با نوشتن

$$\dot{\psi} \dot{\gamma} \sin \psi = -\frac{d}{dt}(\dot{\gamma} \cos \psi) + \ddot{\gamma} \cos \psi$$

خواهیم داشت

$$\bar{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\psi}^2 + m l (g - \ddot{\gamma}) \cos \psi \quad (37-5)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که شتاب قائم همان اثر را دارد که یک میدان گرانشی متغیر با زمان دارد. اکنون، اندازه حرکت مزدوج

$$\bar{p} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\psi}} = m l^2 \dot{\psi}$$

است و هامیلتونی مورد نظر عبارت است از

$$\bar{H} = \frac{\bar{p}^2}{2 m l^2} - m l (g - \ddot{\gamma}) \cos \psi \quad (38-5)$$

در فصل بعد، ضمن یک نظریه عام نشان خواهیم داد که  $H$  و  $\bar{H}$  چگونه به همدیگر مرتبط می‌شوند. نظریه‌ای هم که در فصل ۹ خواهد آمد، نشان خواهد داد که چگونه در بعضی موارد می‌توان جوابهای تقریبی برای این مسئله وابسته به زمان پیدا کرد.

### مسائل

۱. تبدیل لژاندر را به کار بگیرید و توابع هامیلتونی  $H(p)$  متناظر با لاگرانژیهای زیر را به دست آورید.

$$L(u) = e^u \quad (\text{الف})$$

$$L(u) = \tan u \quad (0 \leq u < \frac{1}{2} \pi) \quad (\text{ب})$$

۲. اگر  $H(p)$  و  $L(u)$  هامیلتونی و لاگرانژی یک دستگاه باشند، نشان دهید که تساوی

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = 1$$

برقرار است. درباره تحدب  $H(p)$  و  $L(u)$  چه استنتاجی می‌توان کرد؟

## ۳. لاگرانژی

$$L(u) = \sin u \quad (0 \leq u < \frac{1}{4}\pi)$$

محدب نیست. یک تبدیل لژاندر اصلاح شده برای چنین لاگرانژی تعریف کنید و برای به دست آوردن  $H(p)$  در این مورد، آن را به کار ببندید.

## ۴. نشان دهید که

$$\frac{\partial H}{\partial t}(q, p, t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(q, \dot{q}, t)$$

و استنتاج کنید که هرگاه لاگرانژی صریحاً وابسته به زمان نباشد آنگاه مقدار هامیلتونی، روی همه منحنیهای فاز ثابت است. آیا لاگرانژی هم روی همه منحنیهای فاز مقدارش ثابت است؟

## ۵. هامیلتونیهای متناظر با لاگرانژیهای زیر را پیدا کنید.

$$L(\dot{q}) = (1 - \dot{q}^2)^{1/2} \quad (|\dot{q}| \leq 1) \quad (\text{الف})$$

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{\gamma} e^{\alpha t} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \quad (\text{ب})$$

و لاگرانژی متناظر با هامیلتونی زیر را پیدا کنید.

$$H(q, p) = \frac{1}{\gamma} p^2 + p \sin q \quad (\text{ج})$$

۶. منحنیهای فاز دستگاهی را که لاگرانژی آن ذیلاً داده می‌شود، در نمایش  $(q, \dot{q})$  و نمایش  $(q, p)$  ترسیم کنید.

$$L = q\dot{q} - (1 - \dot{q}^2)^{1/2} \quad (|\dot{q}| \leq 1)$$

۷.  $Q$  و  $q$ ، در مختصه پیکربندی یک دستگاه مکانیکی، با معادله زیر به هم مربوطند

$$q = f(Q)$$

اگر  $L(q, \dot{q}, t)$  لاگرانژی دستگاه در نمایش  $q$  باشد، با محاسبه مستقیم نشان دهید که معادله لاگرانژ در نمایش  $Q$  به صورت

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}} \right) - \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q} \right) = 0$$



است، که در آن

$$\bar{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(f(Q), f'(q)\dot{Q}, t)$$

است. به علاوه نشان دهید که اندازه حرکت‌های  $p$  و  $P$  مزدوج  $q$  و  $Q$  با همدیگر مرتبط‌اند.

$$P = p/f'(Q)$$

۸. هرگاه ذره‌ای به جرم  $m$  در فاصله‌ای دور از سطح زمین، به طور عمودی به طرف بالا پرتاب شود، لاگرانژی آن

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + GMm/(R+z)$$

می‌شود که در آن  $G$  ثابت گرانشی،  $M$  و  $R$  جرم و شعاع زمین، و  $z$  ارتفاع ذره از سطح آن است. هامیلتونی ذره را پیدا کنید و نمودار فاز را با نشان دادن واضح ناحیه‌ای که حرکت در آن محدود است و ناحیه‌ای که حرکت در آن نامحدود است، رسم کنید. معادلهٔ خم‌میزه را بیابید. زمان لازم برای بازگشت ذره به سطح زمین را در حرکت محدود پیدا کنید.

۹. ذره‌ای به جرم  $m$  تحت تأثیر نیروی گرانی، مقید به حرکت در صفحه‌ای قائم در امتداد منحنی معلومی است با معادلات پارامتری

$$z = h(\eta), \quad x = f(\eta)$$

که در آن، محور  $z$  در راستای عمود و رو به بالاست. با انتخاب  $\eta$  به عنوان مختصهٔ تعمیم‌یافته، نشان دهید که لاگرانژی ذره

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\eta}^2 \left[ \left( \frac{dh}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 \right] - mgh(\eta)$$

است و سپس هامیلتونی متناظرش را به دست آورید.

۱۰. ذره‌ای به جرم  $m$ ، تحت تأثیر نیروی گرانی مقید به حرکت در یک صفحهٔ قائم در امتداد یک سیکلوئید صاف است. معادلات پارامتری سیکلوئید

$$z = A(1 - \cos \phi) \quad x = A(\phi + \sin \phi) \quad (-\pi < \phi < \pi)$$



است که در آن  $A$  یک مقدار ثابت مثبت و محور  $z$  در راستای قائم رو به بالاست. اگر  $s$ ، طول کمان در امتداد سیکلوئید از پایین منحنی اندازه‌گیری شود، نشان دهید که لاگرانژی حرکت

$$L = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - mgs^2 / 8A$$

است و از روی آن هم نشان دهید که تناوب حرکت مستقل از دامنه آن است. این تناوب را پیدا کنید.

۱۱. ذره‌ای به جرم  $m$ ، توسط یک سیم راست و سبک که طول متغیر آن  $l(t)$  معلوم است، به نقطه ثابت  $O$  وصل شده و تحت تأثیر نیروی گرانی تاب می‌خورد. در این شرایط حرکت ذره محدود به صفحه قائم ماربر  $O$  است. توابع لاگرانژی و هامیلتونی این حرکت را پیدا کنید.

۱۲. تابع هامیلتونی و معادلات هامیلتون یک ذره به جرم  $m$  را که تحت تأثیر نیروی گرانی روی یک سیم صاف و صلب سهموی می‌لغزد پیدا کنید. حرکت در صفحه قائم  $z-x$  که در آن محور  $z$  قائم رو به بالاست واقع می‌شود و دو مورد بررسی می‌شود:  
(الف) سیم سهموی ثابت است، و بر منحنی زیر قرار دارد

$$z = \frac{1}{2} \alpha^2 x^2$$

(ب) سیم حرکت افقی دارد، به طوری که معادله آن به صورت زیر است

$$z = \frac{1}{2} \alpha^2 [x - \gamma(t)]^2$$

که در آن  $\gamma(t)$  یک تابع معلوم از زمان است.

۱۳. ذره‌ای به جرم  $m$  در اثر نیروی گرانی، در امتداد یک سیم مارپیچی هموار که معادلات پارامتری آن از  $\psi$  به صورت

$$\left. \begin{aligned} z &= k\psi \\ x &= a \cos \psi \\ y &= a \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (a > 0, k > 0)$$

است، حرکت می‌کند، که در آنها  $a$  و  $k$  مقادیر ثابتند و محور  $z$ ، قائم رو به بالاست. معادلات حرکت هامیلتون را به دست آورید و  $\psi(t)$  را برحسب  $\psi(0)$  و  $\dot{\psi}(0)$  پیدا کنید. چنانچه سیم



ماریچ، به جای ثابت بودن، حول محور  $z$  با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\Omega$  دوران کند معادلات پارامتری آن چگونه‌اند؟ عبارتی بر حسب  $\psi$  و  $\dot{\psi}$  برای تندی  $w$  پیدا کنید و از روی آن معادلات حرکت و جواب  $\psi(t)$  آنها را برای این وضعیت جدید بیابید.

۱۴. مهره‌ای به جرم  $m$ ، در اثر نیروی گرانی مقید به لغزیدن روی یک سیم سهموی هموار با معادله

$$z = \frac{1}{2} \alpha^2 x^2$$

است. که در آن محور  $z$ ، قائم رو به بالاست. سیم، حول محور  $z$ ، با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\Omega$  دوران می‌کند. نشان دهید که هامیلتونی حرکت به صورت زیر است:

$$H = \frac{p^2}{2m(1 + \alpha^2 x^2)} + \frac{m x^2}{2} (g \alpha^2 - \Omega^2)$$

منحنیهای فاز را رسم کنید و یک توصیف کیفی از حرکت، برای موارد  $g \alpha^2 < \Omega^2$  و  $g \alpha^2 > \Omega^2$  به طور جداگانه، ارائه دهید. بخصوص نشان دهید که اگر  $g \alpha^2 > \Omega^2$ ، مهره همواره با تناوب

$$T = \frac{2\sqrt{2}m}{\beta} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \left( 1 + \frac{\alpha^2 E}{\beta^2} \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

که در آن  $E$  انرژی و  $\beta^2 = \frac{1}{2} m(g \alpha^2 - \Omega^2)$  است حرکت می‌کند.

۱۵. یک ذره مقید به لغزش روی یک سیم هموار به شکل دایره‌ای به شعاع  $R$  در اثر نیروی گرانی است. اگر سیم حول یک قطر عمودی با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\Omega$  دوران کند، نشان دهید که هامیلتونی حرکت ذره به صورت

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} - m \left( \frac{1}{2} R^2 \Omega^2 \sin^2 \psi + gR \cos \psi \right)$$

است که در آن  $\psi$  جابه‌جایی زاویه‌ای ذره نسبت به راستای قائم رو به پایین با مبدأ منطبق به مرکز دایره است. نقاط ثابت دستگاه را تعیین و درباره پایداری آنها بحث کنید. نمودار فاز را رسم کنید. بسامد نوسانهای کوچک حول همه نقاط ثابت بیضوی را تعیین کنید.

۱۶. یک ذره به جرم  $m$ ، در یک استوانه بدون جرم به شعاع  $R$  نشانده شده است. فاصله ذره از محور استوانه،  $l$  است. این استوانه روی یک سطح شیبدار، به زاویه  $\alpha$  با افق، بدون لغزش می‌غلتد و محور استوانه در حین غلتیدن آن افقی می‌ماند. ذره تحت اثر نیروی گرانی است. هامیلتونی

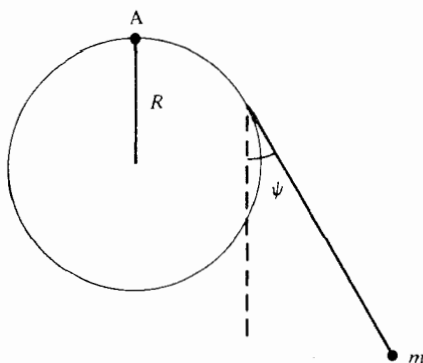
حرکت ذره را پیدا کنید و نشان دهید که هرگاه  $R \sin l < l$  باشد، دستگاه دارای یک نقطه ثابت پایدار است. تناوب نوسانهای کوچک حول این نقطه ثابت را بیابید.

۱۷. یک آونگ تشکیل یافته از جرم  $m$  که متصل به طنابی به طول  $l$  است. طناب انبساط ناپذیر است و سر دیگر آن در نقطه  $A$  به روی یک استوانه افقی به شعاع  $R < l/\pi$ ، چنانکه در شکل دیده می شود، وصل شده است. با این فرض که حرکت منحصر به یک صفحه قائم عمود بر محور استوانه و مار بر  $A$  است و زاویه طناب با راستای قائم رو به پایین،  $\psi$  است، نشان دهید که هامیلتونی حرکت به صورت

$$H(\phi, p) = \frac{p^2}{2m(R\phi - l)^2} - mg[R(1 - \cos \phi) + (l - R\phi) \sin \phi]$$

است که در آن  $\phi + \psi = \frac{1}{2}\pi$  و

$$p = m \dot{\phi} (R\phi - l)$$



است. سپس نشان دهید که بسامد زاویه ای نوسانهای کوچک، حول نقطه ثابت پایدار، برابر است با

$$\omega = \left[ g / \left( l - \frac{1}{2} R\pi \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

۱۸. فرض کنید که یک آونگ قائم تخت تشکیل یافته از جرم  $m$  متصل به انتهای یک میله سبک به طول  $l$ ، و انتهای دیگر میله می تواند در راستای افقی صفحه حرکت تغییر مکان دهد، به طوری که فاصله آن از یک نقطه ثابت، با تابع معلوم زمان،  $\gamma(t)$ ، تعیین می شود. نشان دهید که هامیلتونی حرکت آونگ می تواند به صورت

$$H(\psi, p) = p^2 / 2ml^2 + ml[\beta(t) \sin \psi - g \cos \psi]$$

نوشته شود، که در آن  $\beta(t) = \ddot{\gamma}(t)$  است و  $\psi$  زاویه بین آونگ و قائم رو به پایین است. برای مورد خاص  $\beta = ag$  که در آن  $a$  یک مقدار ثابت است، نقاط ثابت را تعیین و پایداری آنها را بحث کنید. همچنین تناوب نوسانهای کوچک حول نقاط ثابت بیضوی را بیابید.

۱۹. (الف) هرگاه دستگاهی دارای لاگرانژی

$$L = \frac{1}{2} G(q, t) \dot{q}^2 + F(q, t) \dot{q} - V(q, t)$$

باشد، نشان دهید که هامیلتونی آن به صورت

$$H = \frac{[p - F(q, t)]^2}{2G(q, t)} + V(q, t)$$

است، که در آن  $p$  برابر است با

$$p = G\dot{q} + F$$

(ب) نشان دهید که لاگرانژی

$$\bar{L} = \frac{1}{2} G(q, t) \dot{q}^2 - [V(q, t) + \partial f(q, t)/\partial t] \quad (\partial f/\partial q = F)$$

همان معادلات حرکت را مشخص می‌کند که  $L$  می‌کند. نشان دهید که هامیلتونی  $\bar{H}$  متناظر با  $\bar{L}$  عبارت است از

$$\bar{H} = \frac{\bar{p}^2}{2G(q, t)} + V(q, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(q, t)$$

که در آن  $\bar{p}$  برابر است با

$$\bar{p} = G\dot{q}$$

(الف) به طور صریح نشان دهید که  $H$  و  $\bar{H}$  باعث یک حرکت می‌شوند.

۲۰. لاگرانژی یک ذره نسبیتی آزاد، که در امتداد یک خط راست با تندی نزدیک به سرعت نور،  $c$ ، حرکت می‌کند، عبارت است از

$$L(\dot{q}) = -mc^2 [1 - (\dot{q}/c)^2]^{\frac{1}{2}}$$

که در آن  $q$  موضع ذره روی خط راست است. فرض کنید یک ذرهٔ نسبیتی تحت کش نیرویی که منشأ انرژی پتانسیل

$$V(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

است قرار دارد. اندازه حرکت  $p$  و هامیلتونی  $H(q, p)$  آن را به دست آورید. آیا مقدار  $E = H(q, p)$  در امتداد یک منحنی فاز پایسته است؟ این مقدار در سرعت صفر و در مبدأ چقدر است؟ نشان دهید که تناوب نوسان می‌تواند به صورت زیر بیان شود.

$$T = \frac{4}{c \omega} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \frac{E - (E - mc^2) \sin^2 \theta}{[(E + mc^2) - (E - mc^2) \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}}$$

ثابت کنید که این تناوب، وقتی که مقدار بیشینه  $|q|$  در امتداد یک منحنی فاز در مقایسه با  $c$  کوچک است، به سوی مقدار غیرنسبیتی‌اش میل می‌کند.



## نظریهٔ تبدیل

### ۱-۶ مقدمه

این فصل اختصاص دارد به بحث در نظریهٔ هامیلتونی. حتی در محدودهٔ این نظریه هم طرز نمایشهای بسیاری وجود دارند که دارای مختصات تعمیم یافته مختلف و اندازه حرکت‌های مزدوج متفاوت هستند.

انتخاب خوب و مناسب دستگاه مختصات، یا طرز نمایش، موجبات سادگی و سهولت در عملیات بعدی را فراهم می‌کند. اگر با  $(q, p)$  اولیه نامناسب شروع کنیم، لازم است که تبدیل به  $(Q, P)$  نهایی را خوب انجام بدهیم. اگر کار تبدیل، شکل هامیلتونی معادلات حرکت را حفظ کند، کمک مؤثری به شمار می‌رود، و بالاخص هنگامی سودمند است که تابع هامیلتونی در نمایش  $(Q, P)$ ، تابعی فقط از  $P$  باشد.

بنابراین، دو هدف عمدهٔ نظریهٔ تبدیل عبارت‌اند از:

- (ت ۱) تعیین آن تبدیلهایی که شکل معادلات هامیلتون را نگه می‌دارند؛ و
  - (ت ۲) پیدا کردن آن تبدیلهای خاص که تابع هامیلتونی را به یک شکل ساده خلاصه می‌کنند.
- مطلب عمدهٔ این فصل نیل به هدف (ت ۱) و تعیین یک طرح صوری مناسب برای نیل به هدف (ت ۲) است که در فصلهای بعدی مورد استفاده واقع می‌شود.

نخست، تبدیلهای مستقل از زمان را که در موردشان نظریه اندکی آسانتر است بررسی می‌کنیم.

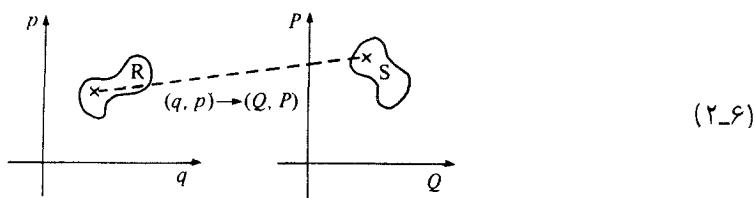
در بخش ۶-۶، نظریه را گسترش می‌دهیم، تا تبدیلهای وابسته به زمان را هم در برگیرد.

## ۲-۶ نظریه تبدیلهای مستقل از زمان

در فصل ۴ دیدیم که جریان حاصل از معادلات هامیلتون، حافظ مساحت است. مراد ما به دست آوردن تبدیل بین طرز نمایشها، یا دستگاههای مختصات مختلف در فضای فاز است، به این سبب است که برای نخستین بار نیاز به تعریف مساحت در بیش از یک نمایش داریم؛ شکل این تعریف باید مستقل از طرز نمایش باشد.

اگر یک ناحیه  $R$  در نمایش  $(q, p)$  تبدیل یافته است به یک ناحیه  $S$  در نمایش  $(Q, P)$ ، مساحت‌های این ناحیه‌ها در هر طرز نمایش، با  $(q, p)$  و  $(Q, P)$  به عنوان مختصات دکارتی، به صورت زیر معین هستند

$$A_R = \iint_R dq dp, \quad A_S = \iint_S dQ dP \quad (۱-۶)$$



(۲-۶)

در تبدیلهای عام  $A_S$  و  $A_R$  می‌توانند مقادیر عددی متفاوت داشته باشند. چه

$$\iint_S dQ dP = \iint_R dq dp \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \quad (۳-۶)$$

که در آن تابع زیر انتگرال دوم، یک دترمینان ژاکوبی است برای این‌که جریان در هر یک از نمایشها هامیلتونی باشد، یعنی حافظ مساحت باشد، لازم است که مقادیر عددی همه مساحتها، مستقل از نمایش باشند. این ایجاب می‌کند که دترمینان ژاکوبی مقدار ثابت باشد. چنان‌که در مسئله ۱۴ نشان داده‌ایم، این مقدار ثابت را می‌توان به عنوان واحد انتخاب کرد، بی آن‌که از عمومیت تبدیل کم شود،

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1 \quad (۴-۶ \text{ الف})$$

و یا معادل با آن

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = 1 \quad (۴-۶ \text{ ب})$$



تبدیلی که این شرط را برآورده کند، بنדادی می‌نامیم. مثلاً تبدیل

$$Q = p, \quad P = -q \quad (۵-۶)$$

دارای ژاکوبی ۱ است، و لذا بندادی است. تبدیل از مختصات قطبی به مختصات دکارتی، دارای شکل زیر است

$$q = P \cos Q, \quad p = P \sin Q \quad (۶-۶)$$

ژاکوبی این تبدیل مقدار ثابت نیست، لذا تبدیل هم بندادی نیست.

### مثال ۱-۶

مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را در تبدیل زیر چنان تعیین کنید که یک تبدیل بندادی باشد

$$\begin{aligned} Q &= q + \alpha p \\ P &= p + \beta q \end{aligned} \quad (۷-۶)$$

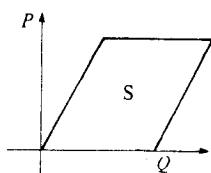
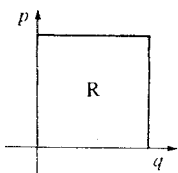
ژاکوبی این تبدیل عبارت است از

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha\beta$$

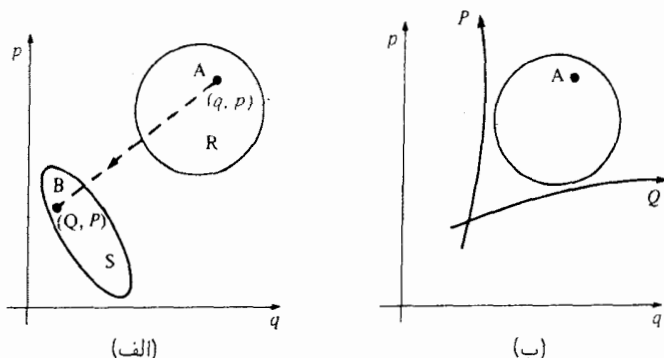
که وقتی برابر واحد است که یا  $\alpha$  و یا  $\beta$  صفر باشد. به‌ازای  $\beta = 0$

$$\begin{aligned} Q &= q + \alpha p \\ P &= p \end{aligned} \quad (۸-۶)$$

و همان‌طور که در ۹-۶ نشان داده‌ایم، یک برش در جهت  $q$  است



(۹-۶)

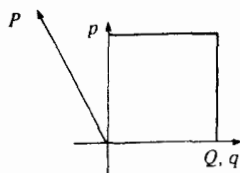


شکل ۱۰۶-۱ طرح نشاندهنده توجیهای متفاوت تبدیل  $(q, p) \leftarrow (Q, P)$ . در (الف) نقطه فاز A در  $(q, p)$  به B در  $(Q, P)$  می‌رود، به طوری که ناحیه دایره‌ای R به ناحیه تخم‌مرغی S می‌رود. در (ب) نقطه فاز A بدون تغییر است اما دستگاه مختصات راست‌گوشه  $(q, p)$  به دستگاه مختصات منحنی‌الخط  $(Q, P)$  تغییر یافته است.

وقتی که  $\alpha = 0$  باشد، یک برش در جهت  $p$  به دست می‌آوریم، و وقتی که  $\alpha = \beta = 0$  باشد، یک تبدیل همسانی به دست می‌آید.

تبدیل  $(q, p) \leftarrow (Q, P)$  را می‌توان به دو طریق متمایز توجیه کرد. در یک مورد، نقطه فاز و حالتی که آن نقطه نمایش می‌دهد، تغییر می‌کند، اما دستگاه مختصات بدون تغییر است؛ نقطه فاز در خود دستگاه مختصات از  $(q, p)$  به  $(Q, P)$  می‌رود. این توجیه در شکل ۱۰۶-الف، که در آن ناحیه R به ناحیه S با شکل متفاوت تبدیل یافته است، دیده می‌شود. متقابلاً در شکل ۱۰۶-ب دستگاه مختصات تغییر یافته است، اما نقطه فاز و حالتی که آن نمایش می‌دهد، بدون تغییر هستند.

برای مثال، تبدیل معادله ۱۰۶-۸ را در نظر بگیرید. تعبیر نخست که در آن نقاط فاز تغییر می‌کنند، در ۱۰۶-۹ نشان داده می‌شود و در آن مربع تبدیل شده است به متوازی‌الاضلاع. تعبیر دوم یک دستگاه مختصات معوج می‌سازد که در آن، محور  $Q$ ، خط  $P = 0$  منطبق با محور  $q$  است و محور  $P$ ، خط  $Q = 0$ ، خط  $Q = -q$  است که در ۱۰۶-۱۰ نشان داده شده است.



(۱۰-۶)

هر چند که این تعبیرها کاملاً متفاوت‌اند، ولی ریاضیاتشان یکی است. تعبیرهای متفاوت در شرایط متفاوتی به کار برده می‌شوند.

### ۳-۶ تابع مولد $F_1(Q, q)$

یک تبدیل عام بین دو طرز نمایش، دو تابع برای مشخص شدن لازم دارد، اما در یک تبدیل بندادی، به سبب خاصیت حفظ مساحت، فقط یک تابع برای مشخص شدن لازم است.

مساحت محاط در منحنی  $\mathcal{L}$  در فضای فاز را می‌توان یا به صورت یک انتگرال دوگانه و یا، با استفاده از قضیه استوکس، به صورت یک انتگرال ساده بیان کرد؛

$$\iint_{\mathcal{L}} dq dp = \oint_{\mathcal{L}} p(q) dq \quad (۱۱-۶)$$

که در آن منحنی  $\mathcal{L}$  در جهت ساعتگرد کشیده می‌شود. در اینجا، چنان‌که در آخر بخش پیش بحث شد، در نظر گرفتن تبدیل  $(Q, P) \rightarrow (q, p)$  به عنوان تعریف یک دستگاه مختصات جدید در فضای فاز، می‌تواند سودمند واقع شود. مساحت را می‌توان به صورت یک انتگرال خطی در هر دستگاه مختصات بیان کرد و از آنجا که ژاکوبی تبدیل برابر واحد است، داریم

$$\oint_{\mathcal{L}} p dq = \oint_{\mathcal{L}} P dQ \quad (۱۲-۶)$$

که در آن  $\mathcal{L}$  منحنی بسته دلخواهی در فضای فاز است. اما می‌توان تقریباً هر زوج متغیر را مستقل انگاشت؛ بالاخص می‌توان  $(Q, q)$  را به عنوان متغیرهای مستقل گرفت و  $P$  و  $p$  را به صورت توابعی از آنها بیان کرد. معادله (۱۲-۶) را می‌توان به صورت انتگرال خطی زیر نوشت

$$\oint_{\mathcal{L}} [p(Q, q) dq - P(Q, q) dQ] = 0 \quad (۱۳-۶)$$

نظر به این‌که این معادله برای همه منحنیهای  $\mathcal{L}$  صادق است، تابع زیر انتگرال باید دیفرانسیلی کامل از یک تابع  $F_1(Q, q)$  باشد، یعنی

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} [p dq - P dQ] &= \oint_{\mathcal{L}} dF_1(Q, q) \\ &= \oint_{\mathcal{L}} \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \oint_{\mathcal{L}} \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ \end{aligned} \quad (۱۴-۶)$$

به سبب اختیاری بودن منحنی  $\mathcal{L}$ ، می‌توان ضرایب مربوط  $dq$  و  $dQ$  را مساوی هم قرار داد که در نتیجه داریم

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}(Q, q), \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}(Q, q) \quad (۱۵-۶)$$

یعنی، خاصیت حفظ مساحت تبدیل بندادی، متضمن وجود داشتن تابع  $F_1(Q, q)$  است، که تابع مولد نام یافته است. این، یک طرز بالاخص فشردهٔ نمایش تبدیل  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  است. تابع مولد، برحسب یک مقدار ثابت جمعی، نامعین است.

تبدیل  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  در رابطهٔ ۶-۱۵ به صورت ضمنی است و برای بیان صریح آن، نیاز به یک وارونی است. این کار را چنانچه

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q}(Q, q) \neq 0 \quad (۱۶-۶)$$

باشد می‌توان همیشه انجام داد، و شرط لازم و کافی برای این است که  $F_1(Q, q)$  یک تبدیل بندادی تولید کند. در عمل، این وارونی می‌تواند مزاحمت ایجاد کند و  $F_1(Q, q)$  غالباً چند مقداره است که بیش از یک جواب دارد.

تبدیل‌های مختصات در فضای پیکربندی، مثلاً  $Q = e^q$ ، غالباً باارزشند، اما در این مورد شکل قبلی تابع مولد نمی‌تواند سودمند باشد، چون که  $q$  و  $Q$  مستقل نیستند و از این رو ممکن نیست  $p$  یا  $P$  را برحسب آنها بیان کرد. یعنی تابع مولد  $F_1(Q, q)$  وجود ندارد، اما با استفاده از ۶-۱۲ داریم

$$\oint_{\mathcal{L}} dq \left( p - P \frac{dQ}{dq} \right) = 0 \quad (۱۷-۶)$$

و یا، چون منحنی  $\mathcal{L}$  اختیاری است،

$$p = P \frac{dQ}{dq} \quad (۱۸-۶)$$

این گونه تبدیلهای مهم هستند؛ برای مثال تبدیل همانی

$$Q = q, \quad P = p \quad (۱۹-۶)$$

از این نوع است. در بخش بعدی، ملاحظه خواهیم کرد که توابع مولد برای این نوع تبدیل را چگونه به دست می‌آوریم.

## مثال ۶-۲

به طور صریح نشان دهید که تبدیل تولید شده به وسیلهٔ  $F_1(Q, q)$ ، حافظ مساحت است.



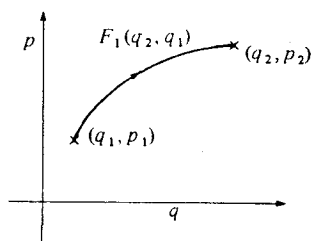
نظر به این که  $p = \partial F_1 / \partial q$  و  $P = -\partial F_1 / \partial Q$  است، لازم است که ژاکوبی ۴-۶ برحسب متغیرهای مستقل  $(q, Q)$  بیان شود. برای این کار از خواص استاندارد ژاکوبی استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} &= \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, Q)} \frac{\partial(q, Q)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, Q)} \left[ \frac{\partial(q, p)}{\partial(q, Q)} \right]^{-1} \\ &= - \frac{\partial P}{\partial q} \bigg|_Q \left[ \frac{\partial p}{\partial Q} \bigg|_q \right]^{-1} \\ &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q \partial q} \right]^{-1} = 1 \end{aligned}$$

### مثال ۳-۶

تبدیل  $(q_1, p_1) \rightarrow (q_2, p_2)$  که در آن  $q_i = q(t_i)$  و  $p_i = p(t_i)$  و  $i = 1, 2$  نقاطی روی منحنی فازند، حافظ مساحت است و از این رو می‌توان آن را با یک تابع مولد  $F_1(q_2, q_1)$  نمایش داد، که در آن

$$p_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_1}(q_2, q_1), \quad p_2 = -\frac{\partial F_1}{\partial q_2}(q_2, q_1)$$



توجه داشته باشید که تابع مولد می‌تواند تبدیلهایی تولید کند که یا تغییرات حالت هستند، یا تغییرات دستگاه مختصات. در مورد حاضر یک تغییر حالت داریم.

### ۴-۶ اشکال دیگر تابع مولد

تابع مولد  $F_1(Q, q)$  به  $Q$  و  $q$  بستگی داشت نه به زوج متغیرهای دیگر، چون معادله ۱۲-۶ را به جای  $(Q, p)$ ،  $(P, p)$  یا  $(Q, p)$ ، برحسب  $(Q, q)$  بیان کردیم. در هر منحنی بسته  $\mathcal{L}$

$$\circ = \oint_{\mathcal{L}} d(P, Q) = \oint_{\mathcal{L}} P dQ + \oint_{\mathcal{L}} Q dP \quad (۲۰-۶)$$

جدول ۱-۶ این جدول نشان می‌دهد که متغیرهای وابسته چگونه با توابع مولد مختلف مربوط می‌شوند.

تابع مولد	متغیرهای وابسته			
	$q$	$p$	$Q$	$P$
$F_1(Q, q)$		$\frac{\partial F_1}{\partial q}$		$-\frac{\partial F_1}{\partial Q}$
$F_2(P, q)$		$\frac{\partial F_2}{\partial q}$	$\frac{\partial F_2}{\partial P}$	
$F_3(Q, p)$	$-\frac{\partial F_3}{\partial p}$			$-\frac{\partial F_3}{\partial Q}$
$F_4(P, p)$	$-\frac{\partial F_4}{\partial p}$		$\frac{\partial F_4}{\partial P}$	

به‌طوری که

$$\oint_{\mathcal{L}} P dQ = - \oint_{\mathcal{L}} Q dP \quad (21-6)$$

که برای  $(p, q)$  هم رابطه‌های مشابهی هست. بنابراین هر طرف معادلهٔ ۱۲-۶ را می‌توان به دو طریق بیان کرد، و چهار نوع تابع مولد مختلف، بسته به انتخاب متغیر مستقل، وجود دارند:  $F_1(Q, q)$ ،  $F_2(P, q)$ ،  $F_3(Q, p)$  و  $F_4(P, p)$ . برای  $F_2(P, q)$  نظریه را شرح می‌دهیم: نتایج حاصل برای همهٔ توابع مولد را هم در جدول ۱-۶ خلاصه کرده‌ایم.

با استفاده از  $(P, q)$  به‌عنوان متغیرهای مستقل معادله‌های ۲۱-۶ و ۱۲-۶ به‌جای معادلهٔ ۱۴-۶،

$$\circ = \oint_{\mathcal{L}} (pdq + QdP) \quad (22-6)$$

را حاصل می‌کنند. چون  $\mathcal{L}$  اختیاری است،

$$\oint_{\mathcal{L}} (pdq + QdP) = \oint_{\mathcal{L}} dF_2(P, q) \quad (23-6)$$

و

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}(P, q), \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}(P, q) \quad (24-6)$$

توجه داشته باشید که هر دو معادله برای این تابع مولد یک علامت دارند. در این‌جا، باز هم  $F_2(P, p)$ ، برحسب یک مقدار ثابت، نامعین است.



توابع مولد  $F_1(Q, q)$  و  $F_2(P, q)$  را می‌توان با استفاده از معادلهٔ همانی ۶-۲۰، به همدیگر مربوط کرد و معادلهٔ ۶-۲۳ را به صورت زیر در آورد

$$\oint_{\mathcal{L}} dF_2 = \oint_{\mathcal{L}} p dq - P dQ + d(PQ) = \oint_{\mathcal{L}} d(F_1 + PQ) \quad (25-6)$$

بدین ترتیب به وسیلهٔ  $F_1(Q, q)$  همان تبدیل بنادای تولید می‌شود که با  $F_2(P, q)$  که در آن

$$F_2(P, q) = F_1(Q, q) + PQ \quad (26-6)$$

است و همچنین،  $Q$  در سمت راست آن، با استفاده از معادلهٔ ضمنی

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}(Q, q) \quad (27-6)$$

به صورت تابعی از  $(P, q)$  بیان شده است.

مثال ۶-۴

تبدیل همانی با تابع زیر تولید شده است

$$F_2(P, q) = Pq \quad (28-6)$$

مثال ۶-۵

نشان دهید که تبدیل

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = q \cot p \quad (29-6)$$

بنادای است و توابع مولد  $F_1(Q, q)$  و  $F_2(P, q)$  را تعیین کنید.  
داریم

$$P dQ = q \cot p \left[ (\cot p) dp - \frac{dq}{q} \right] \quad (30-6)$$

و در نتیجه

$$p dq - P dQ = d(pq + q \cot p) \quad (31-6)$$

است و نشان می‌دهد که تابع زیر انتگرال معادلهٔ ۱۳-۶ یک دیفرانسیل کامل است. تابع مولد  $F_1(Q, q)$ ، با بیان  $pq + q \cot p$  بر حسب  $(Q, q)$  و استفاده از رابطهٔ

$$p = \sin^{-1}(qe^Q)$$

که از معادلهٔ ۲۹-۶ به دست آمده است، پیدا می‌شود. بدین قرار

$$pdq - PdQ = dF_1(Q, q) \quad (۳۲-۶)$$

می‌شود، که در آن

$$F_1(Q, q) = q \sin^{-1}(qe^Q) + [e^{-2Q} - q^2]^{\frac{1}{2}} \quad (۳۳-۶)$$

وجود  $F_1(Q, q)$  نشان می‌دهد که تبدیل بندادی است، چنان‌که در مثال ۲-۶ نشان داده شد. با استفاده از ارتباط  $F_1$  و  $F_2$  در معادلهٔ ۲۶-۶، داریم

$$F_2(P, q) = qp + q \cot p + PQ \quad (۳۴-۶)$$

که در آن جملهٔ سمت راست، فقط بر حسب  $P$  و  $q$  باید بیان شود. از معادلهٔ ۲۹-۶ داریم

$$p = \tan^{-1}(q/P) \quad (۳۵-۶ \text{ الف})$$

$$Q = -\frac{1}{P} \ln(q^2 + P^2) \quad (۳۵-۶ \text{ ب})$$

و

$$F_2(P, q) = q \tan^{-1}(q/P) + P \left[ 1 - \frac{1}{P} \ln(q^2 + P^2) \right] \quad (۳۶-۶)$$

## ۵-۶ هامیلتونی تبدیل یافته

هرگاه تبدیل بندادی از نمایش  $(q, p)$  به  $(Q, P)$  مستقل از زمان باشد و  $H(q, p)$  و  $K(Q, P)$  هامیلتونیهای پایستار یک جریان در هر کدام از نمایشها باشند، آنگاه مقدار عددی هامیلتونی در هر نقطهٔ فضای فاز، مستقل از طرز نمایش است

$$K(Q, p) = H(q(Q, P), p(Q, P)) \quad (۳۷-۶)$$



این را می‌توان با بیان  $H$  به‌صورت تابعی از  $(Q, P)$  در معادلات زیر نشان داد:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial P} &= \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}\quad (38-6)$$

با بیان  $H$  برحسب  $(Q, P)$  و استفاده از قاعدهٔ زنجیری، رابطهٔ فوق به‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial P} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &\quad - \frac{\partial Q}{\partial p} \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \right)\end{aligned}\quad (39-6)$$

در می‌آید و با استفاده از خاصیت حفظ مساحت تبدیلیهای بندادی معادلهٔ (۴-۶ الف)، داریم

$$\frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad (40-6)$$

به همین ترتیب، با در نظر گرفتن  $\dot{P}$ ، می‌توان نشان داد که

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial Q} \quad (41-6)$$

و بدین ترتیب، صرف‌نظر از یک مقدار ثابت که ربطی هم به موضوع ندارد، نتیجه می‌گیریم که  $H = K$  است.

این شیوه، به‌خصوص مشتق‌گیری معادلهٔ ۳۸-۶، فقط برای تبدیلیهای مستقل از زمان ممکن و معتبر است. در تبدیلیهای وابسته به زمان، روابط بین هایملتوننهای نمایشهای مختلف، چنان‌که در بخش ۷-۶ خواهیم دید، به این سادگی نیست.

## مثال ۶-۶

تبدیل بندادی تابع مولد

$$F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q \quad (42-6)$$

را که در آن  $\lambda$  مقدار ثابت است، پیدا کنید. هرگاه هامیلتونی در نمایش  $(q, p)$ ،

$$H(q, p) = p^2/2m + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \quad (۴۳-۶)$$

باشد، هامیلتونی در نمایش  $(Q, P)$  را پیدا کنید.  $\lambda$  را چنان انتخاب کنید که این هامیلتونی را مستقل از  $Q$  سازد و سپس معادلات حرکت در هر نمایش را به دست آورید.  
از تابع مولد داریم

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2\lambda q \cot Q \quad (۴۴-۶)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\lambda q^2}{\sin^2 Q}$$

یا

$$q = \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{1/2} \sin Q$$

$$p = 2(\lambda P)^{1/2} \cos Q \quad (۴۵-۶)$$

با استفاده از معادلهٔ ۳۷-۶، هامیلتونی در نمایش  $(Q, P)$  را به دست می‌آوریم

$$K(Q, P) = P \left( \frac{2\lambda}{m} \cos^2 Q + \frac{m\omega^2}{2\lambda} \sin^2 Q \right) \quad (۴۶-۶)$$

با انتخاب  $\lambda = 1/2m\omega$ ، می‌توان این هامیلتونی را مستقل از  $Q$  کرد. و داریم

$$K(Q, P) = \omega P \quad (۴۷-۶)$$

و معادلات حرکت در نمایش  $(Q, P)$  عبارت‌اند از

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \quad P = (\text{const}) \quad (۴۸-۶)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega = (\text{const}), \quad Q = \omega t + \delta$$

از معادلهٔ ۴۷-۶ به‌وضوح مقدار  $P = E/\omega$  است، که  $E$  انرژی است، و در نمایش  $(q, p)$



معادلات حرکت، با جایگذاری معادلات ۴۸-۶ در ۴۵-۶ به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\omega} \left( \frac{2E}{m} \right)^{1/2} \sin(\omega t + \delta) \\ p &= (2mE)^{1/2} \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (49-6)$$

مثال ۷-۶  
تبدیل بندادی

$$\begin{aligned} Q &= f(q, p, \lambda) \\ P &= g(q, p, \lambda) \end{aligned} \quad (50-6)$$

کلاً به یک پارامتر  $\lambda$  بستگی دارد. هرگاه  $F_1(Q, q, \lambda)$  و  $F_2(P, q, \lambda)$  توابع مولد این تبدیل باشند، نشان دهید که  $\partial F_1 / \partial \lambda = \partial F_2 / \partial \lambda$  است. در این دیفرانسیل‌گیری،  $q$  و  $p$  ثابت گرفته می‌شوند. از معادله ۲۶-۶ داریم

$$F_2(P, q, \lambda) = F_1(Q, q, \lambda) + PQ$$

با دیفرانسیل‌گیری نسبت به  $\lambda$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial F_1}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} + P \frac{\partial Q}{\partial \lambda} + Q \frac{\partial P}{\partial \lambda} \quad (51-6)$$

اما  $Q = \partial F_2 / \partial P$  است و  $P = -\partial F_1 / \partial Q$ ، از این رو

$$\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \quad (52-6)$$

رابطه فوق برای نظریه وابسته به زمان بخش ۶-۶، حائز اهمیت است.

## ۶-۶ تبدیلی‌های وابسته به زمان

نظریه تبدیلی‌های وابسته به زمان، مانند نظریه تبدیلی‌های مستقل از زمان کلاً به جریان‌هایی که حافظ مساحت هستند، مربوط می‌شود.



تبدیل

$$\begin{aligned} Q &= f(q, p, t) \\ P &= g(q, p, t) \end{aligned} \quad (۵۳-۶)$$

که صریحاً وابسته به زمان است، اگر فقط اگر ژاکوبی در

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(q, p)} = 1 \quad (۵۴-۶)$$

صدق بکند تبدیل بنمادی است. در دیفرانسیل گیری، زمان  $t$  ثابت گرفته شده است. در اینجا نظریه توابع مولد در بخش ۳-۶ را می توان مستقیماً، با وارد کردن زمان به عنوان یک پارامتر، به کار گرفت. بنابراین، توابع مولد  $F_1(Q, q, t)$  و  $F_2(P, q, t)$ ، تبدیلیهای مطلوب را تولید می کنند

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}(Q, q, t), \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}(Q, q, t) \quad (۵۵-۶)$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}(P, q, t), \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}(P, q, t) \quad (۵۶-۶)$$

و به صورت زیر به همدیگر وابسته اند.

$$F_2(P, q, t) = F_1(Q, q, t) + PQ$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}(Q, q, t) \quad (۵۷-۶)$$

از این روابط می توان برای حصول یک رابطه بین آهنگهای زمانی تغییر مقادیر  $F_1$  و  $F_2$  در یک نقطه ثابت در نمایش  $(q, p)$  استفاده کرد. این نظریه، با نظریه مثال ۷-۶ یکسان است. با دیفرانسیل گیری از معادله ۵۷-۶ نسبت به زمان و تلقی  $q, p$  و  $t$  به عنوان متغیرهای مستقل، نظیر معادله ۵۳-۶ داریم

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + Q \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (۵۸-۶)$$

با استفاده از معادله های ۵۵-۶ و ۵۶-۶ هم داریم

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (۵۹-۶)$$



همین طور می توان نشان داد که

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\partial F_3}{\partial t} = \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (۶۰-۶)$$

### مثال ۸-۶

به طور صریح نشان دهید که هرگاه  $F_1(Q, q, t) = q(Q^2 + t^2)$  باشد،  $\partial F_1 / \partial t = \partial F_2 / \partial t$  است.

اندازه حرکت مزدوج  $Q$  عبارت است از

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -2qQ \quad (۶۱-۶)$$

و از معادله های ۶۷-۶ و ۶۱-۶ داریم.

$$\begin{aligned} F_2(P, q, t) &= q(Q^2 + t^2) + PQ \\ Q &= -P/2q \end{aligned} \quad (۶۲-۶)$$

و بنابر آن

$$F_2(P, q, t) = qt^2 - P^2/4q \quad (۶۳-۶)$$

و در نتیجه

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = 2qt = \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (۶۴-۶)$$

### ۷-۶ هامیلتونیها در تبدیلهای وابسته به زمان

در تبدیلهای مستقل از زمان، هامیلتونیها توسط معادله ۳۷-۶ به سادگی با هم مربوط می شوند: مقدار هامیلتونی مستقل از طرز نمایش است. این امر در تبدیلهای وابسته به زمان صحت ندارد. مثلاً یک تبدیل از چارچوب مرجع لخت به چارچوب مرجع شتابدار، نیروهای اضافه بر آنانی که در چارچوب مرجع لخت حضور دارند، پدید می آورد و این نیروها، افزایشی بر هامیلتونی را ایجاد می کنند.



در نمایش تازه، هامیلتونی را با دیفرانسیل‌گیری مستقیم در امتداد جریان، با  $q$ ،  $p$  و  $t$  به صورت متغیرهای مستقل به دست می‌آوریم

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (۶۵-۶)$$

دو جمله نخست سمت راست این معادله، همانهایی هستند که در نظریهٔ مستقل از زمان، معادلهٔ ۳۸-۶ به دست آوردیم. لذا، با تکرار تحلیل بخش ۵-۶، خواهیم داشت

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (۶۶-۶)$$

که در آن جمله آخری تازه است. چون  $Q = \partial F_1 / \partial P$  است داریم

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F_1}{\partial P} \right) = \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) \quad (۶۷-۶)$$

بدین ترتیب، معادلهٔ ۶۶-۶ را می‌توان چنین نوشت

$$\dot{Q} = \frac{\partial}{\partial P} \left( H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) \quad (۶۸-۶)$$

و به همین ترتیب

$$\dot{P} = - \frac{\partial}{\partial Q} \left( H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) \quad (۶۹-۶)$$

با استفاده از معادلهٔ ۶۰-۶ می‌توانیم به جای  $F_1$  در این معادله  $F_2$  را قرار دهیم. بدین قرار، هامیلتونی در نمایش  $(Q, P)$  عبارت است از

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(P, q, t)$$

که در آن  $q$  و  $p$  برحسب  $Q$  و  $P$  بیان شده‌اند. با وجود رابطهٔ ۶۰-۶، هر کدام از چهار تابع مولد می‌تواند در تشکیل هامیلتونی جدید مورد استفاده قرار گیرد و داریم

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_j}{\partial t} \quad (j = ۱, ۲, ۳, ۴) \quad (۷۰-۶)$$





## مثال ۹-۶

تبدیل یک چارچوب مرجع ثابت به چارچوب مرجع متحرک به صورت زیر است

$$Q = q - D(t) \quad (۷۱-۶)$$

که در آن  $D(t)$  فاصله مبدأ چارچوبها در زمان  $t$  است. تبدیل کامل، هایملتونی در نمایش  $(Q, P)$  متناظر با  $p^2/2m + V(q)$  در نمایش  $(q, p)$  و معادلات حرکت را پیدا کنید. یک تابع مولد برای تبدیل ۷۱-۶ عبارت است از

$$F_1(P, q, t) = P[q - D(t)] \quad (۷۲-۶)$$

و بنابراین

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = P$$

در این صورت، هایملتونی تبدیل یافته هم چنین است

$$K(Q, p, t) = P^2/2m + V(Q + D) - P\dot{D} \quad (۷۳-۶)$$

و معادلات حرکت عبارتاند از

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = P/m - \dot{D} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{\partial V}{\partial Q}(Q + D) \end{aligned} \quad (۷۴-۶)$$

یا

$$m\ddot{Q} = -\frac{\partial V}{\partial Q}(Q + D) - m\ddot{D} \quad (۷۵-۶)$$

جمله  $m\ddot{D}$  نیروی ناشی از شتاب چارچوب مرجع است. برای حرکت یکنواخت مقدار آن صفر می شود.



## ۸-۶ خاصیت گروهی و تبدیل بندادی بینهایت کوچک

معکوس یک تبدیل بندادی و تبدیل ایجاد شده به وسیله دو تبدیل بندادی متوالی، باید تبدیلهای حافظ مساحت، و از این رو تبدیلهای بندادی باشند. تبدیلهای بندادی انجمنی هستند و تبدیل همانی، بندادی است. در نتیجه، مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای بندادی، تشکیل یک گروه می‌دهد. خانواده‌های تبدیلهای بندادی نزدیک به همانی دارای اهمیت خاصی هستند. تابع مولد را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_2(P, q) = qP + \varepsilon W(q, P, \varepsilon) \quad (۷۶-۶)$$

که در آن  $\varepsilon$  کوچک است و در  $\varepsilon = 0$  همانی را ارائه می‌کند. تبدیل عبارت است از

$$p = P + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial q}(q, P, \varepsilon) \quad (۷۷-۶)$$

$$Q = q + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial P}(q, P, \varepsilon)$$

که در مرتبهٔ اول از  $\varepsilon$ ، می‌تواند به صورت صریح نوشته شود

$$Q = q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p}(q, p) \quad (۷۸-۶)$$

$$P = p - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q}(q, p)$$

که در آن  $G(q, p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W(q, p, \varepsilon)$  تولیدکنندهٔ تبدیل بندادی بینهایت کوچک برای ۷۸-۶ نام یافته است. توجه داشته باشید که بین تولیدکننده  $G$  و تابع مولد  $F_2$  تمایز وجود دارد.  $(Q, P)$  را می‌توان تابعی از  $\varepsilon$  تلقی کرد، در آن صورت بازاریابی معادلهٔ ۷۸-۶ و حدگیری  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، معادلات دیفرانسیل زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial G}{\partial p}(q, p) = \frac{\partial G}{\partial P}(Q, P)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial G}{\partial q}(q, p) = -\frac{\partial G}{\partial Q}(Q, P)$$

چون که هرگاه  $\varepsilon \rightarrow 0$ ،  $(Q, P) \rightarrow (q, p)$ . معادلات بالا شکل هامیلتونی دارند. بالاخص اگر  $G$  را هامیلتونی انتخاب کنیم  $G = H(q, p)$ ، ملاحظه می‌کنیم که جریان یک نقطهٔ فاز  $(p(t), q(t))$



$q(t)$  به نقطه همجوار  $p(t + \delta t)$  و  $q(t + \delta t)$  می‌تواند به عنوان یک تبدیل بنادادی بینهایت کوچک، که تولیدکننده آن یک هامیلتونی است، تلقی شود.

مثال ۶-۱۰

حاصل تولیدکننده  $q$

$$Q = q$$

$$P = p - \varepsilon$$

می‌شود، که یک انتقال بینهایت کوچک در امتداد محور اندازه حرکت است.

مسائل

۱. تبدیلهای بنادادی تولید شده به وسیله توابع مولد زیر را پیدا کنید

$$F_1(Q, q) = qe^Q \quad (\text{الف})$$

$$F_2(P, q) = P \tan q \quad (\text{ب})$$

۲. تعیین کنید، کدامیک از توابع زیر تولید تبدیلهای بنادادی می‌کنند و حاصل تبدیل هر یک را بیابید.

$$F_1(Q, q) = \frac{1}{q} q^2 \tan Q \quad (\text{الف})$$

$$F_1(Q, q) = q^2 + Q^2 \quad (\text{ب})$$

۳. هرگاه  $k$  یک مقدار ثابت و  $t$  زمان باشد، تعیین کنید کدامیک از تبدیلهای زیر بنادادی هستند.

$$Q = \frac{1}{q} q^2, \quad P = p/q \quad (\text{الف})$$

$$Q = \tan q, \quad P = (p - k) \cos^2 q \quad (\text{ب})$$

$$Q = \sin q, \quad P = (p - k)/\cos q \quad (\text{ج})$$

$$Q = q^2 e^t \cos p, \quad P = q^2 e^{-t} \sin p \quad (\text{د})$$

۴. مختصه تازه  $Q$ ، به طور صریح بر حسب مختصه قبلی  $q$  از معادله

$$Q = f(q, t)$$

به دست می‌آید. عامترین تابع مولد  $F_2(Q, p, t)$  را بنویسید و برای اندازه حرکت مزدوج  $Q$ ، یک عبارت به دست آورید.

۵. مختصه قبلی  $q$ ، به طور صریح بر حسب مختصه تازه  $Q$  از معادله

$$q = f(Q, t)$$



به دست می‌آید. عامترین تابع مولد  $F_3(Q, p, t)$  را بنویسید و برای اندازه حرکت مزدوج  $Q$ ، یک عبارت به دست آورید.

۶. نشان دهید که تبدیل

$$Q = q \cos \alpha - p \sin \alpha$$

$$P = q \sin \alpha + p \cos \alpha$$

که در آن،  $\alpha$  یک مقدار ثابت است، بندادی است. چنانچه تبدیل را مطابق شکل ۱-۶ الف، به عنوان انتقال نقطه فاز تلقی کنیم، نشان دهید که مربع واحد در نمایش  $(q, p)$  چگونه تبدیل می‌یابد. همچنین، چنانچه تبدیل به عنوان تغییر دادن دستگاه مختصات تلقی شود، محورهای دستگاه مختصات  $(Q, P)$  را در نمودار فاز  $(q, p)$  نشان دهید.

۷. به ازای چه مقادیری از  $\alpha$  و  $\beta$ ، تبدیل زیر یک تبدیل بندادی است

$$q = P^\alpha \cos \beta Q, \quad p = P^\alpha \sin \beta Q \quad (P \geq 0)?$$

در آن صورت، دستگاه مختصات  $(Q, p)$  را در نمودار فاز  $(q, p)$  رسم کنید.

۸. نشان دهید که توابع مولد  $F_1, F_2, F_3$  و  $F_4$ ، توسط روابط زیر به هم مربوط اند

$$F_1(Q, q) = F_2(P, q) - PQ, \quad Q = \partial F_2 / \partial P$$

$$F_2(Q, p) = F_1(Q, q) - pq, \quad p = \partial F_1 / \partial q$$

$$F_3(P, p) = F_2(P, q) - pq, \quad p = \partial F_2 / \partial q$$

برای توابع مولد  $F_2$  و  $F_3$ ، معادلاتی را که تبدیل را انجام می‌دهند تعیین کنید.

۹. در صورتی که رابطه زیر برقرار باشد،  $F_1, F_3$  و  $F_4$  را پیدا کنید

$$F_2(P, q) = q^2 e^P$$

۱۰. مختصات یک تبدیل بندادی  $(Q, P) \leftarrow (q, p)$ ، با رابطه  $Q = q^2$  به هم مربوط اند. اندازه حرکت مزدوج  $P$ ، و هامیلتونی در نمایش  $(Q, P)$  را متناظر با

$$H(q, p) = p^2 + q^2$$

پیدا کنید. وابستگی زمانی  $(Q, P)$ ، و سپس  $(q, p)$  را پیدا کنید.

۱۱. یک مختصه تازه  $Q$  از رابطه زیر به دست می آید

$$Q = \tan^{-1}(\lambda q/p)$$

که در آن،  $\lambda$  یک مقدار ثابت است. نشان دهید که اندازه حرکت مزدوج  $Q$  به صورت

$$P = (p^2 + \lambda^2 q^2)/2\lambda + f(\lambda q/p, t)$$

است که در آن  $f$  یک تابع دلخواه است. این تبدیل را در نوسانگر خطی با هامیلتونی

$$H = p^2/2m + \frac{1}{4} m\omega^2 q^2$$

انجام دهید. و  $\lambda$  و  $f$  را چنان انتخاب کنید که مسئله را ساده کند. برای  $(Q, P)$  و از روی آن برای  $(q, p)$ ، مسئله را برحسب زمان حل کنید.

۱۲. یک تابع مولد  $F_2(p, q)$  پیدا کنید که حاصلش

$$q = Q + \varepsilon QP$$

باشد و در  $\varepsilon = 0$  تبدیل همانی باشد. تابع مولد هم ارز  $F_1(Q, q)$  را پیدا کنید و حد آن را در  $\varepsilon \rightarrow 0$  بیابید.

۱۳. هامیلتونی سقوط آزاد یک جسم عبارت است از

$$H(z, p) = p^2/2m + mgz$$

که در آن،  $z$  ارتفاع از سطح زمین و  $m$  جرم ذره است. با بیان  $z$  به صورت تابعی از  $(p, P)$  و استفاده از یک تابع مولد  $F_2$ ، یک تبدیل بنیادی را چنان پیدا کنید که هامیلتونی تازه به صورت

$$K(Q, P) = P$$

باشد. مسئله را برای  $(Q(t), P(t))$  حل کنید و از روی آن  $(q(t), p(t))$  را بیابید.



۱۴. نشان دهید که اگر تبدیل مستقل از زمان  $(q, p) \leftarrow (Q, P)$  دارای ژاکوبی

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = (\text{const}) = \lambda \neq 0$$

باشد، جریان در نمایش  $(Q, P)$  حافظ مساحت است و هامیلتونی‌ای به صورت زیر دارد

$$K(Q, P) = \lambda H(q(Q, P), p(Q, P))$$

که در آن  $H(q, p)$  هامیلتونی مستقل از زمان جریان در نمایش  $(q, p)$  است. اگر  $\bar{Q} = Q/\lambda$  و  $\bar{P} = P$  باشد، نشان دهید که تبدیل  $(q, p) \leftarrow (\bar{Q}, \bar{P})$  بندادی است.

۱۵. تبدیل بندادی تولید شده توسط

$$F_1(Q, q, t) = \frac{1}{\gamma} m \omega(t) q^2 \cot Q$$

را که در آن  $\omega(t)$  تابع معلومی از زمان است، پیدا کنید. معادلات حرکت در نمایش  $(Q, P)$  را برای نوسانگر خطی با هامیلتونی زیر به دست آورید

$$H(q, p, t) = p^2/2m + \frac{1}{\gamma} m \omega(t)^2 q^2$$

۱۶. اگر

$$F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$$

باشد،  $F_2(P, q)$  را پیدا کنید و به طور صریح نشان دهید که

$$\partial F_1 / \partial \lambda = \partial F_2 / \partial \lambda$$

۱۷. با استفاده از تابع مولد

$$F_2(P, q) = Pq + \varepsilon a q^2 P + \varepsilon b q P^2$$



که در آن  $\varepsilon$  کوچک و  $a$  و  $b$  مقادیر ثابت هستند، نشان دهید که

$$q = Q - 3\varepsilon bQP^2 - \varepsilon aQ^3 + O(\varepsilon^2)$$

$$p = P + \varepsilon bP^3 + 3\varepsilon aQ^2P + O(\varepsilon^2)$$

مقادیر  $a$  و  $b$  را پیدا کنید. این مقادیر، نوسانگر ناهماهنگ

$$H(q, p) = \frac{1}{4}(p^2 + \omega^2 q^2) + \varepsilon \beta q^4$$

را به صورت

$$K(Q, P) = \frac{1}{4}(P^2 + \omega^2 Q^2) + \varepsilon c(P^2 + \omega^2 Q^2)^2 + O(\varepsilon^2)$$

تحویل می‌کنند.  $c$  مقدار ثابتی است که باید پیدا کرد. سپس نشان دهید که از این مرتبه در  $\varepsilon$  داریم

$$Q = A \cos(\Omega t + \delta), P = \omega A \sin(\Omega t + \delta)$$

$$\Omega = \omega + 3\varepsilon \beta A^2 / 2\omega$$

که در آن  $A$  و  $\delta$  مقادیر ثابتند. از اینجا  $q(t)$  را از این مرتبه در  $\varepsilon$  بیابید.

۱۸. برای یک دستگاه پایستار با هامیلتونی  $H(q, p)$ ، نشان دهید که تابع مولد خاص برای تبدیل  $(q_1, p_1) \leftarrow (q_2, p_2)$  به صورت

$$W(q_2, q_1; E) = \int_{q_1}^{q_2} p(q, E) dq$$

است که در آن  $q_i = q(t_i)$ ،  $p_i = p(t_i)$  نقاط روی منحنی فاز به انرژی  $E = H(q, p)$  هستند. علاوه بر این نشان دهید که

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t_2 - t_1$$

است.  $W$  را به طور صریح در موارد زیر پیدا کنید:

(الف) حرکت آزاد؛

(ب) پتانسیل خطی؛

(ج) نیروی خطی.



۱۹. نشان دهید که تولیدکنندهٔ  $G(q, p) = -ap$ ، که در آن  $a$  یک مقدار ثابت مثبت است، یک تبدیل خطی در جهت مختصهٔ تعمیم‌یافته تولید می‌کند.

۲۰. تولیدکننده‌ای را تعیین کنید که در صفحهٔ فاز، دوران بینهایت کوچک ایجاد می‌کند.

۲۱. یک تابع مولد برای تبدیل وابسته به زمان

$$q = Q + Pt/m, \quad p = P$$

تعیین کنید. نشان دهید که هامیلتونی

$$H(q, p) = p^2/2m + V(q)$$

تبدیل می‌یابد به

$$K(Q, P, t) = V\left(Q + \frac{Pt}{m}\right)$$

مورد خاص  $V(q) = -q$  را در نظر بگیرید؛ معادلات هامیلتون را در نمایش  $(Q, P)$  بنویسید و حل کنید و از آنجا، حرکت را در نمایش  $(q, p)$  بیابید.





## متغیرهای زاویه-کنش

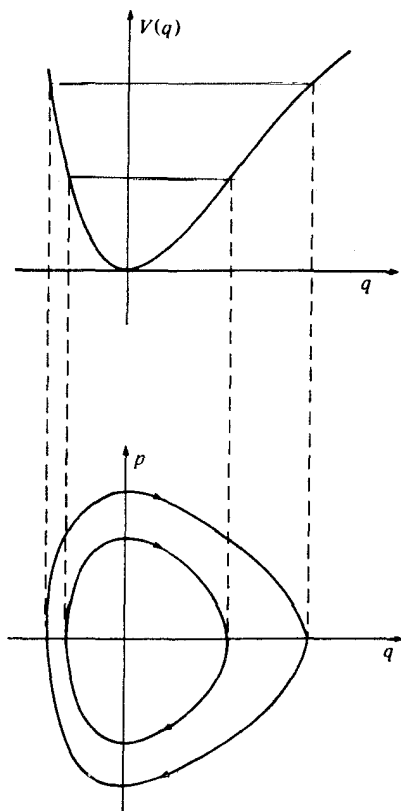
### ۱-۷ ساده‌ترین متغیرها

متغیرهایی که برای فرمولبندی یک مسئله از آنها استفاده می‌شود، همیشه هم بهترین متغیرها برای حل آن مسئله نیستند. به علاوه، غالباً می‌خواهیم که از حل یک دستگاه نسبتاً ساده، به عنوان نقطه آغازی برای حل یک دستگاه پیچیده‌تر استفاده کنیم، چنان‌که مثلاً در فصلهای ۸ و ۹ کرده‌ایم. پس بهترین کار، انتخاب متغیرها به گونه‌ای است که جواب مسائل ساده‌تر به ساده‌ترین طریق ممکن بیان شود: در حرکت محدود دستگاههای هامیلتونی پایستار، این متغیرها، متغیرهای زاویه-کنش خوانده می‌شوند.

در دستگاههایی که یک درجه آزادی دارند، این حرکت، معمولاً دارای تناوب زمانی است، و چنان‌که در فصل ۴ دیدیم، می‌تواند یا دوران باشد و یا رخگرد. نظریهٔ ارائه شده در این فصل ناظر به هر دو مورد است، اما چون تفاوت‌های اندکی وجود دارد، نخست به حرکت رخگرد می‌پردازیم. نظریهٔ ایجاب می‌کند که منحنی فاز بایست یک منحنی بسته باشد، اما نه یک خم‌میزه. یک هامیلتونی، مشخصاً به صورت

$$H(q, p) = p^2/2m + V(q) \quad (۱-۷)$$





شکل ۱-۷ پتانسیل و منحنیهای فاز ساده

با پتانسیل و منحنیهای فاز نوعی که در شکل ۱-۷ نشان داده‌ایم، انتخاب می‌کنیم. در نمایش  $(q, p)$ ، منحنی فاز انرژی  $E$ ، به وسیله تابع دو مقداره

$$p(q, E) = \pm [2m(E - V(q))]^{\frac{1}{2}} \quad (۲-۷)$$

نمایش داده می‌شود. چند مقداره بودن این تابع رضایتبخش نیست. بنابراین یک زوج تازه متغیرهای مزدوج  $(\theta, I)$  تعیین می‌کنیم که دارای خواص زیر است:

(خ ۱) هر یک از منحنیهای فاز منحصراً با یک  $I$ ، که یک مقدار ثابت در امتداد آن منحنی فاز است مشخص می‌شود.

(خ ۲) هر نقطه منحنی فاز با یک تابع تک مقداره  $\theta$  مشخص می‌شود.

در نمایش  $(\theta, I)$ ، پربندهای انرژی عبارت‌اند از خطوط مقدار ثابت  $I$ ، به طوری که هامیلتونی

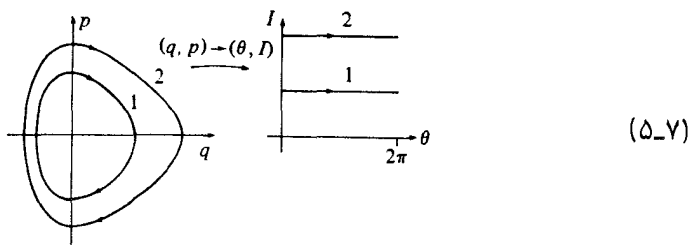
مستقل از  $\theta$  است. این را معادله حرکت هامیلتون بیان می‌کند

$$\dot{I} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (3-7)$$

چون  $I$  مقدار ثابت است  $\partial H / \partial I$  هم که تابعی است فقط از  $I$ ، مقدار ثابت است. در این صورت معادله دیگر حرکت

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \text{const} \quad (4-7)$$

نشان می‌دهد که  $\theta$  به‌طور خطی با زمان افزایش می‌یابد. برای این‌که متغیرهای زاویه-کنش را به‌دست آوریم، باید  $\theta$  را چنان انتخاب کنیم که در هر تناوب به اندازه  $2\pi$  افزایش یابد. در این صورت،  $\theta$  را متغیر زاویه و  $I$  را متغیر کنش می‌نامیم. بنابراین، در نمایش زاویه-کنش، منحنیهای فاز خطوط راست موازی با محور  $\theta$  هستند که در زیر نشان داده‌ایم.



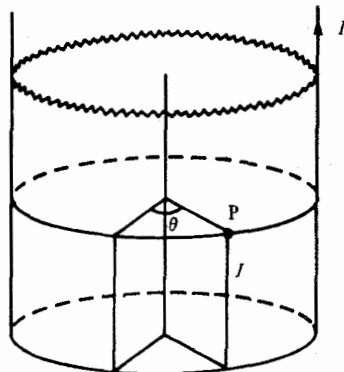
وابستگی  $\theta$  به زمان را مستقیماً، با انتگرال‌گیری از معادله ۴-۷ به‌دست می‌آوریم

$$\theta = \omega(I)t + \delta, \quad \omega(I) = \partial H / \partial I \quad (6-7)$$

که در آن  $\delta$  یک مقدار ثابت دلخواه است. چون  $\theta$  در یک دوره تناوب  $T$  به اندازه  $2\pi$  افزایش می‌یابد،  $\omega$  بسامد زاویه‌ای حرکت است

$$\omega(I) = 2\pi / T = \partial H / \partial I \quad (7-7)$$

به‌علاوه، چون نقاط  $(\theta, I)$  و  $(\theta + 2\pi, I)$  یک نقطه فاز را مشخص می‌کنند مختصات  $(\theta, I)$  را می‌توان روی یک استوانه نیم نامتناهی نمایش داد، که در آن  $\theta$  زاویه در پیرامون استوانه و  $I$  مختصه در امتداد محور آن است.



(۸-۷)

در این استوانه، هر دوی  $q$  و  $p$  توابع تناوبی از  $\theta$  با تناوب  $2\pi$  هستند.

$$q(\theta + 2\pi, I) = q(\theta, I)$$

$$p(\theta + 2\pi, I) = p(\theta, I)$$

(۹-۷)

یک خم‌میزه، فضای فاز را به دو ناحیهٔ ناوردای حاوی منحنیهای فاز با خواص متفاوت، تقسیم می‌کند. در داخل چنین ناحیهٔ ناوردایی، یا همهٔ حرکتهای تناوبی هستند و یا هیچ‌کدام. هر گاه حرکت تناوبی باشد، متغیرهای زاویه-کنش را می‌توان معین ساخت، اما روی خم‌میزه معین نیستند، همچنین متغیرهای زاویه-کنش ناحیه‌های مختلف، ارتباط ساده با همدیگر ندارند. به‌عنوان نمونه، مثال بحث شده در بخش ۴-۵، دارای چهار خم‌میزه و چهار ناحیهٔ ناورداست که از آنها، سه ناحیه حاوی حرکت با متغیرهای زاویه-کنش متفاوت است.

### مثال ۱-۷

تبدیل مثال ۶-۶، به صورت

$$q = \left( \frac{2I}{m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta, \quad p = (2Im\omega)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

هایلمتونی

$$H(q, p) = p^2 / 2m + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

را تبدیل می‌کند به هایلمتونی

$$K(I) = \omega I.$$

## ۲-۷ هامیلتونی در نمایش زاویه-کنش

اکنون به هامیلتونیهای به شکل ۱-۷ توجه می‌کنیم. در نمایش زاویه-کنش، هامیلتونی چنین به‌دست می‌آید که مساحت محصور با یک منحنی فاز، در یک دوره کامل تناوب یکی از طرز نمایشها را با مساحت متناظرش در طرز نمایش دیگر، مقایسه کنیم. چون تبدیل  $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$  بندادی است، نظریهٔ مندرج در فصل ۶ نشان می‌دهد که این مساحتها یکی هستند. در نمایش  $(q, p)$ ، مساحت محصور با منحنی فاز به انرژی  $E$  عبارت است از

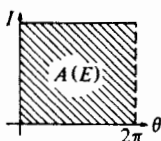
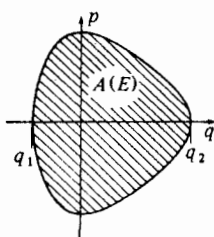
$$A(E) = \oint dq p(q, E) \quad (۱۰-۷)$$

$$= 2 \int_{q_1}^{q_2} dq [2m(E - V(q))]^{1/2} \quad (۱۱-۷)$$

که در آن  $i = 1, 2, V(q_i) = E$  است. در نمایش  $(\theta, I)$  مساحت عبارت است از

$$A(E) = \int_0^{2\pi} d\theta I = 2\pi I \quad (۱۲-۷)$$

بنابراین در رخگرد، متغیر کنش متناسب با مساحت است؛ این خاصیت مهم، بعضی اوقات برای تعریف متغیر کنش مورد استفاده قرار می‌گیرد.



(۱۳-۷)

با مقایسهٔ این دو عبارت برای مساحت، متغیر کنش به‌صورت تابعی از انرژی به‌دست می‌آید

$$I(E) = \frac{1}{\pi} \int_{q_1}^{q_2} dq [2m(E - V(q))]^{1/2} \quad (۱۴-۷)$$

که تابعی یکنواخت از انرژی درون هر ناحیهٔ ناورداست.

با وارونی ۱۴-۷، انرژی  $E(I)$  را به‌صورت تابعی از کنش به‌دست می‌آوریم، چنان‌که در مثال ۲-۷ زیر هم نشان داده‌ایم. معمولاً این تابع را با  $H(I)$ ، یا  $K(I)$  نشان می‌دهیم تا نماد  $E$  را برای یک مقدار خاص انرژی به‌کار ببریم.

متغیرکنش دارای ابعاد اندازه حرکت زاویه‌ای، یعنی انرژی  $\times$  زمان است. متغیر زاویه بدون بعد است و بعضی اوقات زاویه‌ای در فضای پیکربندی است، همیشه هم نه. برای پتانسیلهایی که از نوع شکل ۷-۱ هستند، یک انرژی کمینه  $E_0$  وجود دارد که در کمتر از آن حرکت غیرممکن است، در پتانسیل شکل ۷-۱، این انرژی کمینه  $E_0 = 0$  است. در این انرژی، منحنی فاز در نمایش  $(q, p)$  به یک نقطه مبدل می‌شود و  $I(E_0) = 0$  است؛ یعنی در  $I = 0$ ، کنش یک مرز طبیعی دارد.

### مثال ۷-۲

کنش و هامیلتونی یک ذره را که در پتانسیل

$$V(q) = U \tan^2 \alpha q \quad (15-7)$$

حرکت می‌کند پیدا کنید.  $U$  و  $\alpha$  مقادیر ثابت مثبت هستند  
از معادله ۷-۱۴، کنش به دست می‌آید

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{q_1}^{q_2} dq [2m(E - U \tan^2 \alpha q)]^{\frac{1}{2}} \quad (16-7)$$

که در آن  $q_1 = -q_2$  و  $\tan^2 \alpha q_2 = E/U$  است. جواب محاسبه انتگرال عبارت است از

$$\alpha I = [2m(E + U)]^{\frac{1}{2}} - [2mU]^{\frac{1}{2}} \quad (17-7)$$

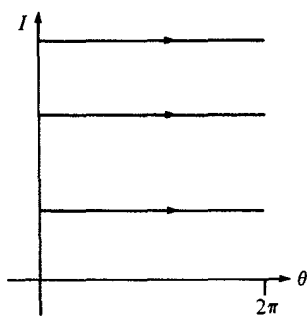
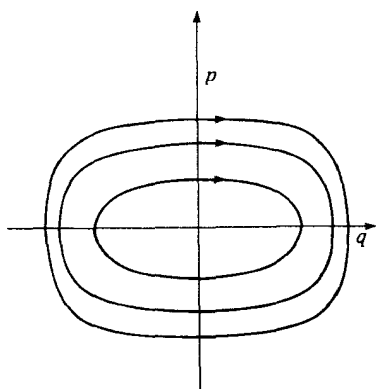
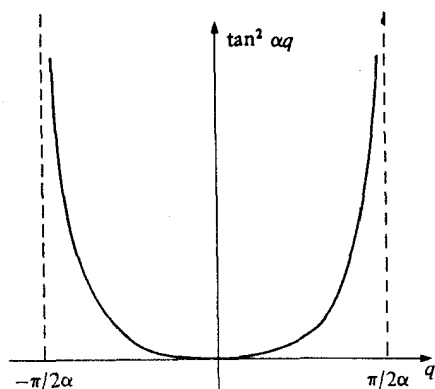
پتانسیل و منحنیهای فاز در نمایش  $(q, p)$  و  $(\theta, I)$  در شکل ۷-۲ نشان داده می‌شوند.  
توجه کنید که  $I \geq 0$  است که فقط در  $E = 0$  صفر می‌شود. وارون کردن رابطه ۷-۱۷، هامیلتونی را به دست می‌دهد

$$H(\theta, I) = \alpha I [\alpha I + 2(2mU)^{\frac{1}{2}}] / 2m \quad (18-7)$$

در این صورت، بسامد زاویه‌ای هم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \omega &= \partial H / \partial I = \alpha [\alpha I + (2mU)^{\frac{1}{2}}] / m \\ &= \alpha [2(E + U) / m]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (19-7)$$





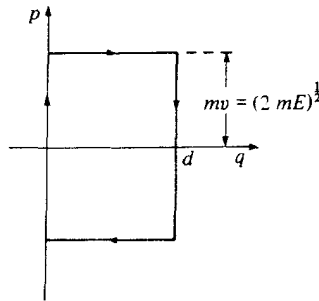
شکل ۲-۷. بتانسیل  $\tan^2 \alpha q$  و منحنیهای فاز در نمایش  $(q, p)$  و  $(\theta, I)$ .

### مثال ۳-۷

برای یک توپ بازی به جرم  $m$  که بین دو دیوار ثابت به فاصله  $d$ ، با تندی  $v$  به طور کشسان رفت و آمد می‌کند، کنش را پیدا کنید.

این مثال را نمی‌توان با یک هایملتونی پیوسته توصیف کرد، چون در هر برخورد، اندازه حرکت به طور ناپیوسته تغییر می‌یابد؛ با وجود این حرکت نزدیک است به حرکت هایملتونیهای پیوسته مثال ۲-۷ و مسئله ۱-۷. به علاوه، چون این حرکت از سادگی خاصی برخوردار است می‌تواند برای فهم دستگاههای پیچیده‌تر، نظیر دستگاههای بخش ۹-۲، کمک مؤثری باشد.

در فاصله برخوردها با دیوار، اندازه حرکت مقدار ثابت است. در هر برخورد، اندازه حرکت آنرا علامت عوض می‌کند. بنابراین منحنی فاز برای انرژی  $E$  توپ، مستطیل زیر است



بدین ترتیب کنش عبارت است از

$$I = \frac{1}{2\pi} (\text{مساحت مستطیل}) = \frac{1}{2\pi} \times 2(2mE)^{\frac{1}{2}} \times d$$

$$= d(2mE)^{\frac{1}{2}} / \pi = mvd / \pi \quad (20-7)$$

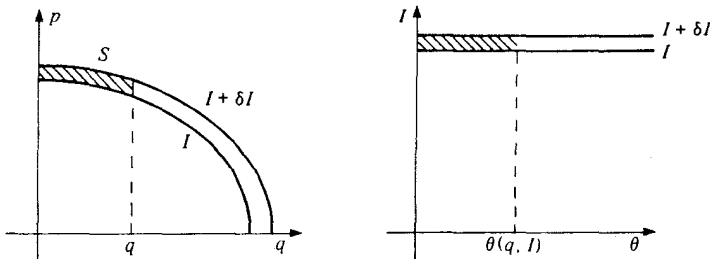
که در آن  $v$  تندی حرکت توپ است. معادله انرژی به عنوان تابعی از کنش عبارت است از

$$E = (\pi I / d)^2 / 2m \quad (21-7)$$

توجه کنید که برای کنش‌های بزرگ چنانچه  $d = \pi / \alpha$  قرار دهیم مقدار انرژی به سوی هامیلتونی ۱۸-۷ میل می‌کند.

### ۳-۷ وابستگی متغیر زاویه به $q$

در کنش ثابت  $I$ ، ارتباط بین  $q$  و  $\theta$  از ترسیم مساحت بین پاره‌خطهای دو منحنی فاز مجاور با کنش‌های  $I$  و  $I + \delta I$ ، چنانکه در شکل ۳-۷ دیده می‌شود، به دست می‌آید.



شکل ۳-۷ پاره‌خطهای دو منحنی فاز با کنش‌های  $I$  و  $I + \delta I$  در نمایش  $(q, p)$  و نمایش  $(\theta, I)$ . مساحت هاشور خورده  $S$  در نمایش  $(q, p)$  به مساحت هاشور خورده در نمایش  $(\theta, I)$  تبدیل یافته است. این ناحیه‌ای است که برای تعیین  $\theta(q)$  به کار رفته است.



اگر  $\delta A$  مساحت قطعه هاشور خورده  $S$  در صفحه  $(q, p)$  باشد مطابق تعریف برابر است با  
 قطعه هاشور خورده در صفحه  $(\theta, I)$ . در صفحه  $(q, p)$  داریم

$$\begin{aligned}\delta A &= \int \int_S dq \, dp \\ &= \int_0^q dq [p(q, I + \delta I) - p(q, I)] \\ &= \delta I \int_0^q dq \frac{\partial p}{\partial I}(q, I) + O(\delta I)^2\end{aligned}\quad (22-7)$$

که در آن  $p(q, I)$  از  $p(q, E)$ ، معادله ۲-۷، با جاگذاری  $E(I)$  برای  $E$  به دست می آید. در  
 صفحه  $(\theta, I)$ ، مساحت برابر است با

$$\delta A = \delta I \theta(q, I) + O(\delta I)^2 \quad (23-7)$$

بامساوی قرار دادن این دو عبارت برای  $\delta A$  و گرفتن حد وقتی  $\delta I \rightarrow 0$  داریم

$$\begin{aligned}\theta(q) &= \int_0^q dq \frac{\partial}{\partial I} p(q, I) \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \int_0^q dq p(q, I)\end{aligned}\quad (24-7)$$

در به دست آوردن این رابطه، یک مرز ناحیه هاشور خورده را به دلخواه محورهای  $p$  و  $I$   
 انتخاب کرده ایم: انتخاب مرزهای دیگر، متغیرهای زاویه دیگری به دست می دهند که با معادله ۲۴-۷  
 تفاوتشان در مقادیر ثابت بی اهمیت است.

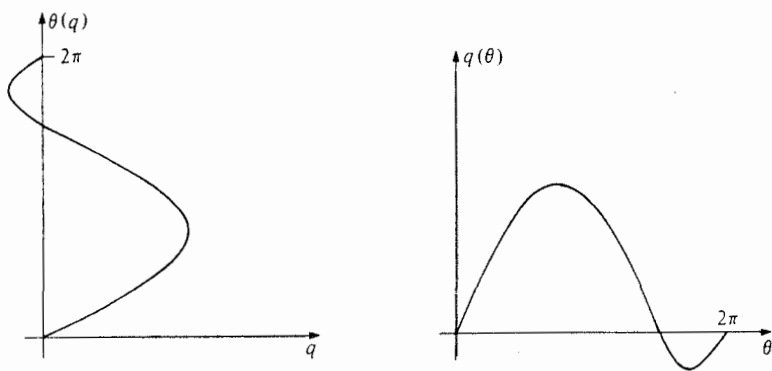
در محاسبه  $\theta(q)$  از معادله ۲۴-۷ باید دقت کرد، چون که  $p(q, I)$  یک تابع چند مقداره از  $q$   
 است. در منحنیهای فاز شکلهای ۱-۷ و ۳-۷،  $p$  به ازای  $q$ ی افزاینده، مثبت و در غیر این صورت  
 منفی است. لذا  $\theta(q)$ ، با حرکت ساعتگرد نقطه فاز در دور تا دور منحنی فاز، به طور یکنواخت  
 و پیوسته افزایش می یابد و در یک گردش کامل مقدار افزایش  $\theta$  برابر با  $2\pi$  می شود. نمودارهای  
 نوعی  $\theta(q)$  و وارون آن  $q(\theta)$  را در شکل ۴-۷ نشان داده ایم

#### مثال ۴-۷

متغیر زاویه را برای پتانسیل زیر بیابید

$$V(q) = U \tan^2 \alpha q \quad (25-7)$$



شکل ۴-۷ رفتار نوعی  $\theta(q)$  و  $q(\theta)$ 

بنابر معادله ۲۴-۷، متغیر زاویه از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\theta(q) = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^q dq [\mathcal{M}(E(I) - U \tan^2 \alpha q)]^{\frac{1}{2}} \quad (26-7)$$

که در آن  $E(I)$  از معادله ۱۸-۷ در مثال ۲-۷، به دست می‌آید. با مشتق‌گیری از زیر انتگرال (که معمولاً آسانترین راه برای این انتگرال‌گیریهاست) و استفاده از معادله ۱۹-۷ و نیز استفاده از پیوست ۲ معادله الف ۹-۲، داریم

$$\begin{aligned} \theta(q) &= m \frac{dE}{dI} \int_0^q dq [\mathcal{M}(E - U \tan^2 \alpha q)]^{-1/2} \\ &= \sin^{-1} \left[ \left( \frac{E + U}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha q \right] \end{aligned} \quad (27-7)$$

که در آن  $\omega = dE/dI$  بسامد زاویه‌ای است. در این صورت تابع وارون  $q(\theta)$

$$q(\theta) = \frac{1}{\alpha} \sin^{-1} \left[ \left( \frac{E}{E + U} \right)^{1/2} \sin \theta \right] \quad (28-7)$$

است. با قرار دادن  $\theta = \omega t + \delta$ ، معادله ۶-۷  $q$  را به صورت تابعی از زمان به دست می‌دهد.

## ۴-۷ توابع مولد

متغیرهای زاویه-کنش، متغیرهای خاص هستند، لذا به جای  $F$  از نماد ویژه  $S$  برای نشان دادن یک تابع مولد در تبدیل بندادی  $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$  استفاده می‌کنیم. تابع مولد  $S_2(I, q)$  به سادگی

به صورت

$$S_r(I, q) = \int_0^q dq p(q, I) \quad (29-7)$$

است که تابعی چند مقداره از  $q$  است، و برای نشان دادن این که یک تابع مولد است، نسبت به  $q$  از آن دیفرانسیل گیری می کنیم، که می شود

$$p = \frac{\partial S_r}{\partial I}(I, q) \quad (30-7)$$

با استفاده از ۲۴-۷ داریم

$$\theta = \frac{\partial S_r}{\partial I}(I, q) \quad (31-7)$$

بنابراین  $S_r(I, q)$  تابع مولد مطلوب است.

یک نتیجه مهم، که بعداً به درد می خورد، مربوط است به تغییر در مقدار  $S_r$  و تابع مولد وابسته آن  $S_r(\theta, q)$  در یک دوره تناوب حرکت. تغییر  $S_r$  عبارت است از

$$\begin{aligned} \Delta S_r(I) &= \oint dq \frac{\partial S_r}{\partial q} \\ &= \oint dq p = 2\pi I \end{aligned} \quad (32-7)$$

تابع مولد  $S_1(\theta, q)$  عبارت است از

$$\begin{aligned} S_1(\theta, q) &= S_r(I, q) - \theta I \\ \theta &= \partial S_r / \partial I \end{aligned} \quad (33-7)$$

و تغییر آن در یک دوره تناوب می شود،

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \Delta S_r - \Delta(I\theta) \\ &= \Delta S_r - I\Delta\theta = 0 \end{aligned} \quad (34-7)$$

از این قرار  $S_1(\theta, q)$  بعد از یک تناوب به مقدار اولیه اش برمی گردد، در حالی که  $S_r(I, q)$  به اندازه  $2\pi I$  افزایش می یابد، لذا  $S_1(\theta, q)$  در  $\theta$  تناوبی است، در حالی که  $S_r(I, q)$  نیست.

## مثال ۵-۷

متغیرهای زاویه-کنش، و توابع مولد  $S_1(\theta, q)$  و  $S_2(I, q)$  را برای نوسانگر خطی با هامیلتونی ۳۵-۷ پیدا کنید.

$$H(q, p) = p^2/2m + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \quad (35-7)$$

با استفاده از معادله ۱۴-۷، کنش عبارت است از

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \int_{-q_1}^{q_1} dq \left[ 2m(E - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (m\omega^2 q_1^2 = 2E) \\ &= E/\omega \end{aligned} \quad (36-7)$$

بنابراین هامیلتونی در نمایش زاویه-کنش عبارت است از

$$H(I) = \omega I \quad (37-7)$$

و بسامد حرکت،  $\partial H / \partial I = \omega$  است

با مساوی قرار دادن دو هامیلتونی ۳۷-۷ و ۳۵-۷ می‌توانیم  $p$  را برحسب  $q$  و  $I$  به‌دست آوریم

$$p = [2m\omega I - (m\omega q)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (38-7)$$

سپس با استفاده از معادله ۲۴-۷ می‌توانیم متغیر زاویه را پیدا کنیم،

$$\theta = \int_0^q dq \left[ \frac{m\omega}{2I - m\omega q^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \sin^{-1} \left[ q \left( \frac{m\omega}{2I} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (39-7)$$

یا

$$q = \left( \frac{2I}{m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \quad (40-7)$$

تابع مولد  $S_2(I, q)$  از ۲۹-۷ به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} S_2(I, q) &= \int_0^q dq (2m\omega I - m^2 \omega^2 q^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= I \sin^{-1} \left[ q \left( \frac{m\omega}{2I} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} q (2Im\omega - m^2 \omega^2 q^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (41-7)$$



و می‌توان اثبات کرد که ۳۹-۷ از دیفرانسیل‌گیری ۴۱-۷ نسبت به  $I$  به‌دست می‌آید. با استفاده از ۳۳-۷ داریم

$$S_1(\theta, q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot \theta \quad (42-7)$$

که از آن،  $p$  را برحسب متغیرهای زاویه-کنش، به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} p &= \partial S_1 / \partial q = m\omega q \cot \theta \\ &= (2Im\omega)^{1/2} \cos \theta \end{aligned} \quad (43-7)$$

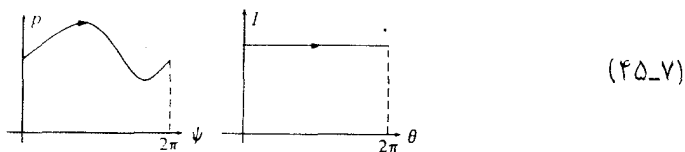
ملاحظه می‌کنیم که حصول ۳۹-۷ نظیر روشی است که در به‌دست آوردن رابطهٔ خسنی  $q(t)$  در معادلهٔ ۵۱-۴ به‌کار گرفتیم. این یکی از نتایج روابط خطی بین  $\theta$  و  $t$  است.

## ۵-۷ دورانها

در دورانها، منحنیهای فاز روی صفحه، بسته نیستند و مختصهٔ  $\psi(t)$  یا یک تابع پیوستهٔ افزایشنده و یا یک تابع پیوستهٔ کاهنده از زمان است. هامیلتونی در  $\psi$  تناوبی است و ما این تناوب را  $2\pi$  می‌گیریم

$$H(\psi + 2\pi, p) = H(\psi, p) \quad (44-7)$$

مثل قبل، زوج متغیرهای زاویه-کنش را چنان معین می‌کنیم که هر منحنی فاز با یک کنش  $I$  و هر نقطهٔ فاز روی این منحنی با یک زاویهٔ  $\theta$  که تابع خطی از زمان است، نظیر ۶-۷، مشخص شود. در این صورت، منحنیهای فاز مانند آنهایی که در ۴۵-۷ نشان داده‌ایم به نظر خواهند رسید:



کنش به شکل تابعی از انرژی را، با مساوی قرار دادن مساحت‌های بین منحنیهای فاز و محورهای افقی در نمایشهای  $(\psi, p)$  و  $(\theta, I)$ ، به‌دست می‌آوریم

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi p(\psi, E) \quad (46-7)$$

که در آن  $p(\psi, E)$  تابعی است از  $\psi$  که از جواب معادله انرژی

$$H(\psi, p) = E \quad (47-7)$$

به دست می‌آید. معمولاً این معادله بیش از یک جواب دارد. اگر هامیلتونی به صورت ۱-۷ باشد، دو جواب وجود دارد که متناظر با علامتهای مختلف ریشه دوم هستند، و دوران در دو جهت مخالف را نمایان می‌کنند. پس برای هر انرژی، در این مورد دو کنش  $I$  وجود دارد که متناظر با هر یک از جهات حرکت هستند، و با معادله ۷-۴۶ تعریف می‌شوند.

انتخاب متفاوت محورهای افقی، کنش‌هایی حاصل می‌کنند که به اندازه مقادیر ثابت جمعی با معادله ۷-۴۶ تفاوت دارند. بنابراین، برخلاف حرکت رخگرد، در دورانه‌ها، هیچ مرز طبیعی برای کنش وجود ندارد، و یک مقدار ثابت دلخواه را می‌توان به آن افزود.

برای  $\theta(\psi)$  شکل معادله‌ها و توابع مولد، همان است که در بالا پیدا کردیم، ولی چون  $p(\psi, I)$  برای دوران تک مقداری است،  $\theta(\psi)$  تابعی پیوسته افزایشنده، یا پیوسته کاهنده از  $\psi$  می‌شود.

### مثال ۷-۶

متغیر کنش را برای جسمی که حول یک محور دوران آزاد انجام می‌دهد، پیدا کنید. بنابر بخش ۴-۶، معادله ۴-۳۶، هامیلتونی عبارت است از

$$H(\psi, p) = p^2/2G \quad (48-7)$$

که در آن  $G$  گشتاور لختی است. قرار بر این است که علامت  $I$  با علامت  $p$  یکی باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای  $I$  چنین می‌شود

$$I = \frac{\pm 1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi (2GE)^{1/2} = \pm (2GE)^{1/2} \quad (49-7)$$

در این مورد خاص که پتانسیل برابر صفر است، متغیر کنش هم مساوی اندازه حرکت زاویه‌ای جسم که با بسامد زاویه‌ای  $\omega = \partial E / \partial I = I/G$  دوران می‌کند، می‌شود.

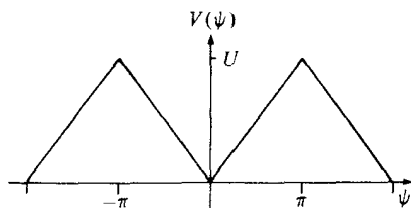
### مثال ۷-۷

متغیرهای زاویه-کنش دورانه‌های جسمی را بیابید که در پتانسیل تناوبی زیر حرکت می‌کند

$$V(\psi) = \begin{cases} -U\psi/\pi & (-\pi \leq \psi \leq 0) \\ U\psi/\pi & (0 \leq \psi \leq \pi) \end{cases}$$

$$V(\psi) = V(\psi + 2\pi) \quad (50-7 \text{ الف})$$





(۷-۵۰ ب)

در دورانها باید انرژی  $E$  بزرگتر از  $U$  باشد، وگرنه حرکت دستگاه رخگرد می شود. در این صورت متغیر کنش از معادله ۷-۴۶ به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{(2G)^{1/2}}{2\pi} \int_{-\pi}^0 d\psi \left( E + \frac{U\psi}{\pi} \right)^{1/2} + \frac{(2G)^{1/2}}{2\pi} \int_0^{\pi} d\psi \left( E - \frac{U\psi}{\pi} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{(2G)^{1/2}}{\pi} \int_0^{\pi} d\psi \left( E - \frac{U\psi}{\pi} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{2(2G)^{1/2}}{3U} [E^{3/2} - (E - U)^{3/2}] \quad (۷-۵۱)
 \end{aligned}$$

با دیفرانسیل گیری نسبت به  $E$ ، بسامد را به دست می آوریم

$$\frac{1}{\omega} = \frac{dI}{dE} = \frac{(2G)^{1/2}}{U} [E^{1/2} - (E - U)^{1/2}]$$

یا

$$\omega = \frac{E^{1/2} + (E - U)^{1/2}}{(2G)^{1/2}} \quad (۷-۵۲)$$

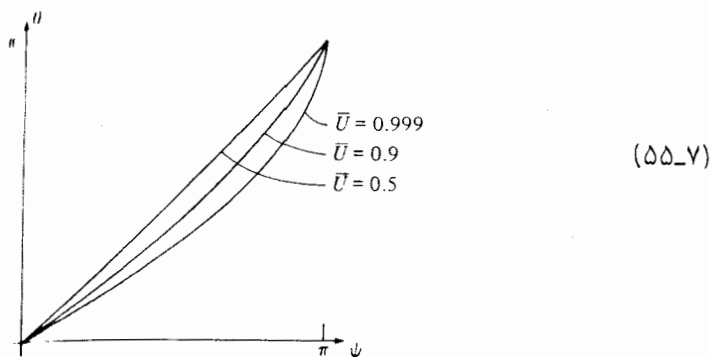
متغیر زاویه از معادله ۷-۲۴ به دست می آید

$$\begin{aligned}
 \theta(\psi) &= \int_0^{\psi} d\psi \frac{\partial p}{\partial I} = \omega \int_0^{\psi} d\psi \frac{\partial p}{\partial E} \\
 &= \omega \left( \frac{G}{2} \right)^{1/2} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{[E - V(\psi)]^{1/2}} \quad (۷-۵۳)
 \end{aligned}$$

که نهایتاً می شود

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \frac{\pi \{ [1 + (\bar{U}\psi/\pi)]^{1/2} - 1 \}}{1 - (1 - \bar{U})^{1/2}} & (-\pi \leq \psi \leq 0) \\ \frac{\pi \{ 1 - [1 - (\bar{U}\psi/\pi)]^{1/2} \}}{1 - (1 - \bar{U})^{1/2}} & (0 \leq \psi \leq \pi) \end{cases} \quad (۷-۵۴)$$

که در آن  $\bar{U} = U/E$  است. یک طرح نمودارهای  $\theta(\psi)$  برای مقادیر مختلف  $\bar{U}$  را در شکل زیر نشان داده‌ایم



### مسائل

بعضی انتگرالهای مفید در پیوست ۲ آمده است.)

۱. منحنیهای فاز حرکت یک ذره به جرم  $m$  در پتانسیل زیر را رسم کنید

$$V(q) = A \left( \frac{q}{d} \right)^{2n}$$

که در آن  $A$  و  $d$  مقادیر ثابت و مثبت و  $n$  عدد صحیح و مثبت است. نشان دهید که کنش  $I$  و انرژی  $E$  به صورت زیر به هم مربوط اند

$$E = \left( \frac{n\pi I}{dJ_n} \right)^{\frac{2n}{1+n}} \left( \frac{1}{2m} \right)^{\frac{n}{1+n}} A^{\frac{1}{1+n}}$$

که در آن هم

$$J_n = \int_0^1 dx (1-x)^{1/2} x^{-1+1/2n}$$

است. در  $n$  بزرگ، داریم  $J_n = 2n + O(n^{-1})$  نشان دهید که در این حد، معادله ۷-۲۱ مجدداً به دست می‌آید.

۲. نشان دهید که مساحت محصور با خم ممیزه آونگ قائم که هامیلتونی آن به صورت زیر است

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \alpha^2 \cos \psi$$



برابر ۱۶۰ است. نتیجه بگیرید که مقدار ماکزیموم کنش در حرکت رخگرد برابر با  $8\alpha/\pi$  است.

۳. بعضی اوقات، متغیر کنش مساوی با مساحت زیر منحنی فاز تعریف می‌شود. نشان دهید که با این تعریف، متغیر مزدوج، در هر دوره تناوب به اندازه واحد افزایش می‌یابد.

۴. نشان دهید که پتانسیل

$$V(r) = \varepsilon \left(1 - \frac{d}{r}\right)^2 \quad (\varepsilon > 0, d > 0)$$

نگهدارنده ارتعاشات برای انرژی‌هایی است که در  $0 < E < \varepsilon$  صدق می‌کند، و نیز یک خم‌میزه به انرژی  $\varepsilon$  وجود دارد. همچنین نشان دهید، هر کجا که اینها وجود داشته باشند، انرژی و کنش به صورت زیر به هم مربوط‌اند

$$E = \varepsilon \left[1 - \left(\frac{A}{I + A}\right)^2\right] \quad A = d\sqrt{2m\varepsilon}$$

بالا تر از چه مقادیری کنش تغییر می‌کند؟

نشان دهید که تناوب حرکت رخگرد با انرژی‌های نزدیک به انرژی خم‌میزه، بزرگ است و با گرایش  $E$  به  $\varepsilon$  به سوی بینهایت میل می‌کند.

۵. حرکت یک ذره به جرم  $m$  را در پتانسیل زیر در نظر بگیرید

$$V(r) = \frac{1}{r}(kr^2 + \alpha/r^2) \quad (k > 0, \alpha > 0, r > 0)$$

نشان دهید که ارتباط انرژی و کنش به صورت زیر است.

$$E = E_0 + 2I\sqrt{k/m} \quad (E_0 = \sqrt{k\alpha})$$

و نتیجه بگیرید که بسامد حرکت مستقل از دامنه و به صورت زیر است

$$\omega = 2\sqrt{k/m}$$

به علاوه نشان دهید که  $r$  برحسب متغیر زاویه  $\theta$  از رابطه زیر به دست می‌آید

$$r^2 k = E + (E^2 - k\alpha)^{1/2} \sin \theta$$



از جواب انتگرال زیر استفاده کنید

$$\int_{x_1}^{x_2} dx (-Ax^2 + 2Bx - C)^{\frac{1}{2}} x^{-1} = \pi (BA^{-\frac{1}{2}} - C^{\frac{1}{2}}) \\ (A > 0, B > 0, C > 0)$$

$x_i$  صفرهای تابع زیر انتگرال هستند.

۶. متغیرهای زاویه-کنش را برای یک ذره به جرم  $m$  که در پتانسیل تناوبی زیر دوران می‌کند، بیابید.

$$V(\psi) = A\psi \quad (0 \leq \psi \leq \alpha < \pi) \\ = A\alpha \quad (\alpha \leq \psi \leq \pi) \\ V(-\psi) = V(\psi)$$

که در آن  $A$  و  $\alpha$  مقادیر ثابت و مثبت‌اند. بسامد حرکت به انرژی  $E$  را معلوم کنید.

۷. یک ذره به جرم  $m$  به وسیله یک فنر سبک و انعطاف‌پذیر به طول  $d$  به نقطه‌ای که مبدأ انتخاب می‌شود، وصل شده است، به طوری که هرگاه فاصله آن از مبدأ کمتر از  $d$  باشد حرکت آن می‌تواند آزاد تلفی شود و در غیر این صورت تحت کنش پتانسیل زیر است

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 (|x| - d)^2 \quad (|x| > d)$$

با این فرض که ذره در یک خط مستقیم حرکت می‌کند، منحنیهای فاز را رسم کنید و نشان دهید که

$$E = \left( \sqrt{I\omega + k^2} - k \right)^2 \quad (k = \omega d \sqrt{2m}/\pi)$$

که در آن،  $I$  متغیر کنش است. نشان دهید که با میل انرژی به سوی صفر، تناوب به سوی بینهایت میل می‌کند، درحالی که در انرژی‌های بزرگ، مقدار تناوب  $2\pi/\omega$  می‌شود.

۸. با بیان تابع مولد  $S_1(\theta, q)$  در نوسانگر خطی معادله ۷-۴۲ به صورت تابعی از  $(\theta, I)$ ، مستقیماً نشان دهید که این تابع مولد، در  $\theta$  تناوبی است. همین‌طور، مستقیماً نشان دهید که  $S_2(I, q)$  تابع ۷-۴۱، با افزایش  $\theta$  به اندازه  $2\pi$ ، به مقدار  $2\pi I$  افزایش می‌یابد.



۹. حرکت ذره‌ای به جرم  $m$  را در پتانسیل زیر در نظر بگیرید

$$V(q) = \frac{1}{4} m \lambda^2 (x+a)^2 \quad (x \leq 0) \\ = \frac{1}{4} m \lambda^2 (x-a)^2 \quad (x \geq 0)$$

با توجه خاص به منحنیهای فازی که در همسایگی مبدأ واقع می‌شوند، تابع پتانسیل و نمودار فاز منتج از آن را رسم کنید. نشان دهید که فضای فاز حاوی سه ناحیهٔ ناورداست، که در هر کدام از آنها، متغیرهای کنش مختلف می‌توانند تعریف شوند. در هر مورد کنش را به صورت تابعی از انرژی به دست آورید.

۱۰. ذره‌ای به جرم  $m$  در پتانسیل

$$V = A[a^2 - (x-a)^2] \quad (0 \leq x < 2a, A > 0) \\ = 0 \quad (x \geq 2a)$$

حرکت می‌کند و به طور الاستیک در  $x = 0$  با یک دیوار برخورد می‌کند. تابع پتانسیل را رسم کنید و با نشان دادن آشکار همه نواحی حرکت رخگرد و حرکت نامحدود، منحنیهای فاز حاصل از طرح پتانسیل را بکشید.

نشان دهید که کنش از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$I = \frac{a^2 \sqrt{2mA}}{2\pi} \left[ \varepsilon - \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) \ln \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \right] \quad (\varepsilon < 1)$$

که در آن انرژی  $E = Aa^2 \varepsilon^2$  است. نشان دهید که  $2\pi dI/dE$  زمان تناوب حرکت رخگرد است و سپس نشان دهید که اگر  $\varepsilon \rightarrow 1$  میل کند، دورهٔ تناوب به سوی بینهایت میل می‌کند، زیرا  $-\ln(1 - \varepsilon)$  به سوی بینهایت میل می‌کند. (توجه داشته باشید که این نوع رفتار لگاریتمی، برای حرکت تناوبی در همسایگی یک خم ممیزه محدود، نوعی است).

۱۱. (الف) نمودار فاز حرکت یک ذره در پتانسیل زیر را رسم کنید

$$V(q) = \frac{1}{4} U (1 - \tanh \alpha q) \quad (U > 0, \alpha > 0)$$

شکل منحنیهای فاز را به ازای  $\alpha \rightarrow \infty$  بحث کنید. سپس منحنیهای فاز پتانسیل

$$\begin{aligned} V(q) &= U \quad (q < 0) \\ &= 0 \quad (q \geq 0) \end{aligned}$$

را رسم کنید و حرکت ذراتی را که با انرژی  $E > U$  و  $E < U$  از سمت راست نزدیک می‌شوند، توصیف کنید.

(ب) مطلوب است رسم منحنیهای فاز و توصیف حرکت ذره‌ای به جرم  $m$  که در پتانسیل تناوبی

$$\begin{aligned} V(\psi) &= 0 \quad (0 \leq \psi \leq \alpha \leq \pi) \\ &= U \quad (\alpha < \psi \leq \pi) \\ V(-\psi) &= V(\psi) \end{aligned}$$

که در آن  $U$  مقدار ثابت مثبت است، حرکت می‌کند. انرژی و بسامد حرکت را به صورت تابعی از کنش در دو مورد  $E > U$  و  $E < U$  پیدا کنید.

۱۲. یک ذره به جرم  $m$  روی سطحی که با راستای افقی زاویه  $\alpha$  می‌سازد، به نرمی پایین می‌لغزد. سطح شیبدار به دیوار قائمی متصل است که ذره با آن برخورد کشسان می‌کند. منحنیهای فاز را رسم کنید و نشان دهید که بسامد حرکت برابر

$$\omega = \frac{2}{3} \left( \frac{3\pi mg}{2 \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{2mI} \right)^{\frac{1}{3}}$$

است که در آن  $I$  متغیر کنش است. متغیر زاویه  $\theta$  را به صورت تابعی از  $q$  که فاصله ذره روی سطح شیبدار از دیوار است، پیدا کنید.

۱۳. برای دستگاههایی که هامیلتونیهای آنها به صورت زیرند، منحنیهای فاز را رسم کنید و متغیرهای زاویه-کنش را، هر کجا که وجود داشته باشند به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & p^2/2m + A(e^{-2\alpha q} - 2e^{-\alpha q}) \\ \text{(ب)} \quad & p^2/2m - A \operatorname{sech}^2 \alpha q \end{aligned}$$

که در آنها،  $A$  و  $\alpha$  مقادیر ثابت و مثبت‌اند.

۱۴. (الف) متغیر کنش تعریف شده با معادله ۷-۱۴، چنانچه حرکت تناوبی نباشد، نامعین است. با این وصف، انتگرال هم‌ارز برای حرکت نامحدود دارای معنای فیزیکی است. ذره‌ای را در نظر بگیرید که تحت تأثیر پتانسیل  $V(q)$ ، در راستای محور حقیقی حرکت می‌کند. انرژی کل ذره،  $E$

برای این که نقاط عطفی وجود نداشته باشند، به اندازه کافی بزرگ است، یعنی  $E > \max(V(q))$  و سرعت ذره هم مثبت است. تحت این شرایط کنش  $A(E)$  را به صورت تقاضل بین کنش حرکت در پتانسیل  $V$  و کنش حرکت آزاد، تعریف کنید.

$$A(E) = \sqrt{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dq (\sqrt{E - V(q)} - \sqrt{E})$$

فرض کنید که تابع پتانسیل به صورت زیر باشد.

$$\begin{aligned} V(q) &= U(1 - q^2/a^2) & (|q| \leq a) \\ &= 0 & (|q| > a) \end{aligned}$$

به طور صریح نشان دهید که  $\partial A / \partial E$  عبارت است از تأخیر زمانی ناشی از پتانسیل.

(ب) نشان دهید که  $\partial A / \partial E$  تأخیر زمانی برای هر پتانسیلی است که برای آن  $V(q)$  با افزایش  $|q|$  چنان سریع به سوی صفر میل کند که  $A$  وجود داشته باشد. از تابع مولد  $W(q_2, q_1; E)$  مسئله ۱۸-۶ استفاده کنید.

۱۵. هامیلتونی وابسته به زمان زیر را در نظر بگیرید

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) - \frac{A}{2\omega}(p \cos \Omega t + \omega q \sin \Omega t)$$

که در آن  $A$ ،  $\omega$  و  $\Omega$  مقادیر ثابت و مثبت اند. این هامیلتونی یک نوسانگر خطی را که توسط یک پتانسیل وابسته به زمان و سرعت پریشیده است، توصیف می کند. نشان دهید که در نمایش  $(\theta, I)$  که در آن  $(\theta, I)$  متغیرهای زاویه-کنش برای نوسانگر خطی مثال ۷-۵ هستند هامیلتونی به صورت زیر است

$$K(\theta, I, t) = \omega I - A \left( \frac{I}{2\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta - \Omega t)$$

با انجام تبدیل بندادی زیر که آن هم وابسته به زمان است

$$\phi = \theta - \Omega t, J = I$$

نشان دهید که هامیلتونی مزبور، مبدل به هامیلتونی مستقل از زمان

$$K(\phi, J) = (\omega - \Omega)J - A \left( \frac{2J}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \phi$$



می‌شود. منحنیهای فاز را در نمایش  $(\phi, J)$  در مورد  $\Omega \neq \omega$  و مورد تشدید  $\Omega = \omega$  رسم کنید؛ در مورد اخیر نشان دهید که دامنه حرکت به ازای  $t \rightarrow \infty$  نامحدود است. هامیلتونی غیر خطی

$$K_2(\theta, I, t) = K(\theta, I, t) + \alpha^2 I^2$$

را که در آن  $\alpha$  مقدار ثابت است، در نظر بگیرید. نشان دهید که به ازای همه مقادیر غیر صفر و حقیقی  $\alpha$  و به ازای همه مقادیر  $\Omega$ ، دامنه حرکت در همه زمانها محدود است. در مورد  $\Omega = \omega$  و  $\alpha$ ی کوچک، در تغییر  $I(t)$  مقادیر حدی تقریبی قرار دهید.



## نظریهٔ پَریشیدگی

### ۱-۸ مقدمه

مسائل واقعی، بندرت دارای هامیلتونی‌هایی هستند که معادلات حرکت آنها جوابهای سادهٔ صرفاً وابسته به توابع مقدماتی داشته باشند، بدین سبب روشهای تقریبی از اهمیت زیادی برخوردارند. یکی از این روشها شامل تقریب در دستگاههایی است که هامیلتونیهای آنها به صورت

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \varepsilon H_1(q, p) \quad (|\varepsilon| \ll 1) \quad (1-8)$$

است که در آن، دستگاه  $H_0(q, p)$  قابل حل است و دستگاه  $H(q, p)$  به ازای  $\varepsilon \neq 0$  قابل حل نیست. این روش نظریهٔ پَریشیدگی خوانده می‌شود. هامیلتونیهای  $H(q, p)$  و  $H_0(q, p)$  به ترتیب هامیلتونی پَریشیده و هامیلتونی ناپَریشیده نام یافته‌اند و  $\varepsilon H_1(q, p)$  را پَریشیدگی می‌نامیم. پَریشیدگی را به عنوان تابعی از  $\varepsilon$  مورد بررسی قرار می‌دهیم.

منظومهٔ شمسی مشهورترین دستگاه از این نوع است. یک سیارهٔ معین، عمدتاً از سوی خورشید تحت تأثیر قرار می‌گیرد، اما دیگر سیاره‌ها هم اثرهای اندکی روی آن دارند. برای نمونه، بیشترین پَریشیدگی در حرکت زهره به دور خورشید، از سوی مشتری که نیروی میانگین آن روی زهره کمتر از  $10^{-5} \times 2$  برابر نیروی خورشید روی زهره است، ناشی می‌شود؛ قویترین پَریشیدگی بعدی، ناشی



از زمین است که نیروی میانگین آن کمتر از  $4 \times 10^{-6}$  برابر نیروی خورشید است. پس می‌توانیم به‌عنوان اولین تقریب در حرکت زهره همهٔ آثار، به استثنای اثر خورشید روی آن را نادیده بگیریم. نتیجهٔ این تقریب یک هامیلتونی است که معادلهٔ حرکت آن جوابهای ساده دارد. در این صورت اثر مشتری و دیگر سیاره‌ها را می‌توان به‌صورت پریشیدگی کوچکی در این حرکت به شمار آورد. لکن این دستگاه، پیچیده و دارای درجات آزادی بسیار است و مثالهای ما خیلی از این ساده‌ترند. فکر اصلی در نظریهٔ پریشیدگی، بسط دادن معادلهٔ حرکت به‌صورت یک سری توانی در  $\varepsilon$  است. این در معنا مشابه بسط تیلور یک تابع  $f(x)$  حول  $x$  است:

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x) + \dots \quad (2-8)$$

نظیر سری تیلور، یک سری پریشیدگی، اگر  $\varepsilon$  خیلی بزرگ باشد، می‌تواند واگرا باشد، یا در واقع می‌تواند به‌ازای هر  $\varepsilon$  واگرا باشد. پس در استفاده از آن، مراقب باید بود. در دستگاههای هامیلتونی، هر دوی متغیرهای مزدوج، نیاز به بسط در یک چنین سری توانی دارند؛ در نتیجه، معادلات جبری حاصل کاملاً پیچیده‌اند و می‌توانند موجب ابهام در مفاهیم اصلی شوند. برای تشریح منظوره‌ای اصلی بدون درگیر شدن زیاد با محاسبات جبری، نخست به یک مثال ساده توجه کنیم که نظریهٔ پریشیدگی و برخی مشکلات را روشن می‌کند.

### مثال ۱-۸

برای دستگاه مرتبهٔ اولی که حرکت آن در معادله

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + \varepsilon x^2 \\ x(0) &= A \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \end{aligned} \quad (3-8)$$

صدق می‌کند، یک جواب به‌صورت سری توانی در  $\varepsilon$ ، صحیح تا مرتبه دوم در  $\varepsilon$  بیابید. جواب را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + O(\varepsilon^3) \quad (4-8)$$

که در آن هر یک از  $x^{(k)}(t)$ ها، مستقل از  $\varepsilon$  هستند. با جایگذاری این عبارت در معادلهٔ حرکت داریم

$$\dot{x}^{(0)} + \varepsilon \dot{x}^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{x}^{(2)} = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \varepsilon (x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)})^2 + O(\varepsilon^3) \quad (5-8)$$





با مساوی قرار دادن جملات  $\varepsilon$  همتوان در این بسط تیلور داریم

$$\dot{x}^{(0)} = x^{(0)} \quad (۸-۶ \text{ الف})$$

$$\dot{x}^{(1)} = x^{(1)} + (x^{(0)})^2 \quad (۸-۶ \text{ ب})$$

$$\dot{x}^{(2)} = x^{(2)} + 2x^{(0)}x^{(1)} \quad (۸-۶ \text{ ج})$$

حال جوابی را می‌خواهیم که در  $x^{(0)} = A$  برای هر  $\varepsilon$ ، صدق کند. لذا با مساوی قرار دادن ضرایب  $\varepsilon$  در معادله ۸-۴ در زمان  $t = 0$  داریم

$$x^{(0)}(0) = A, \quad x^{(k)}(0) = 0 \quad (k \geq 1)$$

بدین ترتیب برای  $x^{(0)}$  به‌عنوان جواب معادله ناپریشیده، داریم

$$x^{(0)}(t) = Ae^t \quad (۸-۷)$$

با جایگذاری ۸-۷ در ۸-۶ ب، داریم

$$\dot{x}^{(1)} = x^{(1)} + A^2 e^{2t}, \quad x^{(1)}(0) = 0 \quad (۸-۸)$$

که جواب آن می‌شود

$$x^{(1)}(t) = A^2 e^t (e^t - 1) \quad (۸-۹)$$

با جایگذاری  $x^{(1)}(t)$  و  $x^{(0)}(t)$  در ۸-۶ ج داریم

$$\dot{x}^{(2)} = x^{(2)} + 2A^2 e^{2t} (e^t - 1), \quad x^{(2)}(0) = 0 \quad (۸-۱۰)$$

به‌طوری که

$$x^{(2)}(t) = A^2 e^t (e^t - 1)^2 \quad (۸-۱۱)$$

به‌طور کلی در بسط پریشیدگی، هر جمله از جمله قبلی به‌دست می‌آید. جواب تا مرتبه دوم در  $\varepsilon$  عبارت است از

$$x(t) = Ae^t \left[ 1 + \varepsilon A(e^t - 1) + \varepsilon^2 A^2 (e^t - 1)^2 \right] + O(\varepsilon^3) \quad (۸-۱۲)$$



چنانکه می‌بینیم، هر جملهٔ درون کروش،  $\varepsilon A(e^t - 1)$  برابر جملهٔ ما قبل آن است. بدین ترتیب، برای یک دقت مفروض، بسط پریشیدگی مرتبهٔ اول،  $x^{(۱)} + \varepsilon x^{(۰)}$ ، برای زمان کوتاهتر مفیدتر از بسط مرتبهٔ دوم معادلهٔ ۸-۱۲ است. برعکس، اگر دقت معینی لازم باشد هر قدر که زمان بزرگتر باشد، به همان نسبت هم باید در بسط پریشیدگی تا مراتب بالاتر پیش برویم. اینها خواص مشترک بسطهای پریشیدگی هستند و در شکل ۸-۱ نمایانده شده‌اند.

در این مثال خاص، معادلهٔ حرکت ۸-۳ می‌تواند مستقیماً انتگرال‌گیری بشود که جواب آن

$$x(t) = \frac{Ae^t}{1 - \varepsilon A(e^t - 1)} \quad (۱۳-۸)$$

اگر برحسب توانهای  $\varepsilon$  بسط داده شود، چنانکه می‌بینیم، همان ۸-۱۲ را به دست می‌دهد. همچنین متوجه می‌شویم که بسط سری توانی در یک زمان بحرانی که از روابط زیر به دست می‌آید، نادرست می‌شود

$$\varepsilon A(e^{t_c} - 1) = 1 \quad \text{یا} \quad t_c = \ln \left( \frac{1 + A\varepsilon}{A\varepsilon} \right) \quad (۱۴-۸)$$

بدین ترتیب بسط سری پریشیدگی، هر قدر هم که مراتب پریشیدگی زیادی محاسبه شده باشند فقط برای زمانهای  $t < t_c$  درست است، و دلیل آن هم این است که معادلهٔ ناپریشیدهٔ

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = A \quad (۱۵-۸)$$

حرکتی را توصیف می‌کند که مختوم نیست، درحالی که حرکت دستگاه پریشیده مختوم است، به‌طوری که «پریشیدگی کوچک»  $\varepsilon x^2$  نوع حرکت را تغییر می‌دهد. با این همه، بسط پریشیدگی یک تقریب سودمند در حل معادله برای زمانهای کوچک حاصل می‌کند. در شکل ۸-۱ کسری را که از تقسیم جواب دقیق به جواب ناپریشیده حاصل می‌شود و خارج قسمت دقیق نام دارد، یعنی

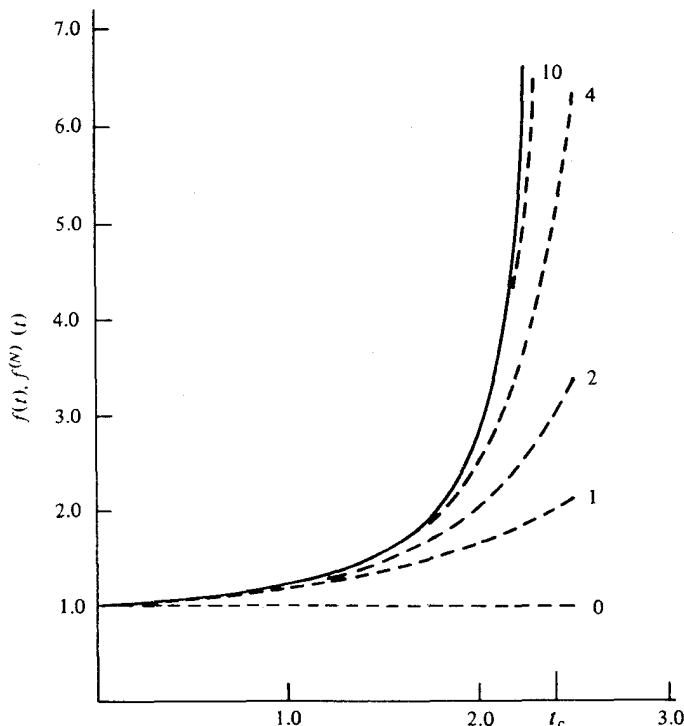
$$f(t) = \frac{x(t)}{Ae^t} = \frac{1}{1 - \varepsilon A(e^t - 1)} \quad (۱۶-۸)$$

و خارج قسمت تقریبی را که بنابر نظریهٔ پریشیدگی مرتبه  $N$ ، به صورت

$$f^{(N)}(t) = \sum_{n=0}^N [\varepsilon A(e^t - 1)]^n \quad (۱۷-۸)$$



## نظریهٔ پریشیدگی مرتبهٔ اول برای دستگاههای هامیلتونی پایستار ۱۵۱



شکل ۸-۱ مقایسهٔ ترسیمی کسر  $f(t)$ ، معادله ۸-۱۶، که با خط ممند نشان داده‌ایم با کسرهای تقریبی  $f^{(N)}(t)$ ، معادله ۸-۱۷ برای  $N = 0, 1, 2, 4, 10$  که با خط چینها کشیده‌ایم.

است، برای  $N = 0, 1, 2, 4, 10$  نشان داده‌ایم. در ترسیم این تصویر  $A = 1$  و  $\epsilon = 10^{-6}$  است، لذا  $t_c = 2.4$  می‌شود.

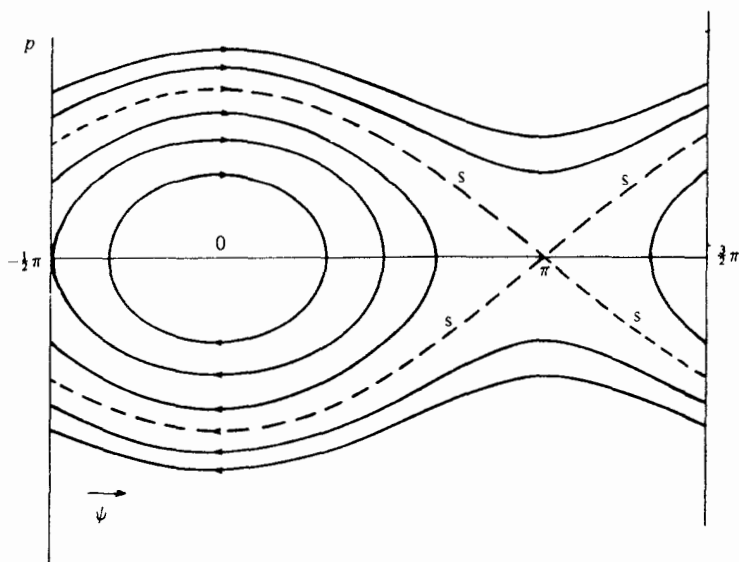
این مثال هر چند که خیلی ساده است، ولی فنون و برخی مشکلات بسط پریشیدگی را نشان می‌دهد. در بخش بعد، این روش در مورد دستگاههای هامیلتونی پیچیده‌تر به کار گرفته می‌شود. از این رو به خوانندهٔ کتاب توصیه می‌کنیم قبل از پرداختن به آن بخش برای حل مسئله‌های ۸-۱ تا ۸-۷ بخش حاضر کوشش کند.

## ۸-۲ نظریهٔ پریشیدگی مرتبهٔ اول برای دستگاههای هامیلتونی پایستار

فرض کنید که یک هامیلتونی از مجموع دو جمله تشکیل شده است

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \epsilon H_1(q, p) \quad (8-18)$$

که در آن، معادلات هامیلتون برای  $H_0$  دارای جوابهای معلوم هستند و پریشیدگی  $\epsilon H_1$  کوچک است.



شکل ۲-۸ نمودار فاز آونگ قائم با هامیلتونی معادلهٔ ۱۹-۸. خم ممیژهٔ  $s$  ناحیهٔ رخگرد، یعنی منحنیهای بستهٔ پیرامون نقطهٔ صفر را از نواحی دوران مجزا می‌کند.

در نظریهٔ پریشیدگی، جواب معادلات هامیلتون را به صورت یک سری توانی در  $\varepsilon$ ، همان طور که در مثال ۱-۸ دیدیم، بیان کردیم. از آنجا که این، یک بسط حول حرکت ناپریشیده است، حرکت پریشیده هم باید از نوع حرکت ناپریشیده باشد، یعنی هر دو دوران باشند، یا هر دو رخگرد باشند. برای مثال هامیلتونی آونگ قائم، معادلات ۴-۴۳ و ۵-۳۰ را در نظر بگیرید

$$H(\psi, p) = \frac{1}{4}p^2 - \alpha^2 \cos \psi \quad (19-8)$$

که در بخش ۴-۷ بحث شده و منحنیهای فاز آن در شکل ۲-۸ نشان داده شده است. فضای فاز با خم ممیژهٔ  $s$  به ناحیه‌های دوران و ناحیه‌های رخگرد تقسیم شده است. برای دورانهای سریع، که در آنها

$$\frac{1}{4}p^2 \gg \alpha^2 \quad (20-8)$$

است، سهم انرژی پتانسیل نسبتاً کوچک است، و می‌توان  $H_0$  و  $\varepsilon H_1$  را به صورت زیر انتخاب کرد

$$H_0 = \frac{1}{4}p^2, \quad \varepsilon H_1 = -\alpha^2 \cos \psi \quad (21-8)$$

از طرف دیگر، برای مطالعهٔ رخگرد در نزدیکی نقطهٔ تعادل در صفر، هامیلتونی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$H(\psi, p) = \frac{1}{4}(p^2 + \alpha^2 \psi^2) - \alpha^2 - \alpha^2(\cos \psi - 1 + \frac{1}{4} \psi^2) \quad (22-8)$$

به طوری که، با چشمپوشی از  $-\alpha^2$ ، هامیلتونیهای ناپریشیده و پَریشیدهٔ حاصل با ۲۱-۸ متفاوت می‌شوند

$$\overline{H}_0 = \frac{1}{4}(p^2 + \alpha^2 \psi^2) \quad \text{و} \quad \varepsilon \overline{H}_1 = -\alpha^2(\cos \psi + \frac{1}{4} \psi^2) \quad (23-8)$$

حرکت ناپریشیده به یک نوسانگر خطی شباهت دارد که متداول‌ترین «حرکت آونگی» است. معادلات هامیلتون برای  $H_0$  و  $\overline{H}_0$  جوابهای ساده‌ای دارند؛ نظیر مثالهای ۲-۸ و ۳-۸. اینک با تحلیل کلی تقریب مرتبهٔ اول فقط در  $\varepsilon$ ، مطلب را ادامه می‌دهیم. این تقریب شامل هر دوی دوران و رخگرد است. فرض می‌کنیم ناحیه‌ای از فضای فاز وجود دارد که در آن منحنیهای فاز  $H$  و  $H_0$  در یکدیگر به طور پیوسته مستحیل شده‌اند. همچنین فرض می‌کنیم که  $(\phi, J)$ ، متغیرهای زاویه-کنش قبلی  $H_0$  و متغیرهای  $(\theta, I)$  تازهٔ  $H$  را می‌توان توسط یک سری توانی در  $\varepsilon$  به همدیگر مربوط کرد

$$\phi = \phi^{(0)}(\theta, I) + \varepsilon \phi^{(1)}(\theta, I) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{الف } 24-8)$$

$$J = J^{(0)}(\theta, I) + \varepsilon J^{(1)}(\theta, I) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{ب } 24-8)$$

که در آنها هر یک  $(\phi^{(k)}, J^{(k)})$  مستقل از  $\varepsilon$  است. بیان متغیرهای قبلی زاویه-کنش،  $(\phi, J)$  برحسب  $(\theta, I)$  را به این سبب برگزیده‌ایم که در حرکت پَریشیده

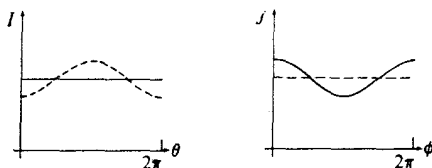
$$\theta = \Omega t + \text{مقدار ثابت}, \quad I = \text{مقدار ثابت}$$

است که در آن  $\Omega$  بسامد پَریشیده است. وقتی بسطهای ۲۴-۸ و این بسامد پیدا شوند، وابستگی به زمان  $(\phi, J)$  معلوم می‌شود، لذا منحنی فاز به طور پارامتری برحسب  $\theta$  یا  $t$  مشخص خواهد بود. برای دستگاه ناپریشیده،  $\varepsilon = 0$  و  $\theta = \phi$  و  $I = J$  است، و در نتیجه

$$\phi^{(0)}(\theta, I) = \theta \quad J^{(0)}(\theta, I) = I \quad (25-8)$$



اکنون مسئله، پیدا کردن  $(\phi^{(1)}, J^{(1)})$  و هامیلتونی در نمایش  $(\theta, I)$  است. منحنیهای فاز حرکت‌های هریک از طرز نمایشها در نمودار زیر ترسیم شده‌اند، حرکت پریشیده با خط ممتد و حرکت ناپریشیده با خط منقطع نشان داده شده‌اند.



هرگاه  $\theta$  به اندازه  $2\pi$  افزایش یابد،  $\phi$  هم همان قدر افزایش می‌یابد، به طوری که  $\phi^{(1)}(\theta, I)$  نظیر  $J^{(1)}(\theta, I)$  باید با تناوب  $2\pi$  در  $\theta$  تناوبی باشند. نظر به این که متغیرهای زاویه در محدودهٔ یک مقدار ثابت جمعی معین هستند، برای سهولت  $\phi^{(1)}$  را چنان انتخاب می‌کنیم که در میانگین‌گیری روی  $\theta$ ، مقدار میانگین آن صفر شود.

از آنجا که تبدیل  $(\phi, J) \leftarrow (\theta, I)$  بندادی است، از نظریهٔ بحث شده در فصل ۶ برمی‌آید که تبدیل حافظ مساحت است، به طوری که ژاکوبی این تبدیل برابر واحد است.

$$\frac{\partial(\phi, J)}{\partial(\theta, I)} = 1 \quad (26-8)$$

همچنین مساحت زیر منحنی فاز پریشیده در هریک از طرز نمایشها با هم برابرند. در نمایش  $(\theta, I)$ ، مقدار  $I$  در امتداد هریک منحنی فاز پریشیده، ثابت است، اما در نمایش  $(\phi, J)$ ، مقدار  $J$  یک تابع تناوبی از  $\phi$  است، از این رو

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi J(\phi) \quad (27-8)$$

با استفاده از این خاصیت تناوبی و روابط حفظ مساحت، می‌توانیم  $(\phi^{(1)}, I^{(1)})$  و هامیلتونی در نمایش  $(\theta, I)$  را پیدا کنیم. بنا به تعریف، نظر به این که  $I$  متغیر کنش دستگاه پریشیده است، این هامیلتونی مستقل از  $\theta$  است، و می‌تواند برحسب توانهای  $\varepsilon$  بسط داده شود

$$K(I) = K_0(I) + \varepsilon K_1(I) + O(\varepsilon^2) \quad (28-8)$$

اما در نمایش  $(\phi, J)$ ، هامیلتونی به صورت

$$H(\phi, J) = H_0(J) + \varepsilon H_1(\phi, J) \quad (29-8)$$



است و هامیلتونی تازهٔ ۲۸-۸ می‌تواند با بیان  $(\phi, J)$  به صورت توابعی از  $(\theta, I)$ ، معادلهٔ ۲۴-۸، و جایگذاری در ۲۹-۸ به دست آید

$$\begin{aligned} K(I) &= H_0(I + \varepsilon J^{(1)}) + \varepsilon H_1(\theta, I) + O(\varepsilon^2) \\ &= H_0(I) + \varepsilon \left[ J^{(1)} \frac{\partial H_0}{\partial I} + H_1(\theta, I) \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (30-8)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب  $\varepsilon$  در معادلات ۳۰-۸ و ۲۸-۸ داریم

$$K_0(I) = H_0(I) \quad (31-8)$$

$$K_1(I) = J^{(1)}(\theta, I) \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) + H_1(\theta, I) \quad (32-8)$$

$K_0(I)$  مستقیماً از معادلهٔ ۳۱-۸ به دست می‌آید؛  $K_1(I)$  و  $J^{(1)}(\theta, I)$  را با استفاده از خواص تناوبی و حفظ مساحت می‌توان پیدا کرد. با جایگذاری ۲۴-۸ در طرف راست ۲۷-۸ داریم

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} \right) (I + \varepsilon J^{(1)}) + O(\varepsilon^2) \\ &= I + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta J^{(1)} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (33-8)$$

که سطر آخر به سبب این‌که  $\phi^{(1)}$  تناوبی است حاصل می‌شود. بدین ترتیب

$$\int_0^{2\pi} d\theta J^{(1)}(\theta, I) = 0 \quad (34-8)$$

و با میانگین‌گیری از ۳۲-۸ روی  $\theta$ ، داریم

$$K_1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta H_1(\theta, I) \quad (35-8)$$

این نشان می‌دهد که تصحیح مرتبه اول در هامیلتونی، میانگین پریشیدگی،  $\varepsilon H_1$ ، است که روی حرکت ناپریشیده گرفته می‌شود. چون  $K_1$  اکنون معلوم است، می‌توانیم  $J^{(1)}(\theta, I)$  را مستقیماً از ۳۲-۸ پیدا کنیم.

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \quad (\omega_0(I) \neq 0) \quad (36-8)$$

که در آن  $\omega_0 = \partial H_0 / \partial I$  بسامد ناپریشیده است که باید مخالف صفر باشد تا این نظریه صدق کند.

چنانچه  $\omega_0$  کوچک باشد، اثر پریشیدگی می‌تواند کاملاً بزرگ شود. به سبب این که پریشیدگی مرتبه  $n$ ام، جمله‌های متناسب با  $\omega_0^{-n}$  دارد (مثلاً ن.ک، مسئله ۸-۱۵) همگرایی بسط پریشیدگی جای تردید است.  $\omega_0$  عموماً در نزدیکی خم‌میزه که فضای فاز را به نواحی شامل انواع مختلف حرکت تقسیم می‌کند، کوچک است. در دستگاههایی که دارای  $(N \geq 2)$  درجه آزادی هستند، این مسئله صورت بسیار جدی‌تری به خود می‌گیرد، زیرا در آن صورت  $N$  بسامد بنیادی وجود دارد. این بسامدها و همهٔ ترکیبهای خطی صحیح آنها در مخرج عبارات هم‌ارز با ۸-۳۶ پیش می‌آیند، چنان‌که حتی اگر همهٔ بسامدها بزرگ باشند، امکان دارد یک ترکیب خاص آنها کوچک شود. بنابراین همگرایی بسط‌های پریشیدگی برای دستگاههای دارای بیش از یک درجه آزادی، مسئلهٔ بسیار حساسی است.

با پیدا کردن  $J^{(1)}$ ، می‌توانیم از ۸-۲۶ استفاده کنیم و  $\phi^{(1)}(\theta, I)$  را بیابیم. با جایگذاری ۸-۲۴ در ۸-۲۶ و مساوی قرار دادن  $\varepsilon$ های هم‌توان، داریم

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I} \quad (۸-۳۷)$$

از این عبارت می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت و  $\phi^{(1)}$  را به دست آورد. البته نباید فراموش کرد که مقدار ثابت انتگرال‌گیری چنان انتخاب شود که مقدار میانگین  $\phi^{(1)}$  برابر صفر باشد.

## مثال ۸-۲

حرکت یک آونگ قائم را بررسی می‌کنیم که دورانش را در نظر گرفتن نیروهای گرانشی به عنوان پریشیدگی کوچک، به اندازه کافی سریع است. چنان‌که در آغاز این بخش بحث شد، هامیلتونی ناپریشیده و پریشیدگی عبارت‌اند از

$$H_0 = \frac{1}{2} p^2, \quad H_1 = -\alpha^2 \cos \psi \quad (۸-۳۸)$$

که در آن  $\varepsilon = 1$  قرار دادیم، و  $\alpha$  را پارامتری کوچک گرفتیم. متغیرهای زاویه-کنش برای دستگاه ناپریشیده، به سادگی عبارت‌اند از

$$\phi = \psi, \quad J = p \quad (۸-۳۹)$$

سپس، از معادلات ۸-۳۱ و ۸-۳۵، برای دو جملهٔ اول هامیلتونی در نمایش  $(\theta, I)$ ، داریم





نظریهٔ پریشیدگی مرتبهٔ اول برای دستگاه‌های هامیلتونی پایستار ۱۵۷

$$K_0(I) = \frac{1}{2} I^2 \quad (۴۰-۸)$$

$$K_1(I) = -\frac{\alpha^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta = 0 \quad (۴۱-۸)$$

همچنین از ۳۶-۸ و ۳۷-۸ داریم

$$J^{(1)} = \frac{\alpha^2 \cos \theta}{I} \quad (۴۲-۸)$$

و

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\alpha^2 \cos \theta}{I^2} \quad (۴۳-۸)$$

به‌طوری‌که

$$\phi^{(1)} = \frac{\alpha^2 \sin \theta}{I^2} \quad (۴۴-۸)$$

پس حرکت پریشیده می‌شود

$$\phi = \psi = \theta + \frac{\alpha^2 \sin \theta}{I^2} + O(\alpha^4) \quad (۴۵-۸)$$

$$J = p = I + \frac{\alpha^2 \cos \theta}{I} + O(\alpha^4) \quad (۴۶-۸)$$

و هامیلتونی عبارت است از

$$K(I) = \frac{1}{2} I^2 + O(\alpha^2) \quad (۴۷-۸)$$

متغیر زاویه  $\theta$ ، با زمان به‌طور خطی تغییر می‌کند

$$\dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial I} = I, \quad \theta = It + \delta \quad (۴۸-۸)$$

که وابستگی به زمان زاویهٔ فیزیکی  $\psi$  و اندازه حرکت زاویه  $p$  را معلوم می‌کند

$$\psi = It + \delta + \frac{\alpha^2 \sin(It + \delta)}{I^2} + O(\alpha^4) \quad (49-8)$$

$$p = I + \frac{\alpha^2 \cos(It + \delta)}{I} + O(\alpha^4) \quad (50-8)$$

چون  $K_1(I) = 0$  است، در این مرتبهٔ تقریب، بسامد حرکت‌های پریشیده و ناپریشیده که یک کنش دارند، یکی است. این امر برای همهٔ پریشیدگی‌های مرتبهٔ اولی که میانگین‌شان صفر باشد صادق است.

### مثال ۸-۳

حرکت یک آونگ قائم را که حول محور قائم رو به پایین نوسان می‌کند، بررسی می‌کنیم. چنان‌که در ابتدای این بخش بحث کردیم، هامیلتونی ناپریشیده عبارت است از

$$H_0(\psi, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \alpha^2 \psi^2) \quad (51-8)$$

و به‌ازای  $\varepsilon = 1$ ، پریشیدگی می‌شود

$$H_1(\psi, p) = -\alpha^2(\cos \psi - 1 + \frac{1}{2} \psi^2) \quad (52-8)$$

در این مثال لازم نیست که  $\alpha$  کوچک باشد؛ چه پریشیدگی کوچک است، چون  $\psi$  کوچک است. می‌توانیم  $\cos \psi$  را در یک سری تیلور بسط دهیم و به‌دست آوریم

$$H_1 = -\frac{1}{24} \alpha^2 \psi^4 + O(\psi^6) \quad (53-8)$$

چون روی تقریب مرتبهٔ اول کار می‌کنیم، می‌توانیم پریشیدگی را به این صورت بنویسیم

$$H_1 = -\frac{1}{24} \alpha^2 \psi^4 \quad (54-8)$$

در این مسئله، پارامتر کوچک  $\varepsilon$ ‌ای که به‌طور طبیعی پیش بیاید، وجود ندارد، و تحت این شرایط اغلب سودمند است که یک  $\varepsilon$  را دخالت بدهیم و در آخر مسئله آن را برابر یک بگیریم. لذا هامیلتونی را به این صورت می‌نویسیم

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \alpha^2 \psi^2) - \frac{1}{24} \varepsilon \alpha^2 \psi^4 + O(\varepsilon^2) \quad (55-8)$$



در مثال ۵-۷، متغیرهای زاویه-کنش برای  $H_0$  عبارت‌اند از  $(\phi, J)$  که داریم

$$\psi = \left(\frac{2J}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \phi, \quad p = (2\alpha J)^{\frac{1}{2}} \cos \phi \quad (56-8)$$

و در تقریب مرتبهٔ اول در  $\varepsilon$ ، در نمایش  $(\phi, J)$  هامیلتونی عبارت است از

$$H(\phi, J) = \alpha J - \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon J^2 \sin^2 \phi \quad (57-8)$$

که در آن جملهٔ نخست  $H_0$  و جملهٔ دوم  $\varepsilon H_1$  است. سپس از معادلات ۳۱-۸ و ۳۵-۸، دو جملهٔ اول هامیلتونی در طرز نمایش  $(\theta, I)$  را به دست می‌آوریم

$$K_0(I) = \alpha I \quad (58-8)$$

$$K_1(I) = -\frac{1}{\varepsilon} I^2 \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2 \theta = -\frac{1}{16} I^2 \quad (59-8)$$

هامیلتونی  $K$  و بسامد حرکت پرنشیده  $\Omega$ ، در مرتبهٔ اول در  $\varepsilon$  عبارت‌اند از

$$K(I) = \alpha I - \frac{1}{16} \varepsilon I^2 + O(\varepsilon^2) \quad (60-8)$$

$$\Omega = \partial K / \partial I = \alpha - \frac{1}{8} \varepsilon I + O(\varepsilon^2) \quad (61-8)$$

از معادلات ۳۶-۸ و ۳۷-۸ برای  $J^{(1)}$  و  $\phi^{(1)}$  داریم

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= -\frac{I^2}{\alpha} \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{\varepsilon} \sin^2 \theta \right) \\ &= -\frac{I^2}{12\alpha} \left( \cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos 4\theta \right) \end{aligned} \quad (62-8)$$

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{12\alpha} \left( \sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right) \quad (63-8)$$

بدین ترتیب

$$\phi = \theta + \frac{\varepsilon I}{12\alpha} \left[ \sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right] + O(\varepsilon^2) \quad (64-8)$$

$$J = I - \frac{\varepsilon I^2}{12\alpha} \left[ \cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos 4\theta \right] + O(\varepsilon^2) \quad (65-8)$$



که در آنها

$$\theta = \Omega t + \delta \quad (۶۶-۸)$$

و بسامد زاویه‌ای  $\Omega$  از رابطهٔ ۶۱-۸ به دست می‌آید.

حرکت متغیرهای اصلی  $(\psi, p)$  را می‌توان با جایگذاری ۶۴-۸ و ۶۵-۸ در ۵۶-۸ به دست آورد

$$\begin{aligned} \psi = & \left( \frac{2I}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{\varepsilon I}{12\alpha} \left( \cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos 4\theta \right) \right]^{1/2} \\ & \times \sin \left[ \theta + \frac{\varepsilon I}{12\alpha} \left( \sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right) \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (۶۷-۸)$$

این را هم می‌توان با بسط در  $\varepsilon$  و نگه داشتن جمله‌های خطی در  $\varepsilon$  ساده کرد

$$\psi = \left( \frac{2I}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sin \theta + \frac{\varepsilon I}{48\alpha} \left( 3 \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 3\theta \right) \right] \quad (۶۸-۸)$$

مشابه این، برای  $p$  داریم

$$p = (2\alpha I)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \theta - \frac{\varepsilon I}{32\alpha} (2 \cos \theta - 3 \cos 3\theta) \right] \quad (۶۹-۸)$$

در این مرتبه از تقریب، منحنیهای فاز پریشیده و ناپریشیده در حدود فاصله‌ای برابر با  $\varepsilon I$  از هم مجزا هستند. این بدان معنا نیست که مقادیر پریشیده و ناپریشیدهٔ  $\psi(t)$  و  $p(t)$  به‌ازای همهٔ  $t$ ها این مقدار با هم تفاوت دارند، چون بسامدهایی که با آنها هریک از منحنیهای فاز فاصلهٔ عرضی می‌اندازند، متفاوت هستند. در مدت زمان  $T$ ، نقطهٔ فاز ناپریشیده به اندازهٔ زاویهٔ  $\phi = \alpha T$  دوران می‌کند، در حالی که نقطهٔ فاز پریشیده به اندازهٔ زاویه  $\theta = \Omega T$  دوران می‌کند، به‌طوری که بنابر ۶۱-۸

$$\phi - \theta = \frac{1}{8} \varepsilon I T$$

می‌شود. بدین ترتیب، پس از مدت زمان  $8\pi/\varepsilon I$ ، حرکت‌های پریشیده و ناپریشیده به اندازهٔ  $180^\circ$  اختلاف فاز دارند.

به‌ازای  $\varepsilon = 1$ ، بسامد  $\Omega$ ی حرکت پریشیده، که از معادلهٔ ۶۱-۸ به دست می‌آید، صفر است وقتی که  $I = 8\alpha$ ، که بنابر هامیلتونی ۶۰-۸ در انرژی  $4\alpha^2$  پیش می‌آید. این، تقریب مرتبهٔ اول در

انرژی خم‌میزه ۵۵-۸ است که  $\alpha^2$  است. این هم به نوبه خود یک تقریب در انرژی خم‌میزه آونگ قائم است که چنان‌که در بخش ۴-۶ نشان دادیم، به مقدار  $\alpha^2$  است.

تقریب مرتبه اول در انرژی خم‌میزه بسیار نارساست. به‌طور کلی نظریه پریشیدگی، برای هر منحنی فاز نزدیک به یک خم‌میزه، تقریب ضعیفی به دست می‌دهد، زیرا بسامد این حرکت‌ها همیشه کوچک‌اند و از معادله ۸-۳۶ می‌بینیم که این بسامد همیشه در مخرج جواب پریشیده ظاهر می‌شود.

### مسائل

۱. مطلوب است یک بسط پریشیدگی صحیح تا مرتبه دوم در  $\varepsilon$ ، برای جواب معادله جبری

$$x = 1 + \varepsilon x^2$$

که در آن  $\varepsilon$  یک پارامتر کوچک است. این بسط را با جواب دقیق مقایسه کنید. توجه داشته باشید که یک پریشیدگی می‌تواند جواب تازه‌ای ارائه کند.

۲. نشان دهید که یک جواب برای معادله جبری

$$x = a + \varepsilon x^\alpha \quad (x > 0, a > 0, \alpha > 1)$$

که صحیح تا مرتبه سوم در پارامتر کوچک  $\varepsilon$  باشد، به صورت زیر است

$$x = a + \varepsilon a^\alpha + \varepsilon^2 \alpha a^{\alpha-1} + \varepsilon^3 \frac{\alpha}{2} (3\alpha - 1) a^{\alpha-2} + O(\varepsilon^4)$$

۳. در مثال بالا،  $a$  را یک پارامتر پریشیدگی کوچک بگیرید و نشان دهید که ریشه دیگری به مقدار زیر وجود دارد

$$x \simeq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(\alpha-1)} - \left(\frac{a}{\alpha-1}\right)$$

۴. ریشه‌های معادله

$$\sin(x^2 + \varepsilon \sin x) = 0 \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

را صحیح تا مرتبه اول در  $\varepsilon$  پیدا کنید.



۵. نشان دهید که جواب معادله جبری

$$x = a + \varepsilon f(x)$$

که صحیح تا مرتبهٔ سوم در پارامتر کوچک  $\varepsilon$  باشد، به صورت زیر است

$$x = a + \varepsilon f(a) + \varepsilon^2 f(a)f'(a) + \varepsilon^3 \left[ f(a)f'(a)^2 + \frac{1}{2} f(a)^2 f''(a) \right]$$

که در آن  $f(x)$  هر تابع به اندازهٔ کافی خوشرفتار می‌تواند باشد.

۶. برای معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$\frac{dx}{dt} = x + \varepsilon x^\alpha \quad (\alpha \neq 1, x(0) = A > 0)$$

یک جواب سری پریشیدگی، صحیح تا مرتبهٔ دوم در پارامتر کوچک  $\varepsilon$  پیدا کنید. سپس این سری را با جواب دقیق مقایسه، و در موارد  $0 < \alpha < 1$  و  $\alpha > 1$ ، همگرایی بسط پریشیدگی را بحث کنید.

۷. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{2}} + \varepsilon x^{\frac{1}{3}} \quad (x(0) = A > 0) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin x + \varepsilon x \quad (x(0) = A, 0 < A < \pi) \quad (\text{ب})$$

یک جواب سری پریشیدگی، صحیح تا مرتبهٔ اول در  $\varepsilon$  پیدا کنید.

۸. با استفاده از نظریهٔ پریشیدگی، تصحیحات مرتبهٔ اول به حرکت نوسانگر خطی با هامیلتونی

$$H_0(q, p) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2)$$

با پریشیدگی  $\varepsilon q^2$  را به دست آورید، یعنی  $E(I)$  و  $q(t)$  را تا مرتبهٔ اول در  $\varepsilon$  تعیین کنید. سپس نتایج را با جواب دقیق مقایسه کنید.

۹. با استفاده از نظریهٔ پریشیدگی، تصحیحات مرتبهٔ اول به حرکت چرخندهٔ آزاد با هامیلتونی

$$H_0(p) = p^2/2G$$



را که با پتانسیلهای زیر پریشیده شده است، به دست آورید.

$$V(\psi) = \alpha \sin^2 \psi \quad (\text{الف})$$

$$V(\psi) = \alpha \sin^4 \psi \quad (\text{ب})$$

۱۰. برای حرکت نوسانگر خطی با هامیلتونی

$$H(q, p) = p^2/2m + \frac{1}{4} m\omega^2 q^2$$

که به دو صورت زیر پریشیده می شود، تصحیحات مرتبه اول را به دست آورید

$$\varepsilon H_1 = \varepsilon q^5 \quad \text{پتانسیل درجه پنج} \quad (\text{الف})$$

$$\varepsilon H_1 = \varepsilon(q^4 + \alpha q p^2) \quad \text{پتانسیل وابسته به سرعت} \quad (\text{ب})$$

که در آن  $\alpha$  یک مقدار ثابت است.

۱۱. یک ذره به جرم  $m$  حول مینیموم پتانسیل

$$V = A(q^{-2n} - 2q^{-n})$$

که در آن  $A$  مقدار ثابت مثبت و  $n$  عدد صحیح است، نوسان می کند. نشان دهید که یک هامیلتونی تقریبی برای حرکت، به صورت

$$H = p^2/2m + An^2 x^2 - An^2(n+1)x^3, \quad (x = q - 1)$$

است و یک تقریب، صحیح تا مرتبه اول، به حرکت پیدا کنید. آیا یک بسط تا مرتبه دوم برای  $H$ ، می تواند سودمند باشد؟

۱۲. یک ذره به جرم  $m$ ، تحت تأثیر گرانش، روی سیم صاف صلبی به شکل  $z = \frac{1}{4} \alpha^2 x^2$  می لغزد، که در آن محور  $z$  در راستای قائم و رو به بالاست. هامیلتونی این دستگاه را پیدا کنید و نشان دهید که یک تقریب صحیح تا مرتبه  $(px)^2$ ، به این هامیلتونی عبارت است از

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mg\alpha^2 x^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2m} x^2 p^2$$

که در آن  $p$  اندازه حرکت است. سپس یک تقریب صحیح تا همین مرتبه، برای حرکت بیابید.

۱۳. تغییر مرتبه اول در بسامد و حرکت یک ذره با انرژی کل منفی در پتانسیل مورس

$$V(q) = A(e^{-2\alpha q} - 2e^{-\alpha q}) \quad (A > 0, \alpha > 0)$$

را، وقتی که پتانسیل کوچک

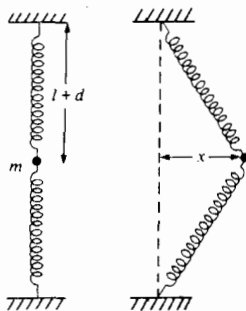
$$V_1(q) = -\varepsilon e^{\alpha q} \quad (0 < \varepsilon \ll A)$$

به آن افزوده می‌شود، پیدا کنید.

۱۴. ذره‌ای به جرم  $m$ ، به دو فنر، به طوری که در شکل نشان داده‌ایم، متصل شده است. هر کدام از فنرها طول طبیعی  $l$  را دارد و هرگاه که طول آن  $s(>l)$  باشد، نیروی بازگردانندهٔ  $k(s-l)$  را که در آن  $k$  مقدار ثابت مثبت است، روی ذره وارد می‌کند. در وضعیت تعادل، هر فنر باید به اندازهٔ  $d$  کشیده شود، تا به یکدیگر وصل شوند. هرگاه ذره مطابق شکل به اندازه  $x$  جابه‌جا شود، نشان دهید، چنانچه اثر گرانش نادیده گرفته شود، انرژی پتانسیل ذره عبارت است از

$$V(x) = k \left[ \frac{dx^2}{l+d} + \frac{lx^2}{4(l+d)^2} \right] + O(x^6)$$

در مورد  $d=0$ ، وابستگی بسامد نوسانها به دامنه را تعیین کنید. اگر  $d \neq 0$  باشد، یک تقریب به بسامد و حرکت  $x(t)$ ، با دقتی متوافق با آن پتانسیل ارائه دهید.



۱۵. نشان دهید که جمله‌های مرتبهٔ دوم در بسط متغیرهای قبلی زاویه-کنش برحسب متغیرهای تازه،  $(J^{(1)}, \phi^{(1)})$  معادلهٔ ۸-۲۴ و هامیلتونی  $K_2(I)$  معادلهٔ ۸-۲۸، در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\frac{\partial J^{(2)}}{\partial I} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \theta} = \frac{-\partial(\phi^{(1)}, J^{(1)})}{\partial(\theta, I)}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left[ J^{(2)} + J^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} \right] = 0$$

$$K_2 = J^{(2)} \frac{\partial H_0}{\partial I} + \frac{1}{2} [J^{(1)}]^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} + \phi^{(1)} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} + J^{(1)} \frac{\partial H_1}{\partial I}$$



سپس از روی این نشان دهید که تصحیح مرتبه دوم در هامیلتونی به این صورت است

$$K_2(I) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial I} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{K_1^2 - H_1^2}{\omega_0} \quad \left( \omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial I} \right)$$

۱۶. نتایج حاصل از مسئله پیش را مورد استفاده قرار دهید و نشان دهید که انرژی و بسامد دوران آونگ قائم دوار در مثال ۸-۲ عبارت‌اند از

$$K(I) = \frac{1}{4} I^2 + \alpha^2 / 4 I^2 + O(\alpha^6)$$

$$\Omega(I) = I(1 - \alpha^2 / 2 I^2) + O(\alpha^6)$$

۱۷. نشان دهید که هامیلتونی

$$H = \frac{1}{4} p^2 + p \sin q$$

دارای یک نقطه ثابت بیضوی در  $q = \frac{1}{4}\pi$  و  $p = -1$  است که در همسایگی آنها داریم

$$H = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} (P^2 + Q^2) - \frac{1}{4} P Q^2 - \frac{1}{24} Q^4 + \text{جمله‌های بالاتر}$$

که در آن  $q = \frac{1}{4}\pi + Q$  و  $p = P - 1$  است. سپس از روی این و با استفاده از نتایج حاصل از مسئله ۱۵، نشان دهید که هامیلتونی و بسامد را می‌توان برحسب کنش به صورت زیر بیان کرد

$$K = I - \frac{1}{4} I^2$$

$$\Omega = 1 - \frac{1}{4} I$$

۱۸. با استفاده از نتایج حاصل از مسئله ۱۵، نشان دهید که در انرژی‌های بالا، حرکت دورانی هامیلتونی

$$H = \frac{1}{4} p^2 + p \sin q$$

با معادله تقریبی



$$q = \theta - \frac{\sin 2\theta}{4I^2} + \dots$$

$$p = I - \sin \theta - \frac{\cos 2\theta}{4I} + \dots$$

داده می‌شود، که در آن تا این مرتبه، متغیرهای زاویه‌کنش  $(\theta, I)$  در معادلات هامیلتون برای هامیلتونی زیر صدق می‌کنند

$$K = \frac{1}{2} I^2$$

۱۹. فرض کنید که یک ذرهٔ آزاد پیرشیده به جرم  $m$  دارای هامیلتونی

$$H = p^2/2m + \varepsilon e^{-\lambda q^2}$$

است و انرژی  $E$ ی ذره در  $\varepsilon \gg E$  صدق می‌کند. حرکت ناپیرشیده را به صورت

$$q = Q + (t - t_0)P/m \quad p = P$$

بگیرید و این معادلات را به عنوان یک تبدیل بندادی وابسته به زمان از نمایش  $(q, p)$  به نمایش  $(Q, P)$  تعبیر کنید و نشان دهید که هامیلتونی تازه عبارت است از

$$K(Q, P, t - t_0) = \varepsilon \exp \left\{ -\lambda [Q + (t - t_0)P/m]^2 \right\}$$

نشان دهید که در این طرز نمایش، معادلات حرکت دارای جواب تقریبی

$$Q = Q_0 + \varepsilon \partial A / \partial P_0 + O(\varepsilon^2), \quad P = P_0 - \varepsilon \partial A / \partial Q_0 + O(\varepsilon^2)$$

است که در آن

$$A(Q_0, P_0, t - t_0) = \int_{t_0}^t dt' K(Q_0, P_0, t' - t_0)$$

انتگرال پیرشیدگی روی حرکت ناپیرشیده است. سپس نشان دهید که شرایط اولیهٔ  $Q_0 < Q(t_0) = q(t_0)$ ، به طوری که  $1 \gg \lambda Q_0^2$  باشد و حرکت در جهت مثبت

$P(t_0) = P_0 > 0$ ، مدتی طولانی پس از گذشتن از پریشیدگی، عبارت است از

$$q(t) = Q_0 - \frac{m}{P_0^2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \frac{(t - t_0)P_0}{m}, \quad p(t) = P_0$$

این انتگرال را لازم خواهید داشت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

۲۰. یک دستگاه با هامیلتونی

$$H(q, p, t) = H_0(q, p) + \varepsilon H_1(q, p, t)$$

که یک هامیلتونی پایستار  $H_0$ ، پریشیده با یک پریشیدگی وابسته به زمان  $\varepsilon H_1$  را نمایش می‌دهد، در نظر بگیرید. فرض کنید که حرکت دستگاه ناپریشیده معلوم و به صورت

$$q = f(Q, P, t - t_0), \quad p = g(Q, P, t - t_0)$$

است که در آن  $(Q, P)$ ، حالت دستگاه در  $t = t_0$  را نشان می‌دهد. این معادلات را به صورت یک تبدیل بندادی وابسته به زمان توجیه کنید و نشان دهید که در نمایش  $(Q, P)$ ، هامیلتونی به صورت زیر است

$$K(Q, P, t) = \varepsilon H_1(f(Q, P, t - t_0), g(Q, P, t - t_0), t)$$

برای حل معادلات حرکت در نمایش  $(Q, P)$ ، از نظریه پریشیدگی استفاده کنید و سپس نشان دهید که حرکت تقریبی در نمایش  $(q, p)$  عبارت است از

$$q = f(Q_0, P_0, t - t_0) + \varepsilon \left( \frac{\partial f}{\partial Q_0} \frac{\partial A}{\partial P_0} - \frac{\partial f}{\partial P_0} \frac{\partial A}{\partial Q_0} \right)$$

$$p = g(Q_0, P_0, t - t_0) + \varepsilon \left( \frac{\partial g}{\partial Q_0} \frac{\partial A}{\partial P_0} - \frac{\partial g}{\partial P_0} \frac{\partial A}{\partial Q_0} \right)$$



که در آنها

$$A(Q_0, P_0, t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' H_1(f(Q_0, P_0, t' - t_0), g(Q_0, P_0, t' - t_0), t')$$

و  $p(t_0) = P_0$  و  $q(t_0) = Q_0$  است.

۲۱. (الف) دستگاهی دارای هامیلتونی

$$H(q, p, t) = H_0(q, p) + \varepsilon H_1(q, p, t)$$

است که یک هامیلتونی پایستار  $H_0$ ، پریشیده با پریشیدگی وابسته به زمان  $\varepsilon H_1$  را نمایش می‌دهد. اگر به‌ازای  $|t| \rightarrow \infty$  مقدار  $H_1$  سریعاً به‌سوی صفر میل کند، نشان دهید که تغییر انرژی در دستگاه ناپریشیده عبارت است از

$$\Delta E = \varepsilon \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial A}{\partial t_0}(t, t_0) + O(\varepsilon^2)$$

که در آن  $A$  در مسئله ۸-۲۰ تعریف شده است.

(ب) با استفاده از نتایج بخش (الف)، نشان دهید که تغییر مرتبه اول در انرژی نوسانگر خطی

$$H_0(q, p) = p^2/2m + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

با انرژی اولیه  $E$ ، در صورت پریشیدن با پتانسیل

$$\varepsilon V(q) = \varepsilon U q e^{-\lambda|t|} \quad (\lambda > 0)$$

به‌صورت

$$\Delta E = -\frac{2\lambda \varepsilon U}{\lambda^2 + \omega^2} \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos \delta$$

است که در آن،  $\delta$  فاز اولیهٔ نوسانگر است. این انتگرال را لازم خواهید داشت:

$$\int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \cos \omega t = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$



۲۲. این مثال خطر به کار بردن مستقیم نظریه پریشیدگی در معادلات نیوتون را تشریح می‌کند. نشان دهید که معادله حرکت نیوتون متناظر با هامیلتونی معادله ۵۵-۸ به صورت زیر است

$$\ddot{\psi} + \alpha^2 \psi = \frac{1}{\epsilon} \epsilon \alpha^2 \psi^2$$

جواب این معادله را به صورت  $\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + O(\epsilon^2)$  بنویسید و نشان دهید که

$$\ddot{\psi}_0 + \alpha^2 \psi_0 = 0$$

$$\ddot{\psi}_1 + \alpha^2 \psi_1 = \frac{1}{\epsilon} \alpha^2 \psi_0^2$$

است. سپس نشان دهید که یک جواب تقریبی دارای شرایط اولیه  $\psi(0) = A$ ،  $\dot{\psi}(0) = 0$  عبارت است از

$$\psi = A \left[ \cos \alpha t + \frac{A^2 \epsilon}{192} (12 t \alpha \sin \alpha t - 3 \cos 3 \alpha t + \cos \alpha t) \right]$$

این جواب به ازای  $t \rightarrow \infty$  نامحدود است، درحالی که جوابی که در معادله ۵۵-۸ این مبحث به دست آوردیم، محدود است. با مقایسه این دو جواب، نشان دهید که این اختلاف از نتایج بسامد غلطی است که جواب دوم بالا دارد.

## شرایط تند-نوسان و بی دررو

### ۹-۱ مقدمه

چنانکه دیدیم، شرح دستگاههای هامیلتونی با یک درجه آزادی به این سبب با سادگی بخصوصی انجام می پذیرد، که منحنیهای فازشان پربندهای هامیلتونی هستند. در صورتی که هامیلتونی به طور صریح وابسته به زمان باشد، این سادگی از دست می رود: یک تحلیل عام برای حرکت وجود ندارد. با وجود این حرکت دستگاههای پایستار وابسته، می توانند غالب اوقات برای حصول جوابهای تقریبی مورد استفاده قرار گیرند. دو وضعیت حدی وجود دارند که در آنها چنین تقریبهایی سودمند واقع می شوند.

۱. حرکت تقریباً تناوبی است با تناوب  $T$  و هامیلتونی در طی زمان  $T$  تغییر اندکی می کند. این تغییرات کند در هامیلتونی را بی دررو می نامند.

۲. دستگاه تحت تأثیر یک نیروی تناوبی خارجی است که تناوب آن در مقایسه با مدت زمانی که در طی آن حرکت ناپریشیده تغییر بارزی کند، کوچک است.

نظریه بی دررو کاربردهای فراوان دارد. برای مثال در گذشته، نظریه آونگ ساده که طول آن به آهستگی تغییر می کند، در اندازه گیری زمان مهم بود و امروزه نظریه مشابهی در مورد نوسانگرهای بلور کوارتز که در ساعت های جدید کار گذاشته می شوند، ارائه شده است. نظریه بی دررو، حرکت سیارات را توصیف می کند، چون این حرکت متأثر از جرم متغیر خورشید است که با ضریبی

در حدود سالیانه  $10^{-13}$  در تغییر است. در سطح میکروسکوپی هم، نظریه بی دررو کاربرد خود را دارد: در فشار پایین، مولکولهای یک گاز در یک ظرف، با تناوبی در حدود  $10^{-5}$  تا  $10^{-4}$  ثانیه، پس و پیش می روند، درحالی که تغییرات در خود ظرف، معمولاً در مدت زمانهایی حدود یک ثانیه یا بیشتر پیش می آیند. ذرات باردار در میدانهای مغناطیسی هم مشمول تأملات مشابهی هستند که در اختر فیزیک، زمین فیزیک، شتابدهنده های ذرات و طراحی راکتورهای گرمایسته ای کنترل شده، کاربرد می یابند.

در نقطه مقابل این وضعیتهای افراطی، نیروهای تند-تغییر قرار دارند که مثلاً در برهم کنش لیزرها با اتمها و مولکولها، و در دستگاههایی که دارای اجزای تند-دوران هستند، پیش می آیند. در این فصل، نخست اثرهای تغییر بی دررو را مطالعه می کنیم. نتیجه ای که حاصل می شود، بسیار ساده است: متغیر کنش، در طی یک تغییر بی دررو تقریباً مقداری ثابت می ماند. این نتیجه گیری، در بخش ۹-۴ که آن را اثبات می کنیم با مراقبت بیشتر و سنجیده تر بیان می شود. با این حال، این اثبات مشکل است و می تواند سادگی نتیجه نهایی را تحت الشعاع قرار بدهد. به همین سبب، در بخشهای ۹-۲ و ۹-۳ با ارائه دو مثال ساده، به طور صریح نشان می دهیم که متغیر کنش یک مقدار ثابت تقریبی در حرکت است: در مطالعه اول، می توان از خواندن اثبات در بخش ۹-۴ چشمپوشی کرد، اما مثال ۹-۱ در آخر آن بخش را باید دید. بالاخره هم در بخش ۹-۵، وضعیت حدی مخالف، یعنی دستگاهی را که بر آن یک نیروی تند-نوسان وارد می شود، بررسی می کنیم.

## ۹-۲ ورجه کشسان توپ میان دو صفحه با حرکت کند

حرکت یک توپ کاملاً کشسان به جرم واحد را که بین دو صفحه در حال حرکت با تندی ثابت  $V$ ، ورجه می کند بررسی می کنیم. برای سادگی، فرض می کنیم که یکی از صفحات ثابت است و حرکت صفحه دیگر از برخوردهای مکرر توپ متأثر نمی شود. ابتدا مورد  $V = 0$  را در نظر می گیریم در مثال ۷-۳، اگر  $v$  تندی توپ و  $x$  فاصله بین دو صفحه باشد، کنش عبارت است از

$$I = vx/\pi \quad (1-9)$$

اکنون فرض کنیم  $v \ll V < 0$  باشد و یک تحلیل تقریبی در نظر می گیریم که در آن، جمله های مرتبه بزرگی  $V/v$  نادیده گرفته شوند، در فاصله زمانی  $\Delta t$  بین دو برخورد متوالی با صفحه متحرک، صفحات اندکی حرکت می کنند. در این صورت

$$\Delta t \simeq 2x/v \quad (2-9)$$



در این مدت، بنا به تعریف توپ یک بار با صفحه متحرک برخورد می‌کند و از آنجا که سرعت نسبی توپ و صفحه مقدار ثابتی است، تندی  $v'$  بعد از برخورد می‌شود

$$v' = v + 2V \quad (3-9)$$

که  $v$  تندی قبل از برخورد آن است. از این قرا، آهنگ میانگین تغییر تندی عبارت است از

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v' - v}{\Delta t} = \frac{2V}{x} \quad (4-9)$$

آهنگ تغییر کنش به تقریب  $dI/dt$  است، که داریم

$$\begin{aligned} \pi \frac{dI}{dt} &= (\dot{v}x + v\dot{x}) \\ &= (Vv - Vv) = 0 \end{aligned} \quad (5-9)$$

چون که  $\dot{x} = -V$  است. بدین ترتیب کنش به تقریب مقدار ثابت است. توجه داشته باشید که این تحلیل، بر این فرض مبتنی نیست که صفحات حرکت یکنواخت دارند بلکه فقط  $V \ll v$  است. ثابت بودن تقریبی یک متغیر دینامیکی تحت تغییرات کند یا بی‌درروی تابع هامیلتونی، به ناوردایی بی‌دررو معروف است.

اینک یک تحلیل دقیق را در نظر می‌گیریم. هرگاه  $v_n$  تندی توپ بلافاصله قبل از برخورد  $n$ ام با صفحه متحرک و  $v_{n+1}$  تندی آن بلافاصله بعد از این برخورد باشد، بنا به آنچه در بالا آوردیم

$$v_{n+1} = v_n + 2V \quad (6-9)$$

به‌طوری که

$$v_n = v_0 + 2nV \quad (7-9)$$

فاصله جدایی صفحات در لحظه برخورد  $n$ ام را با  $x_n$  نشان می‌دهیم و  $\Delta t_n$  مدت زمان بین برخورد  $(n+1)$ ام با برخورد  $n$ ام است. پس می‌توانیم بنویسیم

$$\left. \begin{aligned} \text{فاصله‌ای که صفحه‌ها طی می‌کنند} &= x_{n+1} - x_n = -V\Delta t_n \\ \text{فاصله‌ای که توپ طی می‌کند} &= x_{n+1} + x_n = v_{n+1}\Delta t_n \end{aligned} \right\} \quad (8-9)$$





جدول ۹-۱

$n$	$I_n \pi$	$E_n = \frac{1}{2} v_n^2$	$x_n$
۰	۱	۰٫۵۰	۱
۱	۱٫۰۰۱۷	۰٫۷۲	۰٫۸۴
۵۰	۱٫۰۰۵۰	۲٫۰۰	۰٫۵۰
۱۰۰	۱٫۰۰۶۶	۴٫۵۰	۰٫۳۴
۵۰۰	۱٫۰۰۹۰	۶۰٫۵	۰٫۰۹
۱۰۰۰	۱٫۰۰۹۴	۲۲۰٫۵	۰٫۰۵

کنش بین دو برخورد متوالی،  $I_n$  است که داریم

$$\pi I_n = v_n x_n \quad (۹-۹)$$

به طوری که، با استفاده از ۸-۹، به دست می آوریم

$$I_{n+1} = \left( 1 + \frac{2z_n^2}{1 + 3z_n} \right) I_n \quad \left( z_n = \frac{V}{v_0 + 2nV} \right) \quad (۱۰-۹)$$

از این رابطه بین  $I_n$  و  $I_{n+1}$ ، اگر  $I_0$  و  $z_0$  معلوم باشند، می توان برای محاسبه  $I_n$  استفاده کرد. در جدول ۹-۱ مقادیر  $I_n$  برای  $n$ های مختلف و به ازای  $1 = v_0 = 1/\pi$  و  $0 = V$  نشان داده می شوند؛ همچنین انرژی و دامنه حرکت  $x_n$  هم در این جدول درج شده است.

در این مثال می بینیم که متغیر کنش تقریباً مقدار ثابت است درحالی که انرژی و دامنه حرکت به طور قابل ملاحظه ای تغییر می یابند. مثلاً بعد از ۱۰۰ برخورد، انرژی، دامنه و کنش به ترتیب با ضرایب ۹ و ۳ و ۰٫۰۷ تغییر کرده اند. می توان از ثابت بودن تقریبی کنش استفاده کرد و انرژی و سایر کمیات دینامیکی نظیر بسامد را، چنانچه تخمینهای مستقیم مشکلترا باشند، تخمین زد.

اگر صفحات با سرعت ثابت از همدیگر جدا شوند، در هر برخورد، توپ انرژی از دست می دهد؛ بنابراین پس از یک تعداد متناهی برخورد، چنان به کندی حرکت خواهد کرد که نتواند به صفحه متحرک برسد و حرکت محدود به حرکت نامحدود مبدل خواهد شد. با این وصف، در مرحله ای که حرکت محدود است، یک تحلیل مشابه نشان می دهد که مقدار کنش تقریباً ثابت است، و حال آنکه هر دوی انرژی و دامنه به طور قابل ملاحظه ای تغییر می یابند. چنان که در مثال ۹-۹ هم چنین است.

در مدل ساده یک گاز، اتمهای بسیاری هستند که برهم‌کنش ندارند ولی بین دیوارهای ظرف‌شان و رجه‌های کشسان دارند. ناوردایی بی‌درروی کنش، قوانین گازها را نتیجه می‌دهد. برای مثال، در یک ظرف مکعبی به اضلاع  $L$  و حجم  $V=L^3$ ، می‌توانیم هر اتم را در حال حرکت در راستای عمود بر یکی از صفحات با تندی  $v$  فرض کنیم و تعداد آنها را برای هر یک از جهات مساوی بگیریم. در این صورت، ناوردایی کنش تحت تغییرات آهسته  $L$ ، نوشتن مقدار ثابت  $vL$  را مجاز می‌دارد، و نظر به این‌که دما،  $T$  متناسب با انرژی جنبشی است، خواهیم داشت. مقدار ثابت  $TV^{2/3}$ . این قانون گاز هنگامی اعتبار دارد که حجم گاز آهسته تغییر کند، یعنی وقتی که دیواره‌ها در مقایسه با تندی اتمها به‌کندی حرکت کنند؛ این شرط اغلب در انفجارها و امواج شوکی نقض می‌شود و در آن صورت قانون گازها هم بی‌اعتبار می‌شود، چنان‌که از نظریه ناوردایی بی‌دررو هم انتظارش می‌رفت.

## ۹-۳ نوسانگر خطی با بسامد کند-تغییر

هامیلتونی ذره‌ای را که تحت تأثیر یک نیروی جاذبه خطی با بزرگی کند-تغییر حرکت می‌کند، بررسی می‌کنیم برای سادگی زمان را به صورت  $\lambda = \varepsilon t$  که در آن  $\varepsilon$  یک مقدار کوچک ثابت است مقیاس‌بندی می‌کنیم.  $\varepsilon$  باید چنان انتخاب شود که ثابت نیرو،  $\omega(\lambda)$  فقط در زمان مقیاس‌بندی شده‌ای از مرتبه  $1 = \lambda$ ، متناظر با یک زمان واقعی از مرتبه  $\varepsilon^{-1}$ ، به‌طور بارز تغییر یابد. در آن صورت

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \frac{d\omega}{d\lambda} \quad (۱۱-۹)$$

که در آن  $|d\omega/d\lambda|$  از مرتبه بزرگی واحد یا کمتر است. در این صورت هامیلتونی به شکل زیر است

$$H = p^2/2m + \frac{1}{4} m\omega(\lambda)^2 q^2 \quad (۱۲-۹)$$

ابتدا مورد ساده‌ای را که  $\lambda$  مقدار ثابت است بررسی می‌کنیم. در این صورت  $\omega$  مقدار ثابت است و چنان‌که در مثال ۲-۴ نشان دادیم، حرکت از نوع هماهنگ ساده با تناوب  $2\pi/\omega$  است که برای سادگی آن را حرکت ناپریشیده می‌نامیم. برای این مورد در مثال ۵-۷ نشان دادیم که دستگاه دارای متغیرهای زاویه-کنش  $(\theta, I)$  است به‌طوری که

$$q = \left[ \frac{2I}{m\omega(\lambda)} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \theta \quad (۱۳-۹)$$

$$p = [2mI\omega(\lambda)]^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$



و تابع مولد آن به صورت زیر است

$$S_1(\theta, q; \lambda) = \frac{1}{2} m\omega(\lambda) q^2 \cot \theta \quad (14-9)$$

هر گاه  $\lambda$  به کندی تغییر کند،  $\omega(\lambda)$  هم به کندی تغییر می‌کند؛ تغییرات  $\omega$  اگر در یک دوره تناوب حرکت ناپریشیده نسبتاً کوچک باشد، تغییر بی‌دررو خوانده می‌شود، یعنی اگر

$$\left| \frac{d\omega}{dt} \right| \times \text{دوره تناوب} \ll \omega \quad (15-9)$$

باشد و یا

$$|\varepsilon \omega'(\lambda)| \ll \omega^2 \quad (16-9)$$

باشد، که در آن  $\omega'(\lambda) = d\omega/d\lambda$  است. توجه داشته باشید که این نامساوی، اگر  $\omega$  کوچک شود، باطل خواهد شد همان‌طور که نظریه متعاقب آن هم باطل می‌شود. به‌طور کلی متغیرهای زاویه‌کنش برای دستگاه‌های وابسته به زمان موجود نیستند. اما در این مورد پارامترهای کند-تغییر، متغیرهای مزدوج  $(\theta, I)$  بهترین روش نمایش برای شرح و تقریب حرکت به‌شمار می‌روند. تبدیل  $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$  که به وسیله  $S_1(\theta, q, \lambda)$  تولید می‌شود اکنون وابسته به زمان است، به‌طوری که نظریه بخش ۷-۶ می‌تواند به‌کار گرفته شود تا هامیلتونی در نمایش  $(\theta, I)$  به دست آید

$$\begin{aligned} K(\theta, I, \lambda) &= I\omega(\lambda) + \partial S_1 / \partial t \\ &= I\omega(\lambda) + \frac{\varepsilon I \omega'(\lambda)}{2\omega(\lambda)} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (17-9)$$

معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\dot{\theta} = \omega(\lambda) + \frac{\varepsilon \omega'(\lambda)}{2\omega(\lambda)} \sin 2\theta \quad (18-9)$$

$$\dot{I} = -\frac{\varepsilon \omega'(\lambda)}{\omega(\lambda)} \cos 2\theta \quad (\lambda = \varepsilon t) \quad (19-9)$$

این معادلات نمی‌توانند دقیقاً حل شوند، و البته ما هم یک جواب تقریبی برای آنها خواهیم داد، اما ابتدا به خود معادلات توجه می‌کنیم تا تصویری کیفی از حرکت به دست آوریم. نکته اصلی این است که  $\theta$  تند-تغییر است در حالی که  $I$  و  $\omega$  کند-تغییر هستند.



ابتدا  $\theta(t)$  را بررسی می‌کنیم: چون  $1 \ll |\varepsilon \omega' / \omega^2|$  است، داریم

$$\dot{\theta} \simeq \omega(\lambda) \quad (20-9)$$

به طوری که  $\theta$  به طور تقریباً خطی با زمان افزایش می‌یابد، و در فاصله زمانی تقریباً  $\pi/\omega$  به اندازه  $\pi$  افزایش می‌یابد. روی این حرکت، جمله کوچک دیگر معادله ۹-۱۸، نوسانات کوچکی با بسامدی تقریباً برابر با  $\pi/\omega$  و دامنه‌ای از مرتبه بزرگی  $\varepsilon$  اعمال می‌کند.

رفتار  $I(t)$  کاملاً متفاوت است. خصلت اصلی معادله ۹-۱۹ این است که جمله دست راست آن، تناوبی در  $\theta$  با قدر میانگین صفر است. از این رو وقتی  $\theta$  به اندازه  $\pi$  تغییر کند،  $I(t)$  تحت تغییراتی از مرتبه بزرگی  $\varepsilon^2$  قرار می‌گیرد، اگر چه طی این مدت زمان با دامنه‌ای از مرتبه  $\varepsilon$  نوسان می‌کند. توصیف این رفتار را با بیان این که آهنگ میانگین تغییرات  $I$  از مرتبه بزرگی  $\varepsilon^2$  است، انجام می‌دهیم.

به علت آهنگ میانگین بسیار کند تغییرات  $I(t)$  نمایش  $(\theta, I)$  بهترین روش بررسی حرکت است. علاوه بر این، معادلات حرکت در این نمایش به صورتی است که برای بسط پربیشدگی توصیف شده در فصل ۸ مناسب است. از طرف دیگر معادلات حرکت در نمایش  $(q, p)$

$$\frac{dq}{dt} = p/m, \quad \frac{dp}{dt} = -m\omega(\lambda)^2 q \quad (\lambda = \varepsilon t) \quad (21-9)$$

به صورتی نیست که برای بسط پربیشدگی مناسب باشد.

برای اعمال نظریه پربیشدگی،  $(\theta(t), I(t))$  را به صورت سری توانی در  $\varepsilon$  می‌نویسیم

$$\theta(t) = \theta^{(0)}(t) + \varepsilon \theta^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2) \quad (22-9)$$

$$I(t) = I^{(0)}(t) + \varepsilon I^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2) \quad (23-9)$$

با جایگذاری اینها در معادلات حرکت ۹-۱۸ و ۹-۱۹ و مساوی قرار دادن  $\varepsilon$  های هم‌توان، داریم

$$\dot{\theta}^{(0)} = \omega(\lambda), \quad \dot{I}^{(0)} = 0 \quad (24-9)$$

با جواب

$$\theta^{(0)} = \int_0^t dt \omega(\lambda) + \theta_0, \quad I^{(0)} = I_0 \quad (25-9)$$

که در آن  $(\theta_0, I_0)$  مقادیر اولیه متغیرهای زاویه-کنش است.



به همین قیاس، معادلات تصحیحات مرتبه اول به صورت زیر به دست می آیند

$$\dot{\theta}^{(1)} = \frac{\omega'}{2\omega} \sin 2\theta^{(0)}, \quad \theta^{(1)}(0) = 0 \quad (26-9)$$

$$\dot{I}^{(1)} = \frac{-\omega'}{\omega} I_0 \cos 2\theta^{(0)}, \quad I^{(1)}(0) = 0 \quad (27-9)$$

این معادلات را می توان مستقیماً انتگرال گیری کرد. مثلاً جمله دست راست معادله ۲۷-۹ را می توان به صورت مجموع دو جمله بیان کرد

$$\frac{\omega'}{\omega} \cos 2\theta^{(0)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega'}{2\omega^2} \sin 2\theta^{(0)} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega^2} \right)' \sin 2\theta^{(0)} \quad (28-9)$$

جمله دوم سمت راست را که از مرتبه  $\varepsilon$  است می توان نادیده گرفت. جمله اول می تواند مستقیماً انتگرال گیری شود، به طوری که معادله ۲۳-۹ به صورت زیر در می آید

$$I(t) = I_0 \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega^2} \sin 2\theta^{(0)} - \frac{\omega'_0}{\omega_0^2} \sin 2\theta_0 \right) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (29-9)$$

که در آن  $\omega_0 = \omega(0)$  است. به همین شیوه

$$\theta(t) = \theta^{(0)}(t) - \frac{\varepsilon}{4} \left( \frac{\omega'}{\omega^2} \cos 2\theta^{(0)} - \frac{\omega'_0}{\omega_0^2} \cos 2\theta_0 \right) + O(\varepsilon^2) \quad (30-9)$$

در هر دو مورد، تصحیح مرتبه اول به اتکای نامساوی ۱۶-۹ کوچک است. به ازای افزایش  $\theta^{(0)}$  به اندازه  $\pi$

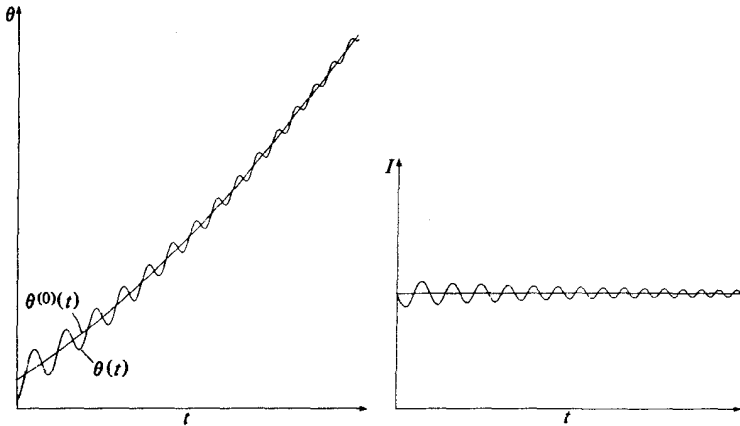
$$\frac{\omega'}{2\omega^2} \sin 2\theta^{(0)}$$

به مقداری از مرتبه بزرگی  $\varepsilon$  تغییر می یابد، بنابراین  $I(t)$  به مقداری از مرتبه  $\varepsilon^2$  تغییر می یابد. رفتار  $(\theta, I)$  را در شکل ۱-۹ ترسیم کرده ایم.

رفتار جواب در نمایش  $(q, p)$  از این هم پیچیده تر است. یک جواب تقریبی در این نمایش

را که خطاهایی از مرتبه بزرگی  $\varepsilon$  دارد، از نشان دادن  $(\theta^{(0)}, I^{(0)})$  به جای  $(\theta, I)$  در معادله ۱۳-۹





شکل ۹-۱ این نمودار، تغییرات  $\theta(t)$  و  $I(t)$  را در فاصله زمانی  $(\epsilon^{-1}, 0)$  نشان می‌دهد. سمت چپ  $\theta(t)$  است که از تغییرات یکنواخت  $\theta^{(0)}(t)$ ، معادله ۹-۲۵ که بر آن نوسانهای سریع  $\theta^{(1)}(t)$  معادله ۹-۲۶ اضافه شده است، تشکیل می‌شود. سمت راست  $I(t)$  را نشان می‌دهد که از مقدار ثابت  $I^{(0)}$ ، معادله ۹-۲۵ که بر آن نوسانهای سریع  $I^{(1)}$  معادله ۹-۲۷ اضافه شده است، تشکیل می‌شود.

به دست می‌آوریم:

$$q(t) = \left[ \frac{2I_0}{m\omega(\lambda)} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \left( \int_0^t dt \omega + \theta_0 \right) \quad (9-31)$$

$$p(t) = [2mI_0 \omega(\lambda)]^{\frac{1}{2}} \cos \left( \int_0^t dt \omega + \theta_0 \right)$$

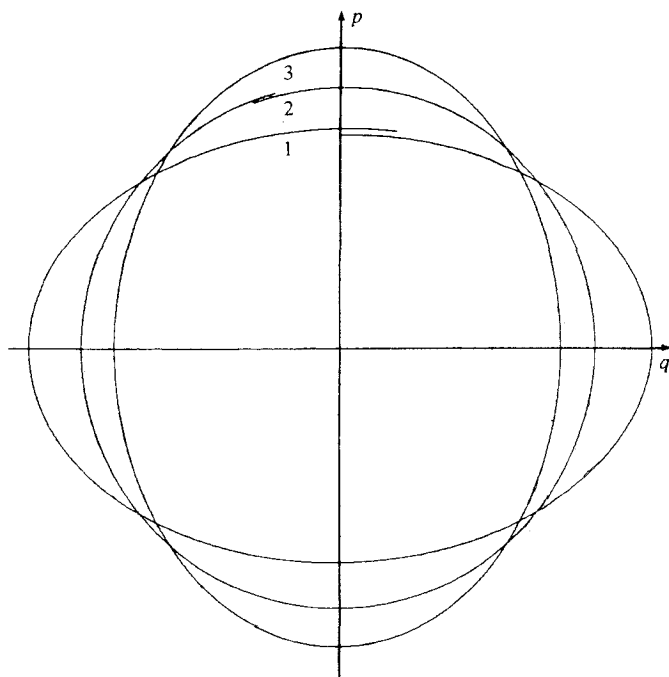
در طی فاصله زمانی  $(t, t + 2\pi/\omega)$ ، منحنی فاز حاصل در این نمایش، که با معادله ۹-۳۱ بیان می‌شود، یک بیضی تقریبی است. تفاوت منحنی فاز دقیق با این بیضی تقریبی، مقداری از مرتبه بزرگی  $\epsilon$  است.

در شکل ۹-۲ قطعاتی از منحنی فاز توصیف شده با ۹-۳۱ برای مورد خاص زیر را نشان داده‌ایم:

$$\omega = (1 + \epsilon t)\Omega \quad (\Omega = \text{const.}) \quad (9-32)$$

که برای فواصل زمانی  $(0, 2\pi/\Omega)$ ،  $\Delta t_1 = (0, 2\pi/\Omega)$ ،  $\Delta t_2 = (1/2\epsilon, 1/2\epsilon + 4\pi/3\Omega)$ ،  $\Delta t_3 = (1/\epsilon, 1/\epsilon + \pi/\Omega)$  رسم شده‌اند.

هر یک از این قطعات، یک بیضی تقریبی است و هر یک با دیگری فرق بارزی دارد. در مورد ناپریشیده  $\epsilon = 0$ ، منحنی فاز یک بیضی تقریبی به شکل منحنی ۱ در شکل ۹-۲ است.



شکل ۹-۲. قطعاتی از منحنی فاز در نمایش  $(q, p)$  طی فواصل زمانی مختلف هنگامی که  $\omega(t)$  از معادله ۹-۳۲ معلوم باشد. منحنی (۱) طی فاصله زمان  $(0, 2\pi/\Omega)$ ، منحنی (۲) طی فاصله زمان  $(1/2\varepsilon, 1/2\varepsilon + 4\pi/3\Omega)$  و منحنی (۳) طی  $(1/\varepsilon, 1/\varepsilon + \pi/\Omega)$  رسم شده‌اند. توجه کنید که هر قطعه منحنی فاز، که تقریباً بیضی است، کاملاً بسته نیست.

بنابراین، به ازای  $\varepsilon \neq 0$ ، منحنی فاز در نمایش  $(q, p)$  آشکارا با منحنی ناپریشیده در فاصله زمانی  $(0, \varepsilon^{-1})$  تفاوت دارد. توجه داشته باشید که مساحت منحنیها تقریباً یکی می‌ماند. چون که  $I(t)$  تقریباً مقدار ثابت و مساحت برابر  $2\pi I(t)$  است.

معادله ۹-۲۹ نشان می‌دهد که جواب تقریبی برای  $I(t)$

$$|I(t) - I(0)| < K\varepsilon \quad (9-33)$$

به ازای یک مقدار ثابت  $K$  است، اما تعیین نمی‌کند که این نامساوی تا کی اعتبار دارد. این را می‌توان با نوشتن معادله حرکت برای  $I(t)$  ۹-۱۹ به صورت زیر معلوم کرد

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{d}{dt} \left[ \frac{I\omega'}{2\omega^2} \sin 2\theta \right] + \varepsilon^2 M(t) \quad (9-34)$$

که در آن

$$M(t) = M(\theta, I, \lambda) = \frac{1}{2} I \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)' \sin 2\theta \quad (35-9)$$

در انتگرال‌گیری از ۳۴-۹ نتیجه می‌شود که

$$I(t) - I_0 = -\varepsilon \left( \frac{I\omega'}{2\omega^2} \sin 2\theta - \frac{I_0\omega'_0}{2\omega_0^2} \sin 2\theta_0 \right) + \varepsilon^2 \int_0^t dt M(t) \quad (36-9)$$

اما  $M(t)$  یک تابع محدود از زمان است

$$M(t) \leq M_1 = \max \left[ \frac{I}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)' \right] \quad (37-9)$$

و همین‌طور برای مقادیر ثابت  $M_1$  و  $M_2$  داریم

$$\left| \frac{I(t)\omega'}{2\omega^2} \sin 2\theta \right| \leq M_2 = \max \left( \frac{I\omega'}{2\omega^2} \right) \quad (38-9)$$

بنابراین تفاوت بین  $I(t)$  و مقدار اولیه آن با رابطه زیر محدود می‌شود

$$|I(t) - I_0| \leq 2\varepsilon M_2 + \varepsilon^2 t M_1 \quad (39-9)$$

که بنابر آن

$$|I(t) - I_0| < K\varepsilon \quad (0 < t < \varepsilon^{-1}) \quad (40-9)$$

یعنی  $I(t)$  برای همه زمانها در فاصله زمانی  $(0, \varepsilon^{-1})$ ، در نزدیکی مقدار اولیه‌اش می‌ماند.

## ۹-۴ نظریه بی درروی عام

چنان‌که نشان دادیم، برای برخی دستگاهها متغیرکنش در صورتی‌که هامیلتونی به‌طور بی دررو تغییر کند، تقریباً ثابت است. اکنون نشان می‌دهیم که این مطلب، تحت شرایط مشخصی مصداق کلی دارد.



هامیلتونی زیر را در نظر می گیریم

$$H = H(q, p, \lambda) \quad (۴۱-۹)$$

که در آن،  $\lambda$  یک پارامتر است. اگر  $\lambda$  ثابت باشد، حرکت را محدود می گیریم، طوری که برای هر  $\lambda$ ، متغیرهای زاویه-کنش مختلفی وجود داشته باشد. در این صورت تغییرات بی درروی  $H$  را می توان با قرار دادن

$$\lambda(t) = \varepsilon t \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (۴۲-۹)$$

بیان کرد. در این تساوی،  $\varepsilon$  چنان انتخاب می شود که هامیلتونی فقط در یک زمان مقیاس بندی شده از مرتبه بزرگی  $\lambda = 1$ ، متناظر با یک زمان واقعی از مرتبه  $\varepsilon^{-1}$ ، تغییر قابل توجهی داشته باشد، در آن صورت

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (۴۳-۹)$$

که در آن  $|\partial H / \partial \lambda|$  از مرتبه بزرگی یک یا کمتر است. تابع  $F(q, p, \lambda)$  را هنگامی، نوردای بی دررو دستگاه می نامیم که برای هر  $\varepsilon$  که در  $0 < \varepsilon \ll 1$  صدق کند،

$$F(t) = F(q(t), p(t), \lambda(t)) \quad (۴۴-۹)$$

در مدت زمان  $0 < t < \varepsilon^{-1}$  اندکی تغییر کند. به عبارت دقیقتر، اگر به ازای هر  $\eta > 0$ ، یک  $\varepsilon_0$  چنان پیدا کنیم که به ازای هر  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ،  $\lambda(t)$  از معادله ۴۲-۹ به دست آید و

$$|F(t) - F(0)| < \eta \quad (0 < t < \varepsilon^{-1}) \quad (۴۵-۹)$$

باشد، آنگاه  $F$  یک نوردای بی دررو خوانده می شود. توجه کنید که هر نوردای بی دررو به ازای فاصله زمانی معلوم و محدود، تقریباً ثابت است. نوردای بی دررو در بعضی موارد، برای فاصله زمانی طولانیتر و حتی برای همیشه، تقریباً ثابت است:

### نوردایی بی درروی متغیر کنش

خواننده می تواند از تحلیل عامی که اکنون ارائه می کنیم، در دور اول مطالعه کتاب، بگذرد و به جای آن به مثال ۱-۹ توجه کند.



فرض می‌کنیم، به ازای مقدار ثابت  $\lambda$ ، هامیلتونی ۹-۴۱ دارای متغیرهای زاویه-کنش  $(\theta, I)$  با تبدیل بندادی  $(\theta, I) \rightarrow (q, p)$  است با تابع مولد  $S_1(\theta, q; \lambda)$  که تابع پارامتر  $\lambda$  است. اگر  $\lambda$  با زمان تغییر کند، تابع مولد هم وابسته به زمان می‌شود: تبدیل  $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$  که توسط  $S_1$  تولید می‌شود هنوز بندادی است اما متغیرهای  $(\theta, I)$  دیگر متغیرهای زاویه-کنش برای دستگاه نیستند. هامیلتونی تازه از نظریه تبدیلهای وابسته به زمان بخش ۶-۷، معادله ۶-۷۰، با استفاده از معادله ۹-۴۲ به دست می‌آید:

$$K(\theta, I, \lambda) = H(I, \lambda) + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \quad (۹-۴۶)$$

که در آن

$$H(I, \lambda) = H(q(\theta, I, \lambda), p(\theta, I, \lambda), \lambda) \quad (۹-۴۷)$$

بنا به تعریف تابعی است فقط از  $I$  و  $\lambda$ .  
در این صورت معادلات حرکت هامیلتون عبارت‌اند از

$$\dot{\theta} = \omega(I, \lambda) + \varepsilon R_1(\theta, I, \lambda) \quad (۹-۴۸)$$

$$\dot{I} = -\varepsilon R_2(\theta, I, \lambda) \quad (۹-۴۹)$$

که در آن

$$\omega(I, \lambda) = \frac{\partial H}{\partial I}(I, \lambda) \quad (۹-۵۰)$$

و

$$R_1 = \frac{\partial^2 S_1}{\partial \lambda \partial I}, \quad R_2 = \frac{\partial^2 S_1}{\partial \lambda \partial \theta} \quad (۹-۵۱)$$

شکل این معادلات حرکت، مشابه معادلات حاصل برای نوسانگر خطی معادلات ۹-۱۸ و ۹-۱۹ است که تغییرات بی‌درو دارد، که در آنها

$$R_1 = \frac{\omega' \sin 2\theta}{2\omega}, \quad R_2 = \frac{I\omega'}{\omega} \cos 2\theta \quad (۹-۵۲)$$



در آن مورد، سادگی حرکت در نمایش  $(\theta, I)$  ناشی از این است که هر دوی  $R_1$  و  $R_2$  توابع تناوبی از  $\theta$  هستند، چون میانگین  $R_2$  روی  $\theta$  صفر است و همچنین داریم

$$\omega(I, \lambda) \gg \varepsilon \max |R_1| \quad (53-9)$$

اگر  $R_1$  و  $R_2$  همیشه این خواص را داشته باشند، می توان تحلیل به کار رفته برای نوسانگر خطی، بالاخص معادله ۹-۳۴، را اصلاح جزئی کرد و نشان داد که متغیرکنش یک ناوردای بی دررو است. نخست نشان می دهیم که  $R_1$  و  $R_2$  دارای خواص تناوبی لازم هستند. در بخش ۷-۴ نشان دادیم که  $S_1(\theta, q, \lambda)$  در  $\theta$  تناوبی است و بنابراین  $R_1$  و  $R_2$  هم چنین هستند. میانگین  $R_2$  عبارت است از

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta R_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial^2 S_1}{\partial \lambda \partial \theta} \quad (54-9)$$

که در این انتگرال  $I$  و  $\lambda$  ثابت نگه داشته می شوند. جمله دست راست را می توان نوشت

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial S_1}{\partial \theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ S_1 \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0 \quad (55-9)$$

چون که  $S_1$  در  $\theta$  تناوبی است. از اینجا میانگین  $R_2$  صفر می شود.

برای تثبیت ناوردایی بی درروی  $I$ ، بهتر است جمله دست راست معادله ۹-۴۹ را به صورت یک مجموع از مشتق تابعی نسبت به زمان و کمیتی از مرتبه بزرگی  $\varepsilon^2$ ، نوشت، نظیر مثال نوسانگر خطی معادله ۹-۳۴. برای این کار، تعریف

$$R_2(\theta, I, \lambda) = \int_0^\theta d\theta' R_2(\theta', I, \lambda) \quad (56-9)$$

به طوری که  $R_2$  هم تناوبی باشد سودمند است چون که مقدار میانگین  $R_2$  صفر است. در این صورت

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{R_2}{\omega} \right) = \frac{1}{\omega} \frac{\partial R_2}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{R_2}{\omega} \right) \dot{I} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{R_2}{\omega} \right) \dot{\lambda} \quad (57-9)$$

می شود که با باز آرایشی آن داریم

$$R_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{R_2}{\omega} \right) - \varepsilon M(t) \quad (58-9)$$

که در آن

$$M(t) = \frac{R_1 R_2}{\omega} - R_2 \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{R_2}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{R_2}{\omega} \right) \quad (۵۹-۹)$$

با جایگذاری این رابطه برای  $R_2$  در معادله حرکت  $I$ ، معادله ۹-۴۹، داریم

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{R_2}{\omega} \right) + \varepsilon^2 M(t) \quad (۶۰-۹)$$

چون  $R_1, R_2$  و  $R_2$  تناوبی هستند و  $\omega \neq 0$  است،  $M(t)$  محدود می‌شود

$$|M(t)| \leq M_1 \quad (۶۱-۹)$$

همان‌طور هم  $R_2/\omega$  محدود است.

$$\left| \frac{R_2}{\omega} \right| \leq M_2 \quad (۶۲-۹)$$

و  $M_1$  و  $M_2$  مقادیری ثابت هستند. بدین ترتیب تفاضل  $I(t)$  و مقدار اولیه آن با

$$|I(t) - I_0| \leq 2\varepsilon M_2 + \varepsilon^2 t M_1 \quad (۶۳-۹)$$

محدود می‌شود، به‌طوری که به‌ازای یک مقدار ثابت  $K$ 

$$|I(t) - I_0| \ll K\varepsilon \quad (0 < t < \varepsilon^{-1}) \quad (۶۴-۹)$$

است، بدین معنا که  $I(t)$  برای همهٔ زمانها در فاصلهٔ  $(0, \varepsilon^{-1})$  در نزدیکی مقدار اولیه‌اش می‌ماند. این نتیجهٔ بسیار ساده و در عین حال بسیار کارا و مفید است و اغلب کسب اطلاعات در مورد حرکت یک دستگاه وابسته به زمان را از روی حرکت بسیار ساده‌تر یک دستگاه مستقل از زمان مربوط با آن ممکن می‌سازد. این موضوع در مثال بعدی نشان داده شده است.

## مثال ۹-۱

یک ذره به جرم  $m$  در پتانسیل

$$V(q) = U \tan^2 \alpha q$$



حرکت می‌کند. هرگاه  $\alpha$  به کندی افزایش یابد، تغییرات انرژی، دامنه و بسامد چگونه خواهند بود؟

در مسائل مربوط به نوردایی بی دررو، همیشه نخست مسئله مستقل از زمان مرتبط با آن را بررسی می‌کنیم. این را در مثال ۲-۷ دیدیم و از معادله ۱۸-۷ می‌بینیم که، انرژی و کنش به صورت زیر به هم مرتبط‌اند

$$E = \alpha I [\alpha I + 2(\gamma m U)^{\frac{1}{2}}] / \gamma m$$

و همچنین از معادله ۱۹-۷ ملاحظه می‌کنیم که بسامد و کنش هم به صورت زیر به هم مرتبط‌اند

$$\omega = [\alpha I + (\gamma m U)^{\frac{1}{2}}] / \gamma m$$

طی یک تغییر بی درروی هامیلتونی، کنش ثابت می‌ماند، مقدار هامیلتونی ثابت نیست، پس انرژی هم تغییر می‌کند، با این وصف رابطه بالا بین انرژی،  $\alpha$  و  $I$  تقریباً صادق می‌ماند، به طوری که انرژی در زمان  $t$  می‌شود

$$E(t) \simeq \alpha(t) I [\alpha(t) I + 2(\gamma m U)^{\frac{1}{2}}] / \gamma m$$

همین طور، از معادله ۴۸-۹ می‌بینیم که بسامد حرکت به صورت ساده

$$\omega(t) = \alpha(t) [\alpha(t) I + (\gamma m U)^{\frac{1}{2}}] / m$$

در می‌آید. در این مثال، انرژی و بسامد حرکت، هر دو با  $\alpha(t)$  افزایش می‌یابند.

نقطه برگشت برای مقدار ثابت  $\alpha$  در مثال ۲-۷ داده شده است. برای یک  $\alpha$  ی‌کننده تغییر، داریم

$$q_1(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \tan^{-1} \left[ \left( \frac{E(t)}{U} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

برای  $\alpha$  ی کوچک،  $q_1(t)$  مقداری تقریباً ثابت است، اما برای  $\alpha$  ی بزرگ، دامنه با  $\alpha(t)$  نسبت عکس دارد. هرگاه  $\alpha(t)$  بزرگ و کند-تغییر باشد حرکت نزدیک می‌شود به وجه کشسان توپ بین



دو صفحه کند-حرکت، که در بخش ۹-۲ مطرح شد.

## ۹-۵ حرکت در یک میدان نوسانی سریع: پریشیدگیهای تند

اکنون اثر افزودن یک میدان تند-تغییر به هامیلتونی  $H_0(q, p)$  را بررسی می‌کنیم. برای این که مورد مشخصی داشته باشیم، فرض می‌کنیم که تغییرات سینوسی است، به طوری که

$$H(q, p) = H_0(q, p) + V(q) \sin \omega t \quad (۹-۶۵)$$

و تناوب  $2\pi/\omega$  در مقایسه با مدت زمانی که دستگاه ناپریشیده در طی آن تغییر بارزی می‌کند، کوچک است.

برای این که ویژگیهای کیفی حرکت را دریابیم، ذره آزادی را در نظر می‌گیریم که یک میدان یکنواخت نوسانی تند آن را پریشیده است: هامیلتونی عبارت است از

$$H(q, p) = p^2/2m + qF \sin \omega t \quad (۹-۶۶)$$

که  $F$  در آن ثابت است، و معادله حرکت عبارت است از

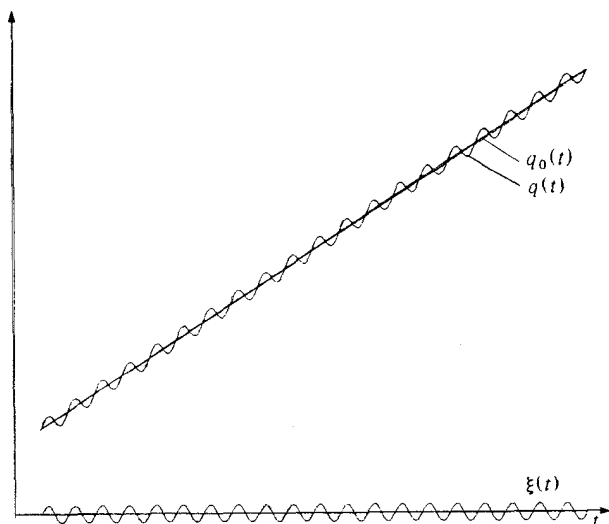
$$m\ddot{q} = F \sin \omega t \quad (۹-۶۷)$$

از این معادله می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت و به دست آورد

$$q(t) = q_0(t) + \xi(t) \quad (۹-۶۸ \text{ الف})$$

$$\xi(t) = -\frac{F \sin \omega t}{m\omega^2} \quad (۹-۶۸ \text{ ب})$$

که در آن  $q_0(t)$  حرکت ناپریشیده است. در این صورت حرکت تشکیل یافته است از حرکت ناپریشیده که بر آن نوسانات تند و کوچک  $\xi(t)$  با تناوب  $2\pi/\omega$ ، و میانگین صفر، اضافه شده‌اند.



(۶۹-۹)

حرکت میانگین، یعنی حرکتی که روی یک دوره تناوب جمله وادارنده متوسط‌گیری شده است،  $q_0(t)$  است. توجه داشته باشید که چون  $\omega$  بزرگ است، حرکت‌های پریشیده و ناپریشیده به هم نزدیک‌اند، حتی هنگامی هم که مقدار نیروی نوسانی  $F$  بزرگ باشد. سبب این است که نیرو جهتش را چنان به تندی تغییر می‌دهد که دستگاه برای پاسخ محسوس، زمان کافی در اختیار ندارد. بر عکس بخش پیش، در اینجا نوسانات تند در خارج تولید می‌شوند. اندازه حرکت به این صورت است

$$p(t) = m\dot{q} = p_0 + \eta \quad (الف \ ۷۰-۹)$$

$$\eta(t) = -\frac{F \cos \omega t}{\omega} \quad (ب \ ۷۰-۹)$$

به‌طوری که پریشیدگیهای آن با ضریب  $\omega$  بزرگتر از پریشیدگیهای موضع هستند. این مثال ساده روشن می‌کند که یک جواب تقریبی به معادلات حرکت برای هامیلتونی عام ۶۵-۹ می‌تواند با نوشتن معادلات حرکت به‌صورت زیر تشکیل یابد،

$$q(t) = \bar{q}(t) + \xi(t) \quad (۷۱-۹)$$

$$p(t) = \bar{p}(t) + \eta(t)$$

که در آنها  $(\bar{q}, \bar{p})$  کند-تغییرند،  $(\xi, \eta)$  کوچکند و با تناوب  $2\pi/\omega$  و میانگین صفر تناوبی هستند



در قیاس با مورد ساده بالا، باید انتظار داشته باشیم که کمیت‌های زیر

$$\ddot{\xi}, \omega \dot{\xi}, \omega^2 \xi, \omega \eta / m \quad (۷۲-۹)$$

مرتبه بزرگی مشابهی داشته باشند.

با نشان دادن ۷۱-۹ در هامیلتونی ۶۵-۹ و بسط تا مرتبه مناسب، معادلات حرکت زیر حاصل می‌شوند

$$\ddot{\bar{q}} + \dot{\xi} = \frac{\partial H_0}{\partial \bar{p}} + \eta \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{p}^2} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3 H_0}{\partial \bar{p}^3} \quad (۷۳-۹ \text{ الف})$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} + \dot{\eta} = & -\frac{\partial H_0}{\partial \bar{q}} - \eta \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{q} \partial \bar{p}} - \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \sin \omega t - \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{q}^2} \xi \sin \omega t \\ & - \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3 H_0}{\partial \bar{q} \partial \bar{p}^2} \quad (۷۳-۹ \text{ ب}) \end{aligned}$$

در این معادلات، جمله‌های اول در هر طرف کند-تغییر هستند و بقیه تند-تغییر. با میانگین‌گیری روی یک نوسان تند با تناوب  $2\pi/\omega$  و فرض این که تغییرات  $(\bar{q}, \bar{p})$  در این دوره تناوب ناچیزند، معادلات متوسط برای حرکت میانگین  $(\bar{q}, \bar{p})$  را به دست می‌آوریم

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial H_0}{\partial \bar{p}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{p}^2} \langle \eta^2 \rangle \quad (۷۴-۹ \text{ الف})$$

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H_0}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{q}^2} \langle \xi \sin \omega t \rangle - \frac{1}{2} \langle \eta^2 \rangle \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{q} \partial \bar{p}^2} \quad (۷۴-۹ \text{ ب})$$

کمیات کوچک  $(\xi, \eta)$  با جایگذاری ۷۴-۹ در ۷۳-۹ و نگاه داشتن جملات بزرگ، به دست می‌آیند

$$\dot{\xi} = \eta \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{p}^2} \quad (۷۵-۹ \text{ الف})$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \sin \omega t \quad (۷۵-۹ \text{ ب})$$

از این معادلات می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت هر گاه که فرض کنیم تغییرات  $(\bar{p}, \bar{q})$  طی یک



نوسان تند صرف نظر کردنی است:

$$\xi = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{p}^2} \sin \omega t \quad (۷۶-۹) \text{ الف}$$

$$\eta = \frac{1}{\omega} \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \cos \omega t \quad (۷۶-۹) \text{ ب}$$

بدین ترتیب معادلات ۷۴-۹ را می توان در شکل هامیلتونی زیر نوشت

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial K}{\partial \bar{p}}(\bar{q}, \bar{p}), \quad \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial K}{\partial \bar{q}}(\bar{q}, \bar{p}) \quad (۷۷-۹)$$

که در آن هامیلتونی مستقل از زمان به صورت زیر است

$$K(\bar{q}, \bar{p}) = H_0(\bar{q}, \bar{p}) + \frac{1}{4\omega^2} \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{p}^2} \quad (۷۸-۹)$$

این را هامیلتونی حرکت میانگین می نامیم، که تفاوت آن با هامیلتونی ناپریشیده مقداری از مرتبه بزرگی  $\omega^{-2}$  است. حرکت واقعی از نوسانات تناوبی کوچک و سریع حول این میانگین تشکیل می یابد.

در مورد خاصی که در آن هامیلتونی ناپریشیده به صورت

$$H_0 = p^2/2m + V_0(q) \quad (۷۹-۹)$$

است، می توان هامیلتونی تعدیل یافته را برحسب یک پتانسیل مؤثر بیان کرد

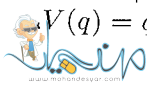
$$K(\bar{q}, \bar{p}) = \bar{p}^2/2m + V_{\text{eff}}(\bar{q}) \quad (۸۰-۹) \text{ الف}$$

که در آن

$$V_{\text{eff}}(\bar{q}) = V_0(\bar{q}) + \frac{1}{4m\omega^2} \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \right)^2 \quad (۸۰-۹) \text{ ب}$$

پتانسیل مؤثر نامبرده است.

حرکت میانگین چنان است که گویی بر پتانسیل ناپریشیده  $V_0$ ، پتانسیلی افزوده ایم که قدر آن متناسب با مربع نیروی نوسانی است. بالاخص، برای یک میدان نوسانی یکنواخت  $V(q) = qF$



حرکت میانگین با حرکت ناپریشیده یکی است، چون تفاوت  $K$  و  $H$  فقط در یک مقدار ثابت است. در آن صورت، نوسانات کوچک حول حرکت میانگین عبارت‌اند از

$$\xi = \frac{F}{m\omega^2} \sin \omega t, \quad \eta = \frac{F}{\omega} \cos \omega t \quad (۸۱-۹)$$

## مثال ۲-۹

حرکت یک آونگ قائم را که تشکیل یافته است از یک میله صلب سبک به طول  $l$  و یک جرم  $m$  متصل به انتهای آن بررسی می‌کنیم. آویزگاه این آونگ با بسامد  $\omega$  و دامنه  $a$  در راستای قائم نوسان می‌کند.

هامیلتونی این دستگاه در مثال ۷-۵، معادله ۳۸-۵ به دست آمده است. هرگاه در آن هامیلتونی  $\gamma(t) = a \sin \omega t$  باشد، داریم

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \left( 1 + \frac{a\omega^2}{g} \sin \omega t \right) \cos \psi \quad (۸۲-۹)$$

با استفاده از معادله ۷۸-۹، هامیلتونی حرکت میانگین را به دست می‌آوریم

$$K = \frac{\bar{p}^2}{2ml^2} - mgl (\cos \psi - k \sin^2 \psi) \quad (۸۳-۹)$$

که در آن

$$k = \frac{a^2 \omega^2}{4gl} \quad (۸۴-۹)$$

است.

نقاط ثابت حرکت میانگین در ریشه‌های معادله

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\psi} = 0 \quad (۸۵-۹)$$

هستند، که در آن

$$V_{\text{eff}} = -mgl (\cos \psi - k \sin^2 \psi) \quad (۸۶-۹)$$

است. این ریشه‌ها در  $\psi = 0, \pi$  و  $\cos \psi = -1/2k$  قرار دارند.

در  $\psi = 0$  مقدار  $V_{\text{eff}}/d\psi^2 > 0$  است، لذا این نقطه همیشه یک نقطه ثابت پایدار است که از نظر فیزیکی هم همین انتظار را باید داشت. در  $\psi = \pi$  داریم

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\psi^2} = mgl(2k - 1) \quad (۸۷-۹)$$

به طوری که، هرگاه

$$a^2 \omega^2 > 2gl \quad (۸۸-۹)$$

باشد، این نقطه هم یک نقطه ثابت پایدار است، و در غیر این صورت ناپایدار است. بدین ترتیب در نوسانات به اندازه کافی تند، هرگاه مرکزگرانی آونگ در راستای قائم بالای آویزگاه آن باشد، آونگ پایدار خواهد بود.

در  $\cos \psi = -1/2k$  داریم

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\psi^2} = mgl \left( \frac{1}{2k} - 2k \right) \quad (۸۹-۹)$$

بنابراین، به ازای  $\psi$  حقیقی، نقطه ثابت همیشه ناپایدار است.

## مسائل

برخی از انتگرالهایی که در حل مسئله‌های این فصل لازم هستند در پیوست ۲ درج شده‌اند.

## مسئله‌های نظریه بی دررو

۱. آونگ قائمی تشکیل یافته است از جرم  $M$  که به سیم سبکی وصل شده است و نوسان می‌کند. طول  $l(t)$  سیم به کندی با زمان تغییر می‌کند. هامیلتونی این دستگاه را به ازای نوسانات کوچک بنویسید و با استفاده از اصل نوردایی بی دررو نشان دهید که

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \simeq \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

که در آن  $\omega_i$  بسامد دستگاه در طول  $l_i$  آونگ است.

۲. یک یخ‌سره باز،  $S$ ، روی سطح یخی صاف و افقی، حول یک نقطه ثابت،  $O$ ، چرخ می‌زند. اگر فاصله  $R(t)$  از نقطه ثابت  $O$  به  $S$  یک تابع معلوم از زمان  $t$  باشد، هامیلتونی را بنویسید و سپس (الف) با استفاده از اصل نوردایی بی دررو نشان دهید که هرگاه  $R(t)$  به کندی از  $R_0$  به  $\alpha R_0$



تغییر کند، انرژی جنبشی ورزشکار از  $E_0$  به تقریباً  $E_0/\alpha^2$  تغییر می‌کند.

(ب) نشان دهید که در این مثال، متغیر کنش دقیقاً یک ناورد است. در مورد خاص  $R(t) = (1 + \varepsilon t)R_0$  که در آن،  $\varepsilon$  یک مقدار ثابت کوچک است، حرکت را به‌طور صریح معلوم کنید، و به تحقیق نشان دهید که تقریب انرژی جنبشی در (الف)، تا مرتبه  $\varepsilon$  برای همهٔ زمانها صحیح است.

۳. معادله ۹-۳۰ کتاب را به‌دست آورید.

۴. هرگاه  $(\theta, I)$  در معادلات

$$\dot{\theta} = \omega(I) \neq 0$$

$$\dot{I} = \varepsilon g(\theta) \quad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

که در آنها  $g(\theta)$  یک تابع تناوبی از  $\theta$  با تناوب  $2\pi$  است، صدق کنند، نشان دهید که به‌ازای مقدار ثابت برای  $K$  داریم

$$|I(t) - M(t)| < K\varepsilon \quad (0 < t < \varepsilon^{-1})$$

و

$$M(t) = I(0) + \varepsilon t \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \right]$$

سپس آن را در موارد زیر به‌طور صریح نمایش دهید.

$$\omega = \text{const}, \quad g(\theta) = \sin \theta \quad (\text{الف})$$

$$\omega = \text{const}, \quad g(\theta) = \text{یک تابع تناوبی} \quad (\text{ب})$$

$$\omega = I\alpha, \quad \alpha = \text{const.} \quad g(\theta) = \cos \theta \quad (\text{ج})$$

آیا محدودیت  $0 < t < \varepsilon^{-1}$  در همهٔ این موارد ضروری است؟

۵. یک ذره به جرم  $m$  در پتانسیل

$$V(q) = A \tan^2(\alpha q) \quad (|q| \leq \pi/2\alpha)$$

که در آن  $A$  و  $\alpha$  مقادیر ثابت مثبت هستند، حرکت می‌کند. منحنیهای فاز و پتانسیل را رسم کنید و یک توصیف کیفی از حرکت ارائه دهید. همچنین متغیرهای زاویه-کنش را بیابید و سپس برای

$q(t)$  حل کنید. اگر  $A$  به آرامی به  $kA$  ( $k > 0$ ) تغییر یابد، تغییرات حاصل به انرژی و بسامد را پیدا کنید.

۶. برای ذره‌ای به جرم  $m$  که در پتانسیل  $V(q)$  حرکت می‌کند، تغییرات انرژی و بسامد را در صورتی که پارامترهای پتانسیل به کندی تغییر کنند، در موارد زیر پیدا کنید:

$$V(q) = -A/\cosh^2 \alpha q \quad (\text{الف})$$

$$V(q) = Aq^{2n} \quad (\text{ب})$$

که در آنها  $A$  و  $\alpha$  مقادیر ثابت و مثبت‌اند و  $M$  عدد صحیح است.

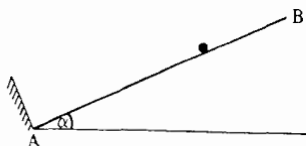
۷. ذره‌ای به جرم  $m$  در پتانسیل

$$V(q) = A(e^{-\alpha q} - 2e^{\alpha q})$$

که در آن  $\alpha$  مقدار ثابت مثبت است، حرکت می‌کند. هرگاه  $A$  به آرامی به  $2A$  تغییر یابد، نشان دهید که تفاضل بسامدهای اولیه و نهایی حرکت عبارت است از

$$\omega_f - \omega_i = \alpha \left( \frac{A}{M} \right)^{\frac{1}{3}} (2 - \sqrt{2})$$

۸. ذره‌ای روی یک سطح صاف شیبدار  $AB$ ، چنان‌که در شکل دیده می‌شود بالا و پایین می‌رود و در  $A$  به‌طور کشسان از یک دیوار باز می‌تابد ارتفاع ماکزیموم ذره، در صورتی که  $\alpha$  به آرامی تغییر کند، چگونه تغییر می‌یابد؟



۹. چنانچه صفحات مثال بخش ۹-۲ با سرعت ثابت  $V$  از هم دور شوند، نشان دهید که

$$I_{n+1} = I_n \left( 1 + \frac{2z_n^2}{1 - 3z_n} \right)$$

است. سپس  $z_n$  را بیابید و نشان دهید پیش از این‌که حرکت مشخصاتش تغییر یابد حدود  $2V/v_0$  برخورد با صفحه متحرک وجود خواهد داشت.



۱۰. دو ذره کشسان به جرمهای  $\mu M$  و  $M$  که  $\mu \ll 1$  است، روی خط مستقیم OA حرکت می‌کنند.



ذره  $\mu M$  در نقطه O از یک دیوار ساکن به‌طور کشسان باز می‌تابد. هرگاه برخورد بین این دو ذره نیز کشسان باشد، نشان دهید که کنش  $\mu M$  پس از  $n$  امین برخورد با  $M$ ، عبارت است از

$$I_{n+1} = \left[ 1 + \frac{2(z_n^2 + \mu)}{1 - 3\mu + z_n(3 - \mu)} \right] I_n$$

$$z_{n+1} = \frac{2\mu + (1 - \mu)z_n}{1 - \mu - 2z_n} \quad (z_n = V_n/v_n)$$

که در آنها علامتگذاری بخش ۹-۲ به‌کار رفته است،  $V$  تندی  $M$  و  $v$  تندی  $\mu M$  است.

۱۱. با این فرض که کنش جرم  $\mu M$  پرسش قبلی یک ناوردای بی‌دررو است، نشان دهید که حرکت میانگین جرم  $M$  در معادله زیر صدق می‌کند

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\mu I^r}{X^r}$$

که در آن  $X$  فاصله  $M$  از نقطه O است. سپس نشان دهید که

$$X \simeq \left( \frac{\mu I^r}{c} + c(t - t_0)^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

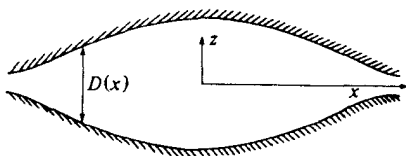
است که در آن  $c$  و  $t_0$  مقادیر ثابت‌اند.

۱۲. یک توپ کوچک روی صفحه کشسانی در یک آسانسور حرکت جهشی به بالا و پایین انجام می‌دهد. هرگاه شتاب آسانسور به کندی تغییر یابد، تغییرات ارتفاع ماکزیممی که توپ احراز می‌کند، چگونه است؟ (راهنمایی: می‌توانید نتیجه‌ای را که در پایان فصل ۵ به‌دست آوردیم و بنابراین شتاب قائم همان اثر را دارد که یک میدان گرانش متغیر با زمان، فرض قرار دهید.)

۱۳. یک ذره به جرم  $m$  بین دو سطح ثابت، چنان‌که در شکل نشان داده می‌شود، به‌طور آزاد بالا



و پایین ورجه می‌کند.



اگر ورجه ذره در هر دو سطح کشسان باشد، اگر  $|\dot{x}| \gg |\dot{z}|$  باشد، و اگر  $D(x)$  فاصله دو سطح در نقطه  $x$  باشد، با استفاده از پایداری انرژی و اصل ناوردایی بی‌دررو نشان دهید که توصیف حرکت در جهت  $x$  به تقریب چنین است

$$\dot{x}^2 = \frac{2E}{m} - \left( \frac{C}{D(x)} \right)^2$$

که در آن،  $C$  یک مقدار ثابت و  $E$  انرژی کل است. هرگاه  $D(x)$  به اندازه کافی کوچک باشد، استدلال کنید که ذره در یک گستره متناهی  $x$  به تله می‌افتد.

۱۴. یک ذره به جرم  $m$  بین دو سطح ثابت،  $z = 0$  و  $z = a \cosh \alpha x / \cosh 2\alpha x$  به طور کشسان ورجه می‌کند. حرکت ذره از مبدأ صفحه  $zx$  با یک زاویه کوچک  $\beta$  نسبت به محور  $z$  آغاز می‌شود. با استفاده از نتایج مسئله قبل، ماکزیموم مقدار  $x$  و تناوب تقریبی حرکت در راستای محور  $x$  را تعیین کنید.

۱۵. رابطه بین حجم و فشار یک «گاز» متشکل از ذراتی را که درون یک مکعب کشسان و به موازات اضلاع آن حرکت می‌کنند، در صورتی که اندازه مکعب به آرامی تغییر کند، به دست آورید.

مسئله‌های مربوط به هامیلتونی تند-تغییر

۱۶. یک ذره به جرم  $m$ ، به سوی نقطه  $P$ ، با مختصات  $\xi$  روی محور حقیقی  $x$ ، و با نیروی  $-m\Omega^2 X$  کشیده می‌شود، که در آن  $X$  فاصله بین ذره و نقطه  $P$  است. هرگاه  $P$  حول مبدأ حرکت نوسانی انجام دهد که با معادله

$$\xi = a \sin \omega t$$

توصیف می‌شود و در آن  $\omega \gg \Omega$  است، نشان دهید که حرکت میانگین ذره، یک نوسان هماهنگ ساده حول مبدأ با بسامد  $\Omega$  است.

۱۷. هامیلتونی یک ذره به جرم  $m$  و بار الکتریکی  $e$  که تحت کشش نیروی دو بار الکتریکی  $\pm e$

به ترتیب در موضع  $x = \pm a$  در امتداد محور مثبت  $x$  حرکت می‌کند، عبارت است از

$$H = p^2/2m - \mu e^2 \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

که در آن،  $\mu$  یک مقدار ثابت است. نشان دهید که در فواصل بزرگ  $a \gg x$ ، ذره در پتانسیل مکانیکی جاذبه با تقریب،

$$V(x) = -2\mu e^2 a/x^2$$

حرکت می‌کند. هرگاه دو بار الکتریکی بالا، نوسانهای سریع به صورت  $a(t) = \pm a_0 \sin \omega t$  انجام دهند، نشان دهید که پتانسیل مکانیکی میانگین در فواصل بزرگ به صورت زیر است

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{m} \left( \frac{2\mu e^2 a_0}{\omega} \right)^2 \left( \frac{1}{x} \right)^6$$

۱۸. حرکت یک آونگ قائم را که از میله صلب سبک به طول  $l$  و جرم  $m$  متصل به یک انتهای آن تشکیل می‌یابد، در نظر می‌گیریم. انتهای دیگر میله که آویزگاه آونگ است، نوسانات افقی انجام می‌دهد که فاصله آن از نقطه ثابت  $O$  را به وسیله  $a \sin \omega t$  تعیین می‌کند. هرگاه  $\omega$  در مقایسه با بسامد طبیعی حرکت بزرگ باشد، هامیلتونی حرکت میانگین و نقاط ثابت آن را پیدا کنید. پایداری این نقاط ثابت را مورد بحث قرار دهید و بسامد نوسانات کوچک حول هر کدام از این نقاط ثابت را که پایدار باشند، تعیین کنید.

۱۹. یک هامیلتونی به صورت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$H(q, p, t) = H_0(q, p) + V_1(q) \sin \omega t + V_2(q) \sin 2\omega t$$

که در آن  $2\pi/\omega$ ، در مقایسه با مدت زمانی که در طی آن دستگاه ناپیشیده  $H_0(q, p)$  به طور بارزی تغییر می‌کند، کوچک است. نشان دهید که هامیلتونی حرکت میانگین عبارت است از

$$K(\bar{q}, \bar{p}) = H_0(\bar{q}, \bar{p}) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{p}^2} \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial \bar{q}} \right)^2 + \frac{1}{4\omega^2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial \bar{q}} \right)^2 \right]$$

۲۰.  $A(t)$  را یک تابع تناوبی از زمان فرض کنید که تناوب آن در مقایسه با مدت زمانی که طی آن دستگاه توصیف یافته با  $H_0(q, p)$  به طور بارزی تغییر می‌کند، کوچک است. نشان دهید که



هامیلتونی حرکت میانگین متناظر با

$$H(q, p, t) = H_0(q, p) + V(q) \frac{d^2 A}{dt^2}$$

عبارت است از

$$K(q, p) = H_0(q, p) + \frac{1}{2} < \left( \frac{dA}{dt} \right)^2 > \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}$$

که در آن  $< >$  علامت میانگین روی یک دوره تناوب برای  $A(t)$  است.

۲۱. حلقه‌ای به جرم  $m$  روی یک سیم صلب و صاف به شکل  $z = f(x)$  می‌لغزد. محور  $z$  قائم رو به بالاست و محور  $x$  افقی است. هرگاه سیم را به‌طور قائم تکان دهیم به‌گونه‌ای که هر نقطه آن به فاصله  $\gamma(t)$  که تابعی تناوبی با تناوبهای کوچک است، جابه‌جا شود، نشان دهید که حرکت میانگین به‌وسیله هامیلتونی زیر توصیف می‌شود

$$K(x, p) = \frac{p^2}{2m(1 + f'(x)^2)} + mgf(x) + \frac{1}{2}m \frac{< \dot{\gamma}^2 > f'(x)^2}{1 + f'(x)^2}$$

سپس حرکت را در موارد زیر بحث کنید.

(الف) در همسایگی یک مینیموم موضعی  $f(x)$  که در آن می‌توان نوشت

$$f(x) = \frac{1}{2} \alpha^2 x^2$$

نشان دهید که حرکت میانگین با دامنه کوچک، یک حرکت هماهنگ ساده است و بسامد آن را بیابید.

(ب) در همسایگی یک ماکزیموم موضعی  $f(x)$  که در آن

$$f(x) \simeq -\frac{1}{2} \alpha^2 x^2$$

شرایطی را معلوم کنید که در آن، حرکت می‌تواند یک حرکت هماهنگ ساده باشد و در این صورت بسامد آن را پیدا کنید.

## دستگاههای خطی

### ۱-۱۰ مقدمه

دستگاههای خطی خودگردان را طی چهار فصل نخست کتاب بررسی کردیم. در این فصل به دستگاههای خطی غیر خودگردان که برای آنها، تابع سرعت  $v(\mathbf{r}, t)$ ، یک تابع صریح از زمان است، می پردازیم.

بخش ۱-۲، حاوی نظریه دستگاههای خطی مرتبه اول است. این نظریه بسیار ساده است، اما روشهای آن می توانند به دستگاههای مرتبه دوم تعمیم یابند و درک عمیق کاربرد آنها در دستگاههای مرتبه اول، تفهیم بقیه مطالب فصل را خیلی ساده تر می کند. ما در اینجا، توجه خود را به دو نوع دستگاه منحصر می کنیم.

نوع اول که در بخش ۱-۳ بررسی شده است، جز این که در معرض یک نیروی محرک قرار می گیرد، یک دستگاه خودگردان است. اینها دستگاههای واداشته هستند و روشهای به کار گرفته در موردشان، برای مدارهای الکتریکی خطی از اهمیت ویژه ای برخوردارند.

در نوع دوم، که در بقیه این فصل بررسی شده است، پارامترهای مورد استفاده برای تعریف یک دستگاه خودگردان، از قبیل جرم یا طول یک آونگ، یا ظرفیت خازن در یک مدار الکتریکی، به صورت تابعی از زمان تبیین می شوند. این دستگاهها پارامترهای وابسته به زمان دارند. در بخش ۱-۴، نظریه انتشارگرها، در مورد این دستگاهها به کار بسته می شود و در بخش ۱-۵ توجه

خود را منحصرأ معطوف به تغییرات تناوبی پارامترها می‌کنیم که منجر به نظریه پراهمیت نگاشتهای خطی و مسائل راجع به پایداری می‌شود. نظریه پایداری، برای نگاشتهای خطی حافظ مساحت در بخش ۱۰-۶، به تفصیل، چنانکه برای کاربرد در دستگاههای هامیلتونی مطلوب است، توضیح داده می‌شود. در بخش ۱۰-۷ هم، نظریه پایداری در برخی مسائل تشدید پارامتری به کار بسته می‌شود.

## ۱۰-۲ دستگاههای مرتبه اول

معادله عام حرکت ۱-۱ یک دستگاه مرتبه اول، چنانچه تابع سرعت  $v(x, t)$  در  $x$  خطی باشد، خطی است، به طوری که معادله خطی عام برای حرکت به این صورت است

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t) = a(t)x + b(t) \quad (۱-۱۰)$$

هرگاه دستگاه واداشته باشد

$$a(t) = \text{const.} = a \quad (۲-۱۰)$$

و معادله حرکت عبارت است از

$$\frac{dx}{dt} - ax = b(t) \quad (۳-۱۰)$$

این معادله، با ضرب طرفین در  $e^{-at}$  و نوشتن معادله حاصل به صورت

$$\frac{d}{dt}(xe^{-at}) = b(t)e^{-at} \quad (۴-۱۰)$$

به طور صریح حل می‌شود، که جواب آن به ازای  $x(t_0)$  معلوم عبارت است از

$$x(t) = e^{at} \left[ x(t_0)e^{-at_0} + \int_{t_0}^t dt' b(t')e^{-at'} \right] \quad (۵-۱۰)$$

اگر  $a < 0$  باشد، آنگاه دستگاه گرایش به سوق یا «فروافت» نمایی به سوی مبدأ دارد؛ درست نظیر دستگاه ناووداشته مثال ۱-۳، که با قرار دادن  $b(t) = 0$  حاصل می‌شود. ولی در دستگاه واداشته، نیروی محرکه با این گرایش مقابله می‌کند.



## مثال ۱۰-۱

حرکت دستگاهی را که به وسیله تابع  $x(t)$  نمایش داده می شود، در صورتی که  $x(t)$  در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند، به دست آورید

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + cx &= 0 \quad (t < 0 \text{ و } t > 1) \\ &= 1 \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned} \quad (6-10)$$

که در آن  $c > 0$ ، و شرط اولیه  $x(-\infty) = 0$  است.

به ازای  $t \leq 0$  به وضوح  $x(t) = 0$  است. برای  $0 \leq t \leq 1$  از معادله ۵-۱۰ استفاده می کنیم و داریم

$$x(t) = (1 - e^{-ct})/c \quad (0 \leq t \leq 1)$$

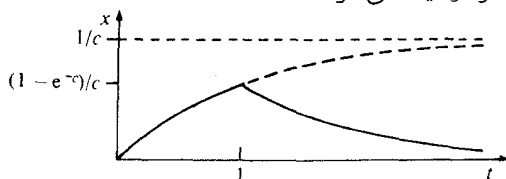
به طوری که

$$x(1) = (1 - e^{-c})/c$$

برای  $t > 1$ ، دستگاه به طور نمایی وافی باشد و داریم

$$x(t) = (e^c - 1)c^{-1} e^{-ct} \quad (t > 1)$$

این جواب به طور ترسیمی در نمودار دیده می شود.



حال یک دستگاه خطی مرتبه اول با پارامتر وابسته به زمان را در نظر بگیرید. در این مورد  $b(t) = 0$  است و معادله حرکت عبارت است از

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \quad (7-10)$$

این یک معادله خطی و همگن در  $x$  است که دارای جواب صریح به صورت زیر است

$$x(t) = x(t_0) \exp \int_{t_0}^t dt' a(t') \quad (8-10)$$

از سادگی این دستگاه استفاده می‌کنیم و وارد نظریه انتشارگرها می‌شویم که کاربرد عمده‌شان روی دستگاههای پیچیده‌تری است که برخی جواب صریح ندارند.

از معادله دیفرانسیل ۷-۱۰ آشکار است که مبدأ یک نقطه ثابت است. به علاوه چون این معادله، خطی و همگن در  $x$  است، نتیجه می‌شود که اگر  $x_1(t)$  جواب معادله باشد،  $cx_1$  هم به‌ازای هر مقدار ثابت  $c$ ، جواب آن است. فرض کنیم که  $x_1(t)$  چنان جوابی است که

$$x_1(t_0) = 1 \quad (9-10)$$

و برای همین جواب  $x_1(t_1) = K$  است. در این صورت جواب  $cx_1(t)$  در  $t = t_0$ ، مقدارش  $c$  و در  $t = t_1$  مقدارش  $cK$  است. بدین ترتیب برای همه جوابها داریم

$$x(t_1) = Kx(t_0) \quad (10-10)$$

که در آن، مقدار  $K$  وابستگی به  $t_0$  و  $t_1$  دارد، اما به جواب انتخابی  $x(t)$  بستگی ندارد. با بیان این وابستگی به‌طور صریح، برای همه جوابهای معادله ۷-۱۰ داریم

$$x(t_1) = K(t_1, t_0)x(t_0) \quad (11-10)$$

$K(t_1, t_0)$  انتشارگر دستگاه خطی از زمان  $t_0$  به زمان  $t_1$  است که حرکت آن با معادله ۷-۱۰ توصیف می‌شود: به ترتیب شناسه‌ها توجه کنید. ملاحظه می‌شود، چه  $t_1$  بعد از  $t_0$  باشد و چه قبل از  $t_0$ ، نظریه معتبر است. روشن است که هرگاه هر دوی این شناسه‌ها یکی باشند، داریم

$$K(t_0, t_0) = 1 \quad (12-10)$$

چنانچه حالت دستگاه خطی در زمان  $t_0$  معلوم باشد، انتشارگر  $K(t_1, t_0)$  این امکان را فراهم می‌کند که حالت دستگاه را در زمان  $t_1$  بدون نیاز به اطلاعات اضافی، به‌دست بیاوریم. این مطلب را با نمودار ۱۳-۱۰ نمایش می‌دهیم

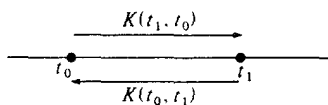
$$\begin{array}{c} \xrightarrow{K(t_1, t_0)} \\ \bullet \quad \bullet \\ t_0 \quad t_1 \end{array} \quad (13-10)$$

بین انتشارگرها روابط ساده‌ای وجود دارد. با مبادله  $t_0$  و  $t_1$  در معادله ۱۰-۱۱ و سپس با استفاده مجدد از ۱۰-۱۱ برای حذف  $x(t_1)$ ، نشان می‌دهیم که برای هر  $x(t)$

$$x(t_0) = K(t_0, t_1)x(t_1) = K(t_0, t_1)K(t_1, t_0)x(t_0) \quad (10-14)$$

و لذا داریم

$$K(t_0, t_1)K(t_1, t_0) = 1 \quad (10-15 \text{ الف})$$



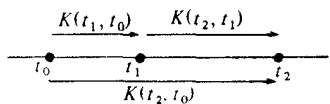
$$(10-15 \text{ ب})$$

انتشارگر از  $t_1$  به  $t_0$  عکس انتشارگر از  $t_0$  به  $t_1$  است. با جاگذاری  $t_2$  برای  $t_1$  و  $t_1$  برای  $t_0$  در معادله ۱۰-۱۱ داریم

$$\begin{aligned} x(t_2) &= K(t_2, t_1)x(t_1) \\ &= K(t_2, t_1)K(t_1, t_0)x(t_0) \\ &= K(t_2, t_0)x(t_0) \quad (\text{بنا به تعریف}) \end{aligned} \quad (10-16)$$

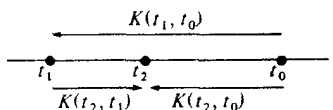
و لذا انتشارگر از  $t_0$  به  $t_2$  می‌شود

$$K(t_2, t_0) = K(t_2, t_1)K(t_1, t_0) \quad (10-17 \text{ الف})$$



$$(10-17 \text{ ب})$$

این، قاعده برای ضرب انتشارگرهاست. چنانکه از نمودار نمایان است، نیازی به شرط  $t_0 < t_1 < t_2$  نیست. مثلاً اگر  $t_1 < t_2 < t_0$  باشد، نمودار به صورت زیر در می‌آید



$$(10-18)$$

## دستگاههای مرتبه اول ۲۰۳

معادله ۱۰-۱۷ هنوز معتبر است. توجه داشته باشید که اولین شناسه در تابع انتشارگر، همیشه زمان واقع بر نوک پیکان متناظرش است. این زمان می تواند قبل یا بعد از زمان شناسه دوم باشد.

### مثال ۱۰-۲

حرکت یک دستگاه خطی مرتبه اول با تابع  $x(t)$  ای نمایش داده می شود که در معادله ۱۰-۷ صدق می کند. اگر  $x(0) = 2$  باشد،  $x(1) = 10$  است و اگر  $x(1) = 3$  باشد،  $x(2) = 1$  است. با استفاده از نظریه انتشارگرها،  $x(2)$  را وقتی که  $x(0) = -\frac{1}{5}$  است، پیدا کنید. بنا به تعریف ۱۰-۱۱ انتشارگر، داریم  $K(1, 0) = 5$  و  $K(2, 1) = \frac{1}{5}$  لذا با استفاده از قاعده ضرب،  $K(2, 0) = \frac{5}{5} = 1$  است و با استفاده مجدد از ۱۰-۱۱ داریم

$$x(2) = \left(\frac{5}{3}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{3} \quad \text{برای } x(0) = -\frac{1}{5}$$

در بسیاری از دستگاهها اتفاق می افتد که در یک فاصله زمانی از  $t_0$  به  $t_1$  مقدار  $a(t) = \text{const} = c$  می شود. در آن صورت انتشارگر از  $t_0$  به  $t_1$  از معادله ۱۰-۸ و ۱۰-۱۱ به صورت زیر به دست می آید

$$K(t_1, t_0) = e^{c(t_1 - t_0)} \quad (10-19)$$

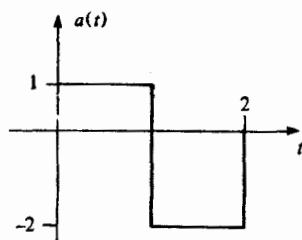
### مثال ۱۰-۳

حرکت یک دستگاه از معادلات زیر پیروی می کند

$$\dot{x} = 0 \quad (x < 0, x > 2)$$

$$= x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$= -2x \quad (1 < x \leq 2)$$



مطلوب است انتشارگرهای  $K(\frac{2}{3}, 0)$  و  $K(3, -1)$

زمان را به قسمتهایی برابر با مقدار ثابت  $a(t)$  تقسیم می‌کنیم. برای هر کدام از این قسمتها، طبق معادلهٔ ۱۰-۱۹، انتشارگر به دست می‌آید، به طوری که

$$K(0, -1) = 1 \quad K(1, 0) = e$$

$$K(2, 1) = e^{-2} \quad K(3, 2) = 1$$

بنابراین  $K(3, -1) = e^{-1}$ ، همچنین داریم  $K(\frac{3}{2}, 1) = e^{-1}$ ، لذا

$$K\left(\frac{3}{2}, 0\right) = K\left(\frac{3}{2}, 1\right) K(1, 0) = 1$$

نظریهٔ انتشارگرها، بخصوص در دستگاههای خطی همگن که در  $\dot{x} = a(t)x$  صدق می‌کنند و در آنها  $a(t)$  یک تابع تناوبی از زمان است، سودمند است. این دستگاهها دارای شرایط تناوبی هستند، اما حرکت آنها معمولاً تناوبی نیست. فرض کنیم  $a(t)$  دارای تناوب  $T$  باشد، یعنی

$$a(t+T) = a(t) \quad (\text{برای همه } t) \quad (20-10)$$

یک مبدأ مناسب برای زمان انتخاب می‌کنیم و انتشارگر تناوب  $K$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$K = K(T, 0) \quad (21-10)$$

هر تابع  $x(t)$  که در

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) \quad (22-10)$$

صدق کند، در

$$\frac{dx(t+T)}{d(t+T)} = a(t+T)x(t+T) \quad (23-10)$$

نیز صدق می‌کند.

چون  $T$  مقدار ثابت است و  $a(t)$  تناوبی است، تابع  $x(t)$  در

$$\frac{dx(t+T)}{dt} = a(t)x(t+T) \quad (24-10)$$



نیز صدق می‌کند. بنابراین  $x(t+T)$  هم یک جواب معادله حرکت اصلی است و به استقراء  $x(t+nT)$  هم، به ازای  $n$  صحیح مثبت، چنین است. با استدلالی مشابه، این امر در مورد اعداد صحیح منفی نیز صدق می‌کند.  
بدین ترتیب اگر به ازای مقدار ثابت  $c$

$$x(t_1) = c x(t_0)$$

باشد، داریم

$$x(t_1 + nT) = c x(t_0 + nT) \quad (۲۵-۱۰)$$

و بنا به تعریف انتشارگر

$$K(t_1 + nT, t_0 + nT) = K(t_1, t_0) \quad (۲۶-۱۰)$$

بخصوص داریم

$$K((n+1)T, nT) = K \quad (۲۷-۱۰)$$

و بنا به قاعده ضرب

$$\begin{aligned} K(nT, 0) &= K(nT, (n-1)T) K((n-1)T, (n-2)T) \cdots K(T, 0) \\ &= K^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (۲۸-۱۰)$$

به این ترتیب، اثر سپری شدن  $n$  تناوب، رساندن انتشارگر تناوب به توان  $n$  است.

$$\begin{aligned} K &= \overbrace{K(T, 0) \rightarrow K(2T, T) \rightarrow K(3T, 2T) \rightarrow \dots \rightarrow K(nT, (n-1)T)} \\ &\quad \begin{array}{c} \bullet \quad \quad \bullet \quad \quad \bullet \quad \quad \bullet \quad \quad \bullet \\ 0 \quad \quad T \quad \quad 2T \quad \quad 3T \quad \quad nT \end{array} \\ &\quad \overbrace{\hspace{10em}} \\ &\quad K(nT, 0) = K^n \end{aligned} \quad (۲۹-۱۰)$$

انتشارگر تناوب، تنها چیزی است که برای تعیین رفتار یک دستگاه تناوبی در زمانهای  $nT$ ، به آن نیاز داریم و اطلاعات لازم برای تعیین حالتی را که می‌توانستند با روشن کردن استروبوسکوپ در آن زمانها «دیده» شوند، در اختیار ما می‌گذارد. این حالتها یک دنباله نقاط

$$x_n = x(nT) = K^n x_0. \quad (۳۰-۱۰)$$

در فضای فاز تعریف می‌کنند. روشن است که مبدأ یک نقطه ثابت در این دنباله است، و پایداری



آن به  $K$  بستگی دارد. از معادله  $1-\lambda$  چنین برمی آید که  $K > 0$  است، لکن به خاطر کامل کردن مطلب در فصل بعد، مقادیر منفی  $K$  را نیز بررسی می کنیم.

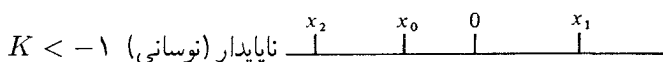
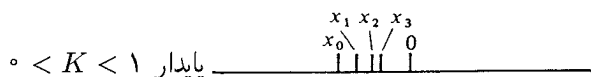
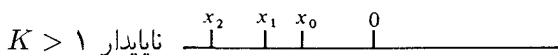
اگر  $|K| < 1$  باشد، آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  می شود، اما اگر  $|K| > 1$  باشد، در آن صورت دنباله  $x_n$  واگراست، لذا، مبدأ برای دنباله  $x_n$  تعریف شده با  $1-3$ ، یا

(۱۰-۳۱ الف) یک نقطه ثابت قویاً پایدار است، اگر  $|K| < 1$  باشد

و یا

(۱۰-۳۱ ب) یک نقطه ثابت ناپایدار است، اگر  $|K| > 1$  باشد

انواع مختلف دنباله، هرگاه  $x_0 < 0$  باشد به شکل زیرند:



هرگاه  $K = \pm 1$  باشد، مبدأ، یک نقطه ثابت و پایدار است، اما نه قویاً پایدار. یک نقطه ثابت ناپایدار هم که نقاط فاز حول آن نوسان می کنند (یعنی وقتی که  $K < -1$  باشد)، یک نقطه ثابت فرا پایدار نامیده می شود.

#### مثال ۱۰-۴

یک دستگاه با شرایط تناوبی، به تناوب  $T$ ، در معادله زیر صدق می کند

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1 x \quad (0 \leq t < T_1) \\ &= a_2 x \quad (T_1 \leq t < T)\end{aligned} \quad (10-33)$$

به ازای کدام مقادیر  $a_1$  و  $a_2$  مبدأ یک نقطه ثابت در زمانهای  $nT$ ، با  $n$  عدد صحیح است؟ ضریب  $a(t)$ ، طی دو فاصله زمانی، مقدار ثابت است، لذا

$$\begin{aligned}K(T_1, 0) &= e^{a_1 T_1} \\ K(T, T_1) &= e^{a_2 (T - T_1)}\end{aligned} \quad (10-34)$$

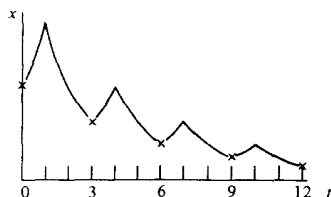
بنابراین، انتشارگر تناوب عبارت است از

$$K = K(T, \circ) = \exp[a_1 T_1 + a_2 (T - T_1)] \quad (35-10)$$

هرگاه نامساوی زیر برقرار باشد، مبدأ یک نقطه ثابت پایدار است

$$K < 1, a_1 T_1 + a_2 (T - T_1) < 0 \quad (36-10)$$

حالت دستگاه را می‌توان به صورت تابعی از زمان، برای مقادیر مختلف انتشارگرها ترسیم کرد. مثلاً اگر  $\frac{1}{4} = -a_2 = a_1$  و  $T_1 = 1$  و  $T = 3$  باشند، نمودار به صورت زیر است که در آن مضارب تناوب  $T$  با علامت ضربدر مشخص شده‌اند.



### ۳-۱۰ نوسانگر خطی واداشته

این دستگاه هامیلتونی با یک درجه آزادی، یک دستگاه واداشته است که در مقدمه این فصل تعریف کردیم، و به شیوه‌ای که با دستگاه‌های مرتبه اول واداشته در بخش ۱۰-۲ عمل شد، به آن می‌پردازیم.

فرض کنیم که نیروی  $F(t)$  را روی نوسانگر خطی مکانیکی در مثال ۴-۲، با جرم  $m$  و بسامد زاویه‌ای  $\omega$ ، اعمال می‌کنیم. پتانسیل تولیدکننده نیروی  $F(t)$  عبارت است از

$$V(q, t) = -qF(t) \quad (37-10)$$

به طوری که هامیلتونی کل آن به صورت

$$H(q, p, t) = p^2/2m + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 - qF(t) \quad (38-10)$$

است و معادلات هامیلتون عبارت اند از

$$\dot{q} = p/m$$

$$\dot{p} = -m\omega^2 q + F(t) \quad (39-10)$$

که منجر به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر می‌شوند

$$\ddot{q} + \omega^2 q = F(t)/m \quad (۴۰-۱۰)$$

برای حل این معادله، ابتدا آن را به صورت یک معادله دیفرانسیل برای متغیر مختلط

$$z = \dot{q} + i\omega q \quad (۴۱-۱۰)$$

که در آن

$$p = m \operatorname{Re}(z) \quad q = \operatorname{Im}(z)/\omega$$

است، می‌نویسیم. پس داریم  $\dot{z} = \ddot{q} + i\omega\dot{q}$ ، و آنگاه با استفاده از معادله ۴۰-۱۰ داریم

$$\dot{z} - i\omega z = F(t)/m \quad (۴۲-۱۰)$$

این، دقیقاً به همان صورت معادله ۳-۱۰ است و می‌تواند با همان روش حل شود و جواب زیر را بدهد

$$z(t) = e^{i\omega t} \left[ z(t_0) e^{-i\omega t_0} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' F(t') e^{-i\omega t'} \right] \quad (۴۳-۱۰)$$

بدین ترتیب، مختصه و اندازه حرکت در زمان  $t$ ، برحسب  $q(t_0)$  و  $p(t_0)$  به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} q(t) &= \operatorname{Im}(z(t))/\omega \\ &= q(t_0) \cos \omega(t - t_0) + (m\omega)^{-1} p(t_0) \sin \omega(t - t_0) \\ &\quad + (m\omega)^{-1} \int_{t_0}^t dt' F(t') \sin \omega(t - t') \end{aligned} \quad (۴۴-۱۰ \text{ الف})$$

$$\begin{aligned} p(t) &= m \operatorname{Re}(z(t)) \\ &= p(t_0) \cos \omega(t - t_0) - m\omega q(t_0) \sin \omega(t - t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^t dt' F(t') \cos \omega(t - t') \end{aligned} \quad (۴۴-۱۰ \text{ ب})$$



دو جمله اول در هر یک از معادلات، جواب صریح برای حرکت ناواداشته است. چون دستگاه خطی است، عبارات وادارنده به سادگی به اینها افزوده می شوند.

اگر انرژی  $E$  سیستم واداشته را مثل همان حالتی که نیروی  $F(t)$  وجود ندارد تعریف کنیم، دیگر پایسته نخواهد بود. هرگاه دستگاه از وضعیت سکون در مبدأ شروع به حرکت کند، آنگاه به ازای  $t > 0$  داریم

$$\begin{aligned} E(t) &= p^2/2m + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2} m|z(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left| \int_{t_0}^t dt' F(t') e^{-i\omega t'} \right|^2 \end{aligned} \quad (45-10)$$

### مثال ۵-۱۰

فرض کنید یک نوسانگر خطی واداشته با مختصه  $q$  ای که در معادله  $10-40$  صدق می کند، قبل از زمان  $t = 0$  در وضعیت سکون در مبدأ باشد، یعنی

$$q = \dot{q} = F(t) = 0 \quad (t < 0) \quad (46-10)$$

و سپس نیروی

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t = ma \cos \Omega t \quad (t \geq 0) \quad (47-10)$$

به آن اعمال شود، که در آن  $\Omega > 0$ ،  $\Omega \neq \omega$  و  $\omega$  بسامد زاویه ای نوسانگر است. با معادله  $10-43$ ، برای  $t \geq 0$  و  $z = \dot{q} + i\omega q$  داریم

$$\begin{aligned} z(t) &= ae^{i\omega t} \int_0^t dt' \cos \Omega t' e^{-i\omega t'} \\ &= ae^{i\omega t} \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i(\Omega-\omega)t'}}{i(\Omega-\omega)} + \frac{e^{-i(\Omega+\omega)t'}}{-i(\Omega+\omega)} \right]_0^t \\ &= \frac{a}{2i} \left[ \frac{e^{i\Omega t} - e^{i\omega t}}{\Omega - \omega} - \frac{e^{-i\Omega t} - e^{-i\omega t}}{\Omega + \omega} \right] \end{aligned} \quad (48-10)$$



$$\begin{aligned}
 q(t) &= \text{Im}(z)/\omega \\
 &= \frac{-a}{2\omega} \left[ \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{\Omega - \omega} - \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{\Omega + \omega} \right] \\
 &= a \left[ \frac{\cos \omega t - \cos \Omega t}{\Omega^2 - \omega^2} \right] \quad (۴۹-۱۰)
 \end{aligned}$$

بعد از زمان  $t = 0$ ، جابه‌جایی  $q(t)$  دارای مؤلفه‌هایی با هر دو بسامد طبیعی  $\omega$  و بسامد «واداشته»  $\Omega$  است. جابه‌جایی ممکن، نمی‌تواند از مقدار

$$q_{\max} = \frac{2a}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (۵۰-۱۰)$$

بیشتر شود. برای  $\omega$ ی ثابت، این مقدار، به‌ازای میل  $\Omega$  به‌سوی بسامد طبیعی  $\omega$ ، یعنی در صورت گرایش نیروی اعمالی به سوی شرط تشدید که  $\Omega = \omega$  است، افزایش بدون حد می‌یابد.

پدیده تشدید را معمولاً همه مشاهده کرده‌اند. کشتیها و قایقها، هرگاه با امواجی برخورد کنند که بسامدشان در حدود بسامد مشدد است، دچار پیچ‌وتاب و تلاطم بیشتری می‌شوند. سیمهای پیانو و گیتار، چنانچه بسامدشان با بسامد صدای آوازخوانی در آن نزدیکیها یکی باشد به ارتعاش در می‌آیند. اجزای خودروها، قطارها و هواپیماها، در صورتی‌که این وسایل نقلیه با سرعتهای بخصوصی در حرکت باشند، به دلایل مشابهی مرتعش می‌شوند.

در دستگاههای واقعی، اثرها و عوامل غیرخطی و میرایی (ن.ک. مثلاً به مسئله ۱۰-۷) که در مثال فوق منظور نشده‌اند، برای دامنه‌های به اندازه کافی بزرگ حرکت، عملاً همیشه پدیدار می‌شوند و حرکت، حتی وقتی‌که  $\Omega = \omega$  هم باشد، محدود می‌ماند.

روش متغیر مختلط در این بخش را می‌توان به دستگاههای خطی بسیار پیچیده‌تر، با کاربرتهای بسیار وسیع گسترش داد، بخصوص در مدارهای الکتریکی.

## ۱۰-۴ انتشارگرها

در بخش ۱۰-۲ با انتشارگرهای دستگاههای خطی مرتبه اول آشنا شدیم. این نظریه، با استفاده از ماتریسها، به‌طور طبیعی به دستگاههای مرتبه دوم و بالاتر هم تعمیم می‌یابد. خصایل اضافی ناشی از این تعمیم عبارتند از خواص جابه‌جایی ماتریسها و تنوع بیشتر در انواع پایداری در توابع سرعت تناوبی  $v(\mathbf{r}, t)$ .

گسترش نظریه مرتبه دوم به مراتب بالاتر واضح است و طبق معمول از ذکر آن صرف‌نظر می‌شود. هرگاه یک دستگاه مرتبه دوم خطی باشد، تابع سرعت  $v(\mathbf{r}, t)$  در بردار حالت  $\mathbf{r} = (x, y)$

خطی است، به طوری که معادلات حرکت ۱-۳ را می توان به صورت

$$\frac{dr}{dt} = v(r, t) = A(t)r(t) + b(t) \quad (51-10)$$

نوشت که در آن  $A(t)$  یک تابع ماتریس  $2 \times 2$  حقیقی از  $t$  و  $b(t)$  یک تابع برداری ستونی دوبعدی حقیقی از  $t$  است. هر گاه دستگاه از نوع دوم باشد، آنگاه  $b(t) = 0$  است و معادله حرکت به صورت زیر در می آید

$$\frac{dr}{dt} = A(t)r \quad (52-10)$$

یا

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_{11}(t)x + A_{12}(t)y \\ \frac{dy}{dt} &= A_{21}(t)x + A_{22}(t)y \end{aligned} \right\} \quad (53-10)$$

معادله ۵۲-۱۰، در متغیر حالت بردار ستونی  $r$  خطی و همگن است، به طوری که هرگاه  $r_1(t)$  و  $r_2(t)$  یک زوج جواب باشند، به ازای همه مقادیر ثابت  $c_1$  و  $c_2$ ، ترکیب خطی

$$r(t) = c_1 r_1(t) + c_2 r_2(t) \quad (54-10)$$

نیز یک جواب است

فرض کنیم که  $r_1(t)$  و  $r_2(t)$  جوابهای خاصی باشند به گونه ای که به ازای یک  $t_0$  معلوم، داشته باشیم

$$r_1(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ y_1(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (الف \ 55-10)$$

$$r_2(t_0) = \begin{pmatrix} x_2(t_0) \\ y_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (ب \ 55-10)$$

و در زمان  $t_1$ ، مقادیر این جوابها را با  $K_{ij}$  مشخص کنیم، که در آن صورت داریم

$$r_j(t_1) = \begin{pmatrix} x_j(t_1) \\ y_j(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1j} \\ K_{2j} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2) \quad (56-10)$$

با جاگذاری  $t = t_0$  در معادله ۵۴-۱۰، مقادیر  $c_1$  و  $c_2$  به دست می‌آیند

$$c_1 = x(t_0), \quad c_2 = y(t_0) \quad (57-10)$$

با جاگذاری  $t = t_1$  در معادله ۵۴-۱۰ و با استفاده از ۵۶-۱۰ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2(t_1) \\ y_2(t_1) \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (58-10)$$

که آن را به این صورت می‌نویسیم

$$\mathbf{r}(t_1) = K\mathbf{r}(t_0) \quad (59-10)$$

که در آن

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (60-10)$$

ماتریسی است که مقدار آن به  $t_0$  و  $t_1$  وابستگی دارد. نظر به این که هر جواب  $\mathbf{r}(t)$  برای دستگاه مرتبه دوم، می‌تواند به صورت ۵۴-۱۰ نوشته شود،  $K$  وابسته به انتخاب جوابهای  $\mathbf{r}(t)$  نیست. با بیان وابستگی به  $t_0$  و  $t_1$  به طور صریح، می‌توان، به ازای هر  $\mathbf{r}(t)$  نوشت

$$\mathbf{r}(t_1) = K(t_1, t_0)\mathbf{r}(t_0) \quad (61-10)$$

هر یک از چهار عضو ماتریس  $K(t_1, t_0)$  که یک ماتریس  $2 \times 2$  است، وابسته به  $t_0$  و  $t_1$  است.

ماتریس  $K(t_1, t_0)$ ، انتشارگر از زمان  $t_0$  به زمان  $t_1$  است. این انتشارگر، تبدیل خطی نقاط واقع در صفحه فاز در زمان  $t_0$  را به نقاط در زمان  $t_1$  تعریف می‌کند.



اگر  $t_1 = t_0$  باشد، دستگاه بدون تغییر می ماند و  $K$  ماتریس واحد است

$$K(t_0, t_0) = I \quad (۶۲-۱۰)$$

با معادله  $t_1$  و  $t_0$  در معادله  $۶۱-۱۰$  و سپس با استفاده از  $۶۱-۱۰$  برای حذف  $r(t_1)$  معلوم می شود که به ازای هر  $r(t)$  که در  $۵۲-۱۰$  صدق کند،

$$\begin{aligned} r(t_0) &= K(t_0, t_1)r(t_1) \\ &= K(t_0, t_1)K(t_1, t_0)r(t_0) \end{aligned} \quad (۶۳-۱۰)$$

می شود، به طوری که خواهیم داشت

$$K(t_0, t_1)K(t_1, t_0) = I \quad (۶۴-۱۰)$$

این مشابه رابطه مرتبه اول  $۱۵-۱۰$  است. انتشارگر پس رو هم، ماتریس وارون انتشارگر پیش رو است. با قرار دادن  $t_0$  به جای  $t_1$  و  $t_2$  به جای  $t_1$  در معادله  $۶۱-۱۰$ ، به ازای هر  $r(t)$  که در  $۵۲-۱۰$  صدق کند، داریم

$$\begin{aligned} r(t_2) &= K(t_2, t_1)r(t_1) \\ &= K(t_2, t_1)K(t_1, t_0)r(t_0) \\ &= K(t_2, t_0)r(t_0) \quad (\text{بنا به تعریف}) \end{aligned} \quad (۶۵-۱۰)$$

و بدین ترتیب، انتشارگر از  $t_0$  به  $t_2$  عبارت است از

$$K(t_2, t_0) = K(t_2, t_1)K(t_1, t_0) \quad (۶۶-۱۰)$$

رابطه بالا عبارت است از قاعده ضرب برای انتشارگرهای مرتبه دوم. بر خلاف رابطه مرتبه اول  $۱۷-۱۰$ ، ترتیب این حاصلضرب را نمی توان عوض کرد، چون که این دو ماتریس نمی توانند جابه جا شوند. به طور کلی، روابط مرتبه دوم شبیه روابط مرتبه اول هستند، به جز این که در خواص جابه جایی باید دقت شود.

مثال ۶-۱۰

برای نوسانگر خطی و نیروی رانشی خطی مثالهای ۲-۴ و ۳-۴، انتشارگرهای  $K(t_1, t_0)$  را در زمانهای دلخواه  $t_0$  و  $t_1$  پیدا کنید.



طبق معمول، مختصه و اندازه حرکت  $(q, p)$  را به جای  $(x, y)$  می‌گذاریم. برای نوسانگر خطی با جرم  $m$  و پتانسیل  $V(q) = \frac{1}{2} a q^2, a > 0$ ، معادله حرکت،  $\ddot{q} = -\omega^2 q$  است که در آن  $\omega = (a/m)^{\frac{1}{2}}$  است. جواب عام برای حالت در زمان  $t$  بر حسب حالت در زمان  $t_0$ ، از معادلات ۴۴-۱۰ به‌ازای  $F = 0$  به‌دست می‌آید. جوابهای خاص لازم برای انتشارگر عبارت‌اند از  $r_1(t)$  با  $q_1(t_0) = 1$  و  $p_1(t_0) = 0$  که به‌صورت زیرند

$$\begin{aligned} r_1(t_1) &= \begin{pmatrix} q_1(t_1) \\ p_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}(t_1, t_0) \\ K_{21}(t_1, t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega(t_1 - t_0) \\ -m\omega \sin \omega(t_1 - t_0) \end{pmatrix} \quad (۶۷-۱۰) \end{aligned}$$

و  $r_2(t)$  با  $q_2(t_0) = 0$  و  $p_2(t_0) = 1$  به‌صورت

$$\begin{aligned} r_2(t_1) &= \begin{pmatrix} q_2(t_1) \\ p_2(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{12}(t_1, t_0) \\ K_{22}(t_1, t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (m\omega)^{-1} \sin \omega(t_1 - t_0) \\ \cos \omega(t_1 - t_0) \end{pmatrix} \quad (۶۸-۱۰) \end{aligned}$$

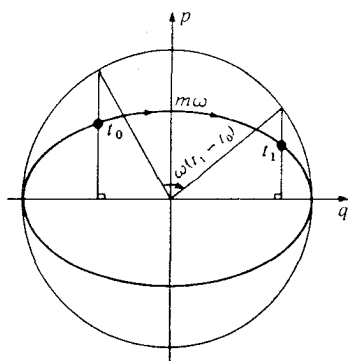
بنابراین انتشارگر نوسانگر خطی (LO) عبارت است از

$$K_{LO}(t_1, t_0) = \begin{pmatrix} \cos \omega(t_1 - t_0) & (m\omega)^{-1} \sin \omega(t_1 - t_0) \\ -m\omega \sin \omega(t_1 - t_0) & \cos \omega(t_1 - t_0) \end{pmatrix} \quad (۶۹-۱۰)$$

برای  $m\omega = 1$ ، انتشارگر بالا یک دوران متناهی به اندازه زاویه  $-\omega(t_1 - t_0)$  در صفحه فاز حول مبدأ را نمایش می‌دهد. در  $t_1 > t_0$  دوران ساعتگرد است که بنا بر استاندارد قراردادی و چنان‌که از نمودار ۴-۲۰ انتظارش می‌رود، یک جهت منفی است.

به‌ازای  $m\omega \neq 1$ ، انتشارگر، حرکت در امتداد یک بیضی با مقدار انرژی ثابت را تعریف می‌کند

$$E = p^2/2m + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \quad (۷۰-۱۰) \text{ (الف)}$$



(۷۰-۱۰ ب)

برای پیدا کردن حالت  $r$  در زمان  $t_1$ ، تصویر عمودی نقطه  $r(t_0)$  بیضی را روی نقطه‌ای از دایره به دست می‌آوریم، آن را به اندازه زاویه  $|\omega(t_1 - t_0)|$  دوران می‌دهیم، و دوباره به طور عمودی بر بیضی تصویر می‌کنیم.

برای نیروی خطی رانشی  $a < 0$  است و با قرار دادن  $\gamma = (-a/m)^{1/2}$ ، معادله حرکت  $\ddot{q} = \gamma^2 q$  دارای جواب عام زیر است

$$\begin{aligned} q &= A_+ e^{\gamma t} + A_- e^{-\gamma t} \\ p &= m\gamma(A_+ e^{\gamma t} - A_- e^{-\gamma t}) \end{aligned} \quad (۷۱-۱۰)$$

جواب خاص  $r_1(t)$ ، یعنی معادله ۵۵-۱۰ الف دارای شرایط اولیه  $\frac{1}{\gamma}$  است، به طوری که  $K_{11} = \cosh \gamma(t - t_0)$ ،  $K_{12} = m\gamma \sinh \gamma(t - t_0)$  می‌شوند. همچنین جواب خاص  $r_2(t)$  معادله ۵۵-۱۰ ب دارای شرایط اولیه  $(2m\gamma)^{-1}$  است، به طوری که  $K_{21} = (m\gamma)^{-1} \sinh \gamma(t - t_0)$  و  $K_{22} = \cosh \gamma(t - t_0)$  می‌شوند. انتشارگر عبارت است از

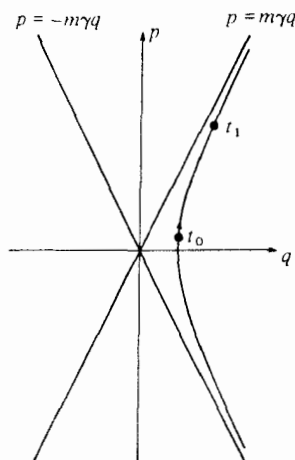
$$K(t_1, t_0) = \begin{pmatrix} \cosh \gamma(t_1 - t_0) & (m\gamma)^{-1} \sinh \gamma(t_1 - t_0) \\ m\gamma \sinh \gamma(t_1 - t_0) & \cosh \gamma(t_1 - t_0) \end{pmatrix} \quad (۷۲-۱۰)$$

این انتشارگر، حرکت در امتداد و یک شاخه از هذلولی با مقدار انرژی ثابت

$$E = p^2/2m - \frac{1}{\gamma} m\gamma^2 q^2 \quad (۷۳-۱۰) \text{ الف}$$

را نمایش می‌دهد





(۷۳-۱۰ ب)

هر دو انتشارگر ۶۹-۱۰ و ۷۲-۱۰، تبدیلهای حافظ مساحت خطی صفحه فاز را تولید می‌کنند.

مثال ۷-۱۰

مطلوب است انتشارگر  $K_0(t_1, t_0)$  برای یک ذره آزاد به جرم  $m$  و انتشارگر  $K_1(t_1, t_0)$  برای ذره‌ای که به استثنای ضربه

$$P(q) = aq \quad (۷۴-۱۰)$$

که در زمان  $t'$  وارد می‌شود، می‌تواند آزادانه حرکت کند. فرض کنید که  $t_1 \geq t' \geq t_0$ . با معلوم بودن  $q(t_0)$  و  $p(t_0)$ ، مختصه  $q(t)$  و اندازه حرکت  $p(t)$  یک ذره آزاد عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} q(t) &= q(t_0) + (t - t_0)p(t_0)/m \\ p(t) &= p(t_0) \end{aligned} \quad (۷۵-۱۰)$$

بنابراین انتشارگر ذره آزاد عبارت است از

$$K_0(t_1, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & (t_1 - t_0)/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۷۶-۱۰)$$

ضربه نیروی بسیار بزرگی است که در زمان بسیار کوتاهی وارد آید و نتیجه آن، تغییر عمده  $P$  در اندازه حرکت  $p$  است، اما تغییر حاصل از آن در مختصه  $q$  ناچیز است. ضربه‌ها می‌توانند

نتیجه برخورد ها یا میدانهای سریع التغییر باشند، و هرگاه میدان وابسته به  $q$  باشد، چنانکه در این مثال هست، ضربه هم وابسته به  $q$  خواهد بود. بنا به تعریف ضربه، در این مثال در زمان  $t'$  داریم

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(t' + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(t' - \varepsilon) \quad (۷۷-۱۰ \text{ الف})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p(t' + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p(t' - \varepsilon) + aq(t') \quad (۷۷-۱۰ \text{ ب})$$

که در آنها  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$  میل از مقادیر  $\varepsilon$  مثبت به سوی صفر است. از این رو، اثر ضربه را می توان به وسیله یک انتشارگر توصیف کرد

$$K_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K(t' + \varepsilon, t' - \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (۷۸-۱۰)$$

اگر  $t_1 > t' > t_0$  باشد، بنا بر قاعده ضرب داریم

$$K_I(t_1, t_0) = K_0(t_1, t') K_I K_0(t', t_0) \quad (۷۹-۱۰)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + a(t_1 - t')/m & (t_1 - t_0)/m + a(t_1 - t')(t' - t_0)/m^2 \\ a & 1 + a(t' - t_0)/m \end{pmatrix} \quad (۸۰-۱۰)$$

در این مرحله هنوز همه موارد ممکن بررسی نشده اند، چه هر دوی  $t_1$  یا  $t_0$  می توانند با  $t'$  مساوی باشند. اما در آن صورت یک ابهام وجود دارد چون حد از زمان مثبت با حد از زمان منفی متفاوت است. لذا پذیرش یک قرارداد مشخص بسیار سودمند است. بنا به قرارداد ضربه، حالت یک دستگاه در یک زمان  $t'$  وقتی ضربه اعمال می شود، حالت حدی آن درست پیش از زمان  $t'$  محسوب می شود.

$$q(t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(t' - \varepsilon)$$

$$p(t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p(t' - \varepsilon) \quad (۸۱-۱۰)$$

با این قرارداد، انتشارگرها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} K_1(t', t_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K_1(t' - \varepsilon, t_0) \\ &= K_0(t', t_0) \end{aligned} \quad (۸۲-۱۰)$$

$$\begin{aligned} K_1(t_1, t') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K_1(t_1, t' - \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K_0(t_1, t') K_I K(t', t' - \varepsilon) \end{aligned} \quad (۸۳-۱۰)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + a(t_1 - t')/m & (t_1 - t')/m \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (۸۴-۱۰)$$

## ۵-۱۰ شرایط تناوبی و نگاشت‌های خطی

اکنون دستگاههای مرتبه دوم با شرایط تناوبی را بررسی می‌کنیم. این دستگاهها در اخترشناسی، نظریه مدارهای الکتریکی و فیزیک حالت جامد بسیار رایج و مهم‌اند. به علاوه نظریه این دستگاهها، در نظریه غیرخطی هامیلتونیهای تناوبی که در فصل ۱۱ ارائه خواهد شد، نقش تعیین‌کننده‌ای دارد. گذشته از این، همخوانی نزدیکی بین نظریه‌های مرتبه دوم و مرتبه اول وجود دارد، و بی‌مناسبت نیست که خواننده، نگاهی به مطالب آغازی این فصل، در بخش ۱-۱۰، درست پیش از معادله ۲۰-۱۰ بیندازد و مطالعاتش را از آنجا شروع کند.

یک دستگاه خطی با پارامترهای وابسته به زمان تناوبی، در معادله ۵۲-۱۰،  $\dot{\mathbf{r}} = A(t)\mathbf{r}$  صدق می‌کند که در آن  $A(t)$  یک تابع تناوبی با دوره تناوب  $T$  است

$$A(t+T) = A(t) \quad (\text{برای همه } t) \quad (۸۵-۱۰)$$

یک مبدأ زمان مناسب انتخاب و انتشارگر تناوب  $K$  را تعریف می‌کنیم

$$K = K(T, 0) \quad (۸۶-۱۰)$$

به همان طریق که در بخش ۲-۱۰ برای دستگاههای مرتبه اول اثبات کردیم، هرگاه  $\mathbf{r}(t)$  با شرایط تناوبی ۸۵-۱۰ در معادله ۵۲-۱۰ صدق کند، آنگاه  $\mathbf{r}(t+nT)$  هم به‌ازای هر  $n$  صحیح، چه مثبت و چه منفی، در آن معادله صدق خواهد کرد.



اما جواب  $r_1(t)$  معادله ۵۲-۱۰ با شرایط اولیه ۵۵-۱۰ الف دارای مقادیر

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ در } t_0 \text{ و } \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix} \text{ در } t_1 \quad (۸۷-۱۰)$$

است، لذا  $r_1(t + nT)$  هم در معادله ۵۲-۱۰ صدق می‌کند و دارای مقادیر

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ در } t_0 + nT \text{ و } \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix} \text{ در } t_1 + nT \quad (۸۸-۱۰)$$

است. بنابراین  $K_{11}(t_1 + nT, t_0 + nT) = K_{11}(t_1, t_0)$  و  $K_{21}(t_1 + nT, t_0 + nT) = K_{21}(t_1, t_0)$  است، و برای  $K_{12}$  و  $K_{22}$  هم می‌توان استدلال مشابهی به‌کار گرفت. در نتیجه داریم

$$K(t_1 + nT, t_0 + nT) = K(t_1, t_0) \quad (A(t + T) = A(t)) \quad (۸۹-۱۰)$$

و به‌ویژه داریم

$$K((n + 1)T, nT) = K \quad (۹۰-۱۰)$$

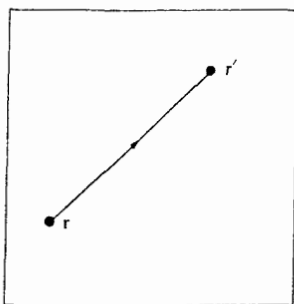
به‌طوری که، بنابر قاعده ضرب، خواهیم داشت

$$K(nT, 0) = K^n \quad (۹۱-۱۰)$$

نظیر دستگاه‌های مرتبه اول، در اینجا هم انتشارگر  $K$  تنها چیزی است که برای تعیین رفتار دستگاه در زمانهای  $nT$  لازم است.

انتشارگر تناوب  $K$  معرف یک تبدیل خطی یا یک نگاشت خطی از فضای فاز به خودش است

$$r' = Kr \quad (۹۲-۱۰ \text{ الف})$$



(۹۲-۱۰ ب)

با استفاده علامتگذاری

$$r(nT) = r_n \quad (۹۳-۱۰)$$

معادله ۹۲-۱۰، به وسیله تنها یک عمل نگاشت خطی،  $r_n$  های متوالی را به همدیگر مرتبط می کند

$$r_{n+1} = K r_n \quad (۹۴-۱۰)$$

درحالی که معادله ۹۱-۱۰،  $r_n$  را برحسب  $r_0$ ، به وسیله  $n$  عمل نگاشت

$$r_n = K^n r_0 \quad (۹۵-۱۰)$$

به دست می آورد.

اصطلاحاً می گوئیم که نگاشت تعیین شده با  $K$ ، دنباله نقاط  $r_n = r(nT)$  را تولید می کند، و این نقاط تعیین کننده حالت در زمانهای  $t = nT$  برای دستگاههایی هستند که حرکتشان در معادله دیفرانسیل ۵۲-۱۰، با شرایط تناوبی ۸۵-۱۰ صدق می کند.

مهمترین خواص دستگاههای تناوبی را می توان از مطالعه کاربردهای مکرر نگاشت خطی به دست آورد و چون خواص حاصل از این رهگذر ساده ترند ما توجه خود را فقط به آنها معطوف می کنیم و سایر خواص دستگاههای تناوبی را کنار می گذاریم. بعضی اوقات هم انتخاب دیگری وجود ندارد، چون حالت دستگاه فقط می تواند در زمانهای  $nT$  معلوم شود. مثلاً شمارش یک جمعیت حیوان می تواند سالیانه، با  $T$  مساوی یک سال انجام داده شود. در زمانهای بین دو شمارش تعداد جمعیت به دقت قابل حصول نیست اما تخمین انتشارگر  $K$  می تواند امکان داشته باشد، و بدین ترتیب رفتار دراز مدت جمعیت در زمانهای  $nT$  هم می تواند تخمین زده شود. این امکان تخمین، چنانچه نتایج آن به نابودی یک نوع دلالت کند، می تواند پر ارزش باشد.



## ۱۰-۶ نگاشتهای خطی حافظ مساحت

نظریه نگاشتهای خطی و بسط یک دستگاه معین به فواصل گسسته زمانی، چنانکه از معادله تحول ۱۰-۹۴ به دست می آید، مشابه نظریه دستگاههای خودگردان خطی فصل ۳ است که در آن وابستگی پیوسته به زمان از معادله گسترش ۳-۳۸ به دست می آید. هر دو نظریه به خواص ماتریسهای  $2 \times 2$  که در فصل ۲ به آنها پرداختیم بستگی دارند و نظریه های پایداری دارای وجوه مشترک بسیاریند. به خاطر سادگی، همه انواع مختلف پایداری نگاشتهای خطی به تفصیل بیان نمی شوند، بلکه تنها نگاشتهای حافظ مساحت لازم برای دستگاههای هامیلتونی مورد بررسی قرار می گیرند. در چنین نگاشتهایی، انتشارگر تناوب دارای دترمینان واحد است

$$\det K = 1 \quad (96-10)$$

تبدیل خطی تولید شده به وسیله ماتریس  $K$ ، با بردار مختصه فضای فاز  $r$ ، از طریق یافتن یک مختصه جدید،

$$R = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (97-10)$$

مورد مطالعه قرار می گیرد. مختصه جدید  $R$  به وسیله تبدیل خطی خاص از  $r$  به دست می آید

$$R = Mr \quad (98-10)$$

که در آن  $M$  یک ماتریس تبدیل غیرتکین است. در دستگاه مختصات جدید، نگاشت به وسیله معادله زیر نمایش داده می شود

$$R' = LR \quad (99-10)$$

که در آن  $L = MKM^{-1}$ ، و چون  $K$  حافظ مساحت است،  $L$  هم هست

$$\det L = 1 \quad (100-10)$$

بنابر نظریه عام تبدیلهای خطی در فصل ۲، برای هر  $K$ ، یک ماتریس  $2 \times 2$  غیرتکین  $M$  می توان یافت، چنانکه  $L$  از نوع ۱، ۲ و ۳ تعریف شده در فصل ۲ باشد و هر سه نوع قابل تحلیل به گونه ای که در فصل ۳ انجام شده باشند.



خواص پایداری نگاشت خطی، وابسته به ویژه مقادارهای  $k_1$  و  $k_2$  ی انتشارگر  $K$  است که عبارت‌اند از عناصر قطری ماتریس  $L$ . رد این ماتریس

$$\tau = K_{11} + K_{22} = k_1 + k_2 \quad (10-10)$$

چنان‌که در فصل ۲ نشان دادیم، اهمیت خاصی دارد. ما توجه خود را منحصر می‌کنیم به نگاشتهای خطی با نقاط ثابت هذلولوی وقتی که  $|\tau| > 2$ ، و با نقاط ثابت بیضوی، وقتی که  $|\tau| < 2$  است. این نگاشتهای هذلولوی و نگاشتهای بیضوی می‌نامند، و بنا به تعاریف فصل ۲، به ترتیب از نوع ۱ و ۲ هستند.

نگاشتهای هذلولوی: داریم  $|\tau| > 2$  و ویژه مقادارها حقیقی و متمایز هستند.  $L$  به صورت

$$L = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad (10-10)$$

است و چون دترمینانش واحد است،  $k_2 = k_1^{-1}$  و

$$k_1, k_2 > 0 \quad (\text{نوع } 1^+) \quad \text{یا} \quad (10-103 \text{ الف})$$

$$k_1, k_2 < 0 \quad (\text{نوع } 1^-) \quad \text{یا} \quad (10-103 \text{ ب})$$

که بدین ترتیب نوع  $1^+$  و  $1^-$  تعیین می‌شود.

از معادلات ۱۰-۹۹ و ۱۰-۱۰۲ مختصات  $Y_n, X_n$  برای  $R_n$  تفکیک می‌شوند و در معادلات

$$X_{n+1} = k_1 X_n$$

$$Y_{n+1} = k_2 Y_n = Y_n / k_1 \quad (10-104)$$

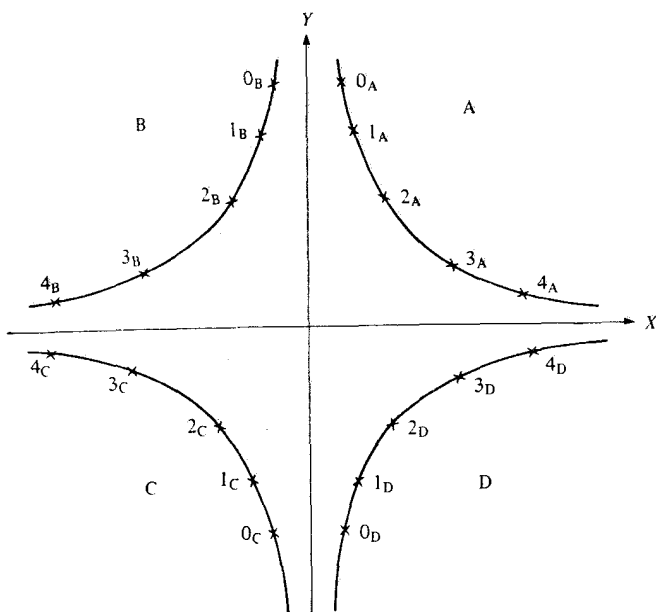
صدق می‌کنند، به طوری که حاصلضرب  $X_n Y_n$  مقدار ثابت می‌ماند.

مدار  $R_n$  روی هذلولیهای قائم‌الزاویه با  $X, Y$  به عنوان محورهایشان به صورت مجانب، قرار دارد و حروف  $A, B, C, D$ ، چنان‌که در شکل ۱۰-۱ نمایش داده شده است، ربعهای متوالی صفحه  $R$  را مشخص می‌کنند.

برای نوع  $1^+$ ، یا  $k_1 > 1$  است یا  $k_2 > 1$  اگر  $k_1 > 1$  باشد در آن صورت  $A, A', A'', A'''$

$A, A'$  عبارت‌اند از نقاط فاز متوالی یک حرکت ممکن، که در مورد  $B, B', B'', B'''$





شکل ۱۰-۱ حرکت در صفحه  $XY$ ، برای یک نگاشت هذلولوی

هم همین گونه است. هر گاه  $k_1 < 1$  باشد  $k_2 > 1$  است و همین دنباله‌ها با ترتیب معکوس حاصل می‌شوند.

برای نوع  $1^-$ ، یا  $|k_1| > 1$  است، یا  $|k_2| > 1$  اگر  $|k_1| > 1$  باشد، در آن صورت  $A^\circ$ ،  $1^A$ ،  $2^A$ ،  $3^A$ ،  $4^A$  نقاط فاز متوالی یک حرکت ممکن هستند و همینطور  $B^\circ$ ،  $1^B$ ،  $2^B$ ،  $3^B$ ،  $4^B$  و  $C^\circ$ ،  $1^C$ ،  $2^C$ ،  $3^C$ ،  $4^C$  و  $D^\circ$ ،  $1^D$ ،  $2^D$ ،  $3^D$ ،  $4^D$ .

برای  $|k_1| < 1$ ، همین دنباله‌ها با ترتیب معکوس حاصل می‌شوند. حرکت بین شاخه‌های همان هذلولی شروع می‌شود.

هر گاه ماتریس  $K$  از نوع ۱ باشد، مبدأ مختصات یک نقطه هذلولوی ناپایدار نگاشت خطی تولید شده به وسیله  $K$  است. برای توصیف ماتریس و نگاشت خطی از یک بیان استفاده می‌کنیم. حرکت در نوع  $1^-$  دارای یک مؤلفه نوسانگری است و بعضی اوقات، چون با چرخش و رای نقطه تعادل، ناپایدار می‌شود، حرکت فرایدار نام می‌گیرد.

در نمایش  $r$  اصلی، مدارها روی هذلولیهایی که مجانبهایشان می‌توانند هر دو خط متمایز مار بر مبدأ باشند قرار دارند.

نگاشتهای بیضوی: داریم  $|T| < 2$  و ویژه مقادارها مختلط هستند. بنابر فصل ۲، یک زاویه حقیقی  $\alpha$  وجود دارد، چنان‌که

$$k_1 = e^{i\alpha}$$

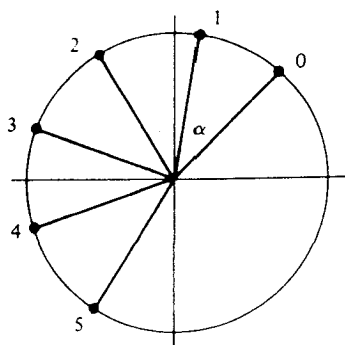
$$k_2 = e^{-i\alpha}$$

$$2 \cos \alpha = \tau = K_{11} + K_{22} \quad (105-10)$$

ماتریس  $K$  به ماتریس  $L$  تبدیل می‌شود

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (106-10)$$

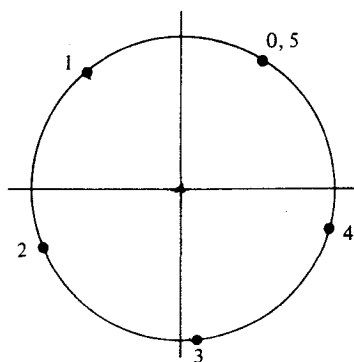
و تبدیل خطی  $99-10$  که توسط  $L(\alpha)$  تولید شده است، یک دوران به اندازه زاویه  $\alpha$  حول مبدأ فضایی است که  $X$  و  $Y$  مختصات دکارتی آن هستند. نقاط متوالی  $R_n$  مربوط به یک مدار نگاشت در فواصل زاویه‌ای مساوی روی یک دایره جا گرفته‌اند.



(107-10)

ماهیت مدار، با تغییرات کوچک دلخواه در زاویه  $\alpha$ ، تغییر می‌یابد. مثلاً فرض کنیم که تناوب پایه  $T$  است

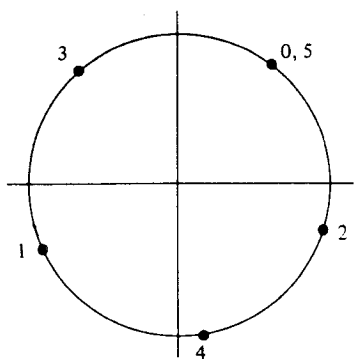
$$\alpha / 2\pi = \frac{1}{5}$$



(۱۰۸-۱۰)

در آن صورت دستگاه پس از دوره تناوب  $\Delta T$  به حالت اولیه اش برمی گردد و حرکت تنها از ۵ نقطه می گذرد. مشابه با این، اگر

$$\alpha/2\pi = \frac{2}{5}$$



(۱۰۹-۱۰)

باز هم دستگاه پس از یک تناوب  $\Delta T$  و دو پیش به دور دایره به حالت اولیه اش برمی گردد. به طور کلی، فرض کنید که  $\alpha/2\pi$  عدد پیش، یک عدد گویاست

$$\alpha/2\pi = N/D \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, D = 1, 2, \dots) \quad (۱۱۰-۱۰)$$

که در آن بنا بر قرارداد،  $N$  صورت و  $D$  مخرج مقسوم علیه مشترک ندارند. در آن صورت، مدارها با تناوب  $DT$  تناوبی هستند و در این دوره تناوب،  $N$  بار حول دایره می پیچند. هر مدار درست از  $D$  نقطه تشکیل می یابد.

توان  $D$  ام انتشارگر نمایانگر یک دوران به اندازه  $\pi/N$  است که ماتریس همانی است، لذا

$$K^D = 1 \quad (\alpha/2\pi = N/D) \quad (111-10)$$

خاصیت تناوبی را می‌توان برحسب بردار مختصه جدید یا بردار مختصه اصلی نیز بیان کرد

$$\mathbf{R}_{n+D} = \mathbf{R}_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (112-10)$$

$$\mathbf{r}_{n+D} = \mathbf{r}_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (113-10)$$

در نمایش  $\mathbf{r} = (x, y)$  اصلی، نقاط  $\mathbf{r}_n$  روی بیضی قرار دارند. از این رو هرگاه ماتریس  $K$  از نوع ۲ و با  $|\tau| < 2$  باشد، مبدأ یک نقطه پایدار بیضوی از نگاشت تولید شده به وسیله  $K$  است و همین نام را در مورد  $K$  و نگاشت هم به کار می‌بریم.

حال فرض کنیم عدد پیچش یک عدد گنگ است. در این صورت، دستگاه پس از هر ضربی از زمان  $T$ ، به حالت اولیه اش بر نمی‌گردد و حرکت تناوبی نیست. پس از گذشت مدت زمان کافی، نقاط  $\mathbf{R}_n$  به حد دلخواه به هر نقطه‌ای از دایره  $|\mathbf{R}| = |\mathbf{R}_0|$  در صفحه  $XY$  میل می‌کنند و نقاط  $\mathbf{r}_n$  هم به سوی هر نقطه‌ای از بیضی متناظر با دایره مذکور میل می‌کنند. مبدأ مختصات در این صورت هم هنوز یک نقطه پایدار بیضوی است.

چون در نزدیکی دلخواه هر عدد گنگ، اعداد گویا وجود دارند، لذا برای مقادیر  $\alpha/2\pi$  هم، مدارهای تناوبی به دلخواه نزدیک به هر مقدار گنگ آن وجود دارند و رفتار کیفی دستگاه به ازای تغییرات به دلخواه کوچک  $\alpha$ ، تغییر می‌کند. دستگاه برای تغییرات  $\alpha$ ، ناپایدار ساختاری است.

البته در دستگاههای حقیقی هم انواع پریشیدگیهای کوچک وجود دارند، مثلاً جملاتی که دستگاه را غیرهامیلتونی یا غیرخطی می‌کنند و توصیف دستگاه نمی‌تواند برای دوره‌های زمانی به دلخواه دراز ادامه یابد، به طوری که مشاهده تمایز بین دو مقدار بسیار نزدیک به هم  $\alpha$ ، در عمل مشکل است. با این همه، این ناپایداری ساختاری، مشکلات زیادی برای نظریه عام دستگاههای غیرخطی فراهم می‌کند و منشأ پدیده‌های جدید و پراهمیتی می‌شود که در فصل ۱۱ بیان خواهند شد.

اکنون، بسیاری از خواص دستگاههای خطی با شرایط تناوبی را، توسط انتشارگر تناوب  $K$ ، که تعریف ۱۰-۸۶ آن به انتخاب یک مبدأ مناسب زمان وابستگی دارد به دست آورده‌ایم. در مسئله ۱۰-۱۹ از خواننده خواسته‌ایم که نشان بدهد این خواص مستقل از انتخاب مبدأ مذکور است.

در مثالهایی که آورده‌ایم، توجه خود را منحصرأ معطوف به مهمترین مثالهای نقاط ثابت نگاشتهای خطی حافظ مساحت کرده‌ایم. بسیاری از انواع دیگر نقاط ثابت نگاشتهای خطی



وجود دارند از جمله نقاط متناظر با گره‌های پایدار و ناپایدار، گره‌های ویژه و ناویژه، نقاط حلزونی و ستاره‌ها (فصل ۳) و همچنین نقاط هذلولوی و بیضوی نگاشت‌هایی که حافظ مساحت نیستند.

## ۷-۱۰ نیروهای تناوبی و تشدید پارامتری

حال نظریهٔ ارائه شده در سه بخش گذشته را روی دستگاه‌هایی که در آنها نیرو متناسب با جابه‌جایی  $q$ ، و تناوبی است به کار می‌بندیم. ساده‌ترین مثالها نیروی ضربه‌ای است که به آن می‌پردازیم.

### مثال ۸-۱۰

انتشارگر تناوب ذره‌ای به جرم  $m$  و مختصهٔ  $q$  را که در معرض یک دنبالهٔ نامتناهی ضربه‌های

$$P(q) = aq \quad t = nT (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (114-10)$$

قرار گرفته است، به دست آورید و پایداری آن را تحقیق کنید، و همچنین نمودار حرکت را در یکربندی و در فضای فاز در زمانهای  $nT$  ترسیم کنید.

به ازای  $a > 0$ ، ضربه‌ها همیشه ذره را از مبدأ به دور می‌رانند و باید انتظار ناپایداری داشته باشیم. هرگاه  $a < 0$  باشد، ضربه‌ها ذره را همواره به سوی مبدأ می‌کشند و بایست انتظار پایداری داشته باشیم، مگر این‌که ضربه خیلی سخت باشد. اگر مسئله را تحلیل کنیم این انتظارات تأیید می‌شوند.

انتشارگر تناوب،  $K$ ، مستقیماً از معادلهٔ ۸۴-۱۰ مربوط به مثال ۷-۱۰، به دست می‌آید. کافی است که ضربه در زمان  $t' = 0$  بررسی شود که نتیجهٔ آن، ماتریس

$$K = K_1(T, 0) = \begin{pmatrix} 1 + aT/m & T/m \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (115-10)$$

است و رد آن عبارت است از

$$\tau = 2 + aT/m \quad (116-10)$$

بنابر نتایج بخش ۶-۱۰، خواص پایداری عبارت‌اند از:

(الف ۱۱۷-۱۰)  $aT/m > 0$  ناپایدار برای

(ب ۱۱۷-۱۰)  $-4 < aT/m < 0$  پایداری برای

(ج ۱۱۷-۱۰)  $aT/m < -4$  ناپایدار (فراپایدار) برای



برای نمودارها، فرض می‌کنیم در همه جا  $T/m = 1$  است.  
برای حرکت پایدار فرض می‌کنیم  $a = -1$ ؛ پس

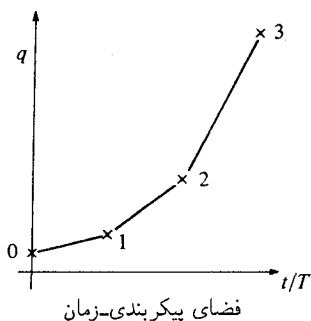
$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (118-10)$$

و یک حرکت ممکن عبارت است از

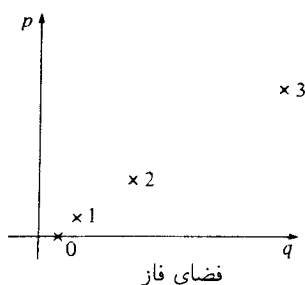
$$\begin{aligned} r_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ r_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (119-10)$$

که پیوسته چرخه‌ای است. همه مدارهای نگاشت با این انتشارگر، تناوبی هستند و دوره تناوبشان  $6T$  است

(۱۲۰-۱۰) ب)



(۱۲۰-۱۰) الف)



ضربه‌ها ذره را به سوی مبدأ پس می‌زنند. چون هیچ نیرویی در فاصله‌های زمانی بین  $nT$ ها وجود ندارد، حرکت کامل در همه زمانها را در این مثال می‌توان با وصل کردن نقاط  $r_n$  با خطوط راست به همدیگر ترسیم کرد. بنا به نظریهٔ ارائه شده در بخش ۱۰-۶، می‌توان طرز نمایش تازهٔ  $(XY) = R$  را چنان پیدا کرد که در آن، انتشارگر به وسیله یک ماتریس دوران  $L(-\alpha)$  نظیر ۱۰۶-۱۰ نمایش داده شود، که در آن صورت داریم

$$2 \cos \alpha = \text{Tr} K = 2 + aT/m \quad (\alpha > 0) \quad (121-10)$$





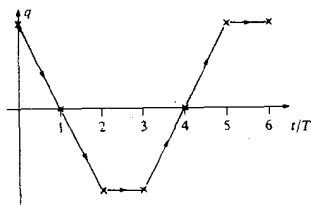
توجه داشته باشید که دوران ساعتگرد است. دستگاههای نیوتونی نوعاً این طور هستند. در مثال حاضر،  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ ، لذا دوران به اندازه زاویه  $60^\circ$  است و در این طرز نمایش تازه،  $R_n$  های متوالی رئوس یک شش وجهی هستند. برای  $a$ ی دلخواه در گستره  $(10-117)$  (ب)، همه پیچیدگیهای بحث شده در پایان بخش پیش رخ می دهند. معمولاً حرکت تناوبی نیست، و تعداد نقاط روی بیضی متناظر نامتناهی است.

برای حرکت ناپایدار از نوع  $1^+$  با  $\tau > 2$ ، همان شرایط اولیه قبلی و  $a = 1$  را در نظر می گیریم. ضربه ها ذره را از مبدأ دور می رانند،

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

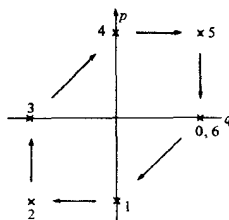
و نمودارها به صورت زیرند

(۱۰-۱۲۲ ب)



فضای پیکربندی-زمان

(۱۰-۱۲۲ الف)

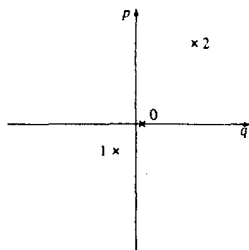


فضای فاز

برای حرکت ناپایدار یا فراپایدار  $\tau < -2$ ، نوع  $1^-$ ، فرض می کنیم که  $a = -5$  است. ضربه ها ذره را بشدت به آن سوی مبدأ می رانند

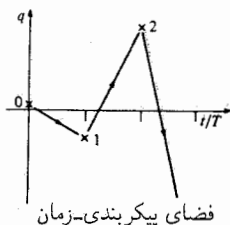
$$K = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

و نمودارها رفتار نوسانی بروز می دهند:



(۱۰-۱۲۳ الف)

فضای فاز



(۱۰-۱۲۳ ب)

فضای پیکربندی-زمان

مثال بعدی از موارد مهمی است که در آن یک دستگاه هامیلتونی خطی در معرض تغییرات تناوبی پارامترهایش قرار دارد و از این تغییرات که بگذریم خودگردان است. مانند بچه‌ای روی تاب که طول مؤثر خود را با تغییر وضعیت بدنش، تغییر می‌دهد، یا خازن میکروفونی که ظرفیت آن در اثر نواختن دائمی یک نت با یک آلت موسیقی، به‌طور تناوبی تغییر می‌یابد. این‌گونه تغییرات پارامتری با تغییرات ناشی از اعمال نیروهای خارجی، نظیر هل دادن یک تاب، یا پر کردن یک خازن، که برایشان نظریهٔ بخش ۱۰-۳ لازم است، متفاوت‌اند.

## مثال ۱۰-۹

پایداری حرکت یک ذره به جرم  $m$  و مختصهٔ  $q$  را که هر دو در معرض یک نیروی بازگردانندهٔ خطی  $-m\omega^2 q$  و یک دنبالهٔ نامتناهی ضربهٔ  $(10-114)$ ، مثال ۱۰-۸، قرار دارد تحقیق کنید. فرض کنید که  $a/m\omega$  کوچک و مثبت است.

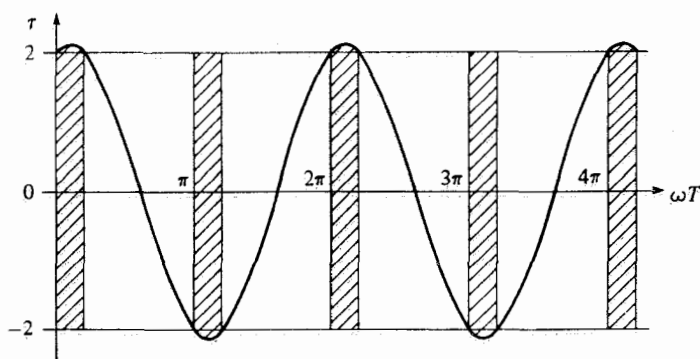
در غیاب ضربه‌ها، یک نوسانگر خطی با بسامد زاویه‌ای  $\omega$  خواهیم داشت. هر ضربه را می‌توان به‌عنوان یک تغییر بزرگ و ناگهانی، اما موقتی، در ضریب  $q$  تلقی کرد، لذا این یک تغییر پارامتری است. بین زمانهای  $nT$ ، انتشارگر همان انتشارگر نوسانگر خطی است که با  $K_{LO}$  در معادلهٔ ۱۰-۶۹ ارائه شده است. در زمانهای  $nT$ ، ضربه با انتشارگر  $K_I$  که از معادلهٔ ۱۰-۷۸ به‌دست می‌آید عمل می‌کند. پس بنابر قرارداد ضربه و قاعدهٔ ضرب، انتشارگر تناوب دستگاه عبارت است از

$$K = K_{LO}(T, \circ) K_I = \begin{pmatrix} \cos \omega T & (m\omega)^{-1} \sin \omega T \\ -m\omega \sin \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (10-124)$$

و رد آن هم

$$\tau = 2 \cos \omega T + (a/m\omega) \sin \omega T \quad (10-125)$$

برای محاسبهٔ پایداری، نیازی به عناصر قطری  $K$  نیست. جملهٔ اول از نوسانگر خطی می‌آید و هرگاه  $T = n\pi/\omega$  به‌ازای  $n$  مثبت صحیح باشد، دارای ضریب ۲ است. حال،  $T$  تناوب تغییر پارامتری است و  $2\pi/\omega$  تناوب نوسانگر است، لذا نوسانگر، با تناوبهایی برابر با هر مضرب از نصف



شکل ۱۰-۲. نوارهای پایداری یک نوسانگر خطی با ضربه‌های خطی تناوبی. رد  $\tau$  در ماتریس انتشارگر  $K$  برحسب  $\omega T$ ، که در آن  $T$  تناوب ضربه‌ها و  $2\pi/\omega$  تناوب نوسانگر است، ترسیم شده است.

بسامد طبیعی‌اش به هر تغییرات پارامتری، هر قدر هم کوچک، بسیار حساس است. این چنین تغییرات پارامتری می‌توانند نوسانگر را ناپایدار سازند. نمودار رد  $\tau$  برحسب  $\omega T$  برای این مثال در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده است.

مقادیر ناپایدار  $T$  از مقادیر  $\omega T$  ای که برایشان منحنی پیوسته  $\tau(\omega T)$  بیرون از گستره  $[-2, 2]$  است، به دست می‌آیند. برای نوار ناپایداری  $n$ ام یک حد واضح در  $\omega T = n\pi$  قرار دارد، و یک محاسبه مثلثاتی کوتاه نشان می‌دهد که حد دیگر از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega T = n\pi + \tan^{-1}(2m\omega/a) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (126-10)$$

که در آن مقادیر کمان تانژانت بین  $0$  و  $\frac{1}{4}\pi$  گرفته شده‌اند. این ناپایداری را تشدید پارامتری می‌نامند، و به‌طور کلی در مواردی پیش می‌آید که تناوب تغییرات پارامتری تناوبی، نزدیک به هر مضربی از نصف تناوب طبیعی دستگاه خودگردان ناپریشیده است. تشدید پارامتری، هنگامی که تغییرات پارامتری ضربه‌ای نیستند، نیز اتفاق می‌افتد، ولی به‌صورت توابع تناوبی هموار از زمان.

## مسائل

### دستگاههای خطی مرتبه اول

۱. حرکت دستگاهی را به دست آورید که توسط یک تابع  $x(t)$  که در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند، نمایش داده می‌شود

$$\dot{x} + cx = a \quad (0 \leq t < \infty)$$



که در آن  $c$  و  $a$  مقادیر ثابت حقیقی دلخواه هستند. شرط اولیه حرکت  $x(0) = 0$  گرفته می‌شود. به‌ازای کدام مقادیر ثابت فوق، حرکت محدود است؟

۲. تعداد مولید در واحد زمان یک جمعیت گورخر  $x(t)$  در یک شکارگاه،  $Bx(t)$  است. تعداد گورخرهایی که در واحد زمان می‌میرند با  $L + Dx(t)$  داده می‌شود که در آن  $L$  تعداد کشته‌شدگان به‌وسیله شیرهاست و  $Dx(t)$  تعداد مرگ به علل دیگر است. هرگاه  $x_0$  جمعیت در  $t = 0$  باشد،  $x(t)$  را برای  $t > 0$  تعیین کنید. به‌ازای کدام مقادیر ثابت  $B$ ،  $L$  و  $D$ ، جمعیت گورخرها رشد می‌کند، کاهش می‌یابد و یا ثابت می‌ماند؟

۳. چنانچه مقادیر ثابت  $a$ ،  $c$ ،  $T$  و  $\gamma$  همه‌شان مثبت باشند،  $x(t)$  را برای دستگاه‌هایی که معادله حرکتشان به‌صورت زیر است، به‌دست آورید و آن را ترسیم کنید.

$$\dot{x} + cx = b(t), \quad x(-T) = 0$$

که در آن  $b(t)$  به‌صورت زیر است

$$b(t) = 0 \quad (|t| > T) \quad (\text{الف})$$

$$= a(T - |t|) \quad (|t| \leq T)$$

$$b(t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad (\text{ب})$$

$$= ae^{-\gamma t} \quad (t > 0)$$

$$b(t) = 0 \quad (|t| > T) \quad (\text{ج})$$

$$= -a(t^2 - T^2) \quad (|t| \leq T)$$

$$b(t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad (\text{د})$$

$$= a \sin \gamma t \quad (t > 0)$$

۴. حرکت هر یک از چهار دستگاه خطی مرتبه اول توسط تابعی به‌صورت  $x(t)$  نمایش داده می‌شود که در

$$\dot{x} = a(t)x$$

صدق می‌کند. با استفاده از نظریه انتشارگر،  $x(1)$  را در صورتی که  $x(0) = 2$  باشد، در هر یک از دستگاه‌های چهارگانه زیر تعیین کنید:



- (الف) هرگاه  $x(1) = 8$  باشد،  $x(0) = 4$  است،  
 (ب) هرگاه  $x(0) = 3$  باشد،  $x(\frac{1}{4}) = 1$  و هرگاه  $x(\frac{1}{4}) = 3$  باشد،  $x(1) = 1$  است،  
 (ج) هرگاه  $x(0) = 1$  باشد و  $K(2, 1) = -1$  باشد،  $x(2) = 6$  است،  
 (د) هرگاه  $x(-1) = 6$  باشد،  $x(1) = 3$  و  $K(5, -1) = -5$  است. و هرگاه  $x(5) = 10$  باشد،  $x(0) = 1$  است.

۵. حرکت یک دستگاه از معادله

$$\dot{x} = v(x)$$

پیروی می‌کند که در آن

$$v(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ |x| & |x| \leq 1 \end{cases}$$

مطلوب است انتشارگرهای  $K(1, 0)$ ،  $K(0, -1)$ ،  $K(-1, 0)$ ،  $K(1, -1)$ ،  $K(1, 7)$  و  $K(10, -10)$ . سپس اگر  $x(-10) = 3$  باشد،  $x(10)$  را به دست آورید.

۶. معادله حرکت یک دستگاه عبارت است از

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 & (|t| > T) \\ -a(t^2 - T^2)x & (|t| \leq T) \end{cases}$$

انتشارگرهای  $K(T, -T)$ ،  $K(-T, T)$ ،  $K(2T, -2T)$  را تعیین کنید و در صورتی که  $x(-2T) = 3$  باشد،  $x(2T)$  را پیدا کنید.

۷. جمعیت سهره‌های یک جزیره در سال ۱۹۸۱ به وسیله  $x(t)$  که در آن  $t$  برحسب روز و از نصف شب آخرین روز سال ۱۹۸۰ شمرد می‌شود، نمایش داده می‌شود. هرگاه  $B(t)$  آهنگ تولید (سراز تخم در آوردن) و  $D(t)$  آهنگ مرگ سرانه این پرندگان باشد، در آن صورت معادله تغییر جمعیت عبارت است از

$$\dot{x} = [B(t) - D(t)]x$$

با تقریب بسیار خوب معلوم شده است که

$$B(t) = 0 \quad (0 \leq t < 100, 150 \leq t \leq 365)$$

$$B(t) = 2b(t - 100)(150 - t) \quad (100 \leq t < 150)$$

$$D(t) = c + \frac{1}{4}B(t) \quad (0 \leq t < 365)$$

انتشارگرهای  $K(100, 0)$ ،  $K(150, 100)$ ، و  $K(365, 150)$  ناظر به این تقریب را بیابید. چنانچه جمعیت در پایان سال  $1980$ ، برابر با  $1000$ ، و در پایان سال  $1981$  برابر با  $1100$  بوده باشد، رابطه‌ای بین  $b$  و  $c$  به‌ازای این دو رقم مشخص به‌دست آورید.

۸. سه دستگاه مختلف دارای یک معادله حرکت به‌صورت  $\dot{x} = a(t)x$  هستند، که در آن  $a(t)$  به تناوب  $T > 0$  است. انتشارگر تناوب  $K$  را پیدا کنید و پایداری حرکت را به‌ازای همه مقادیر حقیقی ثابتهای  $b$  و  $c$  تعیین کنید.  $a(t)$  برای دستگاههای سه‌گانه به‌صورت زیر داده می‌شود

$$a(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < \frac{1}{4}T) \\ b & (\frac{1}{4}T \leq t < T) \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$a(t) = b + ct \quad (0 \leq t < T) \quad (\text{ب})$$

$$a(t) = b|t - \frac{1}{4}T| \quad (0 \leq t \leq T) \quad (\text{ج})$$

۹. معادله حرکت یک دستگاه  $\dot{x} = a(t)x$  است که در آن  $a(t)$  به‌صورت زیر تعیین می‌شود

$$a(t) = ct \quad (0 \leq t < 1)$$

$$a(t) = a(t+1)$$

انتشارگر تناوب  $K$  را به‌دست آورید و پایداری حرکت را به‌ازای همه مقادیر غیرصفر حقیقی  $c$  تعیین کنید. همچنین انتشارگر تناوب  $K(t+1, t)$  را برای همه  $t$ ها به‌دست آورید و نمودار  $x(t)$  را بین  $t = -2$  و  $t = 2$ ، هرگاه  $x(-2) = 1$  باشد، ترسیم کنید. چنانچه  $x(-2) = 3$  می‌بود، نمودار چگونه تغییر می‌یافت؟

۱۰. ثابت کنید که هرگاه یک سیستم دارای معادله حرکت  $\dot{x} = a(t)x$  که در آن  $a(t)$  تناوب  $T$  را دارد، باشد، در آن صورت

$$K(t+T, t) = K(T, 0)$$



است به طوری که انتشارگر تناوب  $K$  مستقل از انتخاب مبدأ زمان می شود و خواص پایداری دستگاه از این انتخاب متأثر نمی شوند. (این خاصیت دستگاههای مرتبه اول را با دستگاههای مرتبه دوم متناظرشان که در مسئله های ۱۰-۱۹ زیر ارائه خواهند شد، مقایسه کنید.)

۱۱. آهنگ زاد و مرگ سرانه پرنندگان در مسئله ۱۰-۷، بنابر مشاهدات وابسته به فصول سال بود صرف نظر از هر عامل مؤثر دیگر، انتشارگر تناوب  $K$  برای جمعیت پرنندگان که در آخر هر سال شمارش می شوند چیست؟ و همچنین  $K(۳۶۵ n, ۰)$ ،  $K(۳۶۵ n + ۱۰۰, ۱۰۰)$ ،  $K(۳۶۵ n, ۰)$  به ازای  $n$  صحیح و به فرض هر سال برابر با ۳۶۵ روز و با هر روز به عنوان واحد زمان چگونه اند؟ جمعیت های مورد انتظار در پایان سال ۱۹۹۰ و در صدمین روز سال ۱۹۹۱ چقدرند؟

مسئله های دستگاههای مرتبه دوم  
۱۲. حرکت یک نوسانگر خطی واداشته، با هامیلتونی معادله ۱۰-۳۸ را در حالات زیر پیدا کنید

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ F_0 & (0 < t < T) \\ 0 & (T \leq t) \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ F_0 t & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (T < t) \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ F_0 e^{-\alpha t} & (t > 0) \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ F_0 e^{-\alpha t} \sin t & (t > 0) \end{cases} \quad (\text{د})$$

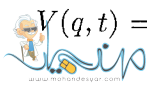
که در آنها  $F_0$ ،  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $T$  مقادیر ثابت مثبت اند و  $\dot{q}(0) = q(0) = 0$  است.

۱۳. در معادله ۱۰-۴۹ یعنی  $\Omega = \omega(1 + \varepsilon)$  نشان بدهید که  $q(t)$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$q(t) = \frac{2a}{\omega^2(2\varepsilon + \varepsilon^2)} \sin \frac{1}{4} \omega \varepsilon t \sin \omega(1 + \frac{1}{4} \varepsilon)t$$

برای مورد ۱،  $\varepsilon = 0$ ، نمودار  $q(t)$  را ترسیم کنید و نشان دهید که  $q(t)$  از یک نوسان سریع به بسامد  $\omega(1 + \frac{1}{4} \varepsilon)$  که دامنه آن به آرامی و با بسامد  $\frac{1}{4} \omega \varepsilon$  تغییر می کند، تشکیل یافته است.

۱۴. (الف) یک نوسانگر خطی با یک پتانسیل وابسته به زمان خطی  $V(q, t) = -qF(t)$



پیشیده است، که در آن با  $|t| \rightarrow \infty$  مقدار  $F(t) \rightarrow 0$  میل می‌کند. در گذشته دور که  $F(t)$  را می‌توان نادیده گرفت معادله حرکت به صورت زیر است

$$q(t) = \left( \frac{2E_0}{m\omega^2} \right)^{1/2} \sin(\omega t + \delta)$$

نشان دهید که در آینده، که  $F(t)$  دوباره نادیده گرفته می‌شود، انرژي نوسانگر به صورت

$$E = E_0 + \left( \frac{2E_0}{m} \right)^{1/2} \operatorname{Re}(e^{i\delta} \mathcal{F}) + \frac{1}{2m} |\mathcal{F}|^2$$

است که در آن  $\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) e^{-i\omega t}$  است.

(ب) در مورد خاص

$$F(t) = -\varepsilon U e^{-\lambda|t|} \quad (\lambda > 0)$$

$E - E_0$  را پیدا کنید و نتایج خود را با مسئله ۸-۲۱ ب مقایسه کنید. برای این تفاوت دلیلی ارائه دهید.

۱۵. سه دستگاه مرتبه دوم با پارامترهای وابسته به زمان، در معادله حرکتی به صورت  $\ddot{\mathbf{r}} = A(t)\mathbf{r}$  صدق می‌کنند

(الف) برای دستگاه نخست

هرگاه  $x(0) = 1$ ،  $y(0) = 0$  باشد،  $x(1) = 2$  و  $y(1) = 3$  است و هرگاه  $x(0) = 0$ ،  $y(0) = 1$  باشد،  $x(1) = -1$  و  $y(1) = -1$  است انتشارگر  $K(1, 0)$  را از  $t = 0$  تا  $t = 1$  را تعیین کنید و هرگاه  $x(0) = -1$ ،  $y(0) = 5$  باشد،  $y(1)$  را به دست آورید.

(ب) برای دستگاه دوم، به ازای  $a$ ،  $b$  و  $T$  حقیقی و غیرصفر

هرگاه  $\mathbf{r}(0) = (a, 0)$  باشد،  $\mathbf{r}(T) = (1, -1)$ ؛ و

هرگاه  $\mathbf{r}(0) = (0, b)$  باشد،  $\mathbf{r}(T) = (-1, 0)$  است.

$K(T, 0)$  را تعیین کنید و هرگاه  $\mathbf{r}(0) = (1, 1)$  باشد،  $\mathbf{r}(T)$  را به دست آورید.

(ج) برای دستگاه سوم، به ازای  $T$  حقیقی و غیرصفر

هرگاه  $\mathbf{r}(0) = (4, 1)$  باشد،  $\mathbf{r}(T) = (2, 1)$ ؛ و هرگاه  $\mathbf{r}(0) = (2, 1)$  باشد،  $\mathbf{r}(T) = (0, 1)$  است.

$K(T, 0)$  را تعیین کنید و هرگاه  $\mathbf{r}(T) = (-2, 2)$  باشد،  $\mathbf{r}(0)$  را به دست آورید.

۱۶. نوسانگر خطی مثال ۱۰-۶ را در زمان  $t = 0$ ، یکباره رها می‌کنیم تا به صورت یک ذره آزاد

در آید. انتشارگر  $K(t_1, t_0)$  را به ازای  $t_0 < 0 < t_1$  به دست آورید و موضع  $x_1 = x(t_1)$  را





به صورت تابعی از  $x_0 = x(t_0)$ ، در صورتی که  $p(t_0) = 0$  باشد، پیدا کنید. به ازای کدام مقادیر  $t_0$  و  $x_0$ ، مقدار  $p(t_1)$  نیز برای همه مقادیر  $t_1$  صفر خواهد شد؟ و در آن صورت مقدار  $x_1$  چه خواهد بود؟

۱۷. دو ضربه  $P_j(q) = b_j q$  ( $j = 1, 2$ ) در زمانهای  $t'_j$  ( $t'_1 < t'_2$ ) که در آن مقادیر ثابت حقیقی غیر صفرند، روی ذره‌ای به جرم  $m$  که گذشته از ضربه‌های فوق به آزادی حرکت می‌کند، وارد می‌شوند. انتشارگر این ذره را پیدا کنید.

۱۸. انتشارگر تناوب  $K$  برای ذره‌ای به جرم  $m$  را پیدا کنید. این ذره هرگاه در معرض ضربه‌ای واقع نشود، آزاد حرکت می‌کند و ضربه‌ها در دو دنباله  $P_1(q) = b_1 q$  و  $P_2(q) = b_2 q$  در زمانهای به ترتیب  $nT$  و  $(n + \frac{1}{p})T$  که در آنها  $b_1$  و  $b_2$  مقادیر ثابت حقیقی غیر صفرند و  $n$  روی همه اعداد صحیح گسترش دارد، وارد می‌شوند. ویژه مقدارهای  $K$  را به دست آورید و خواص پایداری دستگاه را مورد بحث قرار دهید.

۱۹. ثابت کنید که هرگاه یک دستگاه دارای معادله حرکت  $\dot{r} = A(t)r$  که در آن  $A(t)$  دارای تناوب  $T$  است، باشد، در آن صورت

$$K(t+T, t) = K(T, 0)$$

به طوری که انتشارگر تناوب  $K$  و خواص پایداری دستگاه مستقل از انتخاب مبدأ زمان هستند. (این نتیجه را با نتیجه مسئله ۱۰-۱۰ مقایسه کنید.)

۲۰. در فواصل زمانی

$$nT < t < (n + \rho)T \quad (T > 0, 0 < \rho < 1)$$

که در آن  $n$  همه اعداد صحیح را شامل می‌شود، ذره‌ای به جرم واحد به آزادی حرکت می‌کند. در بقیه فواصل زمانی، این ذره در معرض کنش یک نیروی نگهدارنده خطی است، به طوری که معادله حرکت آن به صورت  $\ddot{q} = -q$  است. به ازای  $\rho = \frac{1}{p}$  و  $\rho = \frac{1}{q}$ ، مقادیری از  $T$  را تعیین کنید که در آن، حرکت پایدار است.

## حرکت آشوبناک و نگاهشهای غیرخطی

### ۱-۱۱ حرکت آشوبناک

طی ده فصل گذشته، نظریه‌های تحلیلی و روشهای بسیاری برای مطالعه دستگاههای دینامیکی و جواب مسائل دینامیکی ارائه کرده‌ایم. دستگاهها چنان انتخاب شده بودند، که این تحلیل‌ها می‌توانست به‌کار بسته شود.

باری، فهمیدن اکثر دستگاهها مشکلاست. در برخی از آنان، می‌توان با توسل به نظریه‌های تحلیلی پیچیده‌تری که توصیفشان رفته است، و یا با گسترش عددی این روشهای تحلیلی، از پس مشکلات برآمد، اما در پاره‌ای دیگر این کار ناممکن می‌نماید چون که گاهی اوقات کیفیت حرکت با هر آنچه قبلاً با آن سروکار داشتیم، متفاوت است: حرکت آشوبناک است. برای این که دستگاهی حرکت آشوبناک داشته باشد، نباید الزاماً پیچیده باشد. مثلاً افزودن جملات مربعی یا سایر جملات غیرخطی به یکی از دستگاههای خطی فصل ۱۰، می‌تواند نمایش یک دستگاه با حرکت آشوبناک باشد.

نظریه‌های تحلیلی‌ای وجود دارند که می‌توانند حرکت آشوبناک را روشنتر کنند اما از سطح این کتاب خارج‌اند، پس باید به استفاده از روشهای عددی و یاری بعضی از تحلیلها اکتفا کنیم. در عمل، این یکی از راههای اصلی تفحص در این پدیده‌هاست. ماشین حسابهای جیبی برای نگاهشهای مرتبه اول از بخش ۱-۳ کافی هستند؛ و در واقع در بعضی از کشفیات اصلی این زمینه، از این

ماشین حسابها بهره‌گیری شده است. با یاری محاسبه‌گرهای برنامه‌پذیر، خواننده دیگر در تحقیق و تأیید قسمت اعظم این بخش به تجربه شخصی خود نباید مشکلی داشته باشد، اما برای نگاشتهای حافظ مساحت مرتبه دوم از بخش ۱۱-۴، معمولاً محاسبات گسترده‌تری لازم است.

در فصل ۱۰ رابطه بین نگاشتهای حافظ مساحت خطی و دستگاههای هامیلتونی خطی را که تابع هامیلتونی‌شان در زمان  $t$  تناوبی بود، نشان دادیم. در بخش ۱۱-۵ نشان می‌دهیم که همین رابطه در مورد دستگاههای غیرخطی هم مصداق می‌یابد به طوری که حرکت آشوبناک برای نگاشتهای حافظ مساحت، متضمن حرکت آشوبناک برای دستگاههای هامیلتونی هست. دستگاههایی با زمان گسسته، که حرکتشان با نگاشتها معین می‌شود، پیش از همه مورد بحث قرار می‌گیرند.

## ۱۱-۲ نگاشتها و زمان گسسته

زمان یک متغیر پیوسته است: باطل نمایی که زنون ایلیایی درباره آشیل و لاک‌پشت طرح کرده است، بر مبنای این پیوستگی است؛ و برای نیوتون، زمان نمونه کامل یک متغیر پیوسته است. با این وصف، بعضی اوقات می‌بینیم که بد نیست زمان را گسسته تلقی کنیم. این امر به‌ویژه در دستگاههایی که متأثر از شرایط متغیر تناوبی هستند، صحت می‌یابد. در فصل گذشته نشان دادیم که بسیاری از خواص مهم دستگاههای خطی با شرایط تناوبی می‌توانستند با بررسی تنها یک دنباله حالتها در زمانهای متفاوت با مضارب تناوب  $T$ ، به دست آیند. این، با تلقی زمان به عنوان یک متغیر گسسته، هم‌ارز است. همین امر شامل دستگاههای غیرخطی با شرایط تناوبی هم می‌شود. برای مثال، دستگاههای زیست‌شناختی، اجتماعی و اقتصادی متأثر از فصول سال هستند و اینها هم تقریباً به صورت متناوب با دوره‌ای یکساله تغییر می‌کنند؛ برای برخی حشرات دوره تناوب مناسب، یک روز است؛ بعضی از اجزای یک خودرو، در معرض نیروهای تناوبی ناشی از ارتعاشات موتور است و بسیاری دستگاههای مکانیکی، الکتریکی و الکترونیکی، تحت تأثیر شرایط تناوبی معینی هستند.

برخی اوقات، به کارگیری یک متغیر زمان گسسته صرفاً به خاطر سهولت کار نیست، بلکه الزامی است چون داده‌هایی که قوانین حرکت بر آن استوارند فقط می‌توانند یکبار در هر دوره تناوب در دسترس باشند و دستیابی به آنها در همه اوقات بسیار مشکل است، چنانکه در مورد بعضی داده‌های اقتصادی یا پزشکی پیش می‌آید. تقریب به کار رفته در تلقی معادلات دیفرانسیل با زمان به عنوان یک متغیر مستقل، به صورت معادلات تفاضلی نیز، برداشت از زمان به عنوان یک متغیر گسسته را ایجاب می‌کند.

یک دستگاه مرتبه  $n$ ام با زمان گسسته، با دو خاصیت تعریف می‌شود:

(۱) حالت دستگاه با  $n$  متغیر حقیقی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یا یک متغیر بردار حقیقی  $n$ بعدی،  $x$ ، که می‌تواند به عنوان مختصات یک فضای  $n$ بعدی انتزاعی، به نام فضای فاز تلقی شوند، نمایش



داده می‌شود.

(۲) حرکت دستگاه با یک دنباله بردارهای  $\mathbf{r}_t$  نمایش داده می‌شود که دارای متغیر زمان عدد صحیح  $t$  که در رابطه

$$\mathbf{r}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_t, t) \quad (1-11)$$

صدق می‌کند هستند.  $\mathbf{F}$  یک تابع برداری از  $\mathbf{r}$  و  $t$  است.

فقط دستگاههای خودگردانی را که در آنها  $\mathbf{F}$  به‌طور صریح وابسته به زمان نیست بررسی می‌کنیم. معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\mathbf{r}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_t) \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2-11)$$

که در آن  $\mathbf{F}$  یک تابع برداری یا نگاشت فضای فاز بر روی خودش است. در دینامیک، واژه «نگاشت»، معمولاً در یک معنای محدود به‌کار می‌رود که دال بر تکرار است. برای مثال، از معادله ۲-۱۱ چنین برمی‌آید که

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0), \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)), \mathbf{r}_3 = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0))), \dots \quad (3-11)$$

برای تسهیل از علامت  $\mathbf{F}^{(m)}$  استفاده می‌کنیم که به معنای تکرار  $m$  دفعه‌ای نگاشت است. بدین ترتیب

$$\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{F}^{(m-1)}(\mathbf{r})), \quad (m = 2, 3, 4, \dots) \quad (4-11)$$

شاخص به‌کار رفته، ارتباطی به دیفرانسیل‌گیری ندارد. در عمل توجه خود را به زمانهای غیرمنفی منحصر می‌کنیم.  $t = 0, 1, 2, \dots$ .

غالباً، دستگاههای با زمان گسسته، در معادلات تفاضلی صدق می‌کنند، اما در این صورت می‌توان آنها را همیشه به شکل ۱-۱۱ و یا ۲-۱۱ در آورد. مثلاً معادله

$$\Delta x_t \equiv x_{t+1} - x_t = G(x_t) \quad (5-11)$$

می‌تواند چنین نوشته شود

$$x_{t+1} = x_t + G(x_t) \quad (6-11)$$

و معادله

$$\delta^2 q_t \equiv q_{t+1} - 2q_t + q_{t-1} = P(q_t) \quad (۷-۱۱)$$

می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$q_{t+1} = q_t + p_t + P(q_t) \quad (۸-۱۱)$$

$$p_{t+1} = p_t + P(q_t)$$

بنابراین دارای شکل ۲-۱۱ با  $r = (q, p)$  است و

$$F(q, p) = \begin{pmatrix} q + p + P(q) \\ p + P(q) \end{pmatrix} \quad (۹-۱۱)$$

معادله‌های ۸-۱۱ بالا در بخش ۴-۱۱ که در آن  $q$  یک مختصهٔ پیکربندی،  $p$  یک اندازه حرکت فیزیکی و  $P(q)$  یک ضربهٔ تناوبی را نمایش می‌دهد، پیش می‌آیند. به خواننده توصیه می‌شود که نظریهٔ ارائه شده در این بخش را با نظریهٔ دستگاه‌های مرتبه  $n$ ام زمان پیوسته، که در بخش ۱-۳ آورده‌ایم، مقایسه کند.

## ۳-۱۱ نگاشت لوجیستیک

در بخش ۴-۱ زاد و مرگ اعضای یک نوع زیست‌شناختی را بررسی کردیم و از این طریق به معادلهٔ لوجیستیک  $\dot{x} = bx - cx^2$  دست یافتیم. این معادله می‌تواند به‌طور تحلیلی حل شود و منجر به یک جمعیت پایدار  $x = b/c$  می‌شود. برای حصول این معادله، فرض کردیم که آهنگ زاد و مرگ به‌طور صریح وابسته به زمان نیستند. این فرض، برای جمعیت باکتریها و انسانها فرض معقولی است، اما برای پرندگان و بسیاری از حیوانات و حشرات که دارای فصول تولید مثل معینی هستند، بسیار نامناسب است. در این صورت، شاخص‌گذاری هر فصل تولید مثل با متغیر گسسته  $t = 0, 1, 2, \dots$  (که معمولاً واحد آن یک سال است)، با یک صفر به دلخواه گزیده، و بررسی جمعیت،  $N_t$ ، درست پس از اینکه تولید مثل کامل شد با معناست. برای اینکه  $N$  یک متغیر پیوسته باشد، جمعیت به اندازهٔ کافی باید بزرگ باشد.

برای فرایند لوجیستیک، چنان‌که در بخش ۴-۱ هم دیدیم، تغییر جمعیت دارای یک جملهٔ اصلی ناشی از تولد و یک جملهٔ توان دوم ناشی از مرگ است، چون‌که آهنگ مرگ‌سرانه در صورتی که جمعیت به اندازهٔ کافی بزرگ شود، افزایش می‌یابد.

در این صورت، جمعیت  $N_t$  در معادلهٔ نگاشت لوجیستیک<sup>۱</sup>

$$N_{t+1} = N_t(b - cN_t) \quad (b > 1, c \geq 0) \quad (10-11)$$

صدق می‌کند. این معادله، به‌ازای  $c = 0$ ، یا  $c \neq 0$  با حد  $N$  کوچک، جمعیتی را نمایان می‌کند که در نتیجه تولید مثل، به‌طور نمایی رشد می‌کند. در غیر این صورت، به‌ازای  $c \neq 0$ ، چنان‌که عملاً در موارد قحطی خوراکی، بیماری‌های ناشی از کثرت افراد و سایر عوامل پیش می‌آید، جمعیت محدود است. در معادله‌های لوجیستیک به‌صورت ۱۱-۱۰، کاهش ناشی از جملهٔ توان دوم، با میل  $N_t$  به‌سوی  $b/c$ ، قابل توجه و مؤثر می‌شود و لذا رفتار دستگاه از جواب معادلهٔ لوجیستیک با زمان پیوسته، بسیار متفاوت است.

برای مطالعهٔ این دستگاه، ابتدا  $N$  را بهنجار می‌کنیم، تا جمعیت بهنجاریدهٔ

$$x = cN/b \quad (11-11)$$

را به‌دست آوریم و معادله را به‌صورت

$$x_{t+1} = bx_t(1 - x_t) \quad (12-11)$$

بنویسیم. این معادله دارای شکل استاندارد ۱۱-۲ یک دستگاه مرتبهٔ اول با زمان گسسته است.

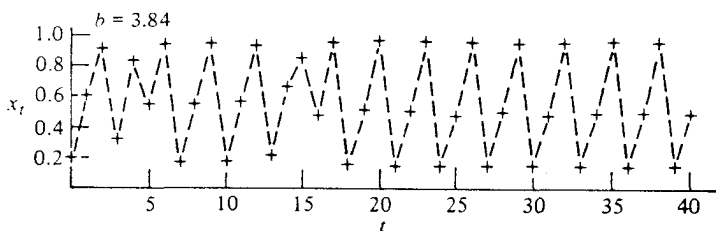
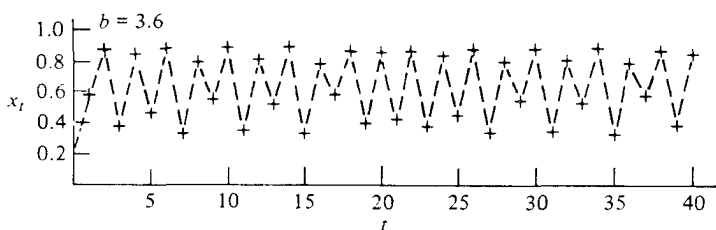
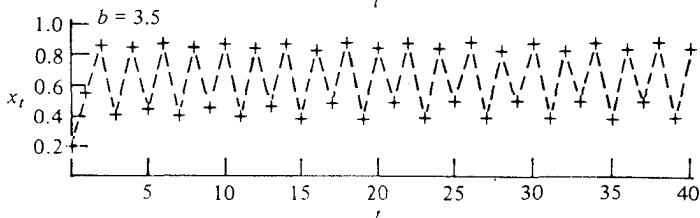
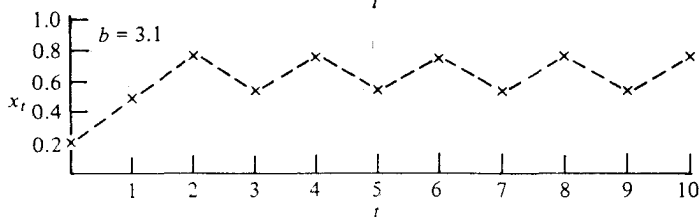
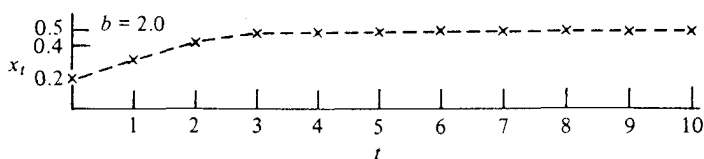
$$F(x) = F_b(x) = bx(1 - x) \quad (13-11)$$

به‌طوری که نشان داده‌ایم، این دستگاه غیرخطی بسیار ساده تعریف شده دارای همان خواص عامی است که بسیاری از دستگاه‌های مرتبهٔ اول دارند: اینکه دارای یک تابع نگاشت هموار  $F(x)$  با تنها یک ماکزیموم هستند و غیر از آن نقاط مانای دیگری ندارند.

نگاشت لوجیستیک ۱۱-۱۲ را می‌توان با امتحان عددی، به کمک یک ماشین حساب جیبی به آسانی مطالعه کرد. به‌ازای  $x_t$  در گسترهٔ مورد نظر  $0 \leq x_t \leq 1$ ، این نگاشت رفتاری فوق‌العاده حساس و گوناگون برای مقادیر مختلف ثابت  $b$  در گسترهٔ  $4 \leq b < 1$  از خود بروز می‌دهد. برخی از گونه‌های این رفتار در شکل ۱۱-۱ نمایش داده شده‌اند که در آنها برای

۱. نگاه کنید به





شکل ۱۱-۱ حرکت دستگاهی که در معادله نگاشت لوجیستیک ۱۱-۱۲ صدق می‌کند. مقادیر  $b$  عبارتند از ۲، ۳٫۱، ۳٫۵، ۳٫۶، ۳٫۸۴ و شرایط اولیه حرکت ۲ =  $x_0$  در هر مورد.

۲، ۳٫۱، ۳٫۵، ۳٫۶، ۳٫۸۴ در هر مورد شرایط اولیه ۰٫۲ =  $x_0$  منظور شده است.

به‌ازای  $b = ۲$ ، جمعیت بهنجاریده،  $x_t$ ، به تندی سوی مقدار تعادل آن در  $۰٫۵ = x$  میل می‌کند، درست همانطور که در معادله دیفرانسیل لوجیستیک ۱-۲۱ پیش می‌آمد. این نقطه ثابت قویاً پایدار، تنها رابینده حرکت است، و همه حرکتها در فاصله  $۱ > x > ۰$  را می‌رباید.

به‌ازای  $b = ۳٫۱$  نقطه ثابت تک وجود ندارد. پس از چند نسل، یا مقادیری از  $t$ ، جمعیت بین



دو مقدار  $x = ۰.۵۵۷$  و  $x = ۰.۷۶۵$  نوسان می‌کند. این دو نقطه با هم یک رباینده تشکیل می‌دهند و حرکت بین آنها تناوبی است، با تناوب ۲. این حرکت پایدار است.

در  $b = ۳.۵$  رفتار سیستم با رفتار آن به‌ازای هر یک از مقادیر قبلی  $b$  متفاوت است. پس از گذشت نسلهائی به تعداد کافی بیش از مورد قبل، حرکت به یک حرکت تناوبی، با تناوب ۴ بسیار نزدیک می‌شود. این حرکت تناوبی پایدار است، و رباینده از چهار نقطه تشکیل می‌یابد. با افزایش جزئی مقدار  $b$ ، مقادیری از آن را می‌توان یافت که در آنها حرکت به چرخه‌های پایدار با تناوب  $2^n$ ، که  $n$  صحیح و مثبت و دلخواه است، ربایش می‌یابد.

با این وجود، پیش از اینکه  $b$  به مقدار  $۳.۶$  برسد، هیچ حرکت تناوبی پایداری باقی نمی‌ماند. به‌ازای  $b = ۳.۶$  نتایج عددی هیچ رفتار تناوبی و یا حتی منظمی، حتی در  $۴۰$  نسل هم، نشان نمی‌دهند، و محقق شده است که یک مجموعه قابل توجه از مقادیر  $b$  وجود دارد که به‌ازای آنها حرکت هرگز علائم یک رفتار تناوبی و یا حتی منظم از خود بروز نمی‌دهد. چنین حرکت‌هایی را آشوبناک یا نامنظم می‌نامند و این حرکت، هر چند هم که جامع نیست، از مشخصات عادی و مشترک دستگاه‌های دینامیکی پیچیده به شمار می‌رود.

برای نگاشت لوجیستیک، علی‌رغم سادگی معادلاتی که حرکت را تعریف می‌کنند، تحلیل ساده در حرکت آشوبناک کفاف نمی‌دهد. نتیجه‌گیری کلی این است که جمعیهائی که دارای یک فصل تولید مثل معین هستند و در هر فصل بیش از یک نسل تولید نمی‌کنند، در دراز مدت رفتار بس پیچیده‌ای بروز می‌دهند، و از این استنتاج گریزی نیست، هر چند هم که معادلات تعریف‌کننده آنها بسیار ساده باشند.

این یافته، برای فرایندهای زیست‌شناختی، فیزیکی یا اقتصادی فراوانی که از یک تابع نگاشت نظیر ۱۱-۱۳، با یک ماکزیموم به‌ازای بعضی مقادیر پارامتر  $b$  پیروی می‌کنند، صحت دارد. تغییرات آشوبناک در جمعیهائی پرندگان و حشرات، زیاد مشاهده می‌شود.

رفتار پیچیده مدل جمعیت ۱۱-۱۲ به اینجا خاتمه نمی‌پذیرد. هرگاه  $b$  را به  $۳.۸۴$  افزایش دهیم، جمعیت به تندی در یک حرکت با تناوب ۳ آرام می‌گیرد که در شکل ۱۱-۱۱ مشهود است. هرگاه  $b$  را در گستره مجاز  $۱ < b \leq ۴$  بیشتر افزایش دهیم، می‌تواند دوباره ایجاد آشوب کند، و الی آخر.

بررسی همه اینها چگونه باید انجام پذیرد؟ این پرسشی است که هنوز بی‌جواب است و زمینه خوبی برای پژوهش عرضه می‌کند، اما پاره‌ای از خواص را می‌توان با روشهای مقدماتی مطالعه کرد.

نقاط ثابت نگاشت تولید شده توسط تابع  $F_b(x)$ ، جوابهای معادله

$$x = F_b(x) \quad (۱۱-۱۴)$$



برای نگاشت درجه دوم ۱۱-۱۲ در قسمت بالای شکل ۱۱-۲ (ص ۲۴۶)، به ازای دو مقدار  $b$  که موضوع امتحان عددی ما بودند، این نقاط را نشان داده ایم. در این مورد معادله ۱۱-۱۴ یک معادله درجه دوم با جوابهای  $x^{(0)} = 0$  و  $x^{(1)} = 1 - 1/b$  است. جواب  $x^{(0)}$  یک جواب بدیهی است. امتحانهای عددی نشان می دهند که جواب  $x^{(1)}$ ، یک نقطه ثابت پایدار برای  $b = 2$  و یک نقطه ثابت ناپایدار برای  $b = 3$  است. گستره ای از  $b$  که در آن  $x^{(1)}$  پایدار است، از بسط تیلور  $F_b(x)$  در همسایگی آن به دست می آید

$$F_b(x) = x^{(1)} + F'_b(x^{(1)})(x - x^{(1)}) + O(x - x^{(1)})^2 \quad (11-15)$$

در نقاطی که به اندازه کافی نزدیک به  $x^{(1)}$  هستند، می توان از جمله توان دوم چشمپوشی کرد و نگاشت  $F_b(x)$ ، با یک نگاشت خطی که پایداری آن در بخش ۱۰-۲ به وسیله نامساوی ۱۰-۳۱ داده می شود، تقریب زده می شود. نقطه

$$x^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{پایدار است} \\ \text{ناپایدار است} \end{array} \right\} \text{ اگر } \left\{ \begin{array}{l} |F'_b(x^{(1)})| < 1 \\ |F'_b(x^{(1)})| > 1 \end{array} \right\} \quad (11-16)$$

به طور کلی، شیب نمودار تابع نگاشت در هر نقطه ثابت، پایداری در آن نقطه را معین می کند. اگر قدر مطلق شیب کمتر از واحد باشد، نقطه ثابت پایدار است و اگر بزرگتر از واحد باشد، نقطه ثابت ناپایدار است. در شکل ۱۱-۲ با ترسیم مماس به  $F_b(x)$  در  $x^{(1)}$  به ازای  $b = 2$  و  $b = 3$  شیب را مشخص کرده ایم که به ترتیب پایداری و ناپایداری را نشان می دهد. برای نگاشت لوجیستیک داریم،  $x^{(1)} = 1 - b^{-1}$  و

$$|F'_b(x^{(1)})| = |b(1 - x^{(1)})| = |b - 2| \quad (11-17)$$

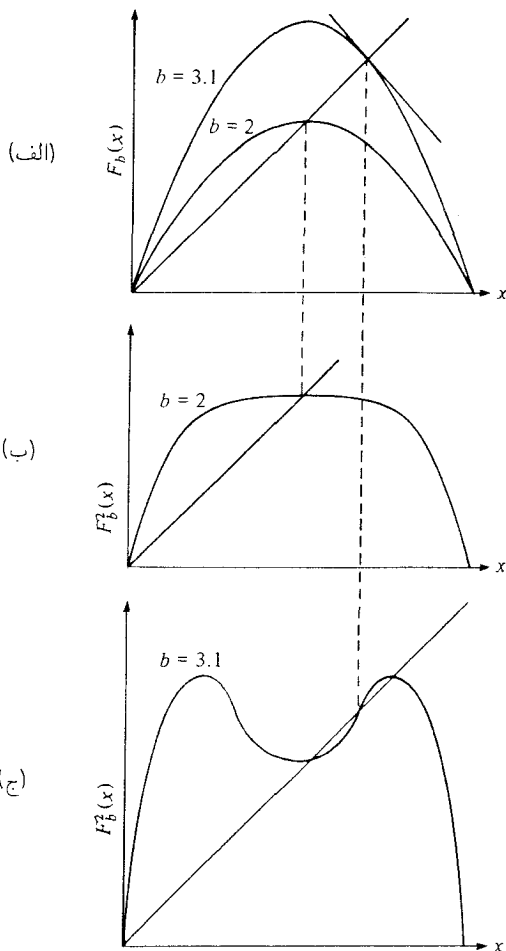
لذا نقطه ثابت  $x^{(1)}$  برای  $b < 3$  پایدار است. این نقطه برای  $b > 3$  ناپایدار است. خوب، حالا چه اتفاق می افتد؟

در اینجا خوب است که نگاهی به نگاشت نسل دوم بیندازیم که با تابع

$$F_b^{(2)}(x) = F_b(F_b(x)) \quad (11-18)$$

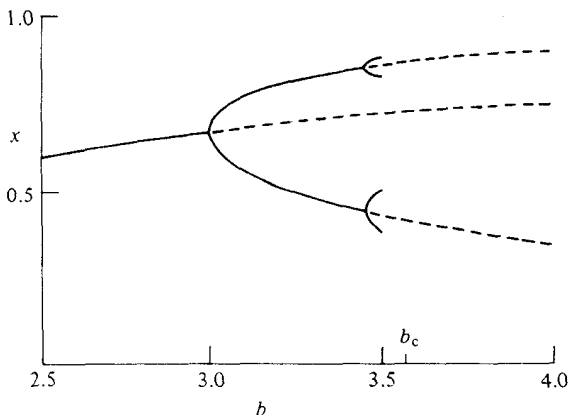
داده می شود و جمعیت را بعد از دو نسل نمایان می کند. توابع  $F_{2.1}(x)$  و  $F_2(x)$  در شکل ۱۱-۲ الف و توابع  $F_{3.1}^{(2)}$  و  $F_3^{(2)}$  در شکل ۱۱-۲ ب و ۱۱-۲ ج ظاهر می شوند.





شکل ۲-۱۱ (الف) نمودارهای  $x$  و  $F_b(x)$  برای معادله نگاشت لوجیستیک ۱۱-۱۲ با  $b = 2, 3.1$  که باینداری و ناپایداری نقاط ثابت را نمایان می‌کند. (ب) و (ج) نمودارهای تابع نگاشت نسل دوم  $F_b^{(2)}(x)$  به ترتیب برای  $b = 2$  و  $b = 3.1$  هستند.

به ازای هر مقدار  $b$ ، نقاط ثابت  $F_b$ ، نقاط ثابت  $F_b^{(2)}$  نیز هستند، اما برعکس صادق نیست و بعضی اوقات نقاط ثابتی دارد که نقاط ثابت  $F_b$  نیستند. اینها نقاط چرخه به تناوب ۲ هستند. مشتق  $F_b^{(2)}$  در  $x^{(1)}$  را به وسیله قاعده زنجیری به دست می‌آوریم که عبارت است از



شکل ۳-۱۱ نقاط ثابت پایدار و ناپایدار به صورت توابعی از  $b$  که ساختار دو شاخگی را نمایان می‌کند.

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dF_b^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=x^{(1)}} &= \left. \frac{d}{dx} F_b(F_b(x)) \right|_{x=x^{(1)}} \\
 &= F'_b(x^{(1)}) F'_b(F(x^{(1)})) \\
 &= F'_b(x^{(1)})^2 \quad (۱۹-۱۱)
 \end{aligned}$$

آن مقدار از  $b$  که به ازای آن  $F$  در  $x = x^{(1)}$  ناپایدار می‌شود، مقداری است که به ازای آن  $F^{(2)}$  دارای شیب واحد در  $x^{(1)}$  است. اما از شکل‌های ۲-۱۱ ب و ۲-۱۱ ج به وضوح نمایان است که اگر شیب  $F^{(2)}$  در نقطه  $x^{(1)}$  کمتر از واحد باشد، در آن صورت معادله  $x = F^{(2)}(x)$  یک جواب دارد و  $F^{(2)}$  دارای یک نقطه ثابت در  $x^{(1)}$  است، درحالی که اگر شیب بزرگتر از واحد باشد،  $F^{(2)}$  دارای دو نقطه ثابت اضافی در  $x^{(1)}$  خواهد بود.

دو جواب تازه  $x^{(2)}$  و  $x^{(3)}$  نقاط ثابت  $F^{(2)}$  هستند، اما نقاط ثابت  $F$  نیستند، لذا باید متعلق به یک چرخه با تناوب ۲ باشند. علاوه بر این شکل ۲-۱۱ ج نشان می‌دهد که شیب‌های  $F^{(2)}$  در  $x^{(2)}$  و  $x^{(3)}$  کوچکتر از واحدند، و لذا ۲-چرخه پایدار است. بدین ترتیب در آن مقداری از  $b$  که نقطه ثابت  $x^{(1)}$  ناپایدار می‌شود، یک ۲-چرخه پایدار تولید شده است. این گونه تغییر در سرشت حرکت پایدار به دو شاخگی معروف است که به مفهوم ساختاری شبیه یک چنگال است که بعداً در شکل ۳-۱۱ نشان داده می‌شود.

هرگاه مقدار  $b$  باز هم بیشتر افزایش یابد، شیب‌های  $F^{(2)}$  در  $x^{(2)}$  و  $x^{(3)}$  کاهش می‌یابند تا اینکه برابر ۱- شوند. در این صورت یک دو شاخگی دیگر پدید می‌آید، ۲-چرخه ناپایدار می‌شود و یک ۴-چرخه پایدار پدید می‌آید. این وضع برای  $2^n$ -چرخه‌ها با همه  $n$ ‌های مثبت صحیح تکرار می‌شود. با افزایش  $n$ ، مقدار تغییر  $b$  بعد از هر دو شاخگی برای اینکه  $2^n$ -چرخه ناپایدار شود کم

می شود و این کاهش آنقدر سریع است که از یک مقدار بحرانی  $b_c$  به بعد همه  $2^n$ -چرخه ها ناپایدار می شوند. این مقدار بحرانی

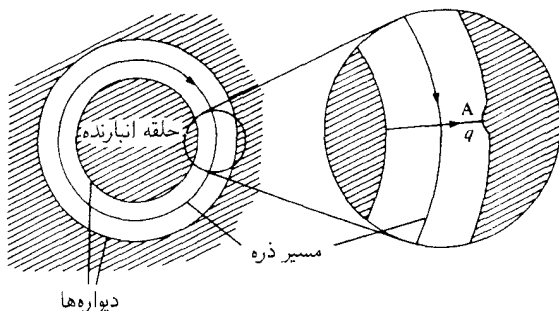
$$b_c = 3.5700 \quad (20-11)$$

به دست آمده است. به ازای  $b > b_c$ ، رفتار آشوبناک آغاز می شود. در شکل ۳-۱۱ نقاط ثابت ۱- چرخه در  $x^{(1)}$  و ۲- چرخه در  $x^{(2)}$  و  $x^{(3)}$  به صورت توابعی از  $b$  نشان داده می شوند و دو شاخگیها را به وضوح نمایان می کنند. بخش کوچکی از ۴- چرخه هم دیده می شود. آزمونهای عددی بیشتری برای بررسی مقادیر بزرگتر  $b$  لازم است، تا در آنها ۳- چرخه ها و حرکت تناوبی پایدار و ناپایدار با همه تناوبهای دیگر، پیش از اینکه  $b$  به ۴ برسد، پیدا شوند.

## ۴-۱۱ نگاشتهای حافظ مساحت توان دوم

دستگاههای نیوتونی یا هامیلتونی وجود دارند که حرکتشان آشوبناک است. ساده ترین آنها دارای دنباله تناوبی ضربه ها هستند و در این بخش مورد بحث قرار می گیرند. سایر دستگاههای هامیلتونی در بخش بعد به اختصار توصیف شده اند.

برای مطالعه تجربی ذرات بنیادی، لازم است که فیزیکدانها این ذرات را در حلقه های انبارنده، با آهنگی ثابت و برای مدت زمان درازی در دوران نگه دارند که در نمودار نشان داده ایم. یک ذره ممکن است بیش از  $10^{10}$  چرخش به دور حلقه انجام دهد، لذا باید جابه جایی ذره طی این چرخشها کوچک نگه داشته شود، وگرنه با دیواره ها برخورد می کند و از بین می رود.



(21-11)

هر نقص موضعی در دیواره، نظیر آنچه در نقطه  $A$  نشان داده ایم، می تواند یک میدان مغناطیسی ناهمگن تولید کند که به مثابه ایراد ضربه به ذره و انحراف آن از مسیر بهینه است. این ضربه یک تابع شدیداً غیرخطی از جابه جایی  $q$  است که در عبور ذره از  $A$  اندازه گیری می شود. نظریه اینکه ضربه ممکن است  $10^{10}$  بار وارد شود، یک نقص بسیار کوچک می تواند موجب جابه جایی هایی شود که برای انحراف تقریباً همه ذرات به سوی دیواره کفایت کند و حلقه انبارنده را بی ثمر سازد.

اینکه آیا این انحراف روی می‌دهد یا نه، به پایداری حرکت وابستگی دارد به سبب امکان حرکت آشوبناک، درجه حساسیت در اینجا خیلی بیشتر از پایداری دستگاههای خطی مورد بحث در فصل ۱۰ است، لکن نظریه ارائه شده در آن فصل می‌تواند کمک مؤثری باشد.

مسائل مشابهی در نظریه حرکت سیارات منظومه شمسی که تعداد دوران آنها به دور خورشید از مرتبه بزرگی  $10^9$  است، پیش می‌آیند. خوشبختانه این مسئله شامل سیاره‌های درونی، نظیر زمین نمی‌شود، چه، سیاره‌های بزرگ چون مشتری این اثر را دفع می‌کنند.

این نظریه همچنین در محبوس کردن ذرات باردار توسط میدانهای مغناطیسی در وسایلی که برای تولید انرژی از گداخت هسته‌ای ساخته می‌شوند، در حرکت ذرات باردار در میدان مغناطیسی زمین، چون کمربندهای تابشی که سپیده فجر را ایجاد می‌کنند، در حرکت اتمها در مولکولهای چند اتمی، و در موارد بسیار دیگر به کار می‌آید. نظریه عام ناظر بر این مسائل برای این کتاب بسیار پیچیده است لذا توجه خود را منحصر به یک مثال ساده می‌کنیم که خیلی از پدیده‌های مهم را نشان می‌دهد و مسئله پایداری حلقه انبارنده را تقریباً توضیح می‌دهد.

ذره‌ای به جرم واحد و دارای یک درجه آزادی، با مختصه  $q$  و اندازه حرکت  $p$  است. این ذره تقریباً تمام مدت به آزادی حرکت می‌کند، اما در هر مقدار صحیح زمان  $t$ ، در معرض یک ضربه  $P(q)$  قرار می‌گیرد. یعنی

$$(22-11) \quad P(q) = \text{ضربه} \quad (t = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

که در آن مقدار  $P$  در وابستگی به  $q$  معلوم است، اما وابستگی آن به مقادیر صحیح  $t$  معلوم نیست. برای مختصه و اندازه حرکت در زمانهای  $t$  صحیح و غیرمنفی، از علامتگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$(23-11) \quad q_t = q(t), p_t = p(t) \quad (t = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

بنا به قرارداد ضربه  $10^{-11}$ ، مقادیر  $p(t)$  آنهایی هستند که درست قبل از وارد شدن ضربه، بوده‌اند.

معادلات حرکت می‌توانند به سهولت برای فاصله زمانی واحد در حرکت آزاد حل شوند و از روی آن نگاشت مرتبه دوم حالت در زمان  $t$  به حالت در زمان  $t+1$  به دست آید.

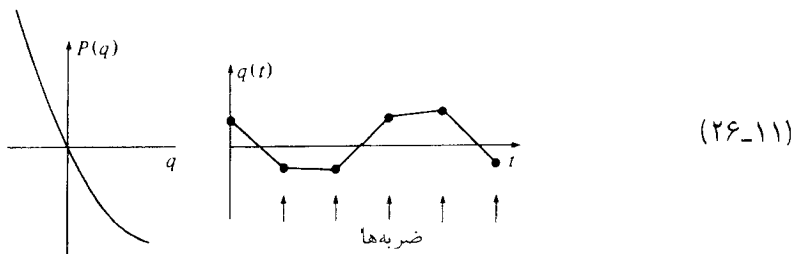
$$(24-11) \text{ الف) } q_{t+1} = q_t + p_{t+1} = q_t + p_t + P(q_t)$$

$$(24-11) \text{ ب) } p_{t+1} = p_t + P(q_t)$$

نظر به اینکه حرکت آزاد و ضربه، هر دو تبدیلیهای حافظ مساحت یا بندادی تولید می‌کنند، تبدیل ترکیبی ۱۱-۲۴، یک نگاشت حافظ مساحت از فضای فاز  $(q, p)$  به خودش را نمایش می‌دهد. هر جا که

$$p = 0 \quad P(q) = 0 \quad (25-11)$$

است، نقاط ثابت وجود دارند و مبدأ را منطبق بر یکی از این نقاط ثابت اختیار می‌کنیم. مختصه، به صورت تابعی از زمان، به طوری که در نمودار ۱۱-۲۶ نشان داده‌ایم، تغییر می‌کند بهترین مدار



مسئله حلقهٔ انبارنده از نقطه A در یکی از صفرهای  $P(q)$  می‌گذرد. اکنون  $P(q)$  را حول این نقطه ثابت به عنوان مبدأ، بسط می‌دهیم.

جمله خطی  $P(q) = aq$  برای نشان دادن خصایل اصلی حرکت ناکافی است، اما می‌تواند برای تعیین پایداری نقطه ثابت در مبدأ مورد استفاده قرار گیرد، چنان‌که در مثال ۱۰-۸ شده است. هرگاه  $-4 < a < 0$  باشد، این نقطه پایدار است، لذا  $a$  را در این گستره انتخاب می‌کنیم، تا حرکت غیرخطی را پیرامون یک نقطه ثابت پایدار، مطالعه کنیم.

خصایل اصلی حرکت آنگاه پدیدار می‌شوند که جمله درجه دوم را منظور کنیم، لذا بسط را در آنجا قطع می‌کنیم و ضربه درجه دوم را در نظر می‌گیریم

$$P(q) = aq + bq^2 \quad (-4 < a < 0) \quad (27-11)$$

در مثال ۱۰-۸، تبدیل به مختصه  $(X, Y)$  را مناسب تشخیص دادیم، به طوری که انتشارگر به صورت یک ماتریس دوران  $L(-\alpha)$  در آمد و نظیر معادله ۱۰-۱۲۱، داشتیم

$$\cos \alpha = 1 + \frac{1}{4} a \quad (\alpha > 0, -4 < a < 0) \quad (28-11)$$

همین تبدیل را می‌توان در دستگاهی که دارای ضربه درجه دوم ۱۱-۲۷ است، به کار بست که در آن صورت، جمله خطی به شکل استاندارد مبدل می‌شود، اما جمله درجه دوم پیچیده تر می‌شود.

با این وصف، تغییر بیشتر مقیاس، یا اتساع، و یک بازتابش راست خط در مبدأ منجر به نگاشت استاندارد مربعی حافظ مساحت کرمونا از زیگل و هنون<sup>۱</sup> می‌شود. در طرز نمایش تازه  $(x, y)$ ، این نگاشت به صورت زیر به دست می‌آید

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1} &= x_t \cos \alpha - (y_t - x_t^2) \sin \alpha \\ y_{t+1} &= x_t \sin \alpha + (y_t - x_t^2) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (29-11)$$

که می‌توانیم به این صورت هم بنویسیم

$$\mathbf{r}_{t+1} = \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}_t) \quad (\mathbf{r} = (x, y)) \quad (30-11)$$

که در آن  $\alpha$  زاویه دوران متناظر به بخش خطی نگاشت است؛ این زاویه اکنون مثبت است، چون که بازتابش جهت دوران را برگردانده است. تقریباً هر نگاشت مربعی حافظ مساحت را می‌توان با یک تبدیل خطی غیرتکین، به شکل ۲۹-۱۱ تبدیل کرد، لذا ساختار حرکت فقط به یک پارامتر مثبت وابسته است، یعنی به زاویه دوران  $\alpha$ .

از بخش ۱۰-۶ که با معادله ۱۰-۵ آغاز می‌شود، می‌دانیم که بخش خطی نگاشت ۲۹-۱۱، به ازای تغییرات به دلخواه کوچک  $\alpha$ ، ناپایدار ساختاری است. این امر در مورد نگاشت مربعی هم صحت دارد، اما آثار آن بسی مؤثرترند.

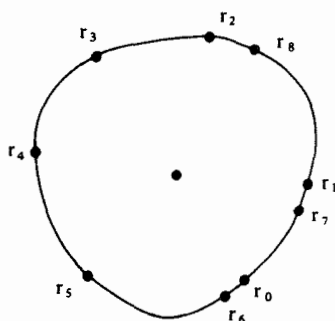
نظیر مورد خطی، در اینجا هم حرکت را می‌توان با سری نقاط  $\mathbf{r}_t$  در صفحه  $\mathbf{r} = (x, y)$  نمایش داد. با استفاده از حسابگرهای رقمی می‌توان تعداد کثیری از نقاط را خیلی سریع تولید کرد و نمودار آن را رسم کرد. این گونه نمودارها به ما امکان می‌دهند که تصویری سودمند از آنچه در مساحت‌های بزرگ صفحه فاز به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  صورت می‌گیرد به دست آوریم. در شکل‌های ۱۱-۴ الی ۱۱-۷، چهار نمودار هنون را ترسیم کرده‌ایم، که نقاط هر کدامشان متعلق به چندین شرط اولیه مختلف به ازای یک مقدار معلوم  $\cos \alpha$  هستند.

حرکت فوق‌العاده پیچیده است. به ازای یک نقطه اولیه  $\mathbf{r}_0$  در نزدیکی مبدأ، حرکت همواره محدود به یک منحنی ناورد است. حرکت‌هایی که به مبدأ نزدیک‌ترند، به منحنیهای ناوردای حرکت خطی در آن همسایگی بسیار شباهت دارند، اما هر قدر از مبدأ دورتر باشند دچار واپیچش بیشتری می‌شوند.

حرکت روی منحنی ناوردا از دنباله نقاطی که به طور منظم در پیرامون آن جای گرفته‌اند، تشکیل می‌یابد و حرکت منظم خوانده می‌شود. منحنیها شبیه منحنیهای ناوردای یک دستگاه هامیلتونی با زمان پیوسته  $t$  هستند که همان پربندهای هامیلتونی هستند که در فصل ۴ توصیف شدند.

1. Hénon, M. (1969) Numerical study of quadratic area-preserving mappings. *Quarterly of Applied Mathematics*, 27, 291-312.





(۳۱-۱۱)

علاوه بر این، امکان پیدا کردن یک متغیر زاویه برای یک منحنی ناورداد وجود دارد، به طوری که حرکت روی آن دارای شکل

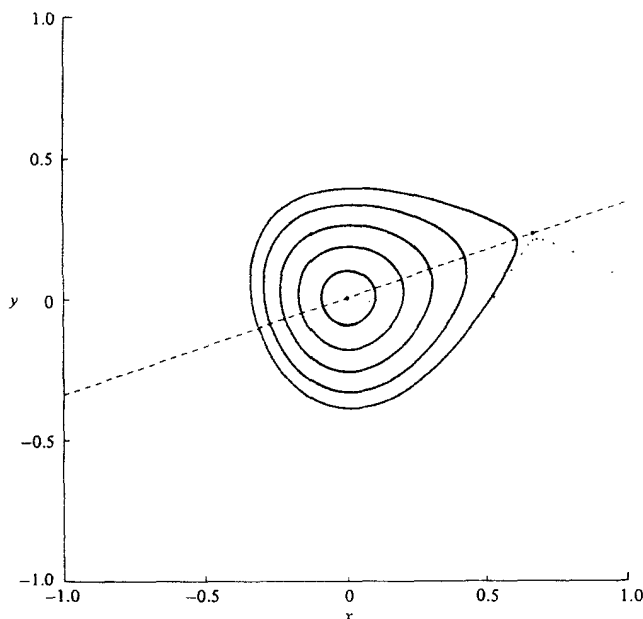
$$\mathbf{r}_t = \mathbf{f}(\omega t + \delta) = \mathbf{f}(\theta) \quad (t = 0, 1, 2, \dots) \quad (32-11)$$

باشد، که در آن  $\mathbf{f}$  یک تابع بردار هموار با متغیر زاویه  $\theta$ ، نظیر آن در فصل ۷ است. تنها تفاوت در این است که زمان فقط مقادیر صحیح قبول می‌کند، به طوری که حرکت از دنباله نقاط گسسته به دور منحنی تشکیل می‌شود، به جای اینکه از یک حرکت پیوسته به دور آن تشکیل یابد. بسامد زاویه‌ای  $\omega$ ، از یک مقدار نزدیک به  $\alpha$  در منحنیهای کوچک نزدیک مبدأ به مقادیر کوچکتر برای منحنیهای بسیار واپیچیده، کاهش می‌یابد، درست مانند مورد زمان پیوسته.

در شکل ۴-۱۱، به ازای  $\alpha = 8^\circ$  برخی از منحنیهای ناورداد را ملاحظه می‌کنیم. هرگاه نقطه اولیه، بیرون از یک منحنی ناورداد بحرانی قرار گیرد، به نظر می‌رسد که نقاط  $\mathbf{r}_t$  پراکنده شده‌اند و به سوی بینهایت واگرا می‌شوند. واگرایی مشابه ولی پیوسته در مورد نیروی رانشی خطی در مثال ۳-۴ هم مشاهده می‌شود، اما این تشابه کاذب است. برای زمان گسسته، پدیده‌های کاملاً تازه‌ای به ازای تقریباً همه مقادیر  $\alpha$  وجود دارد. این پدیده‌ها در  $\alpha = 8^\circ$   $\cos \alpha$  مشاهده نمی‌شوند، چون خیلی چشمگیر نیستند.

ولی برای  $\alpha = 24^\circ$   $\cos \alpha$  در شکل ۵-۱۱، تفاوت را مشاهده می‌کنیم. به سبب اینکه  $\alpha/2\pi = 211^\circ$  اندکی بزرگتر از  $\frac{1}{8}$  است، یک چرخه پایدار متشکل از پنج نقطه بیضوی وجود دارد، که هر کدام یک نقطه ثابت  $\mathbf{F}^{(5)}$  هستند و نه  $\mathbf{F}^{(1)}$ . پیرامون این پنج نقطه، یک زنجیره یا طوق از پنج جزیره ظاهر می‌شود، که هر کدام حاوی یک مجموعه از منحنیهای ناورداد هستند که یکی از نقاط ثابت را احاطه کرده است. این پنج جزیره در ناحیه‌ای از فضای فاز بین منحنیهای ناورداد با تعداد پیش‌اصم،  $\omega/2\pi$ ، اندکی بزرگتر و اندکی کوچکتر از  $\frac{1}{8}$  پدیدار می‌شوند. محاسبات مفصلتر، زنجیره جزیره‌های مشابهی پیرامون نقاط ثابت  $\mathbf{F}^{(D)}$ ، به ازای  $D$  مثبت و صحیح دلخواه، نشان می‌دهند که بین منحنیهای ناورداد با تعداد پیش‌گویا در همسایگی هر  $N/D$ ، قرار دارند.



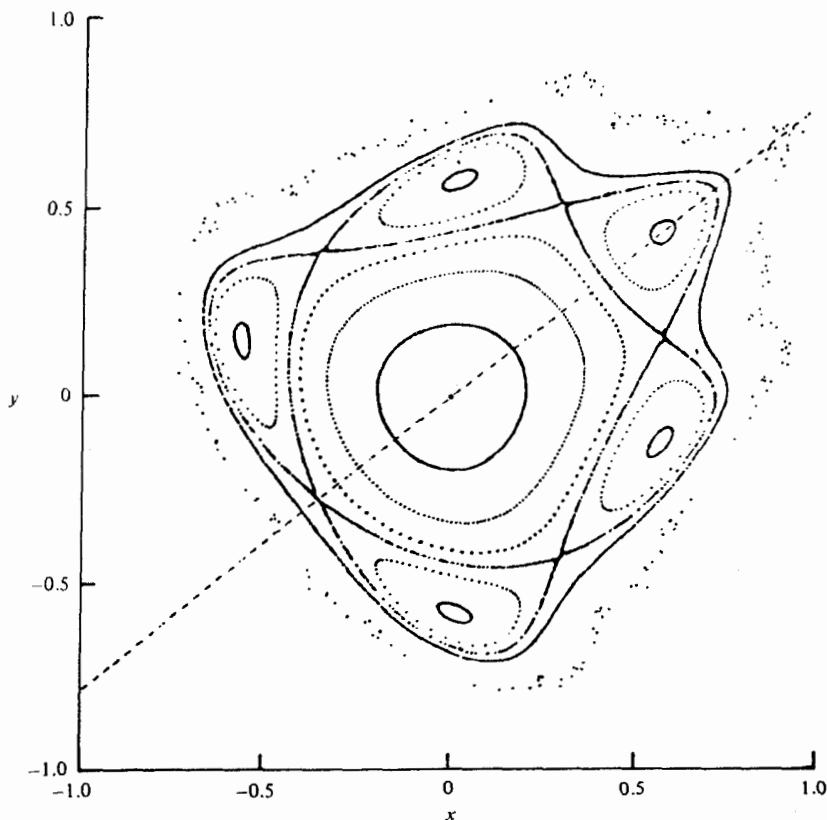


شکل ۴-۱۱ نقاط فاز تولید شده به وسیله نگاشت ۱۱-۲۹ برای  $\cos \alpha = 0.8$ .

نظر به اینکه بین دو عدد اصم، تعدادی نامتناهی عدد گویا وجود دارد، تعداد زنجیره‌ها هم نامتناهی است، اما آنهایی که متناظر با دوره‌های تناوب طویل  $D$  هستند بسیار کوچکند و به سختی مشاهده می‌شوند، مگر اینکه در محاسبات عددی مخصوصاً در پی آنها باشیم.

برای  $\cos \alpha = 0.24$ ، همچنین یک ۵-چرخه ناپایدار از نقاط هذلولوی در فواصل مشابه از مبدأ وجود دارد. به نظر می‌رسد که اینها توسط یک خم ممیزه به هم متصل‌اند، اما این هم کاذب است. شکل ۱۱-۶ یک تک مدار متشکل از نقاط فازی متوالی در نزدیکی همان ۵-چرخه ناپایدار برای  $\cos \alpha = 0.22$  را نشان می‌دهد. به نظر می‌رسد که مدار به اندازه دلخواه به نزدیکی همه نقاط یک ناحیه با مساحت متناهی در فضای فاز، می‌رسد. نقاط متوالی در این مدار، مشابه حرکت آشوبناک دستگاه مرتبه اول فصل پیش، به گونه‌ای آشوبناک رفتار می‌کنند که با حرکت منظم روی منحنیهای ناوردا آشکارا متمایز است. برای حرکت در همسایگی هر نقطه ثابت ناپایدار، این پدیده به استثنای موارد نادر، نوعی است. به ازای  $\cos \alpha = 0.8$  و  $\cos \alpha = 0.24$  حرکت آشوبناک حضور دارد، اما به سختی در شکلهای ۱۱-۴ و ۱۱-۵ دیده می‌شود، زیرا نواحی بسیار باریکی را اشغال می‌کند. در بعضی از دستگاهها، حرکت در بخش بزرگی از فضای فاز آشوبناک است.

بدین ترتیب برای نگاشت حافظ مساحت توان دوم، سه نوع حرکت عمده و متمایز وجود دارد. حرکت منظم روی منحنیهای ناوردا پیرامون نقاط ثابت مدارهای تناوبی پایدار، حرکت آشوبناک

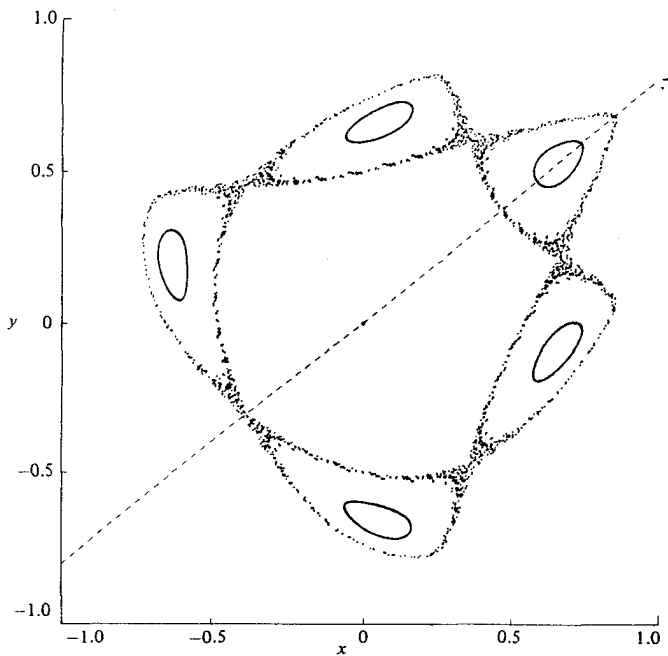


شکل ۱۱-۵ نقاط فاز که از نگاشت ۱۱-۲۹ برای  $\alpha = 24^\circ$   $\cos$  تولید شده‌اند.

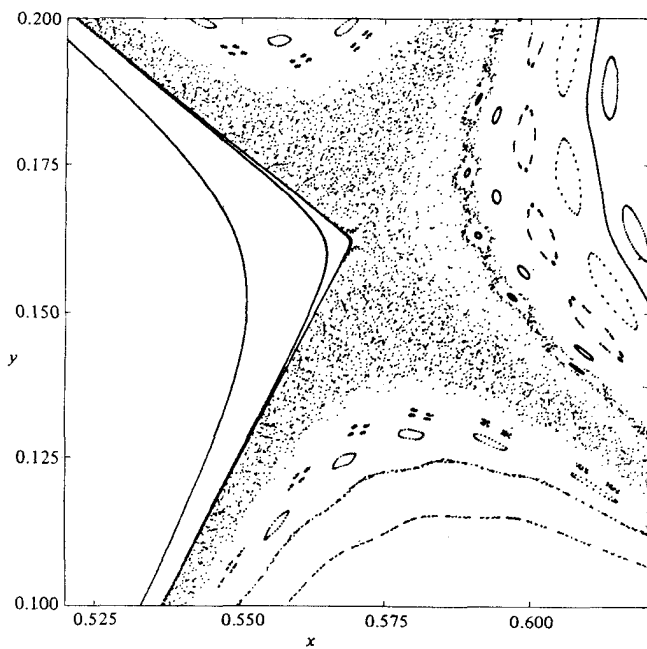
محدود درون نواحی دارای مساحت‌های متناهی پیرامون مدارهای تناوبی ناپایدار، و حرکت فرار نامحدود. نواحی ناوردای حرکت‌های منظم و آشوبناک به نحوی بسیار پیچیده درهم آمیخته‌اند. هرگاه از نزدیک به یک ناحیه کوچک فضای فاز چرخان در شکل ۱۱-۷ نگاه کنیم، می‌بینیم که نقوش زنجیره جزایر با مقیاسی هر چه کوچک و کوچکتر تکرار می‌شود. این زنجیره‌های کوچکتر، مدارهای تناوبی با تناوب بزرگتر را احاطه می‌کنند. حرکت‌های تناوبی با دوره‌های متفاوت همزیستی می‌کنند و خواص پایداری آنها، ما را در دریایی از تغییرات درهم برهم هدایت می‌کند.

تحلیل ریاضی حرکت آشوبناک، به مرحله‌ای که بتواند همه خواصی را که در امتحانهای عددی مشاهده شدند جوابگو باشد به دست نیامده است. در این زمینه هنوز کار می‌شود.

تا اینجا نگاشتهای مرتبه دوم که حافظ مساحت نیستند مورد بررسی ما قرار نگرفته‌اند. اینها می‌توانند رباینده داشته باشند، نظیر نگاشتهای یک بعدی، و دستگاههای مرتبه دوم با زمان پیوسته. در مورد اخیر، رباینده‌ها ممکن است نقاط پایدار، یا چرخه‌های حدی همچون در فصل ۳ باشند، و یا می‌توانند از نوع جدیدی به نام رباینده‌های غریب که حرکت آشوبناک را تقویت می‌کنند، باشند.



شکل ۱۱-۶ نقاط فاز تولید شده به وسیله نگاشت ۱۱-۲۹ برای  $\alpha = 22^\circ$ .  $\cos \alpha$ .



شکل ۱۱-۷ بزرگنمایی یک بخش کوچک از شکل ۱۱-۵.

## ۵-۱۱ حرکت منظم و آشوبناک دستگاههای هامیلتونی

در فصل ۱۰ دیدیم که چگونه نظریه دستگاههای صادق در معادلات دیفرانسیل خطی با توابع سرعت تناوبی، به طور طبیعی منجر به مطالعه نگاشتهای می شود. اکنون می خواهیم نشان دهیم که این، در مورد دستگاههای غیرخطی هم صحت دارد. یک دستگاه مرتبه  $m$  را در نظر می گیریم که حرکت آن در معادله دیفرانسیلی به شکل استاندارد

$$\frac{dr}{dt} = v(r, t) \quad (۳۳-۱۱)$$

صدق می کند، که در آن  $v(r, t)$  تابع تناوبی در زمان است، با تناوب یکسان برای هر  $r$  ثابت که محدود به کل فضای  $(r, t)$  است. دوره تناوب را واحد زمان انتخاب می کنیم و داریم

$$v(r, t + 1) = v(r, t) \quad (۳۴-۱۱)$$

چنان که در پیوست ۱ نیز آمده است، شرط اولیه  $r(0)$ ، حرکت  $r(t)$  را برای همه زمانها معین می کند، به ویژه،  $r(1)$  را معین می کند. در این حال، معادله دیفرانسیل ۳۳-۱۱، یک نگاشت  $F$  از فضای فاز بر روی خودش را تعریف می کند، به طوری که بازای هر جواب  $r(t)$  معادله ۳۳-۱۱

$$r(1) = F(r(0)) \quad (۳۵-۱۱)$$

است. اما برای هر جواب  $r(t)$ ، بنا به شرط تناوب ۳۴-۱۱ داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r(t+1) &= \frac{d}{d(t+1)} r(t+1) \\ &= v(r(t+1), t+1) \\ &= v(r(t+1), t) \end{aligned} \quad (۳۶-۱۱)$$

لذا  $r(t+1)$  نیز یک جواب است، و بنابر استقراء،  $r(t+s)$  بازای هر  $s$  مثبت صحیح، نیز یک جواب است. با جاگذاری در معادله ۳۵-۱۱ به دست می آوریم

$$r(s+1) = F(r(s)) \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (۳۷-۱۱)$$

با جانشین کردن  $s$  توسط  $t$  صحیح و استفاده از علامتگذاری  $r_t = r(t)$ ، شکل استاندارد معادله حرکت برای یک دستگاه خودگردان با زمان گسسته را به دست می آوریم

$$r_{t+1} = F(r_t) \quad (۳۸-۱۱)$$

بدین سان می بینیم که یک دستگاه ناخودگردان با زمان پیوسته و معادلات دیفرانسیل حرکت با تابع سرعت تناوبی به معادله نگاشتی می انجامد که برای یک دستگاه خودگردان با زمان گسسته، نوعی است.

حل معادلات دیفرانسیل حرکت را می توان به دو مرحله تقسیم کرد

مرحله ۱: به دست آوردن نگاشت  $F$  از طریق جواب عمومی معادله دیفرانسیل حرکت از  $t = 0$  الی  $t = 1$

مرحله ۲: جواب معادله نگاشت تولید شده به وسیله نگاشت  $F$ .

برای دستگاههای مرتبه دوم و بالاتر، معادله نگاشت می تواند منجر به حرکت آشوبناک شود که در آن صورت در جوابهای معادلات دیفرانسیل اصلی حضور خواهد داشت. برای مثال، دستگاههای مرتبه دوم و مرتبه های بالاتر که حرکتشان در یک معادله دیفرانسیل به شکل استاندارد ۱۱-۳۳ با شرایط تناوبی صدق می کند، می توانند حرکت آشوبناک انجام دهند. علاوه بر این، اغلب این حرکت مهم است. دستگاههای هامیلتونی با یک درجه آزادی و با یک تابع هامیلتونی  $H(q, p, t)$  که به طور تناوبی وابسته به  $t$  است، از چنین مواردی به شمار می روند.

هر جا که حرکت محدود وجود دارد، معمولاً بخش عمده ای از فضای فاز با نقاط فازی که در حیطه حرکت منظم قرار می گیرند، اشغال می شود و بخش عمده ای هم توسط نقاط فازی که برایشان حرکت متعاقب آشوبناک است به اشغال در می آید. همین وضع شامل دستگاههای هامیلتونی پایستار با بیش از یک درجه آزادی هم می شود. این امر، کاربرد عملی روشهایی را که در این کتاب توصیف کرده ایم، محدود می کند.

با این همه، دستگاههایی که برایشان حرکت منظم اهمیت دارد بسیار یافت می شوند، و بعضی از آنها، مثلاً دستگاههای انتگرال پذیر فقط این حرکت (منظم) را دارا هستند. برای این دستگاهها روشهای ده فصل اول این کتاب می توانند مورد استفاده قرار گیرند، لکن درجات آزادی اضافی، گاهی موجب بروز مشکلات اضافی می شوند، به ویژه در نظریه پرنشیدگی و نظریه نوردای بی دررو؛ بحث این مشکلات از سطح این کتاب خارج است.

## مسائل

تمرینهای این فصل بهتر است با استفاده از ماشین حساب و ترجیحاً حسابگر برنامه پذیر حل شوند.

۱. برای نگاشت لوجیستیک ۱۱-۱۲ به ازای  $b = ۱.۵$  حرکت  $x_t$  را از  $x_0 = ۰.۱$  و  $x_0 = ۰.۸$  تا زمانی که  $x_t$  به فاصله  $۰.۰۱$  از  $x^{(1)}$  می رسد به دست آورید و آن را ترسیم کنید.

۲. نقاط  $x^{(2)}$  و  $x^{(4)}$  از ۲-چرخه پایدار به تناوب ۲ در نگاشت لوجیستیک ۱۱-۱۲ با  $b = \frac{1}{3}$  تا سه رقم بعد از ممیز پیدا کنید. حرکت را با نقطه اولیه  $x_0 = ۰.۹۵$  به دست آورید و تحقیق کنید که به همان چرخه با  $x_0 = ۰.۳۵$  تقریب حاصل می شود. چنانچه  $x_0 = ۰.۷$  و  $x_0 = ۰.۷۰۱$  باشد، چه روی می دهد و چرا؟ در حرکت اخیر، فقط تا  $t = ۶$  محاسبات را انجام دهید.



۳. عامل  $(x - x^{(0)})$  را از معادله درجه دوم  $x - F_b^{(2)}(x) = 0$  برای نگاشت لوجیستیک ۱۱-۱۲ حذف کنید و سپس ریشه  $x^{(1)}$  را از معادله درجه سوم حاصل حذف کنید تا یک معادله درجه دوم به دست آید. ریشه‌های این معادله را پیدا کنید و از روی آن، مدار تناوبی پایدار به ازای  $b = \frac{1}{3}$  را تا سه رقم بعد از ممیز به دست آورید. با جواب مسئله قبلی امتحان کنید که آیا درست به دست آمده است یا نه.

۴. نگاشت  $F(x)$  دارای نگاشت  $F_{(x)}^{(2)}$  نسل دوم و یک چرخه به تناوب ۲ با نقاط ثابت  $y$  و  $z$  است. ثابت کنید که

$$F_{(y)}^{(2)'} = F_{(z)}^{(2)'} = F'(y)F'(z)$$

که در آن پریمها نشان‌دهنده دیفرانسیل‌گیری هستند. سپس مقدار مینوموم  $b_2$  از  $b$  را چنان پیدا کنید که ۲-چرخه‌های نگاشت لوجیستیک ۱۱-۱۲، وقتی که  $b > b_2$  باشد، ناپایدار شود. می‌توانید این فرض را بپذیرید که  $y$  و  $z$  از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$(b + 1 \pm \sqrt{(b-3)(b+1)}) / 2b$$

۵. برای پایداری یک چرخه  $m, y_1, y_2, \dots, y_m$  نگاشت  $F(x)$ ، یک شرط پایداری برحسب مشتقات  $F'(y_k)$  به دست آورید.

۶. دو نسل متوالی یک جمعیت زیست‌شناختی با معادله زیر به هم مربوط اند

$$x_{t+1} = x_t \exp[r(1 - x_t)] \quad (r > 0)$$

مانند نگاشت لوجیستیک ۱۱-۱۲، این رابطه، جمعیتی را توصیف می‌کند که در تراکمهای پایین دارای رشد نمایی است، و اثر بیماریهای واگیر را در تراکمهای بالا به خوبی نمایان می‌کند. این نگاشت از نگاشت مربعی بغرنج‌تر است، اما این امتیاز را دارد که یک جمعیت مثبت، مثبت می‌ماند. مقدار  $r$  را که در آن، نقطه ثابت ناپایدار می‌شود پیدا کنید، و حرکت پایدار و تناوب آن را به ازای  $r = ۲.۳$  و  $r = ۲.۶$  از طریق امتحان عددی به دست آورید.

توجه داشته باشید که این امتحانهای عددی ما را به یافتن جوابهای معادلات متعالی (غیرجبری) به روش تکرار قادر می‌کنند، به شرطی که ضوابط پایداری خاصی رعایت شوند.

# پیوست ۱

## قضایای وجود

شکلهای بسیاری از قضایای وجود برای معادلات دیفرانسیل هستند که اثبات آنها به تنهایی می تواند کتابی به اندازه این کتاب را پر کنند. ما، سه قضیه را بیان خواهیم کرد: پ ۱، پ ۲، پ ۳. قضیه های پ ۱ و پ ۲ بسیار سودمندند؛ قضیه های پ ۲ و پ ۳ را آرنولد (۱۹۷۳) به اثبات رسانیده است. در پایان پیوست، نشان خواهیم داد که چگونه قضیه پ ۱ از قضیه پ ۳ استنتاج می شود.

### قضیه پ ۱

فرض کنیم که  $\mathbf{r}$  یک نقطه در فضای برداری اقلیدسی  $n$  بعدی،  $R^n$  است و  $v(\mathbf{r}, t)$  یک میدان برداری است که در

$$|v(\mathbf{r}, t)| < v_m \quad (\text{پ-۱})$$

به ازای همه  $t$ های حقیقی، در فاصله

$$I_t: |t - t_0| < T \quad (\text{پ-۲})$$

و همه نقاط  $\mathbf{r}$  در گوی

$$S_r: |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < v_m T = R \quad (\text{پ-۳})$$

به ازای یک

$$\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^n, t_0 \in \mathbf{R} \quad (T > 0, v_m > 0) \quad (\text{پ} ۱-۴)$$

ثابت، صدق می‌کند. در این صورت، معادله دیفرانسیل

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (\mathbf{r} \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}) \quad (\text{پ} ۱-۵)$$

با شرط

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad (\text{پ} ۱-۶)$$

دارای یک جواب یکتای  $\mathbf{r}(t)$  در فاصله  $I_t$  است.

## قضیه پ ۲

جواب معادله

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{v}(x, t) \quad (x \in M, t \in \mathbf{R}) \quad (\text{پ} ۱-۷)$$

تعریف شده با میدان برداری  $\mathbf{v}$  روی بسطی فشرده  $M$ ، با شرط اولیه  $x(t_0) = x_0$ ، دارای یک جواب یکتا برای همه  $t$ های حقیقی است.

یک دایره، یک کره، و یک چنبره، همگی بسطهای فشرده هستند، لذا مثلاً دستگاهی که فضای فازش یک چنبره است، و تابع سرعت فازش یک میدان برداری نمایش می‌دهد، دارای یک معادله حرکت به شکل پ ۱-۷ است که جواب آن برای همه زمانها وجود دارد. حرکت مختوم وجود ندارد.

## برهان

برهان قضایا را در اینجا ارائه نمی‌دهیم، ولی به خاطر تکمیل مطلب اشاره براین می‌کنیم که چگونه می‌توان به آنها دست یافت. قضیه پ ۲ را آرنولد (۱۹۷۳) در بخش ۱-۳۵ کتابش آورده است. در این بخش همچنین اثبات قضیه‌ای را که ذیلاً یک مورد خاص آن مطرح می‌شود، می‌توان یافت.



## قضیه پ ۳

هرگاه  $\rho \in \mathbf{R}^m$  و  $\mathbf{u}(\rho)$  یک میدان برداری باشد که تنها در یک زیر مجموعه فشرده  $K$  از  $\mathbf{R}^m$ ، غیرصفر است، آنگاه معادله دیفرانسیل

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathbf{u}(\rho) \quad (\text{پ-۱})$$

با شرط

$$\rho(t_0) = \rho_0, \quad (\rho_0 \in \mathbf{R}^m, t_0 \in \mathbf{R}) \quad (\text{پ-۱})$$

دارای یک جواب یکتا برای همه  $t$  های حقیقی است.  
برای اثبات قضیه پ ۱، یک  $\varepsilon > 0$  را به دلخواه اختیار کنید و قضیه پ ۳ را روی میدان برداری

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, s) = (\mathbf{v}(\mathbf{r}, s)F_\varepsilon(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/R), F_\varepsilon(|t - t_0|/T)), (\mathbf{r}, s) \in \mathbf{R}^{n+1} \quad (\text{پ-۱})$$

به کار ببندید، که در آن  $F_\varepsilon(x)$  یک تابع هموار است که در

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) &= 1 & (x \leq 1 - \varepsilon) \\ F_\varepsilon(x) &= 0 & (x \geq 1) \end{aligned} \quad (\text{پ-۱})$$

صدق می کند. این تابع با پ ۱-۱ به صورت

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-\varepsilon-x} \right) \right] \quad (1 - \varepsilon < x < 1) \quad (\text{پ-۱})$$

تعریف می شود. زیر مجموعه  $K$  عبارت است از

$$K: |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < R, \quad |t - t_0| < T \quad (\text{پ-۱})$$

و معادلات دیفرانسیلی که باید مصداق یابند عبارت اند از

$$\frac{ds}{dt} = F_\varepsilon(|t - t_0|/T) \quad (\text{پ-۱})$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, s)F_\varepsilon(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/R)$$

شرط اولیه  $\rho_0$  را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad s(t_0) = t_0. \quad (\text{پ۱-۱۵})$$

در قضیه پ ۳، برای همه  $t$ ها یک جواب یکتا وجود دارد. از روی شکل معادلات ملاحظه می‌کنیم که این برای پ ۱-۵ هم جواب یکتاست، به شرط پ ۱-۶ و مشروط بر این که  $t$  در فاصله  $I_{t\varepsilon}$  و  $\mathbf{r}$  روی گوی  $S_{r\varepsilon}$  باشد، یعنی

$$\begin{aligned} I_{t\varepsilon} : |t - t_0| &< T(1 - \varepsilon) \\ S_{r\varepsilon} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| &< R(1 - \varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{پ۱-۱۶})$$

اما بنا به نامساوی

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| &= \left| \int_{t_0}^t dt \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) \right| \leq \left| \int_{t_0}^t dt |\mathbf{v}| \right| \\ &< v_m \left| \int_{t_0}^t dt \right| = v_m |t - t_0| \end{aligned} \quad (\text{پ۱-۱۷})$$

هرگاه  $t$  در  $I_{t\varepsilon}$  باشد،  $\mathbf{r}(t)$  در  $S_{r\varepsilon}$  است، لذا برای  $t$  در  $I_{t\varepsilon}$  یک جواب یکتا برای پ ۱-۵، به شرط پ ۱-۶ وجود دارد و چون  $\varepsilon$  می‌تواند به دلخواه کوچک باشد، این جواب برای  $t$  در  $I_t$  هم وجود دارد.

## پیوست ۲

### انتگرالهایی که در برخی از مسائل حل شدنی لازم هستند

شماری از پتانسیلها حرکتی تولید می‌کنند که می‌توان آنها را برحسب توابع مقدماتی توصیف کرد. با وجود این، محاسبه انتگرالهای لازم ممکن است پر زحمت باشد. در اینجا انتگرالهایی را که برای چهار پتانسیل استاندارد پیش می‌آیند، ارائه می‌کنیم. پتانسیلها عبارت‌اند از

$$V_1(q) = U \tan^2 \alpha q \quad (\text{پ} ۲-۱)$$

$$V_2(q) = U(e^{-2\alpha q} - 2e^{-\alpha q}) \quad (\text{پ} ۲-۲)$$

$$V_3(q) = -U \operatorname{sech}^2 \alpha q \quad (\text{پ} ۲-۳)$$

$$V_4(q) = U \left[ \left( \frac{\alpha}{q} \right)^2 - 2 \left( \frac{\alpha}{q} \right) \right] \quad (\text{پ} ۲-۴)$$

$\alpha$  و  $U$  مقادیر ثابت مثبت‌اند.

انتگرالهای معینی که برای به دست آوردن کنشهای حرکت در این پتانسیلها لازمند، عبارت‌اند از

$$J_1 = \int_0^{q_1} dq (E - U \tan^2 \alpha q)^{\frac{1}{2}} \quad (\tan \alpha q_1 = (E/U)^{\frac{1}{2}})$$

$$= \pi(\sqrt{E+U} - \sqrt{U})/2\alpha \quad (E > 0) \quad (\text{پ} ۲-۵)$$



$$\begin{aligned}
 J_r &= \int_{q_l}^{q_r} dq [E - U(e^{-r\alpha q} - r e^{-\alpha q})]^{\frac{1}{r}} \\
 &= \pi(\sqrt{U} - \sqrt{-E})/\alpha \quad (-U < E < 0) \quad (۶-۲پ)
 \end{aligned}$$

که در آنها

$$\begin{aligned}
 q_{l,r} &= \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{U} \mp \sqrt{E+U}} \right] \\
 J_r &= \int_0^{q_l} dq (U \operatorname{sech}^r \alpha q + E)^{\frac{1}{r}} \quad (\cosh \alpha q_l = (-U/E)^{\frac{1}{r}}) \\
 &= \pi(\sqrt{U} - \sqrt{-E})/r\alpha \quad (-U < E < 0) \quad (۷-۲پ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_r &= \int_{q_l}^{q_r} dq \left[ E - U \left( \left( \frac{\alpha}{q} \right)^r - r \left( \frac{\alpha}{q} \right) \right) \right]^{\frac{1}{r}} \\
 &= \pi\alpha\sqrt{U} \left[ \sqrt{-U/E} - 1 \right] \quad (-U < E < 0) \quad (۸-۲پ)
 \end{aligned}$$

که در آنها

$$q_{l,r} = \frac{\alpha}{E} \left( \pm \sqrt{U^r + EU} - U \right)$$

برای به دست آوردن  $t$  به صورت تابعی از مختصه  $q$ ، انتگرالهای نامعین زیر لازم اند

$$\begin{aligned}
 K_l(q) &= \int dq (E - U \tan^r \alpha q)^{-\frac{1}{r}} \\
 &= \frac{1}{\alpha\sqrt{E+U}} \sin^{-1} \left[ \sqrt{\frac{U+E}{E}} \sin \alpha q \right] \quad (۹-۲پ)
 \end{aligned}$$

$$K_r(q) = \int dq [E - U(e^{-r\alpha q} - r e^{-\alpha q})]^{-\frac{1}{r}}$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{-E}} \sin^{-1} \left[ \frac{-Ee^{\alpha q} U}{\sqrt{U(U+E)}} \right] \quad (-U < E < 0) \quad (\text{پ ۱۰-۲ الف})$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{E}} \cosh^{-1} \left[ \frac{Ee^{\alpha q} + U}{\sqrt{U(U+E)}} \right] \quad (E > 0) \quad (\text{پ ۱۰-۲ ب})$$

$$K_{\mp}(q) = \int dq (E + U \operatorname{sech}^2 \alpha q)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{-E}} \sin^{-1} \left[ \sqrt{\frac{-E}{U+E}} \sinh \alpha q \right] \quad (-U < E < 0) \quad (\text{پ ۱۱-۲ الف})$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{E}} \sinh^{-1} \left[ \sqrt{\frac{E}{U+E}} \sinh \alpha q \right] \quad (E > 0) \quad (\text{پ ۱۱-۲ ب})$$

$$K_{\mp}(q) = \alpha \int dx \frac{x}{\sqrt{Ex^2 + 2Ux - U}} \quad (q = \alpha x)$$

$$= \alpha \frac{(Ex^2 + 2Ux - U)^{\frac{1}{2}}}{E} + \frac{U\alpha}{(-E)^{\frac{3}{2}}} \sin^{-1} \left( \frac{Ex + U}{\sqrt{U(U+E)}} \right) \quad (-U < E < 0) \quad (\text{پ ۱۲-۲ الف})$$

$$= \alpha \frac{(Ex^2 + 2Ux - U)^{\frac{1}{2}}}{E} - \frac{U\alpha}{E^{\frac{3}{2}}} \cosh^{-1} \left( \frac{Ex + U}{\sqrt{U(U+E)}} \right) \quad (E > 0) \quad (\text{پ ۱۲-۲ ب})$$

## واژه‌نامه

terminating motion

حرکت مختوم

area-preservation

حفظ مساحت

separatrix

خم ممیزه

autonomous

خودگردان

bifurcation

دو شاخگی

libration

رخگرد

strange attractor

ریابنده غریب

over stable

فراپایدار

squeeze

فشرش

angle-action variables

متغیرهای زاویه کنش

perturbing field

میدان اختلال

structural instability

ناپایداری ساختاری



## فهرست راهنما

- آونگ ۳۳، ۵۱، ۶۵، ۶۶، ۱۴۰، ۱۶۵، ۱۹۱  
 ~ با آویزگاه تند-حرکت ۱۹۰  
 ~ با آویزگاه متحرک ۹۱  
 پربندهای ~ ۶۷، ۱۵۲  
 ~ قائم میرا ۴۸  
 لاگرانژی ~ ۸۸، ۸۹  
 ~ میرا ۴۸  
 نظریهٔ پریشیدگی در مورد ~ ۱۵۲  
 هامیلتونی ~ ۶۵، ۸۸، ۸۹  
 اتساع ۲۳-۲۶  
 اخترشناسی ۲۱۸  
 استاندارد  
 برش ~ ۲۲  
 تبدیل ~ ۲۰، ۲۵  
 شکل ~ ۲۰  
 فشرش ~ ۲۱  
 استروبوسکوپ ۲۰۵  
 اعداد گنگ ۲۲۶  
 اعداد گویا ۲۲۶، ۲۵۲  
 انتشارگرها ۱۹۸، ۲۰۱، ۲۰۷، ۲۱۰، ۲۳۲  
 ~ برای حرکت ضربه‌ای ۲۱۶-۲۱۸  
 ~ برای ذرهٔ آزاد ۲۱۵-۲۱۸  
 ~ برای نوسانگر خطی ۲۱۳، ۲۱۴  
 ~ برای نیروی رانشی ۲۱۳، ۲۱۴  
 تناوب ~ ۱۹۹، ۲۱۸  
 ~ دستگاه مرتبهٔ اول ۲۰۱-۲۱۴  
 ~ دستگاههای مرتبهٔ دوم ۲۱۰-۲۳۲  
 عکس ~ ۲۰۲  
 قاعده برای ضرب ~ ۲۰۲، ۲۱۳  
 انتگرال‌گیری عددی گاوسی ۶۸  
 اندازه حرکت ۸۷  
 ~ زاویه‌ای ۶۳، ۸۹، ۱۳۸  
 انرژی ۵۴، ۱۳۷، ۱۷۳  
 ~ جنبشی ۵۳، ۸۰، ۸۷، ۹۰  
 انقباض ۲۵  
 بازتابش ۲۱، ۲۵  
 برش ۲۲  
 بسامد ۱۷۳  
 ~ طبیعی ۲۱۰  
 ~ واداشته ۲۱۰  
 بسط تایلور ۴۴، ۱۴۸  
 بسطی فشرده ۲۶۰

بوم‌شناسی ۱۱

بی‌دررو

تغییر ~ ۱۷۰

شرایط ~ ۱۷۰-۱۸۶

ناوردای ~ ۱۸۱

ناوردایی ~ ۱۷۲

~ و قانون گازها ۱۷۴

نظریه ~ ۱۸۰

بینهایت کوچک

انتقال ~ ۱۱۹

تبدیل بندادی ~ ۱۱۸، ۱۱۹

دوران ~ ۱۲۴

پارامتری

تشدید ~ ۱۱۹، ۲۲۷-۲۳۲

تغییرات ~ ۲۳۱

پایدار

جمعیت ~ ۱۲

~ ساختاری ۴۶، ۸

ستاره ~ ۳۶

گره ~ ۳۵

~ مجانبی ۳۴

نقاط ثابت ~ ۶، ۳۴، ۲۴۳

نقطه ~ بیضوی ۲۲۶

پایداری ۲۳۱، ۱۹۹، ۳۴-۳۳

~ قوی ۲۰۶، ۶۳، ۳۶، ۳۴

~ مجانبی ۳۴

~ نقاط ثابت ۶، ۳۳، ۳۴

نوارهای ~ ۲۳۱

پتانسیل ۴

انرژی ~ ۵۲، ۸۷، ۸۸

~ تناوبی ۱۳۸

سد ~ ۶۲

ماکزیموم ~ ۶۳

~ مکعبی ۶۰، ۶۱، ۷۱

~ مورس ۱۶۳

مینیموم ~ ۶۳

پربندها(ی) ۵۴، ۶۹

~ آونگ ۶۷، ۱۵۲

~ برای پتانسیل عام ۶۳

~ برای پتانسیل مکعبی ۶۰

~ مهره روی سیم ۹۰

~ هامیلتونی ۵۱، ۵۲

~ برای آونگ ۶۵، ۶۶

~ برای پتانسیل عام ۶۳

~ برای پتانسیل مکعبی ۶۰، ۶۱

~ مهره روی سیم ۹۰

پرنندگان ۲۴۱

پرشیدگی ۱۴۷

~ تند ۱۸۶-۱۹۱

~ کند ۱۷۴-۱۸۶

~ کوچک ۱۵۰

پرشیده

حرکت ~ ۱۵۳

منحنیهای فاز ~ ۱۶۰

~ هامیلتونی ۱۴۷

پلاسما ۶۵

پوش ۸۱

پیکربندی ۵۱

~ استوانه‌ای ۶۳

فضای ~ ۵۱

تاب ۲۳۰

تابع

~ تناوبی هموار ۲۳۱

~ سرعت ۴۴، ۲۹، ۴، ۳



تبادل ۶، ۳۳، ۳۴، ۶۳

تعمیم یافته

تبدیل

دوران ~ ۲۱

~ اتساع دهنده ۲۳

سرعت ~ ۸۷، ۸۰

~ استاندارد ۸

سهیمهای ~ ۳۵۰

~ به نمایش زاویه-کنش ۱۴۰-۱۲۵

مختصه ~ ۱۰۱، ۸۰، ۵۳

~ بین نمایشهای مختلف ۱۱۹-۱۰۱

هذلولیهای ~ ۳۷

~ حافظ مساحت ۱۸

تغییرات جمعیت ۳، ۱۱، ۱۲، ۲۴۱

~ خطی حافظ مساحت ۱۸-۲۳، ۲۱۶

تغییر حالت ۱، ۱۰۴، ۱۰۷

~ در تغییر حالت ۱۰۷، ۱۰۴

تغییر دستگاه مختصات ۱۰۷، ۱۰۴

~ در تغییر مختصه ۱۰۵، ۱۰۴

تفکیک پذیری دکارتی ۳۵

~ لزاندر ۹۳، ۸۵-۸۱

تفکیک پذیری قطبی ۳۷

~ مستقل از زمان ۱۱۸-۱۱۰

تفکیک متغیرها ۳۴-۳۹

~ نمایش بین  $(q, \dot{q})$  و  $(q, p)$  ۸۵-۸۰

تناوب ۶۷-۶۹، ۷۳

~ نوع ۱ ۴۰، ۱۸

انتشارگر ~ ۲۰۴، ۲۲۷

~ نوع ۲ ۴۰، ۱۹

~ دوران ۶۸

~ نوع ۳ ۴۰، ۱۹

~ رخگرد ۶۸

~ وابسته به زمان ۱۱۳-۱۰۲

تناوبی ۱۸۳

~ وارونپذیر ۱۷

پتانسیل ~ ۱۳۸

~ همانی ۱۰۹، ۱۰۶

حرکت ~ ۱۲۸

تبدیل بندادی ۱۰۲-۱۱۹، ۱۲۹، ۱۰۴

دستگاه ~ ۲۰۵

~ بینهایت کوچک ۱۱۸، ۱۱۹

شرایط ~ ۱۹۹، ۲۱۸-۲۳۲

~ خاصیت گروهی ~ ۱۱۸

~ به وجود آورنده نگاشتها ۲۲۹

~ شرایط لازم و کافی برای ~ ۱۰۶

تند-نوسان

~ مستقل از زمان ۱۰۱-۱۱۳

شرایط ~ ۱۷۰، ۱۸۶-۱۹۱، ۱۹۵، ۱۹۶

~ وابسته به زمان ۱۱۵-۱۱۰

نیروی ~ ۱۷۱

تبدیل خطی ۱۶-۲۷

هامیلتونی ~ ۱۹۵-۱۹۷

~ حافظ مساحت ۱۷-۲۳، ۲۱۶

توابع مولد ۱۰۷-۱۱۰، ۱۱۹

~ نوع ۱ ۱۸

رابطه بین انواع ~ ۱۰۷-۱۱۰

~ نوع ۲ ۱۹

~ نمایش تبدیل به زاویه-کنش ۱۳۴-۱۳۷

~ نوع ۳ ۱۹

تولیدکننده ۱۱۸

تشدید ۲۱۰

~ پارامتری ۲۲۷-۲۳۲

جابه جایی ۲۱۳

شرط ~ ۲۱۰



- جریان ۴۱  
 ~حافظ مساحت ۶۹-۷۱، ۹۱  
 ~خطی ۴۱  
 ~فاز ۵، ۳۰، ۳۱  
 ~به عنوان تبدیل بندادی بینهایت کوچک  
 ۱۱۹  
 ~دستگاه مرتبه دوم ۳۱، ۳۲  
 جزیره های احاطه کننده نقاط ثابت ۲۵۲  
 جسم دارای دوران آزاد ۶۴، ۱۳۸، ۱۶۲  
 جوابهای تحلیلی موضعی ۳۳  
 چارچوب  
 ~شتابدار ۱۱۵  
 ~غیرلخت ۶۹، ۷۰  
 ~مرجع دوار ۶۹  
 چرخه حدی ۴۵، ۴۶  
 چند درجه آزادی ۶۵  
 حافظ مساحت ۱۸  
 تبدیلیهای ~ ۱۸  
 جریانهای ~ ۶۹-۷۱، ۹۱  
 نگاشتهای ~ ۱۹۹، ۲۲۱، ۲۴۱  
 حالت ۳، ۳۰  
 حرکت  
 ~آشوبناک ۲۳۸  
 ~دستگاههای هامیلتونی ۲۴۸، ۲۵۶  
 ۲۵۷  
 ~در میدان نوسانی سریع ۱۸۶-۱۹۱  
 ~سیاره ای ۶۵، ۱۴۷  
 شامل ~ ۳۴  
 ~مختوم ۹، ۷۳، ۱۵۰  
 ~منظم ۲۵۱  
 ~دستگاههای هامیلتونی ۲۵۶، ۲۵۷  
 ~نامنظم ۲۴۴  
 ~نوسانی ۶۱، ۲۲۹  
 حشرات ۲۴۱  
 حلقه انبارنده ۲۴۸  
 خازن میکروفونی ۲۳۰  
 خطی  
 تبدیل حافظ مساحت ~ ۱۸-۲۳، ۲۱۶  
 حرکت ~ ۳۹  
 دستگاه هامیلتونی ~ ۵۵-۶۰  
 دستگاه ~همگن ۲۰۴  
 معادله حرکت ~ ۱۹۹  
 معادله دیفرانسیل ~ ۸  
 نگاشت ~ ۱۶، ۲۲۱  
 نگاشتهای ~ حافظ مساحت ۲۲۱-۲۳۲،  
 ۲۳۹  
 نیروی بازگرداننده ~ ۲۳۰  
 نیروی رانشی ~ ۵۸، ۵۹  
 خم ممیزه ۵۹-۶۳، ۶۵، ۷۳، ۱۲۵، ۱۵۲،  
 ۱۶۱، ۲۵۳  
 خورشید ۱۴۷  
 دامنه ۵۸، ۱۷۳  
 درجه آزادی ۳۱، ۵۱  
 دستگاه(های)  
 ~اجتماعی ۲۳۹  
 ~اقتصادی ۲۳۹  
 ~الکترونیکی ۲۳۹  
 ~انتگرال پذیر ۲۵۷  
 ~پایستار ۵۳-۶۹  
 ~هامیلتونی ۵۳-۶۹، ۱۷۰، ۲۵۷  
 ~خطی ۸، ۳۵  
 ~پایستار ۵۵-۷۱

- ذره ~ مرتبه اول ۲۳۳-۲۳۲، ۲۰۷-۱۹۸  
 ~ خودگردان ۳۲، ۳۱، ۱  
 ~ دینامیکی پیچیده ۲۴۴  
 ~ زیست‌شناختی ۲۳۹  
 ~ مرتبه اول ۱۵-۳  
 ~ با پارامترهای وابسته به زمان ۲۰۷-۲۰۰  
 ~ ریشیدگی ۱۵۱-۱۴۸  
 ~ خطی ۲۳۵-۲۳۲، ۸  
 ~ واداشته ۲۰۰-۱۹۸  
 ~ مرتبه دوم ۵۰-۳۰  
 ~ مرتبه  $m$  ۳۰، ۲۹  
 ~ مکانیکی ۲۳۹  
 ~ نیوتونی غیرمقید ۳۱  
 ~ واداشته ۲۰۹-۲۰۷، ۲۰۱-۱۹۸  
 ۲۳۷-۲۳۵  
 ~ هامیلتونی ۱۱  
 ~ پایستار ۴۹-۵۳  
 تعادل ~ ۶۳  
 حرکت آشوبناک ~ ۲۵۷، ۲۵۶  
 حرکت منظم ~ ۲۵۷، ۲۵۶  
 ~ خودگردان ۵۳  
 نقاط ثابت ~ ۶۱  
 دوران ۱۲-۹، ۲۱، ۲۵، ۶۳-۶۹، ۱۲۵، ۱۴۰-۱۳۷  
 ~ آزاد ۶۵-۶۳  
 تناوب ~ ۶۸  
 ~ یکنواخت ۹  
 دوشاخگی ۲۴۸، ۲۴۷  
 ذرات باردار ۱۷۱  
 محبوس کردن ~ ۲۴۹  
 ذرات بنیادی ۲۴۸  
 ~ تراکم‌پذیر ۴  
 شاره ۴  
 سیکلوئید ۹۵  
 ستاره  
 ~ پایدار ۴۲، ۴۱، ۳۶  
 ~ ناپایدار ۳۶  
 سرعت فاز ۵۲، ۳۱، ۳  
 ~ دستگاه پایستار هامیلتونی ۵۴  
 زیست‌شناسی ۱۵، ۱۱  
 زاکوبی ۱۰۲  
 زاده ۱۱  
 زمان گسسته ۲۳۹  
 زمین ۱۴۷  
 زهره ۱۴۷  
 زیست‌شناسی ۱۵، ۱۱  
 زاکوبی ۱۰۲  
 ستاره  
 ~ پایدار ۴۲، ۴۱، ۳۶  
 ~ ناپایدار ۳۶  
 سرعت فاز ۵۲، ۳۱، ۳  
 ~ دستگاه پایستار هامیلتونی ۵۴  
 سیکلوئید ۹۵  
 ستاره  
 ~ پایدار ۴۲، ۴۱، ۳۶  
 ~ ناپایدار ۳۶  
 سرعت فاز ۵۲، ۳۱، ۳  
 ~ دستگاه پایستار هامیلتونی ۵۴  
 سیکلوئید ۹۵

شتاب ~ ۳۱

شامل حرکت ۳۴

شتابدهنده ۶۵

~ ذره ۱۷۱

قائم

آونگ ~ ۶۵، ۶۶

شتاب ~ ۹۳

صفحهٔ مختلط ۸

صفر مضاعف ۸

قاعده برای ضرب انتشارگرها ۲۰۲، ۲۱۳

قانون گازها به عنوان مثالی از ناوردایی بی دررو

۱۷۴

ضربه ۲۱۶، ۲۳۱

قضیهٔ لیوویل ۶۹-۷۱

انتشارگر برای ~ ۲۱۶-۲۱۸

قضایای وجود ۲۵۹

تعریف ~ ۲۱۶

قویاً پایدار

~ درجه دوم ۲۵۰

مجموعهٔ ناوردای ~ ۴۶

قرارداد ~ ۲۱۷

نقطهٔ ثابت ~ ۳۴، ۳۶، ۳۸

عدد پیچش ۲۲۵

نقطهٔ حلزونی ~ ۳۸

عکس انتشارگر ۲۰۲، ۲۱۳

کنش ۱۳۲-۱۷۳

غیر خطی ۱۴۶، ۲۱۰، ۲۳۸، ۲۵۶

ابعاد ~ ۱۲۹

فاصلهٔ باز ۶

~ به صورت تابع انرژی ۱۲۹

فرایپایدار ۲۰۶، ۲۲۳

متغیر ~ ۱۲۷

فرمولبندی

ناوردایی بی درروی ~ ۱۷۰-۱۹۱

~ لاگرانژی ۸۱

گرانژی

~ معادلهٔ حرکت ۸۷-۹۳

انرژی پتانسیل ~ ۸۸

~ هامیلتونی ۸۱

میدان ~ ۹۳

فشرش ۲۱، ۲۵

گره

فصل تولیدمثل ۲۴۱

~ پایدار ۳۵، ۴۱، ۴۲

فضای فاز ۳، ۳۰، ۳۱، ۵۱، ۵۲، ۲۳۹

~ ناپایدار ۳۶، ۴۱، ۴۲

~ استوانه‌ای ۶۴-۶۹، ۱۲۷

~ ناویژه ۴۱، ۴۲، ۴۳

تبدیل در ~ ۱۰۲-۱۱۳

~ دایره‌ای ۹

لاگرانژی ۷۹-۹۳

فعالیت اکثریکی عصبی ۷۸

~ آونگ ۸۸

فیزیکی

~ با آویز متحرک ۹۱، ۹۲

اندازه حرکت ~ ۵۳

~ ذرهٔ آزاد ۸۲

سرعت ~ ۳۱

متغیرهای ~ ۵۳  
مساحت ۱۸، ۱۰۲  
مستقل از زمان

تبدیل ~ ۱۰۲-۱۱۳

هامیلتونی ~ ۵۳-۷۹، ۱۲۵، ۱۵۱-۱۶۱،  
۱۸۴

مشتري ۱۴۷، ۲۴۹

مکانیک هامیلتونی ۱۳  
معادله

~تفاضلی ۱۲

~حرکت ۱، ۳۰

فرمولبندی ~ ۸۷-۹۳

~نیوتونی ۳۰، ۵۵

~یک مهره روی سیم ۸۰

~لاگرانژی حرکت ۸۰، ۸۵-۸۷

~لوجیستیک ۱۲، ۱۳، ۲۴۲

~مشخصه ۱۷

~هامیلتونی ۵۳، ۶۸

منظومه شمسی ۵۱، ۱۴۷، ۲۴۹

منحنی فاز ۳۰، ۳۱

~برای آونگ ۶۶

~بیضی ۱۷۸

~پریشیده و ناپریشیده ۱۶۰

مولکولی

حرکت ~ ۶۵

دوران ~ ۶۵

میدان سرعت ۶

میرایی ۲۱۰

مینیموم پتانسیل ۶۳

ناپودی یک نوع ۲۲۰

ناپایدار(ی)

گره ~ ۳۶

~مهره روی سیم ۸۹  
لیزرها ۱۷۱

ماتریس نمایش ۱۶

ماشین حساب ۲۵۷

ماکزیمومهای پتانسیل ۶۱  
متغیر(های)

~زاویه ۱۰۴

~به عنوان تابعی از  $q$  ۱۳۲-۱۳۴

~در نگاشتها ۲۵۲

~زاویه-کنش ۱۲۵-۱۴۰

~برای دوران ۱۳۷-۱۴۰

~ساده ۱۲۵-۱۲۹

~وابسته ۱۰۸

محبوس کردن ذرات باردار ۲۴۹

محدب بودن ۸۴

مختصه تعمیم یافته ۵۳

مربع واحد ۲۰

مربعی

پتانسیل ~ ۵۷

سد ~ ۵۸

مرتبه اول

تصحیحات ~ ۱۵۵

دستگاه خودگردان ~ ۱۵-۳

نظریه پریشیدگی ~ ۱۴۷-۱۶۱

مرتبه دستگاه ۲۹

مرتبه دوم

دستگاه ~ ۱۶

معادله دیفرانسیلی ~ ۳۱

مرزهای طبیعی ۱۰، ۱۱، ۳۷، ۱۳۰، ۱۳۸

مرگ ۱۱

مزدوج

اندازه حرکت ~ ۵۳، ۷۹

نقاط ثابت  $\sim ۲۰۶, ۳۴, ۶$

نقطهٔ حلزونی  $\sim ۳۸$

نقطهٔ هذلولوی  $\sim ۲۲۳$

$\sim$  ساختاری  $۲۲۶, ۸$

ناپیشیده

حرکت  $\sim ۱۵۳$

منحنیهای فاز  $\sim ۱۶۰$

هامیلتونی  $\sim ۱۴۷$

ناورد (بی)

$\sim$  بی‌دررو  $۱۸۱$

مجموعه‌های  $\sim ۵۵, ۶$

منحنیهای  $\sim ۲۵۶-۲۵۱$

ناحیهٔ  $\sim ۱۲۸$

نسل  $۲۴۴$

نظریهٔ پیشیدگی  $۱۶۱-۱۴۷$

$\sim$  برای دستگاه مرتبهٔ اول  $۱۴۹, ۱۴۸$

$\sim$  برای دستگاههای متغیر بی‌دررو  $۱۷۶$

$\sim$  برای دستگاههای هامیلتونی پایستار

$۱۶۱-۱۵۱$

نظریهٔ مدارهای الکتریکی  $۲۱۸$

نقاط ثابت  $۲۵۲, ۶۶, ۶۱, ۵۸, ۴۴, ۴۱, ۳۷$

$\sim$  بیضوی  $۳۹-۴۱, ۴۳, ۵۷, ۶۰, ۶۴$

$\sim$  پایدار نوسانی  $۲۰۶$

تعیین  $\sim ۴۵, ۴۴$

$\sim$  دستگاههای هامیلتونی  $۵۵$

رده‌بندی  $\sim ۴۴-۳۹$

$\sim$  غیرمنزوی  $۶۴$

$\sim$  فراپایدار  $۲۰۶$

$\sim$  ناپایدار  $۲۰۶, ۶$

$\sim$  نوسانی  $۲۰۶$

$\sim$  نگاشت لوجیستکی  $۲۴۶-۲۴۱$

نقطه

$\sim$  حلزونی  $۴۴-۳۷$

$\sim$  زین‌اسبی پتانسیل  $۶۳$

$\sim$  عطف  $۶۳$

$\sim$  مرزی  $۱۰$

نگاشت  $۲۳۸$

$\sim$  بیضوی  $۲۲۳, ۲۲۲$

$\sim$  تقاضی  $۱۲$

$\sim$  خطی حافظ مساحت  $۲۲۷, ۱۹۹$

$\sim$  غیرخطی  $۲۳۹$

$\sim$  کرمونا  $۲۵۱$

$\sim$  لوجیستیک  $۲۴۱$

ربانده‌های  $\sim ۲۵۴, ۲۵۶-۲۴۳$

$\sim$  نسل دوم  $۲۴۵$

$\sim$  نوع  $۱- ۲۲۳$

$\sim$  نوع  $۱+ ۲۲۳$

$\sim$  و زمان گسسته  $۲۳۹$

$\sim$  و شرایط تناوبی  $۲۳۹$

$\sim$  هذلولوی  $۲۲۲$

$\sim$   $n$ امین مرتبه  $۲۳۹$

نمایش

$\sim$  استوانه‌ای  $۶۴$

ماتریس  $\sim ۱۶$

$\sim (q, p), ۸۰, ۹۰$

$\sim (q, \dot{q}), ۸۰, ۹۰$

نمایی  $۱۱$

فروافت  $\sim ۱۹۹$

نمودار فاز  $۱۴۳, ۳۱$

$\sim$  برای دستگاه پایستار هامیلتونی  $۵۵$

$\sim$  ساده‌شده  $۵۵$

نوسان  $۵۸$

نوسانگر خطی  $۵۶, ۵۷, ۷۶, ۱۲۱, ۱۲۲$

$۱۴۵, ۱۵۳, ۱۶۲$

انتشارگر برای  $\sim ۲۱۴, ۲۱۳$

$\sim$  با بسامد کند-تغییر  $۱۷۴-۱۸۰$



~ مزدوج مختلط ۱۹

~ هامیلتونی ۸۴، ۸۲، ۵۳

~ آونگ ۸۸، ۶۵

~ با آویز متحرک ۹۲، ۹۱

~ به عنوان تولیدکننده جریانهای حافظ

مساحت ۷۱-۶۹

~ پریشیده ۱۴۷

تبدیل مستقل از زمان ~ ۱۰۳-۱۰۲

تبدیل وابسته به زمان ~ ۱۱۶، ۱۱۵

~ حرکت میانگین ۱۸۹

~ در نمایش زاویه-کنش ۱۳۲-۱۲۹، ۱۲۵

دوره تناوب ~ ۲۵۷، ۲۵۶، ۶۹-۶۳

~ مهره روی سیم ۹۱

~ ناپریشیده ۱۴۷

~ وابسته به زمان ۱۷۰-۱۹۱، ۱۹۸، ۶۹

۲۵۷، ۲۵۶

یخ سره باز ۱۹۱

یکنواخت

دوران ~ ۹

نیروی ~ ۵۵

~ با ضربه‌های تناوبی ۲۳۰

متغیر زاویه-کنش برای ~ ۱۳۶

~ واداشته ۲۰۷-۲۰۹، ۲۳۵

نوسانگر ناهماهنگ ۱۲۳

نیروهای تناوبی ۲۲۷-۲۳۲

نیوتونی

دستگاه ~ ۲۴۸، ۲۲۹، ۵۲، ۵۱، ۲۹، ۴

فرمولبندی ~ ۸۶

مکانیک ~ ۵۵

وابسته به زمان

پارامترهای ~ ۱۹۸، ۲۰۰

تبدیل ~ ۱۱۸-۱۱۰

شرایط ~ ۲۰۱، ۱۹۹، ۶۸، ۴

نیروهای ~ ۶۹

~ هامیلتونی ۱۸۴، ۷۰-۶۹

واکنشهای شیمیایی ۱۴، ۱

ورجه توب ۱۸۵، ۱۷۱، ۱۳۰

ویژه مقدارها(ی) ۴۱، ۴۰، ۲۰، ۱۹

~ حقیقی و متساوی ۱۹

~ حقیقی و متمایز ۱۸