سری فوریه

14–1– خواص کلی

تمرینات

14–1–1 می خواهیم تابع $f(x)$ (به صورت عبارت درجه دوم انتگرال پذیر) را به کمک یک سری فوریه متناهی نمایش دهیم. معیار مناسبی برای دقت سری به کمک انتگرال مربع انحراف برقرار زیر به دست می آید.

$$\Delta P = \int_0^{2\pi} [f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{P} (a_n \cos + b_n \sin nx]^2 dx$$

نشان دهید که شرط کیمنه شدن ΔP یعنی:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial b_n} = 0 \quad \frac{\partial \Delta p}{\partial a_n} = 0$$

به ازای همه مقادیرn، به انتخاب an و bn به صورتی که در معادله های (14–11) و (12/14) داده شده است، می انجامد.

پاسخ

$$\frac{\partial \Delta_p}{\partial a_n} = \int_0^{2\pi} 2\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos nx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx - \pi a_n = 0 \to a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

که برای رسیدن به روابط فوق از روابط تعامد (14-7) و (14-8) و (14-9) استفاده کرده ایم.

14-1-2 در بررسی یک شکل موج پیچیده (کشنده های اقیانوسی، زمین لرزه ها، نوارهای موسیقی و مانند آنها) بهتر است. از سری فوریه ای به صورت زیر بهره گیریم.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx - \theta_n)$$

نشان دهید که این معادله با معادله (14-1) هم ارز است و در آن

$$a_n = a_n \cos\theta_n, b_n = a_n \sin\theta_n, a_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \tan\theta_n = b_n / a_n$$

پاسخ: قبلاً سری فوریه را به صورت زیر تعریف کرده بودیم.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\, cos\; nx + b_n \sin nx) \quad I$$

سری فوریه جدیدی که در نظر گرفته بودیم به صورت زیر قابل بسط دادن است.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(cos\theta_n \cos nx + \sin\theta_n\; sin\; nx) \quad II$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

در صورتی که داشته باشیم:

$$a_n = a_n \cos\theta_n \qquad , \qquad b_n = a_n \sin\theta_n$$

روابط I و I I هم ارز هستند.

14–1–3 تابع $f(x)$ را به صورت یک سری فوریه نمایی بسط داده ایم.

$$f(x) = \sum_{n=-\theta}^{\infty} C_{n^{e^{inx}}}$$

اگر $f(x)$ حقیقی باشد، $f(x) = f^*(x)$ ، چه قیدی روی ضرایب C_n وضع می شود.

پاسخ:

$$f(x) = \sum_{n=-\theta}^{+\theta} C_{n^{e^{inx}}} \rightarrow f^*(x) = \sum_{n=-\theta}^{+\theta} C^*_{n^{e^{-inx}}}$$

$$f(x) f^*(x) \rightarrow C_{n^{e^{inx}}} = C^*_{n^e} = C_{-n}$$

14–1–4 با فرض اینکه $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]dx$ و $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx$ متناهی اند، نشان دهید که

$$\lim_{m\rightarrow\theta} a_m = 0 \qquad , \qquad \lim_{m\rightarrow\theta} b_m = 0$$

پاسخ:

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{m=0}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx \right]^2 dx \geq 0$$

مهندس یار

وقتی $m\to\infty$ میل می کند cosmx و sinmx مقدار معینی ندارند در نتیجه برای اینکه حاصل انتگرال مقدار معینی داشته باشد باید داشته باشیم.

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 0 \qquad \lim_{m\to\infty} b_m = 0$$

14–1–5 شگرد مجموعه یابی این بخش را به کار بندید و نشان دهید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} 1/2(\pi - x) & 0 < x \le \pi \\ 1/2(\pi + x) & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

به شکل 14–2 مراجعه کنید.

پاسخ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \lim_{2\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n \sin nx}{n} =$$

که به ازای $|r|<1$ مطلقاً همگراست. دستور العمل ما به این ترتیب است که تلاش کنیم از طریق تبدیل توابع مثلثاتی به توابع نمایی، سری توانی تشکیل دهیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n \sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}e^{inx}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n e^{-inx}}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[-\ln(1-re^{ix}) + n(1-re^{-ix})\right] = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1-re^{-ix}}{1-re^{ix}}\right)$$

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n \sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-e^{-ix}}{1-e^{ix}} = \frac{1}{2i}\ln\left[\frac{1}{e^{ix}}\left(\frac{1-e^{-ix}}{e^{-ix}-1}\right)\right]$$

مهندس یار

$$=\frac{1}{2i}\ln(-e^{-ix})=\frac{1}{2i}\ln(e^{i\pi}e^{-ix})=\frac{1}{2i}(i\pi-ix)\frac{1}{2}(\pi-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}(\pi-x) \qquad 0\le x<\pi$$

چنانچه $-\pi\le x<0$ باشد خواهیم داشت.

$$\frac{1}{2i}\ln\left[(-1)e^{-ix}\right]=\frac{1}{2i}\ln\left[e^{-i\pi}e^{-ix}\right]=\frac{1}{2i}\left[-\imath(\pi+x)\right]=-\frac{1}{2}(\pi+x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{-1}{2}(\pi+x) \qquad -\pi\le x<0$$

6–1–14 مجموع سری مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

و نشان دهید که این مجموع برابر $x/2$است.

پاسخ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\lim_{r\to 1}\frac{(-1)(-r)^n\sin nx}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n}{n}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n e^{inx}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n e^{-inx}}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln(1+re^{ix})+\ln(1+re^{-ix})\right]=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+re^{-ix}}{1+re^{+ix}}\right)$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(-r)^n \sin nx}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}=-\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{+ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{1}{e^{ix}}\left(\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{-ix}}\right)\right]=-\frac{1}{2i}\ln(e^{-ix})-\frac{1}{2i}(-ix)=\frac{x}{2}$$

14–1–7 مجموع سری مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

و نشان دهید که برابر است با

$$\begin{cases}\pi/4 & 0<x<\pi\\ -\pi/4 & -\pi<x<0\end{cases}$$

$$\sum_{n=}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}r^{2n+1}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$$

$$=\lim_{r\to}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(re^{ix})^{2n+1}-(re^{-ix})^{2n+1}}{2i(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(re^{ix})^{2n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(re^{-ix})^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

با استفاده از بسط مقابل، رابطه بالا را ساده می کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}=\frac{-1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$$

$$\frac{1}{2i}\times\frac{-1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-re^{+ix}}{1+re^{ix}}\right)-\ln\left(\frac{1-re^{-ix}}{1+re^{-ix}}\right)\right]=\frac{-1}{4i}\left[\ln\left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}}\times\frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right)\right]$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}=\lim_{r\to 1}\frac{-1}{4i}\left[\ln\left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}}\times\frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4i}\left[\ln\left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}}\times\frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right)^{-1}\right]=\frac{1}{4i}\ln(-1)=\frac{1}{4i}\ln(e^{\pm i\pi})$$

$$=\frac{+1}{4i}(\pm\pi)=\begin{cases}\pi/4 & 0<x<\pi\\ -\pi/4 & -\pi<x<0\end{cases}$$

14–2 مزایا و موارد استفاده سری فوریه

تمرینات

14–2–1 شرایط مرزی (نظیر $\psi(0)=\psi(l)=0$) جوابهایی به صورت $\sin(n\pi x/l)$ را ایجاب و کسینوسهای متناظر را حذف می کند.

(الف) تحقیق کنید که در این صورت شرایط مرزی که در نظریه اشتورم– لیوریل منظور می شوند، در بازه $(0,l)$ صدق می کنند دقت کنید که این بازه فقط نصف بازه معمولی فوریه است.

(ب) نشان دهید که مجموعه توابع $n=1,2,3,\ldots\varphi_n(x)=\sin(n\pi x/l)$ در یک رابطه تعامدی به صورت زیر صدق می کنند.

مهندس یار

$$\int_0^l \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \frac{l}{2}\delta_{mn}, \qquad n>0$$

پاسخ (الف): چنانچه $u(x)=\sin(n\pi x/l)$ یک جواب مسئله باشد و جواب دیگری به صورت $v(x)=\sin(m\pi x/l)$ داشته باشیم.با استفاده از معادله (9–19) با توجه به شرایط مرزی خواهیم داشت.

$$vPu_a'^b = 0 \rightarrow \sin(m\pi x/l).P(n\pi/l)\cos(n\pi x/l)_0^l$$

$$= \sin = (m\pi).P(n\pi/l)\cos(n\pi) - \sin(0)P(n\pi/l)\cos(0) = 0$$

پس شرایط مرزی برقرار است.

(ب):

$$\varphi_m(x) = \sin(m\pi x/l) \quad , \quad \varphi_n(x) = \sin(m\pi x/l)$$

$$I = \int_0^l \sin(m\pi x/l)\sin(n\pi x/l)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m-n)\pi}\sin(m-n)\pi x/l - \frac{l}{(m+n)\pi}\sin(m+n)\pi x/l\right]_0^l = \frac{1}{2}[0-0] = 0$$

اگر $m \neq n$ باشد، خواهیم داشت.

$$II = \int_0^l \sin(m\pi x/l)\sin(n\pi x/l)dx = I = \int_0^l \sin^2(n\pi x/l)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\cos(2n\pi x/l)}{2} = \frac{1}{2}\left[\int_0^l dx - \int_0^l \cos n\pi x/l dx\right]$$

مهندس یار

$$=\frac{1}{2}\left[x\Big|_0^1-\frac{l}{2n\pi}\sin(2n\pi x/l)\Big|_0^l\right]=\frac{1}{2}[l-0]=\frac{1}{2}$$

از عبارتهای I و II نتیجه می گیریم که:

$$\int_0^l \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\frac{1}{2}\delta_{mn}$$

2-2-4 (الف) تابع $f(x)=x$ را در بازه $(0,2l)$ بسط دهید. این سری را که یافته اید (سمت راست پاسخ را) روی $(-2l,2l)$ ترسیم کنید.

(ب) $f(x)=x$ را به صورت سری سینوسی در نیم بازه $(0,l)$ بسط دهید. این سری را که یافته اید (سمت راست پاسخ را) روی $(-2l,2l)$ رسم کنید.

پاسخ (الف): تابع $f(x)=x$ تابعی فرد بر حسب x است، در نتیجه با استفاده از معادله (22-14) خواهیم داشت.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(t)dt=\frac{1}{l}\int_0^{2l}tdt=\frac{1}{l}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2l}\to a_0=2l\to\frac{a_0}{2}=l$$

$$b_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt=\frac{1}{l}\int_0^{2l}t\sin\frac{n\pi t}{l}dt$$

$$=\frac{1}{l}\left[-t\left(\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{l}\right)\Bigg|_0^{2l}+\int_0^l\left(\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{l}\right)dt\right]$$

$$=\frac{1}{l}\left[-\frac{2l^2}{n\pi}+\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi t}{l}\Big|_0^{2l}\right]=\frac{2l}{n\pi}\to x=l-\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

(ب): چون می خواهیم بر حسب یک رشته سینوسی تابع $f(x)=x$ را بسط دهیم تمام an ها برابر صفرند و در نتیجه خواهیم داشت بازه مورد نظر باید از x0 تا x0+2l باشد یا انتخاب $x_0=-l$ خواهیم داشت.

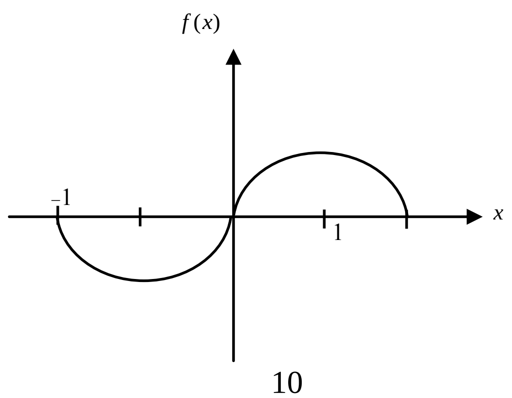
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt=\frac{2}{l}\int_0^l t\ \sin\frac{n\pi t}{l}dt=\frac{2}{l}\left[\left(\frac{-tl}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{l}\right)\Big|_0^l\right]$$

$$-14=\frac{2}{l}\left[(-1)\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi t\right]=\frac{2l}{n\pi}(-1)(-1)^n=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\rightarrow f(x)=x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

3-2 در برخی مسائل بهتر است که $\sin\pi x$ در بازه $[0,1]$ را تقریبا توسط سهمی $ax(1-x)$ نشان دهسم که در آن a مقداری است. ثابت برای آنکه از میزان دقت این تقریب برآوردی به دست آورید، $4x(1-x)$ را به صورت یک سری سینوسی فوریه بسط دهید.

$$f(x)\begin{cases}\begin{cases}4x(1-x) & 0\le x\le 1\\ 4x(1+x) & -1\le x\le 0\end{cases}\end{cases}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$$

به شکل (14-4) توجه کنید.



مهندس یار

www.mohandesyar.com

شکل 14-4

پاسخ:

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx$$

$$= \left[\int_{-1}^{0} 4x(1+x)\cos n\pi\ x\ dx + \int_{0}^{1} 4x(1-x)\cos n\ \pi\ x\ dx\right]$$

$$= \int_{-1}^{0} -4x(1-x)\cos(-n\pi x)(-dx) + \int_{0}^{1} 4x(1-x)\cos n\ \pi\ x\ dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 4x(1-x)\cos n\pi\ x\ dx + \int_{0}^{1} 4x(1-x)\cos n\ \pi\ x\ dx = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx = \left[\int_{-1}^{0} 4x(1+x)\sin n\pi x dx + \int_{0}^{1} 4x(1-x)\sin n\pi x dx\right]$$

$$= \int_{1}^{0} -4x(1-x)\sin(-n\pi x)(-dx) + \int_{1}^{0} 4x(1-x)\sin n\pi x dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} 4x(1-x)\sin n\pi x dx = 8\left[\int_{0}^{1} x\sin n\pi x dx - \int_{0}^{1} x^2 \sin n\pi x dx\right]$$

$$= 8\left[\left(\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right) - \frac{2x}{n^2\pi^2}\sin n\pi x - \left(\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{x^2}{n\pi}\right)\cos n\pi x\right]_0^1$$

$$= 8\left[\frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}(-1)^n + \frac{2}{n^3\pi 3}\right]$$

$$= \frac{16}{n^3\pi^3}\left[(-1)^{n+1}+1\right] = \begin{cases} \frac{32}{\pi^3}.\frac{1}{3} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

www.mohandesyar.com

14–3 کاربردهای سری فوریه

تمرینات

14–3–1 نمایش سری فوریه تابع زیر را تشکیل دهید.

$$f(t)=\begin{cases}0 & -\pi\le\omega t\le 0\\ \sin\omega t & 0\le\omega t\le\pi\end{cases}$$

خروجی یک یکسو ساز نیم موج ساده به این صورت است. اگر گرمای خورشیدی که باعث ایجاد کشند در جو می شود نیز تقریباً به این شکل است.

پاسخ: برای راحتی در حل مسئله تغییر متغیر مقابل را در نظر می گیریم.

$$\omega t=u\to f(t)=\begin{cases}0 & -\pi<u<0\\ \sin u & 0<u<\pi\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin u\,du=\frac{1}{\pi}(-\cos u)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\to\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin u\cos nu\,du=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi}\dfrac{1}{n^2-1} & n\text{ زوج}\\ 0 & n\text{ فرد}\end{cases}$$

که رابطه بالا مطابق معادله (14–39) نتیجه شده است و به کمک قوائد حاصلضرب توابع مثلثاتی قابل حصول است.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin u\sin nu\,du=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{2} & n=1\\ 0 & n\ne 1\end{cases}$$

مهندس یار

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

پاسخ: چنانچه در تمرین 14-2-2 قسمت (ب) تغییر متغیر مقابل را انجام دهیم به جواب می رسیم:

$$\frac{n\pi x}{L}\to nx\to x=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{n\pi x}{L}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\to nx=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\to x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

14-3-3 یک موج دندانه اراه ای دیگر را می توان به کمک تابع زیر صفر توصیف کرد.

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(\pi+x) & -\pi\le x<0\\ +\frac{1}{2}(\pi-x) & 0<x\le\pi\end{cases}$$

نشان دهید که

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\sin n\pi x)/n$$

پاسخ:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi-x)(-dx)$$

مهندس یار

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi-x)dx=0$$

در انتگرال دوم $x\to -x$ تبدیل کرده و تغییرات لازم را مبذول داشته ایم.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi-x)(-dx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi-x)dx=0$$

در انتگرال دوم $x\to -x$ تبدیل کرده و تغییرات لازم را مبذول داشته ایم.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-t)\cos ntdt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi+t)\cos ntdt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-t)\cos ntdt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi-t)\cos ntdt=0$$

می دانیم که : $\cos(-nt)=\cos nt$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-t)\sin ntdt+\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi+t)\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-t)\sin ntdt+\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi-t)\sin(-nt)(-dt)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-t)\sin ntdt+\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}(\pi-t)\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-t)\sin ntdt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos nt\Big|_{0}^{\pi}+\frac{t}{n}\cos nt\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_{0}^{\pi}\right]=\frac{1}{n}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(\sin nx)\quad n$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

14–3–4 موج مثلثی (شکل 14–7) با تابع زیر نمایش داده می شود.

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\pi \\ -x & -\pi<x<0 \end{cases}$$

$f(x)$ را با یک سری فوریه نمایش دهید.

پاسخ:

پاسخ: از شکل 14–7 متوجه می شویم که نمودار نسبت به محور عمودی متقارن

است و در نتیجه تابعی زوج بر حسب x است، پس b_n ها برابر صفر می شود.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi}=\pi \to \frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos xdx=\begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \dfrac{-4}{\pi}\dfrac{1}{n^2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_n \frac{\cos nx}{n^2}$$

14–3–5 تابع زیر را در محدوده بازه $|-\pi,\pi|$ بسط دهید.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x^2<x_0^2 \\ 0 & x^2>x_0^2 \end{cases}$$

یادآوری: این موج با پهنای متغیر در موسیقی الکترونیکی حائز اهمیت است.

پاسخ:

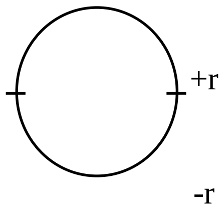
مهندس یار

$$f(x)=1 \qquad -x_0<x<x_0$$

$$a_0=\frac{1}{x_0}\int_{-x_0}^{x_0}dx=\frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}dx=2\rightarrow\frac{a_0}{2}=1$$

$$a_n=\frac{1}{x_0}\int_{-x_0}^{x_0}\cos nxdx=\frac{2}{nx_0}(\sin nx)_0^{x_0}=\frac{2\sin nx_0}{nx_0}\rightarrow f(x)=1+\frac{2\sin x_0}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

6-3-14 یک لوله استوانه ای فلزی به شعاع a به طور طولی به دو نیمه غیر مماس شکافته شده است. نیمه بالایی در پتانسیل V و نیمه پایینی در پتانسیل V− نگه داشته می شود (شکل (8-14))، متغیرهای معادله لاپلاس را جدا کنید و پتانسیل الکترواستاتیکی را به ازای $r\le a$ به دست آورید. به تشابه بین جوابی که به ازای $r=a$ یافته اید و سری فوریه مربوط به موج مربعی توجه کنید.



شکل 8-14

پاسخ: با توجه به شکل 8-14، وابستگی پتانسیل به دو متغیر r و θ به وضوح مشخص می شود. در نتیجه به کمک معادله لاپلاس با توجه به وابستگی پتانسیل به متغیرهای θ و r خواهیم داشت.

مهندس یار

$$\nabla^2 V(r,\theta) \Longrightarrow \frac{1}{r}\frac{r\partial u}{\partial r}\left(\frac{r\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

می دانیم که جواب این چنین معادله ای در کتاب مبانی الکترومغناطیس به صورت زیر است:

$$V(r,\theta)=\sum_n\left[r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)+r^{-n}(A'_n\cos n\theta+B'_n\sin n\theta)\right]$$

چون پتانسیل را به ازای نقاط $r\le a$ می خواهیم، جملات با توانهای منفی به دلیل واگرا شدن در $r=0$ حذف می شوند در نتیجه خواهیم داشت:

$$V(r,\theta)=\sum_n r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

حال با استفاده از شرایط مرزی و روابط تعامد ضرایب A_n و B_n را به دست می آوریم.

$$V(a,\theta)=\sum_n a^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

همچنین چون $V(r,\theta)$ تابع فردی از θ است شکل مناسب جواب به صورت زیر در می آید.

$$V(r,\theta)=\sum_n r^n(B_n\sin n\theta\rightarrow V(a,\theta)=\sum_n B_n a^n\sin n\theta$$

$$\int_0^{2\pi}V(a,\theta)\sin m\theta d\theta=\sum_n B_n a^n\int\sin n\theta\sin m\theta d\theta$$

مهندس یار

$$\int_0^{\pi} V\sin m\theta d\theta-\int_{\pi}^{2\pi} V\sin m\theta d\theta=\sum_n \pi B_n a^n\delta_{m,n}\rightarrow -\frac{V}{m}\cos m\pi+\frac{V}{m}+\frac{V}{m}-\frac{V}{m}\cos m\pi=\pi B_m a^m$$

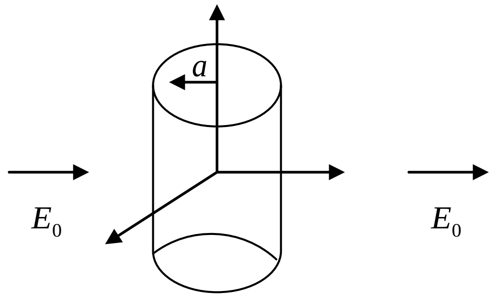
$$B_m=\begin{cases}4V/m\pi a^m & m\text{فرد}\\ 0 & m\text{زوج}\end{cases}$$

$$V(r,\theta)=\frac{4V}{\pi}\sum_{m\text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m\sin m\theta \qquad r<a$$

7–3–14 یک استوانه فلزی را در میدان الکتریکی یکنواخت (یکنواخت قبل از قرار دادن استوانه) E_0 طوری قرار می دهیم که محور استوانه عمود بر امتداد اصلی میدان باشد.

(الف) پتانسیل الکترواستاتیکی مختل شده را بیابید.

(ب)بار سطحی القائی روی استوانه را به صورت تابعی از موضع زاویه ای پیدا کنید.



پاسخ (الف): با توجه به شکل ترسیمی وابستگی پتانسیل بدو متغیر r و θ به وضوح مشاهده می شود، مانند مسئله قبل به کمک معادله لاپلاس جواب را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$V(r,\theta)=\sum_n\left[r^n(A_n\sin n\theta+B_n\cos n\theta)+r^{-n}(A_n'\sin n\theta+B_n'\cos n\theta)\right]$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

می دانیم در فواصل $r >> a$ میدان به صورت یکنواخت در می آید.

$$V(r,\theta) = -\int E.d\ell = -E_0 r\cos\theta \qquad r >> a$$

با اعمال این شرط مرزی خواهیم داشت:

$$V(r,\theta) = r(A_1 \sin\theta + B_1\cos\theta) + B_0 + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}(A'_n \sin n\theta + B'_n \cos n\theta) \to A_1 = 0 \qquad B_1 = -E_0$$

$$V(r,\theta) = r(B_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}(A'_n \sin n\theta + B'_n \cos n\theta)$$

$$E_0 a\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A'_n \sin n\theta + B'_n \cos n\theta) \to A'_n = 0, \begin{cases} B'_n = 0 & n \neq 1 \\ B'_n = E_0 b^2 & n = 1 \end{cases}$$

$$V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + r^{-1} E_0 a^2 \cos\theta$$

(ب):

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} = \hat{r}E_0\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta - \hat{\varphi}E_0\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

(چگالی بار سطحی) $\sigma = \varepsilon_0 E_r \big| r = a = 2\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$

14–3–8 بسط فوریه موج مربعی، مسئله 14–3–6 را به یک سری توانی تبدیل کنید. نشان دهید که ضرایب x^{+1} یک سری واگرا تشکیل می دهند. این عمل را برای ضرایب x^3 تکرار کنید. سری توانی را نمی توان برای نا پیوستگی به کار برد. این ضرایب نامتناهی حاصل تلاش برای غلبه بر این محدودیت اساسی سری توانی است.

مهندس یار

پاسخ: با استفاده از بسط فوریه موج مربعی، معادله (14–36) داریم.

$$f(x)=\frac{h}{2}+\frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right)$$

از طرفی داریم:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\rightarrow\frac{\sin mx}{m}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(xm)^{2n+1}}{m(2n+1)!}$$

حال اگر ضرایب سری فوق را به ازای m های مختلف و n=0 با هم جمع کنیم به دست می آوریم:

$$\sum_{m\,\text{فرد}}^{\infty}1+1+1+\dots=\infty$$

در نتیجه مجموع این ضرایب یک سری واگرا تشکیل می دهند.

در مورد ضریب x^3 این سری خیلی زودتر واگرا می شود، که به ازای n=1 قابل به دست آوردن است.

$$\sum_{m\,\text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{3!}+\frac{3^3}{3(3!)}+\frac{5^3}{5(3!)}+\dots=\infty$$

14–3–9 (الف) نشان دهید که بسط فوریه $\cos ax$ به صورت زیر است:

$$\cos ax=\frac{2a\sin\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2}-\frac{\cos x}{a^2-1^2}+\frac{\cos 2x}{a^2-2^2}-\dots\right]$$

مهندس یار

$$a_n = (-1)^n \frac{2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}$$

(ب) با استفاده از نتیجه بند قبل نشان دهید:

$$a\pi \cot a = 1 - 2\sum_{p=1}^{\infty} \xi(2p) a^{2p}$$

این معادله روش دیگری برای استخراج رابطه بین تابع زتای ریمان و اعداد برنولی، معادله $(15-151)$ در اختیار ما می گذارد.

پاسخ (الف): با توجه به آنکه $\cos ax$ تابعی زوج است، در نتیجه b_n برابر صفرند و خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(a-n)x + \cos(a+n)x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(a-n)}\sin(a\pi - n\pi) + \frac{1}{(a+n)}\sin(a\pi + n\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{(a-n)}\sin(n\pi - a\pi) + \frac{1}{(a+n)}\sin(n\pi + a\pi)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{a-n)}\sin a\pi + \frac{1}{(a+n)}\sin a\pi\right] = (-1)^n \frac{2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}$$

$$\cos ax = \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2-1^2} + \frac{\cos 2x}{a^2-2^2} - \ldots\right]$$

(ب):

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$\cos ax = \frac{2a\sin a\pi}{2\pi a^2} + \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{(a^2 - n^2)}$$

به ازای $x=\pi$ خواهیم داشت:

$$\cos a\pi = \frac{2a\sin a\pi}{2\pi a^2} + \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (-1)^n}{(a^2 - n^2)}$$

$$a\pi \cot a\pi = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{(a^2 - n^2)}$$

$$a\pi \cot a\pi = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{(a^2/n^2 - 1)} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2/n^2}{(1 - a^2/n^2)}$$

مخرج کسر داخل $\sum$ حاصل جمع تصاعد هندسی $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^{2p}$ با قدر نسبت $\left(\frac{a}{n}\right)^2$ است.

$$a\pi \cot a\pi = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a^2}{n^2}\left(\frac{a}{n}\right)^{2p} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^{2p+2}$$

$$= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^{2p} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n^{2p}}\right)a^{2p}$$

$$a\pi \cot a\pi = 1 - 2\sum_{p=1}^{\infty}a^{2p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n^{2p}}\right) = 1 - 2\sum_{p=1}^{\infty}\xi(2p)a^{2p}$$

14–3–10 بسط سری فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ را در بازه $-\pi < x < \pi$ به دست آورید.

(الف) به جمله ثابت چه مفهومی می توان نسبت داد

مهندس یار

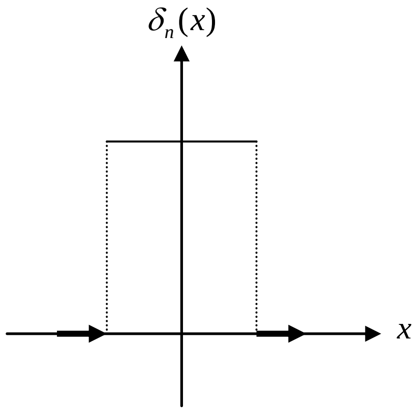
www.mohandesyar.com

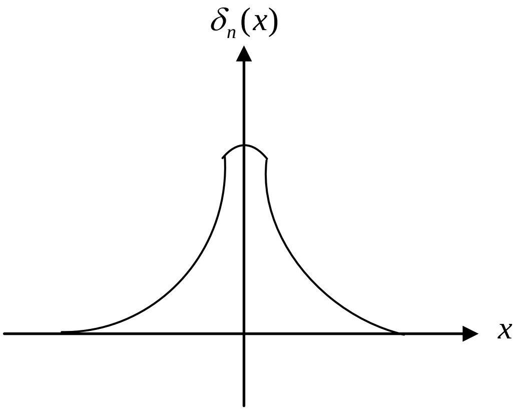
(ب) این نمایش در چه ناحیه ای صادق است؟

(ج) با استفاده از اتحاد

$$\sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \cos\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{2}\right]$$

نشان دهید که نمایش فوریه $\delta(x)$ با معادله (9–83) سازگار است.





پاسخ: با توجه به شکل های نمایش داده شده که مربوط به تعریف های مختلف تابع دلتا است می بینیم که تابع دلتا تابعی زوج است. در نتیجه bn برابر صفرند.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)dx = \frac{1}{\pi} \rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\delta(x) = \frac{\lim}{\Delta = 0}\begin{cases} 0 & x < -\Delta/2 \\ 1/\Delta & -\Delta/2 < x < \Delta/2 \\ 0 & x > \Delta/2 \end{cases}$$

مهندس یار

با توجه به تعریف بالا می بینیم که $a_0/2$ مقدار متوسط $\delta(x)$ در محدوده $[-\pi,\pi]$ است.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\cos(0)=\frac{1}{\pi}\rightarrow\delta(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

(ب): این بسط می تواند در تمام ناحیه ها گسترش یابد.

(ج):

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

$$\delta(x-t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-1)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(t-x)=\delta(t-x)$$

همچنین می توان با استفاده از اتحاد مفروض این خاصیت تابع دلتای دیراک را ثابت کرد.

11–3–14 $\delta(x-t)$ را به صورت یک سری فوریه بسط دهید. نتیجه ای را که به دست آورده اید با صورت دو خطی معادله (9–83) مقایسه کنید.

پاسخ:

$$\delta(x-t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx\cos nt+\sin nx\sin nt)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-t)$$

پاسخ: این مسئله کاملاً شبیه مسئله قبل (10–3–14) است و با تغییر متغیر ساده $x-t=u$ و $dx=dt$ جواب این مسئله نتیجه می شود.

مهندس یار

www.mohandesyar.com

14–3–12 تحقیق کنید که:

$$\delta(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}$$

یک تابع دلتای دیراک است؛ برای انجام این کار نشان دهید که این تابع در تعریف

دلتای دیراک:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi_1)\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}d\varphi_1=f(\varphi_2)$$

پاسخ:

$$f(\varphi_1)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_n e^{-in\varphi 1}$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_n e^{-in\varphi 1}\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\phi_1-\varphi_2)}d\varphi_1=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in\varphi 2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\phi 1(m-n)}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-in\varphi 2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_n 2\pi\delta_{m,n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_m e^{-im\varphi 2}=f(\varphi_2)$$

14–3–13 (الف) با استفاده از:

$$f(x)=x^2,-\pi<x<\pi$$

نشان دهید که:

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}=\eta(2)$$

(ب) با بهره گیری از سری فوریه موج مثلثی که در مسئله 14–3–4 تشکیل شد،

نشان دهید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}=\lambda(2)$$

(ج) با استفاده از:

$$f(x)=x^4 \qquad , \qquad -\pi<x<\pi$$

نشان دهید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^2}{90}=\xi(4) \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}=\eta(4)$$

(د) با استفاده از:

$$f(x)=\begin{cases} x(\pi-x) & 0<x<\pi \\ x(\pi+x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

سری زیر را استخراج کنید.

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$$

و نشان دهید:

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$\sum_{\substack{n=1,3,5,\ldots \\ \text{فرد}}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2}n^{-3} = 1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\ldots=\frac{\pi^3}{32}=\beta(3)$$

(هـ) با استفاده از سری فوریه مربوط به یک موج مربعی نشان دهید.

$$\sum_{\substack{n=1,3,5,\ldots \\ \text{فرد}}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2}n^{-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots=\frac{\pi}{4}=\beta(1)$$

پاسخ (الف): با توجه به مثال 14−3−3 رابطه زیر را به دست آوردیم:

$$\pi\ x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \qquad -\pi<x<\pi$$

به ازای $x=0$ خواهیم داشت:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\rightarrow x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\rightarrow\frac{\pi^2}{12}=\eta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

(ب):

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

چون n فرد است می توانیم بنویسیم:

$$n=2m-1\rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}$$

به ازای x=0 خواهیم داشت:

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}=\lambda(2)$$

مهندس یار

(ج): ابتدا ضرایب مربوط به سری فوریه تابع $f(x)=x^4$ به دست می آوریم:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4dx=\frac{2}{5\pi}x^5\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{5\pi}\pi^5=\frac{2}{5}\pi^4\rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^4}{5}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4\cos ndx$$

$$\int x^m\cos nx=\frac{x^m\sin nx}{n}+\frac{mx^{m-1}}{n^2}\cos nx-\frac{m(m-1)}{n^2}\int x^{m-2}\cos nxdx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{4\pi^3}{n^2}(-1)^n-\frac{24\pi}{n^4}(-1)^n\right]=\frac{8\pi^2}{n^2}(-1)^n-\frac{48}{n^4}(-1)^n$$

$$x^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2\cos nx}{n^4}$$

می دانیم که:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$x^4-2\pi^2x^2=\frac{-7\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^4}(1)$$

به ازای $x=\pi$ خواهیم داشت:

$$-\pi^4=\frac{-7\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{7\pi^4}{15}-\pi^4=\frac{-8\pi^4}{15}=-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}=\xi(4)$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

و چنانچه در رابطه (1)، x را برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$0=\frac{-7\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\rightarrow\frac{7\pi^4}{15}=48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$$

$$\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}=\eta(4)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}x(\pi+x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x(\pi-x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{+\pi}^{0}-x(\pi-x)\cos(-x)(-dx)+\int_{0}^{\pi}x(\pi-x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}x(\pi-x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x(\pi-x)\cos nxdx\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}x(\pi+x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}x(\pi-x)\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}x(\pi-x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}x(\pi-x)\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}x(\pi-x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\pi x\sin xnxdx-\int_{0}^{\pi}x^2\sin nxdx\right]$$

با توجه به راهنمایی که در قسمت قبل شد، خواهیم داشت:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\sin nx}{n^2}-\frac{\pi x\cos nx}{n}-\frac{2x\sin nx}{n^2}-\left(\frac{2}{n^3}-\frac{x^2}{n}\right)\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-2}{n^3}(-1)^n+\frac{2}{n^3}\right]=\frac{4}{\pi n^3}(1+(-1)^{n+1})=\begin{cases}\frac{8}{\pi n^3} & n\\ 0 & n\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$$

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin n\pi/2}{n^3}\rightarrow\frac{\pi^3}{32}=\sum_{n\,\text{فرد}}^{\infty}\frac{(-6)^{(n-1)/2}}{n^3}$$

(هـ):

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ -1 & -\pi<x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n}\frac{\sin nx}{n}$$

به ازای $x=\pi/2$ خواهیم داشت:

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{n}\frac{\sin n\pi \quad 2}{n}\rightarrow\frac{\pi}{4}=\sum_{n\,\text{فرد}}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}$$

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{(n-1)/2}n^{-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}=\beta(1)$$

14-3-14 (الف) نمایش سری فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}0 & , & -\pi\le x\le 0\\ x & , & 0\le x<\pi\end{cases}$$

(ب) با استفاده از بسط فوریه ای که یافته اید، نشان دهید:

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

پاسخ (الف):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi\rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos ndx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx+\frac{\cos nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right]=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi n^2} & n\\ 0 & n\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

(ب): به ازای x=0 خواهیم داشت:

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\rightarrow\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots$$

15–3–14 داریم $f(z)=\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ [این سری به ازای $|z|\le 1$ به ازای

$\ln(1+z)$ همگرا می شود مگر در نقطه z=-1]

(الف) با استفاده از اجزای موهومی نشان دهید:

$$\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}\qquad\qquad -\pi<\theta<\pi$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

(ب) به کمک تغییر متغیر، بند (الف) را به صورت زیر تبدیل کنید.

$$-\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n} \qquad 0<\varphi<2\pi$$

پاسخ (الف): با توجه به اینکه تابع $\ln(2\cos\theta/2)$ تابعی حقیقی است، با استفاده از معادله

(14–49)، $v(r,\theta)$ برابر صفر است و خواهیم داشت:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n r^n\cos\theta \rightarrow u(1,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n\cos n\theta$$

حال با تغییرات در تابع $f(x)$ به شکل سری به صورت بالا می رسیم:

$$\ln(2\cos\frac{\theta}{2})=\frac{1}{2}\ln(2\cos\frac{\theta}{2})^2=\frac{1}{2}\ln\left[2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[2(1+\cos\theta)\right]=\frac{1}{2}\left[\ln(1+e^{-i\theta}+e^{i\theta}+1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[(1+e^{-i\theta})\right]=\frac{1}{2}\left[\ln(1+e^{i\theta})+\ln(1+e^{i\theta})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{in\theta}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-in\theta}}{n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos n\theta}{n}$$

پس در اینجا داریم:

$$C_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

مهندس یار

ب) اگر $\theta=\varphi-\pi$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\ln\left(2\cos(\varphi-\pi)/2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\varphi-n\pi)}{n} \qquad 0<\varphi<2\pi$$

$$\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(-1)^{n}\frac{\cos n\varphi}{n}$$

$$\rightarrow -\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n} \qquad 0<\varphi<2\pi$$

14–3–16 تابع زیر توصیفگر یک پالس مثلثی متقارن با بلندی و پهنای قابل تنظیم است:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(1-\dfrac{x}{b}\right), 0\le |x|\le b \\ 0 \qquad\qquad , b\le |x|\le \pi \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که ضرایب فوریه عبارت اند از:

$$a_0=\frac{ab}{\pi}, a_n=\frac{2ab(1-\cos nb)}{(nb)^2}$$

پاسخ:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-b} f(x)\cos nx dx+\int_{-b}^{0} f(x)\cos nx dx$$

$$+\int_{0}^{+b} f(x)\cos nx dx+\int_{b}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

با توجه به تعریف تابع در نواحی مختلف، انتگرالهای اول و چهارم صفر می شود.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{0} f(x)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{b} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{b} f(x)\cos nxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{b} a(1-\frac{x}{b})\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{b} a\cos nxdx - \frac{a}{b}\int_{0}^{b} x\cos nxdx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{a}{n}\sin nx - \frac{a}{b}\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{a}{b}\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^b$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{a}{b}\frac{\cos nb}{n^2} + \frac{a}{n^2 b}\right] = \frac{2ab}{\pi}\frac{(1-\cos nb)}{(nb)^2}$$

با استفاده از قاعده پیتال داریم:

$$a_0 = \lim_{n\to 0} a_n = \frac{0}{0} = \lim_{n\to 0}\frac{2ab}{\pi}\frac{b\sin nb}{2nb^2} = \frac{ab}{\pi}$$

14–4 خواص سری فوریه

تمرینات

14–4–1 نشان دهید که انتگرال گیری از بسط فوریه $-\pi < x < \pi,\ f(x) = x$ به سری زیر منجر می شود.

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n^{-2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

پاسخ:

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\rightarrow\int_{x_0}^{x}xdx=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\Big|_{x_0}^{x}$$

چنانچه $x_0=0$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}x^2=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\rightarrow x^2=+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

همچنین با استفاده از مسئله 14-3-13 (ب) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\rightarrow x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

چنانچه $x=0$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$-\frac{\pi^2}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}\rightarrow\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-2}$$

14-4-2 اتحاد پارسوال:

(الف) با فرض اینکه بسط فوریه $f(x)$ به طور یکنواخت همگرا باشد، نشان دهید که:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

این اتحاد پارسوال است. این در واقع حالت خاصی از رابطه تمامیت، معادله (9-72) است.

مهندس یار

(ب) با داشتن

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \qquad -\pi \le x \le \pi$$

با بهره گیری از اتحاد پارسوال، $\xi(4)$ را به صورت بسته به دست آورید.

(ج) شرط همگرایی یکنواخت ضروری نیست، این مطلب را با بهره گیری از اتحاد پارسوال درباره موج مربعی زیر نشان دهید:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}$$

پاسخ الف:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

طرفین را در $f(x)$ ضرب کرده و در بازه $[-\pi,\pi]$ انتگرال گیری می کنیم.

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right]$$

$$= \frac{a_0}{2}\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(\pi a_n) + b_n(\pi b_n)] = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

(ب):

$$f(x)=x^2,\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^2}{3},a_n=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\frac{\pi^2}{3}\times\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{2n}}{n^4}$$

$$\frac{2}{5}\pi^4=\frac{2\pi^4}{9}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\rightarrow\frac{8}{45}=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\rightarrow\xi(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}$$

(ج):

$$[f(x)]^2=1 \qquad , \qquad b_n=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}\rightarrow\frac{2\pi}{\pi}=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}=\lambda(2)$$

پس می بینیم که شرط همگرایی یکنواخت ضروری نیست.

14–4–3 نشان دهید که انتگرال گیری از بسط فوریه تابع دلتای دیراک (مسئله 14–10–3) به نمایش فوریه موج مربعی معادله (14–36) با h=1 می انجامد.

یادآوری: انتگرال گیری از جمله ثابت $(1/2\pi)$ به یک جمله $x/2\pi$ منجر می شود چه کاری با این جمله انجام می دهید.

مهندس یار

پاسخ:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

با انتگرال گیری از طرفین تساوی در بازه $[-\pi,x]$ خواهیم داشت:

$$\int_{-\pi}^{x}\delta(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x}dx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

$$1=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2\pi}x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

همچنین می دانیم که $x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ و چون بسط فوریه تابع دلتای دیراک نیز در بازه $[-\pi,\pi]$ است می توانیم جایگذاری کنیم:

$$1=\frac{1}{2\pi}\times 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}+\frac{\pi}{2}\rightarrow 1=\frac{\pi}{2}+2\sum_{n}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

14–4–3 (الف) از بسط فوریه تابع پله ای یکه

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

انتگرال بگیرید. نشان دهید که سری انتگرال گیری شده حاصل با مسئله 14–3–14 سازگار است.

مهندس یار

www.mohandesyar.com

پاسخ:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & n \\ 2/\pi n & n \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1 \rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_n^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

با انتگرال گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{2}(x-x_0) + \frac{2}{\pi}\sum_n^{\infty}\frac{-\cos nx}{n^2}\Big|_{x_0}^{x}$$

از طرفی داریم[مسئله 14-2-2- (ب)]

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x_0 - \frac{2}{\pi}\sum_n^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{x_0}^{x}$$

به ازای $x_0 = \pi/2$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_n^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} + \sum_n^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

مهندس یار

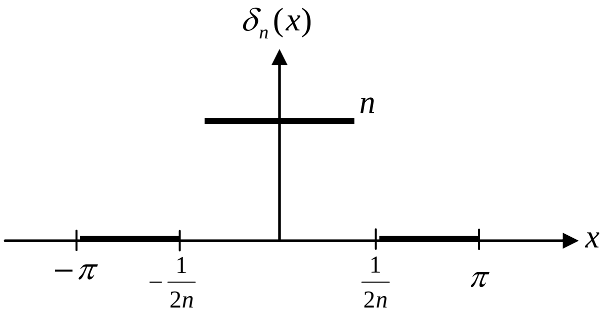
www.mohandesyar.com

4-4-14 در بازه $(-\pi,\pi)$

$$\delta_n(x)=\begin{cases} n & |x|<1/2n \\ 0 & |x|>1/2n \end{cases}$$

(الف) $\delta_n(x)$ را به صورت یک سری کسینوسی فوریه بسط دهید.

(ب) نشان دهید که سری فوریه حاصل در حد $n\to\infty$ با بسط فوریه $\delta(x)$ سازگار است.



پاسخ (الف): به علت تقارن نسبت به محور y ها، bn ها صفرند.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi}ndx=\frac{1}{\pi}\to\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi}n\cos nxdx=\frac{2n}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{1/2n}$$

$$a_n=\frac{2\sin 1/2}{\pi}\delta_n(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin 1/2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

(ب):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-1/2n}^{1/2n} n\cos nx dx = \frac{1}{\pi}$$

که در مسئله (8–7–1) با استفاده از قضیه مقدار میانگین به دست آمده است.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx = \delta(x)$$

14–4–5 ماهیت تابع دلتایی سری فوریه مسئله 14–4–4 را محقق کنید. برای این کار نشان دهید که به ازای هر تابع $f(x)$ که در بازه $[-\pi,\pi]$ متناهی و در x=0 پیوسته راست است داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\delta\infty(x) \text{ بسط فوریه }]\, dx = f(0)$$

پاسخ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos n(0) = f(0)$$

14–4–6 (الف) نشان دهید که بسط سری سینوسی فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(x-a)$ در نیم بازه $0<a<L,(0,L)$ از رابطه زیر به دست می آید.

مهندس یار

$$\delta(x-a)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

دقت کنید که این سری عملاً تابع زیر را توصیف می کند.

در بازه $-\delta(x+a)+\delta(x-a)(-L,L)$

(ب) با انتگرال گیری از دو طرف معادله قبل از 0 تا x، نشان دهید که بسط

کسینوسی موج مربعی:

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<a\\ 1 & a<x<L\end{cases}$$

به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)0\le x<L$$

(ج) تحقیق کنید که:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)=<f(x)>$$

پاسخ (الف):

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{L}\int_0^L\delta(x-a)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{L}\times\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

$$\delta(x-a)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

مهندس یار

(ب):

$$\int_0^x \delta(x-a)dx = -\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big\|_0^x$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) 0 \le x \le L$$

(ج)

$$< f(x) > = < \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) >$$

$$= < \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) > \int_0^L \ -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \left[-\frac{2}{\pi^2 L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

7–4–14 بسط کسینوسی فوریه موج مربعی، مسئله 14–4–6 (ب) را به کمک محاسبه مستقیم ضرایب فوریه تحقیق کنید.

پاسخ مسئله:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{L}\int_a^L dx = \frac{2}{L}(L-a)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_a^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{2L}(L-a) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

مهندس یار

$$=\left(1-\frac{a}{L}\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

یادآوری: قبلا در مسئله 14–2–2 داشتیم:

$$x=L-\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

به ازای x=a داریم:

$$\frac{a}{L}=1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)0\le x\le L$$

14–4–8 (الف) دو انتهای ریسمانی، $x=0$ و $x=L$ را محکم کرده ایم. با در نظر گرفتن ارتعاشهای کم دامنه، پی می بریم که دامنه $y(x,t)$ در معادله موج زیر صدق می کند:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

که در آن v سرعت موج است، بر اثر یک وزش تند، ریسمان در x=a به ارتعاش در می آید. از این رو داریم:

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$y(x,0)=0$

در $t=0$ $\qquad \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}=Lv_0\delta(x-a)$

ثابت L را برای به توازن در آوردن ابعاد $\delta(x-a)$(که عکس طول است) گنجانیده ایم.

با استفاده از $\delta(x-a)$که در مسئله 14-4-6 (الف) داده شد، معادله موج را تحت این شرایط اولیه حل کنید.

(ب) نشان دهید که سرعت عرضی ریسمان، $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=2v_0\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi vt}{L}$$

پاسخ (الف): دامنه $y(x,t)$را در حالت کلی به صورت حاصلضرب سری فوریه متغیرهای x و t در نظر می گیریم:

$$y(x,t)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]\times\left(a'_n\cos\frac{n\pi vt}{L}+b'_n\sin\frac{n\pi vt}{L}\right)$$

حال شرایط مرزی را برای به دست آوردن ضرایب اعمال می کنیم:

$$y(x,0)=0\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a'_n=0$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}t=0=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right).\left[\frac{\pi vn}{L}b'_n\cos\frac{n\pi vt}{L}\right]_{t=0}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$Lv_0\partial(x-a)=Lv_0\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\times\frac{\pi vn}{L}b_n'$$

با استفاده از شرط مرزی پی می بریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=0,b_0=b_0'=0,b_nb_n'\frac{\pi vn}{L}=Lv_0\frac{2}{L}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)b_nb_n'=\frac{2v_0L}{n\pi v}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

$$y(x,t)=\frac{2v_0L}{\pi v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi vt}{L}$$

(ب):

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=\frac{2v_0L}{\pi v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(\frac{n\pi v}{L}\right)\cos\frac{n\pi vt}{L}$$

$$=2v_0\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi vt}{L}$$

9-4-14 ریسمانی که دو انتهای آن در $x=0$ و $x=\ell$ محکم شده است، آزادانه ارتعاش می کند. معادله زیر حرکت آن را توصیف می کند:

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{v^2\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}$$

سری فوریه ای به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

ضرایب $b_n(t)$ را محاسبه کنید. شرایط اولیه عبارت اند از:

$$u(x,0)=f(x),\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=g(x)$$

پاسخ:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi vt}{\ell}+B_n\sin\frac{n\pi vt}{\ell})\sin\frac{n\pi x}{\ell}\to u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}=f(x)$$

اگر طرفین تساوی را در $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ ضرب کرده و در بازه $[-\ell,\ell]$ انتگرال گیری کنیم،

خواهیم داشت:

$$\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\ell\delta_{m,n}$$

$$\to A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi v}{\ell}\sin\frac{n\pi vt}{\ell}+B_n\frac{n\pi v}{\ell}\cos\frac{n\pi vt}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_{t=0}$$

$$g(x)=\frac{\pi v}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\sin\frac{n\pi v}{\ell}$$

اگر مانند حالت قبل عمل کنیم خواهیم داشت:

$$\int_{-\ell}^{\ell}g(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{\pi v}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$2\int_0^{\ell}g(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\frac{\pi v}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\ell\delta_{m,n}=n\pi vB_n\to B_n=\frac{2}{n\pi v}\int_0^{\ell}g(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

14–4–10 (الف) در ادامه مسئله ریسمان مرتعش، مسئله 14–4–9 بر اثر وجود یک محیط مقاوم ارتعاشات مطابق معادله زیر میرا می شوند:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - k\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

سری فوریه ای به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

و باز ضرایب $b_n(t)$ را محاسبه کنید. شرایط اولیه را همان شرایطی بگیرید که ذر مسئله 14–4–9 در نظر داشتیم. فرض کنید میرایی ناچیز است.

(ب) این مسئله را برای میرایی بزرگ تکرار کنید.

پاسخ (الف): می دانیم که شکل $b_n(t)$ در نظریه معادلات مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$b_n(t) = e^{-kt/2}[A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t]$$

که از حال به روش ضرایب ثابت قابل حل است، حال شرایط مرزی مسئله را اعمال می کنیم:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt/2}[A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t]\sin\frac{n\pi x}{\ell}|_{t=0} = f(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = f(x)$$

مهندس یار

حال اگر مانند مسئله قبل از روابط تعامد استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

حال شرط دوم را اعمال می کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{k}{2}e^{-kt/2}[A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t]\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$+e^{-kt/2}[A_n\omega_n\sin\omega_n t + B_n\omega_n t]\sin\frac{n\pi x}{l}|_{t=0}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{k}{2}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} + B_n\omega_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

اگر مانند حالت قبل عمل کنیم خواهیم داشت:

$$B_n = \frac{2}{\omega_n\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \frac{k}{2\omega_n}A_n$$

(ب): اگر جوابهای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را یادآوری کنیم، چون در این حالت $\sigma_n^2 = (k/2) - (n\pi v/\ell)2$ است، جوابهایی به صورت مختلط ایجاد نمی شود، در نتیجه ما جوابهایی به صورت cos,sin را انتظار نداریم و برعکس جوابهایی به صورت cosh,sinh را انتظار خواهیم داشت.

$$b_n(t) = e^{-kt/2}[A_n\cosh\sigma_n t + B_n\sinh\sigma_n t]$$

حال به مانند قسمت (الف) شرایط مرزی را اعمال می کنیم.

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$u(x.0)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-kt/2}\left[A_n\cosh\sigma_n t+B_n\sinh\sigma_n t\right]\Big|_{t=0}\sin\frac{n\pi x}{\ell}=f(x)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}=f(x)\rightarrow A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

همچنین به کمک شرط مرزی بعدی خواهیم داشت.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{k}{2}e^{-kt/2}\left[A_n\cosh\sigma_n t+B_n\sinh\sigma_n t\right]\Big|_{t=0}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-kt/2}\left[A_n\sigma_n\sinh\sigma_n t-B_n\sigma_n\cosh\sigma_n t\right]_{t=0}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{k}{2}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}+B_n\sigma_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\rightarrow B_n=\frac{2}{\sigma_n\ell}\int_0^{\ell}g(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx+\frac{k}{2\sigma_n}A_n$$

14–4–11 توزیع بار را روی سطح داخلی نیم دایره های مسئله 14–3–6 پیدا کنید.

یادآوری. به یک سری واگرا دست می یابید و این رهیافت سری فوریه در این مورد کارساز نیست. با استفاده از شگردهای نگاشت همدیس می توانیم نشان دهیم که چگالی بار متناسب است $\csc\theta$. آیا $\csc\theta$ بسط فوریه ای دارد.

پاسخ:

$$V(r,\varphi)=\frac{4V}{\pi}\sum_{m}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m\sin m\varphi$$

مهندس یار

$$\sigma=\varepsilon_0 E_r\Big|_{r=a}=\frac{4\varepsilon_0 V}{\pi a}\sum_m^\infty\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}\sin m\varphi\Big|r=a\rightarrow\sigma(\varphi)=\frac{4\varepsilon_0 V}{\pi a}\sum_m^\infty\sin m\varphi$$

همان طور که می بینید به یک سری واگرا دست یافته ایم. برای اینکه $\csc\theta$ بسط فوریه ای دارد یا خیر ضرایب بسط فوریه آن را به دست می آوریم چون $1/\sin\theta$ تابعی فرد است پس an ها برابر صفر هستند.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{in\theta}}{\sin\theta}d\theta\right]=\frac{\operatorname{Im}}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{\sin\theta}d\theta\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left[\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{+\infty}\binom{n}{m}\cos^{n-m}\theta(i\sin\theta)^m\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{m=0}^{+\infty}\binom{n}{m}\int_0^{\pi}d\theta\cos^{n-m}\theta(i)^m\sin^{m-1}\theta$$

چنانچه حاصل انتگرال را به وسیله تابع بتا (بخش 10–4) به دست آوریم و به وسیله آزمون نسبت همگرایی این سری را تعیین کنیم، می بینیم که این سری واگراست در نتیجه b_n نامعین است و بنابراین $\csc\theta$ بسط فوریه معینی ندارد.

12–4–14داریم:

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{-1}{2}(\pi+x) & -\pi\le x<0\\[2mm] \dfrac{1}{2}(\pi-x) & 0<x\le\pi\end{cases}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

از طریق انتگرال گیری نشان دهید.

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\begin{cases}\dfrac{(\pi+x)^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{12} & -\pi\le x<0\\ \dfrac{(\pi-x)^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{12} & 0<x\le\pi\end{cases}$$

پاسخ:

$$\begin{cases}\int_0^x\varphi_1(x)dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=+\frac{1}{2}(\pi x-\frac{1}{2}x^2)0\le x\le\pi\\ \int_x^0\varphi_1(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=+\frac{1}{2}(\pi x+\frac{1}{2}x^2)-\pi\le x\le 0\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(\pi x+\dfrac{x^2}{2})+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} & -\pi\le x\le 0\\ +\dfrac{1}{2}(\pi x-\dfrac{1}{2}x^2)+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

همچنین می دانیم که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\begin{cases}\dfrac{(\pi+x)^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{12} & -\pi\le x\le 0\\ \dfrac{(\pi-x)^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{12} & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

که در مرحله آخر، از روش مربع کردن استفاده کرده ایم.

13-4-14 داریم:

$$\psi_{2s}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{2s}}\qquad,\qquad\psi_{2s+1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{2s+1}}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

روابط بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$(\text{الف})\psi_{2s}=\int_0^x \psi_{2s-1}(x)dx$$

$$(\text{ب})\psi_{2s+1}(x)=\xi(2s+1)-\int_0^x \psi_{2s}(x)dx$$

پاسخ (الف):

$$I=\int_0^x \psi_{2s-1}(x)dx=\int_0^x \sum_{n-1}^{\infty}\frac{\cos n\,x}{n^{2s-1}}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-1}}\int_0^x \cos n\,x\,dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-1}}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_0^x=\sum\frac{\sin nx}{n^{2s}}=\psi_{2s}(x)$$

(ب):

$$II=\int_0^x \psi_{2s-1}(x)dx=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\,x}{n^{2s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\int_0^x \sin n\,x\,dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{2s+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{2s+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s+1}}-\int_0^x \psi_{2s}(x)dx$$

$$\psi_{2s+1}(x)=\xi(2s+1)-\int_0^x \psi_{2s}(x)dx$$

14–4–14 نشان دهید عبارت

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n+1}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\psi_1(x)-\varphi_2(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(n+1)}$$

یادآوری: در مسائل قبلی از توابع $\psi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ را تعریف کرده ایم.

پاسخ:

$$\psi_1(x)=\psi_{2s+1}(x)\Big|_{s=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

$$\psi_1(x)-\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{(n+1)}=f(x)$$

14—5 پدیده گیبس

تمرینات

14–5–1 به کمک شگردهای مجموعه یابی مجموعه های جزئی که در این بخش آموختیم نشان دهید که سری فوریه $f(x)$ در یک ناپیوستگی $f(x)$، مقدار میانگین حسابی حدود چپ و راست را به خود می گیرد.

مهندس یار

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\left[f(x_0^+)+f(x_0^-)\right]$$

در هنگام محاسبه $\lim_{r\to\infty} s_r(x_0)$ شاید بهتر باشد که بخشی از انتگرالها را با یک تابع دلتای دیراک یکی بگیرید.

پاسخ:

$$s_r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left[(r+1/2)(t-x)\right]}{\sin(t-x)/2}dt$$

با استفاده از فرمول (8-112) داریم:

$$\delta_n(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left[n+1/2)x\right]}{\sin(x/2)}\to\frac{\sin\left[(r+1/2)(t-x)\right]}{2\pi\sin(t-x)/2}$$

$$\lim_{r\to\infty} s_r(x_0)=\lim_{r\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left[(r+1/2)(t-x_0)\right]}{2\pi\sin(t-x_0)/2}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\delta_2(t-x_0)dt$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\delta_2(t-x_0)dt+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\int_{x_0^+}^{\pi} f(t)\delta_2(t-x_0)dt$$
$$+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{x_0^-} f(t)\delta_r(t-x_0)dt+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\int_{x_0^-}^{\pi} f(t)\delta_r(t-x_0)dt$$

انتگرال دوم و سوم صفر می شوند بنابراین داریم:

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\left[f(x_0^+)+f(x_0^-)\right]$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

2-5-14 مجموعه جزئی، sn ، سری متعلق به معادله (14-64) را با استفاده از روابط زیر تعیین کنید.

(الف):

$$\frac{\sin mx}{m} = \int_0^x \cos my dy$$

(ب)

$$\sum_{p=1}^{n} \cos(2p-1)y = \frac{\sin 2ny}{2\sin y}$$

آیا به همان نتیجه ای می رسید که در معادله (14-68) به آن دست یافته اید؟

پاسخ: با استفاده از معادله (14-64) داریم:

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right) = \frac{2h}{\pi}\sum_{m\ \text{فرد}}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}$$

مجموعه جزئی sn(x) به صورت مقابل به دست می آید.

$$s_n(x) = \frac{2h}{\pi}\sum_{m\ \text{فرد}}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}$$

با استفاده از بند (الف) داریم:

$$s_n(x) = \frac{2h}{\pi}\sum_{m\ \text{فرد}}^{\infty} \int_0^x \cos my dy$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$=\frac{2h}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\int_0^x \cos(2m-1)ydy=\frac{2h}{\pi}\int_0^x\sum_{m=1}^{n}\cos(2m-1)ydy$$

با استفاده از بند (ب) و تغییر متغیرخواهیم داشت:

$$s_n(x)=\frac{2h}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2ny}{2\sin y}dy \qquad 2ny=t\rightarrow dy=dt/2n$$

$$\frac{2h}{\pi}\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{2\sin(t/2n)}\frac{dt}{2n}=\frac{h}{2\pi}\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{\sin(t/2n)}\frac{dt}{n}$$

چنانچه $t\rightarrow\xi$ و $n\rightarrow p$ تبدیل کنیم انتگرالده به صورت انتگرالده معادله (14-68) می شود ولی بازه انتگرال گیری دو برابر شده است.

14-6- تعامد گسسته - تبدیل فوریه گسسته

تمرینات

14-6-1 صورتهای مثلثاتی تعامد گسسته متناظر با معادله (14-75) را استخراج کنید.

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\cos(2\pi pt_k/T)\sin(2\pi qt_k/T)=0$$

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\cos(2\pi pt_k/T)\cos(t\pi qt_k/T)=\begin{cases}0, & p\neq q\\ N, & p=q\neq 0, N\\ 2N, & p=q=0, N\end{cases}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\sin(2\pi p t_k/T)\sin(2\pi q t_k/T)=\begin{cases}0, & p\neq q\\ N, & p=q\neq 0, N\\ 0, & p=q=0, N\end{cases}$$

راهنمایی: می توان از اتحادهای مثلثاتی نظیر اتحاد زیر سود جست.

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

پاسخ:

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\cos(2\pi p t_k/T)\sin(2\pi q t_k/T)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\sin\frac{\pi k}{N}(p-q)+\sin\frac{\pi k}{N}(p+q)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\sin\frac{\pi k}{N}(p-q)+\sum_{k=0}^{2N-1}\sin\frac{\pi k}{N}(p+q)$$

$$=\frac{1}{2}\left[0+\sin\frac{\pi}{N}(p-q)+\ldots+\sin\frac{(2N-1)\pi}{N}(p-q)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\sin\frac{\pi k}{N}(p+q)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\pi}{N}(p-q)+\ldots+\sin\left[2\pi(p-q)-\frac{\pi}{N}(p-q)\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\sin\frac{\pi k}{N}(p+q)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{N}(p-q)+\ldots-\sin\frac{\pi}{N}(p-q)\right]+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\sin\frac{\pi k}{N}(p+q)=0$$

مهندس یار

اگر جفت جمله های $k=1,2N-1$ و $k=2,2N-2$ و ... را به صورت بالا تبدیل کنیم حاصل برابر صفر خواهد شد، سری دوم نیز مانند سری اول قابل تبدیل است و مجموعه آن برابر صفر می شود.

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\cos\left(\frac{2\pi pt_k}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi qt_k}{T}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\cos\frac{\pi k}{N}(p-q)+\cos\frac{\pi k}{N}(p+q)$$

با استفاده از مسئله 6–1–7 (جلد اول) مسئله را دنبال می کنیم.

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\cos\frac{\pi k}{N}(p-q)=\frac{\sin\pi(p-q)}{\sin\pi(p-q)/2N}\cos\left(\frac{2N-1}{2N}\right)\pi(p-q)$$

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\cos\frac{\pi k}{N}(p+q)=\frac{\sin\pi(p+q)}{\sin\pi(p+q)/2N}\cos\left(\frac{2N-1}{2N}\right)\pi(p+q)$$

چنانچه $p\neq q$ باشد وجود عامل $\sin\pi(p\pm q)$ در صورت، عامل صفر شدن مجموعه خواهد بود. چنانچه $p=q\neq 0$ باشد مجموعه دوم به خاطر عامل $\sin\pi(p+q)$ برابر صفر می شود و مجموعه اول به صورت زیر به دست می آید.

$$\lim_{p\to q}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\cos\frac{\pi k}{N}(p-q)=\frac{0}{0}=l\ im_{p\to q}\frac{1}{(2\pi/2N)}-\frac{\pi\cos\pi(p-q)}{\cos\pi/9p-q)/2N}=\frac{2N}{2}=N$$

چنانچه p=q=0 باشد هر دو مجموع مخالف صفر بوده و با استفاده از قاعده هوپیتال مجموع برابر 2N خواهد شد.

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\sin(2\pi pt_k/T)\sin(2\pi qt_k/T)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\cos\frac{\pi k}{N}(p-q)-\cos\frac{\pi k}{N}(p-q)$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

اگر $p \neq q$ باشد وجود عامل $\sin \pi(p \pm q)$ در صورت، عامل صفر شدن مجموع خواهد بود. چنانچه $p = q \neq 0$ باشد مجموع دوم به خاطر عامل $\sin \pi(p+q)$ برابر صفر می شود، مجموع دوم برابر $2N$ می شود و مجموع کل برابر N خواهد شد. چنانچه p=q=0 باشد، هر دو مجموعه مخالف صفر است، اما به علت تفاضل دو مجموعه، مجموع کل برابر صفر است.

14-6-2 معادله (14-75) تعامد را با جمع زدن روی نقاط زمانی را نمایش می دهد. نشان دهید که با جمع زدن روی نقاط بسامدی نیز همین رابطه تعامدی را خواهیم داشت.

$$\frac{1}{2N}\sum_{p=0}^{2N-1}(e^{i\omega}p^{tm})^{*}e^{i\omega}p^{tk} = \delta_{mk}$$

پاسخ:

$$\omega_p = 0, \frac{2\pi}{T}, \frac{4\pi}{T}, \ldots, \frac{2\pi(2N-1)}{T} \to \omega_p = \frac{2p\pi}{T}, p = 0,1,2,\ldots,(2N-1)$$

ثابت خواهیم کرد که توابع نمایی $\exp\left(i\omega_p KT/2N\right)$ و $\exp\left(i\omega_p mt/2n\right)$ روی نقاط گسسته ω_p در رابطه تعامد زیر صادقند.

مهندس یار

$$\sum_{p=0}^{2N-1}\exp(i\omega_p kT/2N)^* \exp(i\omega_p mT/2N)=2N\delta_{k,m\pm 2nN} \rightarrow \sum_{p=0}^{2N-1}\left[\exp\left(i\omega_p T(m-k)/2N\right)\right]=2N\delta_{k,m\pm 2nN}$$

اگر به جای m-k کمیت s را بنشانیم خواهیم داشت.

$$\sum_{p=0}^{2N-1}\exp(i\omega_p sT/2N)=\sum_{p=0}^{2N-1}\exp\left[\frac{i2\pi p}{T}\frac{sT}{2N}\right]=\sum_{p=0}^{2N-1}\exp(i\pi ps/N)=\frac{1-r^{2N}}{1-r}=\frac{1-(e^{i\pi s/N})^{2N}}{1-e^{i\pi s/N}}=\frac{1-e^{2i\pi s}}{1-e^{i\pi s/N}}$$

$$\sum_{p=0}^{2N-1}\exp\left[\exp(i\omega_p sT/2N)\right]=\begin{cases}\dfrac{1-r^{2N}}{1-r}=0 & r\neq 1\\ 2N & r=1\end{cases}$$

مقدار صفر بالایی به ازای عدد درست s، پیامد اتحاد $r^{2N}=\exp(2\pi is)=1$ است.

مقدار 2N پایینی به ازای r=1 متناظر با m=k است.

3–6–14 به طور مشروح نشان دهید که چگونه از رابطه

$$F(\omega_p)=\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}f(t_k)e^{i\omega_p t_k}$$

به رابطه زیر می رسیم:

$$f(t_k)=\sum_{p=0}^{2N-1}F(\omega_p)e^{-i\omega_p t_k}$$

پاسخ: اگر طرفین رابطه را در $(e^{i\omega_p t_k})^*$ ضرب کنیم و از طرفین رابطه مجموع روی اندیس p بگیریم خواهیم داشت:

$$\sum_{p=0}^{2N-1}F(\omega_p)(e^{i\omega_p t_m})^*=\frac{1}{2N}\sum_{p=0}^{2N-1}(e^{i\omega_p t_m})^*\sum_{k=0}^{2N-1}f(t_k)e^{i\omega_p t_k}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$\sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k)\frac{1}{2N}\sum_{p=0}^{2N-1}(e^{i\omega_p t_m})^* e^{i\omega_p t_k} = \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k)\delta_{mk} = f(t_k) \rightarrow f(t_k) = \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_p)e^{-i\omega_p t_k}$$

14–6–4 توابع $f(t_k)$ و $F(\omega_p)$ تبدیلهای گسسته فوریه یکدیگرند روابط تقارنی زیر

را استخراج کنید:

الف) اگر $f(t_k)$ حقیقی باشد، $F(\omega_p)$ متقارن هرمیتی است، یعنی:

$$F(\omega_p) = F^*\left(\frac{4\pi N}{T} - \omega_p\right)$$

ب) اگر $f(t_k)$ موهومی محض باشد، داریم:

$$F(\omega_p) = -F^*\left(\frac{4\pi N}{T} - \omega_p\right)$$

یادآوری: تقارن موجود در بند (الف) نمایشی است، از دگرنامی بسامد $4\pi N/T - \omega_p$

زیر نقاب ω_p پنهان می شود.

پاسخ (الف): با استفاده از معادله (14–79) داریم:

$$f(t_k) = \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_p)e^{-i\omega_p t_k} \qquad (1)$$

چنانچه از طرفین رابطه (1) مزدوج هرمیتی بگیریم، خواهیم داشت.

$$f^*(t_k) = \sum_{p=0}^{2N-1} F^*(\omega_p)e^{+i\omega_p t_k} \qquad (2)$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

در رابطه (2) جمله نمایی را می توانیم به صورت زیر در آوریم:

$$e^{+i\omega_{p}t_{k}} = e^{-(-i\omega_{p}t_{k})} = e^{-i(4\pi N/T-\omega_{p})t_{k}} = e^{+i\omega_{p}t_{k}} e^{-i4\pi N t_{k}}/T$$

با استفاده از معادله (14–74) می دانیم که عامل نمایی برابر با یک است.

$$e^{-i4\pi N t_{k}}/T = e^{-i4\pi N/T.kT/2N} = e^{-i2\pi k} = 1$$

به ازای هر k خاص رابطه برابر با یک خواهد بود، در نتیجه رابطه (2) به صورت

زیر در می آید.

$$f^{*}(t_{k}) = \sum_{p=0}^{2N-1} F^{*}(\omega_{p}) e^{-i(4\pi N/T-\omega_{p})t_{k}}$$

$$= \sum_{p=0}^{2N-1} F^{*}(4\pi N/T-\omega_{p}) e^{-i\omega_{p}t_{k}}$$

که از یک تغییر متغیر ساده استفاده کرده ایم نظیر ، حال از شرط حقیقی بودن

$f(t_{k})$ داریم:

$$f^{*}(t_{k}) = f(t_{k}) \rightarrow \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_{p}) e^{-i\omega_{p}t_{k}} = \sum_{p=0}^{2N-1} F^{*}(4\pi N/T-\omega_{p}) e^{-i\omega_{p}t_{k}} \rightarrow F(\omega_{p}) = F^{*}(4\pi N/T-\omega_{p})$$

(ب) حال اگر مراحل اولیه نظیر بند (الف) را دوباره دنبال کنیم با استفاده از شرط

اینکه $f(t_{k})$ موهومی محض است، خواهیم داشت:

$$f(t_{k}) = -f^{*}(t_{k}) \rightarrow \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_{p}) e^{-i\omega_{p}t_{k}} = -\sum_{p=0}^{2N-1} F^{*}(4\pi N/T-\omega_{p}) e^{-i\omega_{p}t_{k}}$$

مهندس یار

$F(\omega_p) = -F^*(4\pi N/T - \omega_p)$

14–6–5 با داشتن $f(t_k) = \sin t_k, T = 2\pi, N = 2$ (الف) $F(\omega_p)$ را به ازای p=0,1,2,3 پیدا کنید. (ب) با استفاده از $F(\omega_p)$، $f(t_k)$ را بازسازی کنید و دگرنامی $\omega_1 = 1$ و $\omega_3 = 3$ را نمایش دهید.

پاسخ (الف):

$t_k = kT/4 = k\pi/2 \qquad k = 0,1,2,3$

$f(t_k) = \sin t_k$ توسط بردار 4 مولفه ای $f(t_k) = (0,1,0,-1)$

بسامدهای ω_p از معادله (14–77) به دست می آیند.

$\omega_p = 2\pi p/T$

ماتریس تبدیل $(2N)^{-1}\exp(i\omega_{p^{t_k}}) = (2N)^{-1}\exp(ipk\pi/2)$

به صورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

وقتی این ماتریس روی بردار ستونی $f(t_k)$ عمل کند، بردار ستونی زیر به دست می آید.

$$F(\omega_p) = (0, \frac{i}{2}, 0, -\frac{i}{2})$$

$f(t_k)$ به کمک معادله (14–79) بازسازی می کنیم و خواهیم داشت:

$$f(t_k) = \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_p) e^{-i\omega_p t_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ i/2 \\ 0 \\ -i/2 \end{bmatrix} (e^{-it_k} e^{-2it_k} e^{-3it_k})$$

$$= \frac{1}{2}(ie^{-it_k} - ie^{-3it_k}) = \frac{1}{2}[i(\cos t_k - \cos 3t_k) + (\sin t_k - \sin 3t_k)]$$

$$= \frac{1}{2}\sin t_k - \frac{1}{2}\sin t_k$$

14–6–6 نشان دهید که چند جمله ایهای چبیشف $T_m(x)$، در رابطه تعامد گسسته زیر صدق می کنند.

$$\frac{1}{2}T_m(-1)T_n(-1) + \sum_{s=1}^{N-1} T_m(x_s)T_n(x_s) + \frac{1}{2}T_m(1)T_n(1) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ N/2 & m = n \neq 0 \\ N & m = n = 0 \end{cases}$$

در اینجا $x_s = \cos\theta_s$، که در آن $(N+1)\theta_s$ ها به طور هم فاصله روی محور θ قرار دارند.

مهندس یار

www.mohandesyar.com

$$\theta_s = \frac{s\pi}{N}, \qquad s = 0,1,2,\dots,N$$

پاسخ:

با استفاده از صورتهای مثلثاتی توابع چبیشف داریم:

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$T_n(1) = \cos n(2k\pi) = 1 \quad , \quad T_m(1 = 1$$

$$T_n(1) = \cos n(2k-1)\pi = \begin{cases} -1 & n \\ +1 & n \end{cases}$$

$$T_m(1) = \cos m(2k-1)\pi = \begin{cases} -1 & m \\ +1 & m \end{cases}$$

حال با اضافه کردن یک جمله (s=0) سیگما را به صورت زیر در می آوریم.

$$\sum_{s=1}^{N-1} T_m(x_s)T_n(x_s) = \sum_{s=1}^{N-1} \cos m\theta_s \cos n\theta_s$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N-1} \cos\theta_s(m-n) + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N-1} \cos\theta_s(m+n)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N-1} \cos\frac{s\pi}{N}(m-n) + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N-1} \cos\frac{s\pi}{N}(m+n)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N-1} \cos\frac{s\pi}{N}(m-n) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N-1} \cos\frac{s\pi}{N}(m+n) - \frac{1}{2}$$

مهندس یار

www.mohandesyar.com

حال با جمع بندی روابط، مشابه با مسئله (1-6-14) روابط تعامد قابل حصول

است.

مهندس یار