

فصل اول: کمیت‌های برداری

فصل دوم: حرکت مستقیم و منته

فصل سوم: حرکت پرتابی

فصل چهارم: قوانین نیوتن

تعریف کمیت: هر چیزی که قابل اندازه‌گیری باشد و مقداری داشته باشد کمیت می‌گردد

۱- کمیت‌های عددی یا نرده‌ای: این کمیت‌ها فقط اندازه دارد و بایک عدد مشخص می‌شود

مانند: جرم - زمان

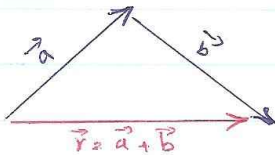
۲- کمیت‌های برداری: این کمیت‌ها علاوه بر کمیت‌های نرده‌ای جهت را نیز دارند

مانند: سرعت - جابجایی - نیرو

جمع بردارها به روش هندسی:

۱- مثلثی: اگر دو بردار A و B داشته باشیم که دومی از انتهای اولی رسم شده است بردار

برآیند یا جمع بردار است که پایه‌ای اولی را به انتهای دومی وصل می‌کند.

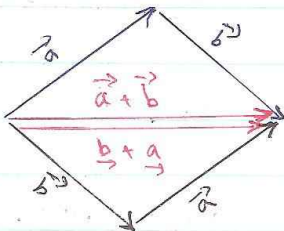


۲- متوازی الاضلاع: اگر دو بردار از یک نقطه باشند برای رسم بردار برآیند موازی اولی را

از انتهای دومی و موازی دومی را از انتهای اولی رسم می‌کنیم که یک متوازی الاضلاع

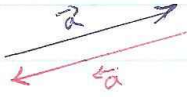
می‌سازد. در این متوازی الاضلاع می‌توانیم آنرا به دو بردار اول و دوم از انتهای بردار دوم

وصل کرد.

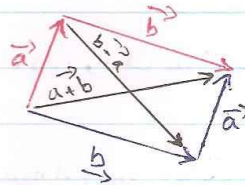
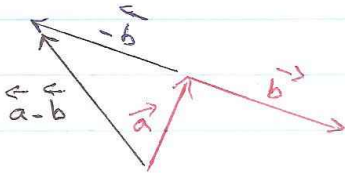


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

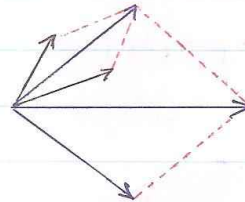
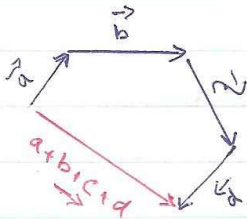
قرینه‌ی یک بردار: برداری است با همان اندازه ولی در خلاف جهت



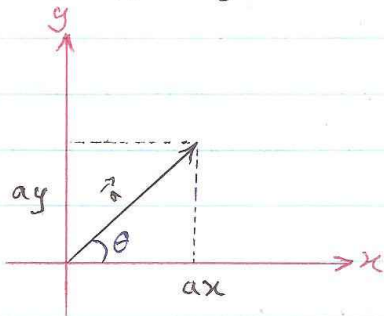
تفریق دو بردار: برای تفریق دو بردار \vec{a} و \vec{b} قرینه‌ی یکی را از انتهای دیگری رسم کنید سپس جمع دو بردار \vec{a} و $-\vec{b}$ را با روش مثلثی رسم می‌کنیم.



اگر چند بردار داشته باشیم که به ترتیب از انتهای هم وصل شده باشند جمع این چند بردار برداریست که ابتدای اولی را به انتهای آخری وصل کند



مؤلفه‌های یک بردار: اگر برداری مانند \vec{a} را در صفحه x و y در نظر بگیریم. سایدی این بردار در راستای x و y مؤلفه‌های این بردار نامیده می‌شود. که با ax و ay نشان داده می‌شود



$$\sin \theta = \frac{ay}{a} \Rightarrow ay = a \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{ax}{a} \Rightarrow ax = a \cos \theta$$

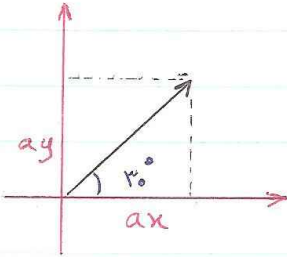
$$a = \sqrt{ax^2 + ay^2}$$

$$\tan \theta = \frac{ay}{ax} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{ay}{ax}\right)$$

$$\theta = \frac{1}{\tan} \left(\frac{ay}{ax} \right)$$

تمرین:

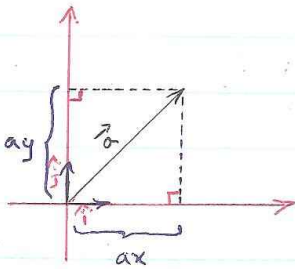
هواپیمای مسافت ۱۰۰۰ متر را با زاویه 30° درجه نسبت به افق می پیماید.
طبقای این هواپیما را در راستای افق به قائم بیست آورید



$$ax = a \cos 30^\circ = 1000 \times 0.866 = 866 \text{ m}$$

$$ay = a \sin 30^\circ = 1000 \times 0.5 = 500 \text{ m}$$

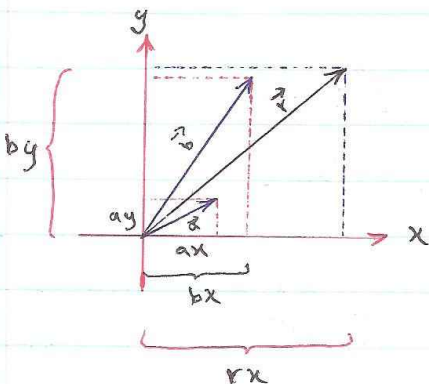
بردارهای یکه: هه برداری که اندازه ی واحد داشته باشد بردار یکه می نامند. اگر این بردار
یکه در جهت محور x ها باشد آن را با نماد \hat{i} نشان می دهند و اگر در جهت محور y ها باشد
آن را با نماد \hat{j} نشان می دهند.



$$a = ax \hat{i} + ay \hat{j}$$

$$a = a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j}$$

جمع چند بردار با استفاده از روش مؤلفه ها:



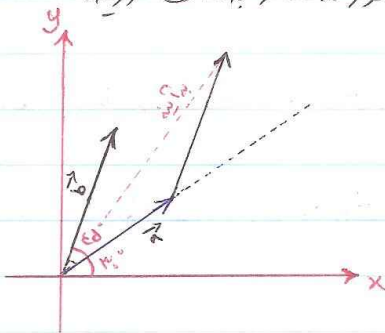
$$rx = ax + bx + cx + \dots$$

$$ry = ay + by + cy + \dots$$

در روش مؤلفه ها برای جمع چند بردار مؤلفه ی x بردار برآیند با جمع مؤلفه ی x تک تک
بردارها بدست می آید و به ای مؤلفه های دیگر می توان به همین صورت مؤلفه ی بردار
برآیند را بدست آورد.

مسئله:

دو بردار \vec{a} و \vec{b} با اندازه‌های مساوی ۱۰ متر مطابق شکل قرار گرفته‌اند. مؤلفه‌ی x و y بردار به این‌ها، اندازه‌ی بردار به این‌ها و جهت آن با محور x ها را به دست آوریم.



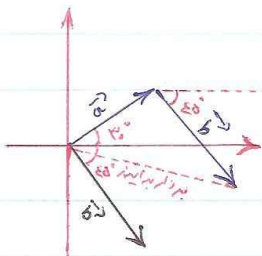
$$\begin{aligned} \vec{a} \text{ مؤلفه‌های } \left\{ \begin{aligned} a_x &= a \cos 30^\circ = 10 \times 0.866 = 8.66 \\ a_y &= a \sin 30^\circ = 10 \times 0.5 = 5 \\ b_x &= b \cos 45^\circ = 10 \times 0.707 = 7.07 \\ b_y &= b \sin 45^\circ = 10 \times 0.707 = 7.07 \end{aligned} \right. \\ \vec{b} \text{ مؤلفه‌های } \left\{ \begin{aligned} r_x &= a_x + b_x = 8.66 + 7.07 = 15.73 \\ r_y &= a_y + b_y = 5 + 7.07 = 12.07 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(15.73)^2 + (12.07)^2}$$

زاویه بردار به این‌ها با محور x ها $\theta = \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) = \arctan\left(\frac{12.07}{15.73}\right)$

مسئله:

برداری با اندازه ۲ متر و بردار با اندازه ۴ متر مطابق شکل قرار گرفته‌اند. مؤلفه‌ی x و y بردار به این‌ها، اندازه‌ی بردار و زاویه‌ی آن با محور x ها را به دست آوریم.



sin	+	+	sin
cos	-	+	cos
sin	-	-	sin
cos	+	+	cos

اگر زاویه نسبت به محور x ها یاب (ساعتگرد) (خلاف جهت ساعت) + در نظر گرفته می‌شود ساعتگرد باشد - در نظر می‌گیریم.

$$\vec{a} \left\{ \begin{aligned} a_x &= a \cos 30^\circ = 2 \times 0.866 = 1.73 \\ a_y &= a \sin 30^\circ = 2 \times 0.5 = 1 \end{aligned} \right.$$

$$\vec{b} \begin{cases} b_x = b \cos(-45^\circ) = 1 \times 0.707 = 0.707 \\ b_y = b \sin(-45^\circ) = 1 \times (-0.707) = -0.707 \end{cases}$$

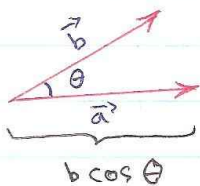
$$\vec{r} \begin{cases} r_x = a_x + b_x = 1.707 + 0.707 = 2.414 \\ r_y = a_y + b_y = 1 - 0.707 = 0.293 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(2.414)^2 + (0.293)^2} = 2.43$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) = \arctan\left(\frac{0.293}{2.414}\right) = 6.9^\circ$$

ضرب داخلی بردار:

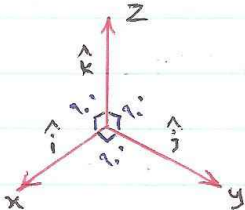
دو بردار \vec{a} و \vec{b} بازویی θ بین آنها را در نظر بگیرید. ضرب داخلی آن دو بردار یک کمیت نرده ای است.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

ضرب داخلی بردار \vec{a} و \vec{b} یعنی اندازه ی بردار a میانه ی بردار b در جهت بردار \vec{a}

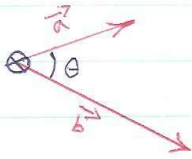
ضرب داخلی بردار یک



$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 1 \times 1 \times \cos 90^\circ = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \times 1 \times \cos 0^\circ = 1$$

اگر بردارهای یک همجنس باشند ضرب داخلی آنها 1 است و اگر همجنس نباشند ضرب داخلی آنها 0 است.



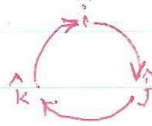
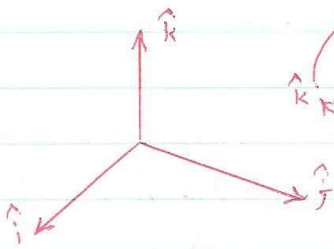
ضرب خارجی ۲ بردار:

$$|a \times b| = ab \sin \theta$$

نتیجه ضرب خارجی ۲ بردار یک بردار خواهد بود که این بردار عمود بر ۲ بردار A و B می باشد.

اندازه ضرب خارجی برابر با طولی مقابل به سمت می آید و جهت آن با قانون دست راست مشخص می شود یعنی ۴ انگشت دست راست در جهت بردار اول قرار می گیرد و به سمت بردار دوم به خوانده می شود.

انگشت شصت جهت بردار حاصل ضرب نشان می دهد.



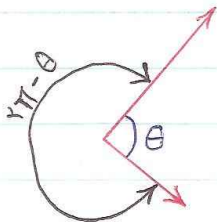
$$|i \times j| = 1 \times 1 \times \sin 90^\circ = 1$$

$$k \times i = j, \quad i \times k = -j$$

$$i \times i = 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0$$

برای ضرب خارجی بردارهای یک دوبرداری که هم جنس است نتیجه اش صفر است و برای بردارهای غیر هم جنس نتیجه اش برداری سه می است.

نکته: در ضرب خارجی ۲ بردار باید زاویه ی کوچک بین دوبردار را در نظر گرفت ولی در ضرب داخلی زاویه ی کوچک یا بزرگترین دوبردار تأثیر در نتیجه ضرب ندارد.



$$\sin \theta = \sin (2\pi - \theta)$$

$$\cos \theta = -\cos (2\pi - \theta)$$

دوبردار $A = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ و $B = -3\hat{j} + \hat{k}$ را در نظر بگیرید. ضرب داخلی و خارجی دوبردار و زاویه بین ۲ بردار را پیدا کنید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + \hat{k}) = \underline{-6\hat{i} \cdot \hat{i}} + \underline{2\hat{k} \cdot \hat{k}} + \underline{0} = -6 + 2 = -4$$

$$\Rightarrow \text{ضرب داخلی} \quad -6\hat{i} \cdot \hat{i} + 2\hat{k} \cdot \hat{k} = -6 + 2 = -4$$

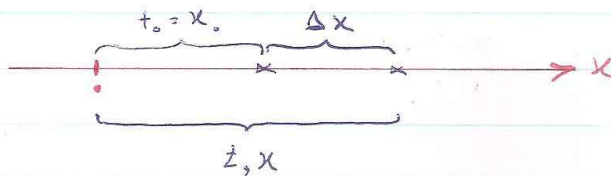
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + \hat{k}) = -6\hat{i} \cdot \hat{i} + 2\hat{j} \cdot \hat{j} + 3(-\hat{k})$$

$$\Rightarrow \text{ضرب خارجی} \quad -\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} \times \hat{k} = -\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$-4 = (\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2})(\sqrt{(-3)^2 + 1^2}) \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{-4}{3\sqrt{6}}$$

حرکت مستقیم الخط: حرکتی که روی یک خط، است صورت گیرد به آن حرکت مستقیم الخط می گویند

اگر یک جسم با گذشت زمان فاصله اش از مبدأ مختصات تغییر کند می گوییم جسم جابجایی شده است. این جابجایی را به صورت مقابل تعریف می کنیم



$$\Delta x = x - x_0$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \text{ (m/s)}$$

سرعت متوسط یک جسم: برابر است با جابجایی جسم (Δx) به بازه ای زمانی (Δt) که واحد آن متر بر ثانیه است.

مسأله: قطاری با سرعت متوسط ۶۰ متر بر ثانیه به سمت شرق حرکت می کند. سرعت ۶۰ متر بر ثانیه این قطار چه مقدار جابجایی دارد

$$\bar{v} = 40 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 4 \text{ (s)}$$

$$\Delta x = ?$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \bar{v} \times \Delta t \quad \Delta x = 40 \times 4 = 160 \text{ (m)}$$

مسئله: اتومبیلی در لحظه‌ای اولیه‌ی ۱۲ ثانیه در فاصله‌ی ۵۰ متری و در لحظه‌ای ثانویه‌ی ۱۵ در فاصله‌ی ۵ متری از مبدأ قرار دارد. سرعت متوسط این اتومبیل را بیست آورید.

$$t_0 = 12 \text{ s} , t = 15 \text{ (s)} \quad x_0 = 50 \text{ m} , x = 5 \text{ m}$$

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{5 - 50}{15 - 12} = \frac{-45}{3} = -15 \text{ m/s}$$

دک بیست و پنج

سرعت لحظه‌ای:

سرعتی که جسم در هر لحظه دارد سرعت لحظه‌ای می‌گویند. در یک حرکت یکنواخت سرعت متوسط یک جسم با سرعت لحظه‌ای آن برابر است و می‌توان برای این حرکت رابطه‌ی مقابل را نوشت:

$$v = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \xrightarrow{t_0=0} v = \frac{x_1 - x_0}{t} \Rightarrow \boxed{x = vt + x_0}$$

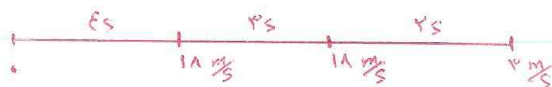
برای یک یکنواخت

شتاب متوسط:

اگر سرعت جسم یکنواخت نباشد یعنی یا داشت زمان سرعت تغییر کند می‌گویند جسم دارای شتاب است و شتاب متوسط برای این جسم با رابطه‌ی مقابل تعریف می‌شود:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

مسئله: دو چرخه سواری از حالت ساکن شروع به حرکت می کنند. چرخه ۱ از ۰ ثانیه به سرعت ۱۸ متر بر ثانیه می رسد و با همین سرعت ۳ ثانیه به حرکت خود ادامه می دهد و در نهایت ترمز می کند و در طی ۲ ثانیه سرعت خود را از ۱۸ متر بر ثانیه به ۳ متر بر ثانیه می رساند. شتاب متوسط این دو چرخه سواری را در هر مرحله از حرکت به دست آورید.



$$\vec{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{18 - 0}{3} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{18 - 18}{3} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{3 - 18}{2} = \frac{-15}{2} = -7.5 \text{ m/s}^2$$

هرگاه سرعت و شتاب هم علامت باشند حرکت تهنه شونده است و هرگاه این دو ضربه هم علامت باشند یعنی یکی + و دیگری - باشد حرکت کنه شونده است.

معادلات حرکت شتاب ساده:

وقتی شتاب یک جسم بالهشت زمان همواره ثابت می ماند می توانیم شتاب لحظه ای را برابر با شتاب متوسط قرار دهیم و معادلات زیر را به دست آوریم

$$a = \bar{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \xrightarrow{t_0=0} a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow \boxed{v = at + v_0}$$

معادله سرعت نسبت به زمان برای حرکت با شتاب ثابت

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

معادله مکان نسبت به زمان برای حرکت با شتاب ثابت

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

معادله مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت

مسئله: اتوبوسی با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه در حال حرکت است وقتی به ۲۴ متری یک خانگی می‌رسد، سرنشینان آن اتوبوس پس از ۲ ثانیه به خانگی می‌رسند.
الف) شتاب که نمونه‌ی اتوبوس را به دست آورید
ب) سرعت اتوبوس در لحظه‌ی رسیدن به خانگی چقدر است.

$z = 2(s)$ $v_0 = 20 \frac{m}{s}$ $x = 24 m$ $x_0 = 0$ $a = ?$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times a \times (2)^2 + 20 \times 2 + 0$$

$$24 - 40 = 2a \Rightarrow -16 = 2a$$

$$a = -8 \frac{m}{s^2}$$

$$b) v = at + v_0 = -8 \times 2 + 20 = -16 + 20 = 4 \frac{m}{s}$$

مسئله: در لحظه‌ای که چراغ راهنمای سبز می‌شود اتوبوسی با شتاب ثابت ۲ متر بر ثانیه به راه می‌افتد. در همان لحظه موتور سوار با سرعت ۸ متر بر ثانیه از کنار اتوبوس عبور می‌کند.

الف) اتوبوس در چه فاصله از چراغ راهنمای به موتور سوار می‌رسد؟
ب) سرعت اتوبوس در لحظه‌ی رسیدن به موتور سوار چقدر است؟

$$x_1 = v_1 t + x_{01} = 8t$$

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + v_{02} t + x_{02} = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 + 0 + 0$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 8t = t^2$$

$$t = 8(s)$$

$$الف) x_1 = 8t = 8 \times 8 = 64(m)$$

$$b) v_2 = a_2 t + v_{02} = 2 \times 8 + 0 = 16 \frac{m}{s}$$

مسئله: جسمی با سرعت ۲ متر بر ثانیه شروع به حرکت می‌کند و پس از طی مسافت ۱۰ متر به ۴ متر بر ثانیه می‌رسد. شتاب حرکت این جسم و زمانی که این جابجایی انجام شده است را بیابید.

$$v_0 = 2 \frac{m}{s} \quad v = 4 \frac{m}{s} \quad x_0 = 0 \quad x = 10 \text{ (m)} \quad a = ?$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

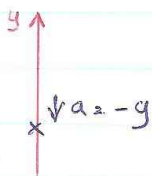
$$4^2 - 2^2 = 2 \times a(10 - 0) \Rightarrow 16 - 4 = 20a \Rightarrow a = \frac{12}{20} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 4 = \frac{12}{20} \times t + 2 \Rightarrow 4 - 2 = \frac{12}{20} t$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{12}{20} t \Rightarrow t = \frac{2 \times 20}{12} \text{ (s)}$$

مقوط آزاد

اگر جسمی را به سمت بالا یا به سمت پایین در راستای محور y ها پرتاب کنیم. این جسم با شتاب گرانشی زمین حرکت خواهد کرد. در این حرکت جهت مثبت محور x ها را به سمت بالا انتخاب می‌کنیم و شتاب گرانشی زمین را منفی می‌گیریم.



جهت مثبت حرکت به سمت بالا می‌باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \\ v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \\ v = at + v_0 \end{array} \right\} \xrightarrow{a = -g} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \\ v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \\ v = -g t + v_0 \end{array} \right.$$

انتخاب مبدأ مختصات برای محور y ها اختیاری است و تأثیری در نتیجه مسئله ندارد.

مسئله: سنگی از بالای ساختمان به ارتفاع ۵۰ متر بالاتر از سطح زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می شود. پس از ۵ ثانیه سنگ به زمین برخورد می کند.

الف) سنگ با چه سرعتی پرتاب شده است

ب) حداکثر ارتفاعی که سنگ می تواند بالا رود چقدر است؟

ج) سنگ با چه سرعتی به سطح زمین برخورد می کند؟

$$z = d(y) \quad v_y = ? \quad y_0 = d(m) \quad y = 0 \quad y = 10$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t + y_0$$

$$0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 5^2 + v_y \times 5 + 50$$

الف)

$$0 = -12.5 + 5v_y + 50$$

$$0 = -7.5 + 5v_y$$

$$7.5 = 5v_y \Rightarrow v_y = \frac{7.5}{5} = 1.5 \left(\frac{m}{s} \right)$$

ب) سرعت جسم در نقطه ی اوج همیشه ۰ است.

$$v_{\text{اوج}} = 0 \quad y = ? \quad y_0 = d.$$

$$v_{\text{اوج}}^2 - v_y^2 = -2g(y - y_0) \Rightarrow 0 - 1.5^2 = -2 \times 10 \times (y - 50)$$

$$-2.25 = -20y + 1000 \Rightarrow y - 50 = \frac{22.5}{20} = 1.125$$

$$y = 1.125 + 50 = 51.125$$

$$v_{\text{زمین}} = -gt + v_y = -10 \times 5 + 1.5 = -50 + 1.5 = -48.5 \frac{m}{s}$$

ج)

جهت سرعت به سمت پایین

مسئله: توپی را با سرعت ۱۶ متر بر ثانیه به سمت بالا پرتاب می کنیم. حداکثر ارتفاعی که

توپ می تواند بالا رود چقدر است؟

ب) زمان رسیدن به نقطه ی اوج و بازگشت آن به سمت زمین چقدر است؟

ج) سرعت توپ، اوقتی که به زمین می رسد حساب کنید.

$$v - v_0 = -g(y - y_0)$$

الف)

$$-16^2 = -2 \times 10 \times (y - 0) \Rightarrow -256 = -20(y) \Rightarrow y = \frac{256}{20} = 12.8$$

$$v - gt + v_0 \Rightarrow 0 = -10 \times t + 16 \Rightarrow 10t = 16 \Rightarrow t = \frac{16}{10} = 1.6 (s)$$

$$t' = 2t = 3.2 (s)$$

$$v_{02} = -gt' + v_0 = -10 \times 3.2 + 16 \quad v = -32 + 16 = -16$$

ج)

مثال: سنگی از ارتفاع ۱۲۰ متری سطح زمین، رها می‌شود.
الف) چقدر می‌کشد تا سنگ به سطح اول، آوی کشد.
ب) و ۷۰ متری دوم، آوی کشد.

$$y = 120 (m) \quad y = 70 (m) \quad t = ? \quad v = 0$$

$$v_0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 0 + 120$$

الف)

$$v_0 - 120 = -5t^2 \Rightarrow -50 = -5t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{50}{5} = 10$$

$$t = \sqrt{10} = 3.16 (s)$$

$$y' = -\frac{1}{2}gt'^2 + vt' + y'$$

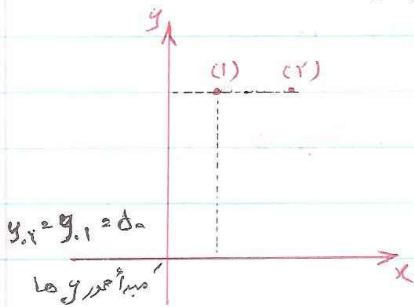
ب)

$$0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t'^2 + 0 + 120 \Rightarrow 0 = -5t'^2 + 120$$

$$t'^2 = \frac{120}{5} = 24 \Rightarrow t' = \sqrt{24} \approx 4.9$$

$$t'' = t' - t = 4.9 - 3.16 = 1.74 (s)$$

مسئله: سنگی از ارتفاع ۵۰ متری سطح زمین رها می شود. یک ثانیه بعد سنگی به سمت پایین پرتاب می شود. از همان ارتفاع این دو سنگ به سطح زمین می رسند سرعت اولیه سنگ دوم را حساب کنید.



$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,1}t + y_{0,1}$$

$$0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 0 + 50 \Rightarrow 0 = -5t^2 + 50$$

$$t' = t - 1 = 3,16 - 1 = 2,16$$

$$5t^2 = 50 \Rightarrow t^2 = \frac{50}{5} = 10$$

$$t = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ ثانیه}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}gt'^2 + v_{0,2}t' + y_{0,2} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times (2,16)^2 + v_{0,2} \times 2,16 + 50$$

$$\Rightarrow 0 = -23,32 + 2,16v_{0,2} + 50$$

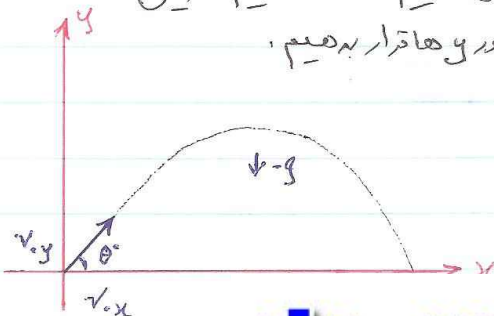
$$\Rightarrow 0 = +26,68 + 2,16v_{0,2} \Rightarrow 2,16v_{0,2} = -26,68$$

$$\Rightarrow v_{0,2} = \frac{-26,68}{2,16} \Rightarrow v_{0,2} = -12,35$$

حرکت پرتابی:

در حرکت پرتابی جسمی را با سرعت اولیه v_0 که زاویه θ با محور x ها می سازد پرتاب می شود. در این حرکت جسم در جهت محور x ها هیچ شتابی ندارد و در این سمت حرکت یکنواخت را داریم.

در جهت محور y ها جسم با شتاب گرانشی زمین حرکت خواهد کرد یعنی حرکت سقوط آزاد را داریم و از همان معادلات سقوط آزاد می توانیم استفاده کنیم. در این معادلات باید اندیس y را برای سرعت در جهت محور y ها قرار بدهیم.



$$\begin{cases} x = v_{0x} t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \\ v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) \\ v_y = -g t + v_{0y} \end{cases}$$

(برای اینکه حرکت یکدست است) $v_x = v_{0x}$

تجزیه به دو
سرعت اولیه $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \theta \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta \end{cases}$

مسئله: سنگی را با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه در جهت افق از روی پلی با ارتفاع ۳۰ متر تا سطح رودخانه پرتاب می‌کنیم.

الف) زمانی که طول می‌کشد تا سنگ به سطح آب برسد چقدر است؟
ب) حاصلی افقی نقطه‌ی پرتاب سنگ با نقطه‌ی برخورد آن به سطح آب چقدر است؟
ج) سرعت سنگ را در نقطه‌ی برخورد با سطح آب بدست آوریم.

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \theta = 20 \times \cos 0 = 20 \frac{m}{s} \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta = 20 \times \sin 0 = 0 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow -30 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 0 + 0$$

الف)

$$30 = 5 t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{30}{5} \Rightarrow t = \sqrt{6} (s)$$

$$x = v_x t + x_0 = 20 \times \sqrt{6} + 0$$

ب)

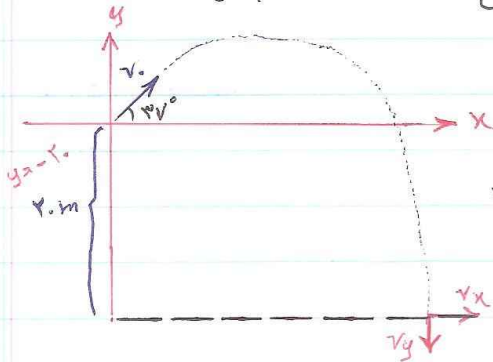
$$v_x = v_{0x} = 20 \frac{m}{s}$$

جهت حرکت به سمت راست

$$v_y = -g t + v_{0y} = -10 \times \sqrt{6} + 0 = -10\sqrt{6}$$

ج)

مسأله: جسمی با سرعت اولیه ۳۰ متر بر ثانیه و زاویه ۳۷° نسبت به افق از روی پایی به ارتفاع ۲۰ متر تا سطح رودخانه به سمت بالا پرتاب می شود. الف) سرعت نهایی جسم را هنگام برخورد با سطح آب بدست آورید. ب) زمانی که طول می کشد تا جسم به سطح آب برسد چقدر است؟ ج) فاصله ی افقی نقطه ی برخورد جسم با سطح آب از نقطه ی پرتاب چقدر است؟ د) برد افقی پرتاب را بدست آورید.



مؤلفه ها ی \vec{v}_0

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \theta = 30 \times \frac{\cos 37^\circ}{0.18} = 24 \frac{m}{s} \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta = 30 \times \frac{\sin 37^\circ}{0.18} = 18 \frac{m}{s} \end{cases}$$

الف)

$$v_x = v_{0x} = 24 \frac{m}{s}$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) \Rightarrow v_y^2 - 18^2 = -2 \times 10 \times (-20 - 0)$$

$$v_y^2 - 324 = -400 \Rightarrow v_y = \pm \sqrt{724} \approx -27$$

چون به سمت پایین است منفی است.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{24^2 + 27^2}$$

ب)

$$v_y = -gt + v_{0y} \Rightarrow -27 = -10 \times t + 18$$

$$-27 - 18 = -10t \Rightarrow t = \frac{-45}{-10} = 4.5$$

ج)

$$x = v_{0x}t + x_0 = 24 \times 4.5 + 0 = 108 (m)$$

د)

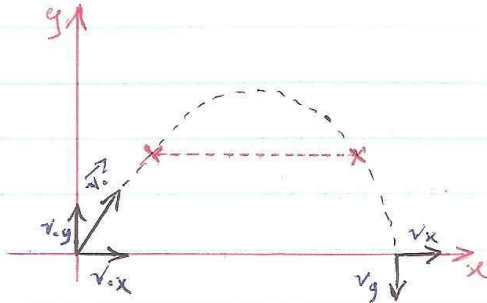
$$x = R = v_{0x}t' + x_0 = 24x$$

$$v_y = -gt' + v_{0y} \Rightarrow -18 = -10 \times t' + 18 \Rightarrow$$

$$-10t' = -18 - 18 = -36 \quad t' = \frac{-36}{-10} = 3.6$$

(*) $\Rightarrow x = R = 24 \times 3.6 = 86.4$

نکته: در حرکت پرتابی فاصله‌ی نقطه‌ی پرتاب با نقطه‌ی همسطح خردش روی محور x ها به عنوان به د پرتاب در نظر گرفته می‌شود. در حرکت پرتابی همیشه دو نقطه‌ی متعارف روی مسیر دارای سرعت‌های برابر هستند و تفاوت این دو نقطه فقط در جهت مؤلفه‌ی y سرعت است.



$$\left. \begin{array}{l} v_y = -v_{0y} \\ v_x = v_{0x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{بای هر دو نقطه‌ی} \\ \text{متعارف روی مسیر} \end{array}$$

نکته: مؤلفه‌ی y سرعت در حرکت پرتابی تا قبل از رسیدن به نقطه‌ی اوج به سمت بالا یعنی مثبت است و پس از عبور از نقطه‌ی اوج جهتش به سمت پایین و منفی است.

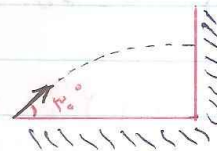
مسئله: توپی را با سرعت ۲۵ متر بر ثانیه به سمت بالا تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه به سمت دیواری پرتاب می‌کنم. فاصله‌ی این دیوار تا نقطه‌ی پرتاب ۷۲ متر است.

الف) زمان به خورد توپ با دیوار چقدر است؟

ب) توپ در چه فاصله‌ای بالاتر از نقطه‌ی پرتاب به دیوار برخورد می‌کند؟

ج) مؤلفه‌ی افقی و قائم سرعت توپ را در لحظه‌ی برخورد با دیوار مشخص کنید و تعیین کنید که در نقطه‌ی برخورد با دیوار توپ از نقطه‌ی اوج می‌گذرد یا نه؟

$$\vec{v}_0 \rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta = 25 \times \frac{\cos 30^\circ}{0.866} = 21.25 \left(\frac{m}{s}\right) \\ v_y = v_0 \sin \theta = 25 \times \frac{\sin 30^\circ}{0.5} = 12.5 \left(\frac{m}{s}\right) \end{cases}$$



$$\text{الف) } x = v_x t + x_0 \Rightarrow 72 = 21.25 t \Rightarrow t = \frac{72}{21.25} \approx 3.4$$

$$\text{ب) } y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 3.4^2 + 12.5 \times 3.4 + 0$$

$$\Rightarrow -5 + 42.5 = +37.5$$

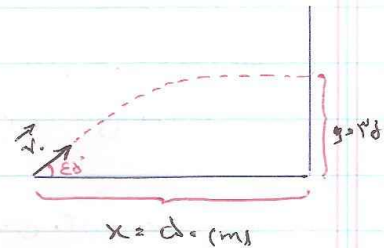
ج) $v_x = v_{0x} = 11,25 \frac{m}{s}$

به اوج نه سیمه

$v_y = -gt + v_{0y} = -10 \times 1 + 12,5 = 2,5$

مسئله: تیری را به سوی دیراری در فاصله ۵۰ متری پرتاب می کنیم. سرعت اولیه تیر با جهت افق زاویه 45° می سازد. نقطه برخورد تیر با دیوار ۲۵ متر بالاتر از سطح زمین است. اگر فرض کنیم که تیر از سطح زمین پرتاب شود زمان برخورد تیر با دیوار و سرعت اولیه آن چقدر است؟

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta = v_0 \cos 45^\circ = 0,7 v_0 \\ v_y = v_0 \sin \theta = v_0 \sin 45^\circ = 0,7 v_0 \end{cases}$$



$x = v_{0x}t + x_0 \Rightarrow d_0 = 0,7 v_0 t + 0$

$v_0 t = \frac{d_0}{0,7} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \Rightarrow 25 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 0,7 v_0 t + 0 \quad (2)$

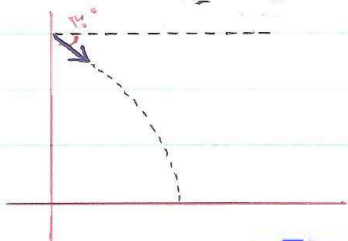
$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow 25 = -5t^2 + 0,7 v_0 \frac{d_0}{0,7} + 0$

$25 = -5t^2 + d_0 \Rightarrow 25 - d_0 = -5t^2$

$-15 = -5t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{15}{5} = 3$

$t = \sqrt{3} = 1,7 (s)$

مسئله: سنگی با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه تحت زاویه ۳۰ درجه زیر راستای افق پرتاب می شود. فاصله افقی نقطه پرتاب و محل برخورد افقی آن با زمین ۷۰۰ متر است.



الف) چه مدت طول می کشد تا زمین برسد.
ب) سنگ از چه ارتفاعی پرتاب شده است؟

$$x_0 = 0, \quad y_0 = ? \quad , \quad y = 0, \quad x = 700 \text{ (m)}$$

الف) $x = v_{0x}t + x_0$ ①

$$v_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(-30^\circ) = 200 \times 0.866 = 173.2 \text{ (m/s)} \\ v_{0y} = v_0 \sin(-30^\circ) = 200 \times (-0.5) = -100 \text{ (m/s)} \end{cases}$$

① $700 = 173.2t + 0 \Rightarrow t = \frac{700}{173.2} = 4.04 \text{ (s)}$

ب) $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 10 \times (4.04)^2 + (-100 \times 4.04) + y_0 = 0$
 $\Rightarrow 0 = -816.4 - 404 + y_0 \Rightarrow y_0 = 1220.4 \text{ m}$

سریع در سطح زمین برابر با سرعتی که در آنجا می‌باشد

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = 173.2 \text{ (m/s)} \\ v_y = -gt + v_{0y} = -10 \times 4.04 + (-100) = -140.4 \text{ m/s} \end{cases}$$

خواص نیرو

نیرو: کشش یا رانشی که به یک جسم وارد می‌شود و باعث تغییر حالت حرکت آن می‌شود.
 نیرو می‌تواند نامیده شود.

قانون اول نیوتون: اگر به آینه نیروهای وارد به یک جسم = باشد جسم حالت ساکن یا حرکت ثابت سرعت خود را روی خط مستقیم حفظ می‌کند.

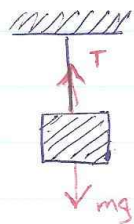
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

جمع کل نیروها

وزن: نیروی که از طرف زمین به اجسام روی آن وارد می‌شود و سبب گرانشی و رانشی اجسام می‌دهد نیروی وزن می‌گویند.

$$W = mg \quad \leftarrow \text{(وزن)}$$

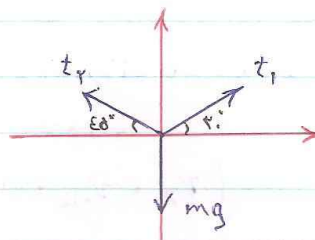
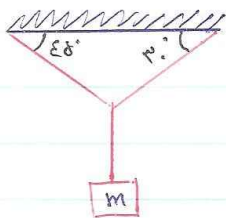
نیروی کشش ریسمان: نیروی که از طرف یک ریسمان به یک جسم وارد می شود کشش ریسمان می نامند.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T - mg = 0$$

$$T = mg$$

مسئله: جسی با جرم ۱۰ کیلوگرم به طنابی وصل است و این طناب توسط یک کلاه به دو طناب دیگر متصل می شود. کشش هر طناب را به دست آورید.



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 45^\circ - mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.866 T_1 - 0.707 T_2 = 0 \\ 0.5 T_1 + 0.707 T_2 = 100 \end{cases}$$

$$(1.38) T_1 + 0 = 100 \Rightarrow T_1 = \frac{100}{1.38} (N)$$

$$0.866 \times \frac{100}{1.38} - 0.707 T_2 = 0$$

$$\frac{86.6}{1.38} = 0.707 T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{86.6}{1.38 \times 0.707}$$

قانون دوم نیوتون: اگر به این نیروهای وارد بر یک جسم Σ نباشد این جسم با شتابی حرکت خواهد کرد که شتاب جسم با نیروی به این رابطه مستقیم و با جرم جسم رابطه عکس دارد.

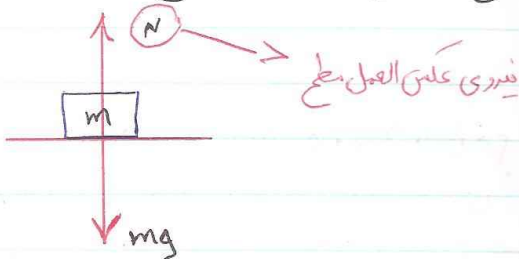
$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m a_x \\ \Sigma F_y = m a_y \end{cases}$$

\nwarrow نیروی به این \downarrow جرم جسم \searrow شتاب جسم

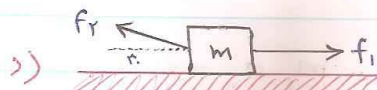
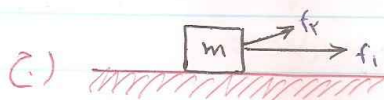
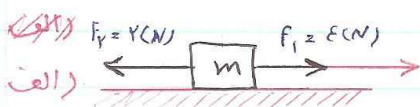
قانون سوم نیوتون: طبق این قانون نیرویی که جسم اول به جسم دوم وارد می‌کند مساویست با نیرویی که جسم دوم به جسم اول وارد می‌کند.

$$\vec{F}' \leftarrow (m_1, m_2) \rightarrow \vec{F} \quad \vec{F} = -\vec{F}'$$

نیروی عکس العمل مطیع: نیرویی که از طرف یک سطح در برابر نیروی وارد به آن وارد می‌شود نیروی عکس العمل مطیع می‌گویند که همیشه به سطح تقاضا عمود است.



مسئله:



الف) $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_1 - F_r = ma_x$

$\varepsilon - r = ra_x \Rightarrow r = ra_x$

$a_x = \frac{r}{r} = 1 \frac{m}{s^2}$

ب) $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_1 + F_r = ma_x$

$\varepsilon + r = ra_x \Rightarrow a_x = \frac{\varepsilon}{r} = 3 \frac{m}{s^2}$

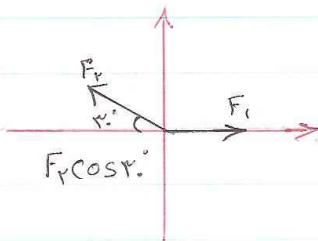
ج) $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_1 + F_r \cos 30^\circ = ra_x$

$\varepsilon + (rx \cdot 0.18) = ra_x \Rightarrow a_x = \frac{\varepsilon, r}{r}$

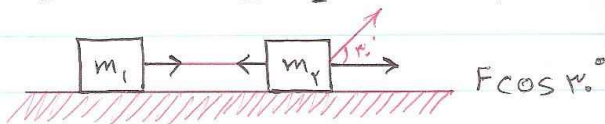
د) $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_1 - F_r \cos 30^\circ = ma_x$

$\varepsilon - rx \cdot 0.18 = ra_x \Rightarrow r, r = ra_x$

$a_x = \frac{r, r}{r}$



مثال: دو جسم m_1 مساوی ۵ کیلوگرم و m_2 ۱ کیلوگرم توسط طناب بدون جرمی به هم متصل شده اند و نیروی F با زاویه 30° نسبت به افق به جسم m_2 وارد می شود. متاب حرکت جسم ها، کشش، سیلان، اجهت آورید.



$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F \cos 30^\circ - T + T = (m_1 + m_2) a_x$

جمع کل دو جسم

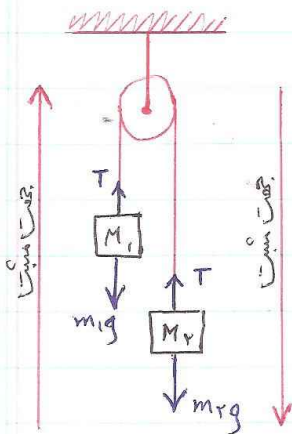
$10 \times 0.18 = (5 + 1) a_x \Rightarrow$

$a_x = \frac{1.8}{13} \frac{m}{s^2}$

$\Sigma F_{1x} = m_1 a_x \Rightarrow T = m_1 a_x = 5 \times \frac{1.8}{13}$

$$10 \times 9.8 - T = \frac{41}{13} \Rightarrow T = 1.5 - \frac{41}{13} = \frac{1.5 - 3.15}{13} = \frac{-1.65}{13}$$

مسئله: دو جسم ۵ کیلوگرم M_1 و ۸ کیلوگرم M_2 توسط ریسمان بدون جرمی که از یک قرقره‌ی بدون اصطکاک عبور می‌کند به یکدیگر متصل شده‌اند. کتاب حرکت این دو جسم و کشش ریسمان را بدست آورید.



$$\Sigma F_y = (M_1 + M_2) a_y$$

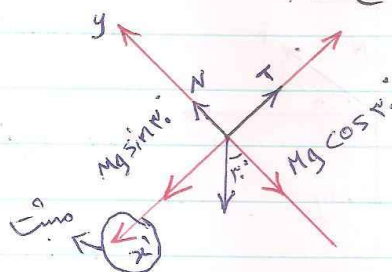
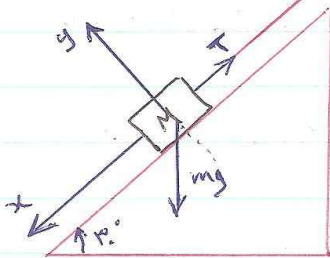
$$-M_1 g + T - T + M_2 g = (M_1 + M_2) a_y$$

$$a_y = \frac{(M_2 - M_1)}{M_1 + M_2} g = \frac{(8 - 5)}{8 + 5} \times 10 = \frac{3}{13} \times 10 = 2.3 \frac{m}{s^2}$$

$$\Sigma F_{1y} = M_1 a_y \Rightarrow -M_1 g + T = M_1 a_y$$

$$-5 \times 10 + T = 5 \times 2.3 \Rightarrow T = 11.5 + 5 = 16.5 (N)$$

مسئله: جسمی به جرم ۱۰ kg، از روی یک سطح شیب دار رها شده است. زاویه‌ی سطح شیب دار ۳۰ درجه می‌باشد. کشش ریسمان را بدست آورید.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow Mg \sin 30^\circ - T = 0$$

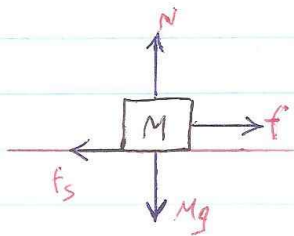
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - Mg \cos 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = Mg \sin 30^\circ = 10 \times 10 \times 0.5 = 50 (N) \\ N = Mg \cos 30^\circ = 10 \times 10 \times 0.866 = 86.6 (N) \end{cases}$$

نکته: در مسأله حل شده عکس العمل سطح N نیز به سمت آید

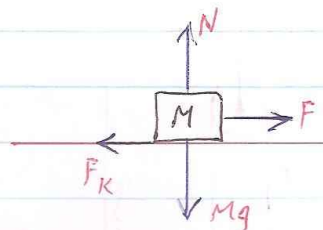
نیروی اصطکاک:

نیروی که به یک جسم وارد می شود و مانع حرکت آن می شود نیروی اصطکاک می باشد. اگر جسم در حال حرکت باشد اصطکاک وارده آن جنبشی خواهد بود و اگر جسم ساکن باشد نیروی اصطکاک وارده آن ایستایی خواهد بود.



$$(f_s)_{\text{max}} = \mu_s N$$

ضریب اصطکاک ایستایی



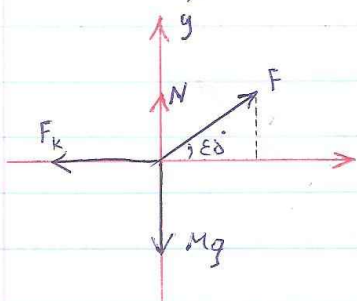
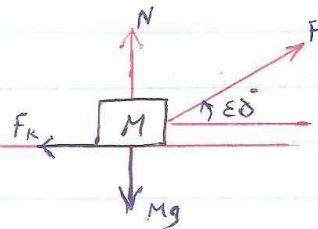
$$F_k = \mu_k N$$

ضریب اصطکاک جنبشی

مسأله: جسمی با جرم 10 kg توسط نیروی 10 نیوتون که زاویه 45° را با افق می سازد قرار

دارد.

متاب حرکت این جسم را بدست آورید.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N + F \sin 45^\circ - Mg = 0$$

$$N = Mg - F \sin 45^\circ = 10 \times 10 - 10 \times 0.7$$

$$N = 9.3 \text{ (N)}$$

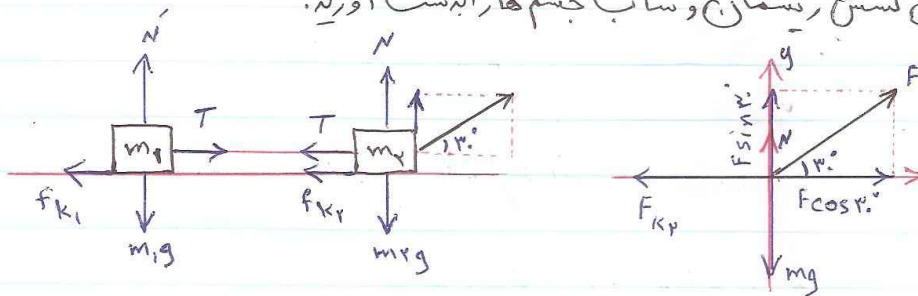
$$F_k = \mu_k N = 0.1 \times 9.3 = 0.93 \text{ (N)}$$

$$\sum F_x = Ma_x \Rightarrow F \cos 45^\circ - F_k = Ma_x$$

$$10 \times 0.7 - 0.93 \Rightarrow 0. a_x \Rightarrow 7 - 0.93 = 10 a_x$$

$$a_x = \frac{6.07}{10}$$

مسئله: دو جسم $M_1 = 1 \text{ kg}$ و $M_2 = 2 \text{ kg}$ توسط ریسمان بدون جرمی به هم متصل شده اند و نیروی 10 نیوتون به جسم M_2 وارده می شود. سطح افقی که این اجسام بر روی آن قرار دارند صریب اصطکاک جنبشی 0.2 دارد. نیروی کشش ریسمان و شتاب جسم ها را بیست آورید.



$$\sum F_{1y} = 0 \Rightarrow N' - m_1 g = 0 \rightarrow N' = m_1 g$$

$$F_{k1} = \mu_k N' = 0.2 \times m_1 g = 0.2 \times 1 \times 10 = 2 \text{ (N)}$$

$$\sum F_{2y} = 0 \Rightarrow N + F \sin 30^\circ - m_2 g = 0$$

$$N = m_2 g - F \sin 30^\circ = 2 \times 10 - 10 \times 0.5 = 5 \text{ (N)}$$

تمام نیروهای وارده به m_2 را در نظر بگیرید

$$\Rightarrow f_{k2} = \mu_k N = 0.2 \times 5 = 1 \text{ (N)}$$

$$\sum F_x = (m_1 + m_2) a_x \quad F \cos 30^\circ - T - f_{k2} + T - f_{k1} = (m_1 + m_2) a_x$$

$$\Rightarrow 10 \times 0.866 - 2 - 1 = (1 + 2) a_x$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{3.66}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

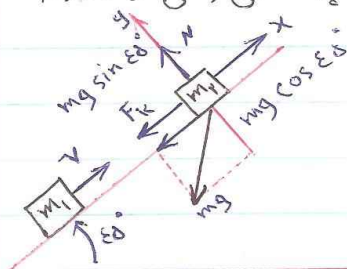
$$\sum F_{1x} = m_1 a_x \Rightarrow T - F_{k1} = m_1 a_x$$

$$T - 2 = 1 \times \frac{3.66}{3}$$

$$\Rightarrow T = \frac{3.66}{3} + 2 = \frac{9.66}{3} \text{ (N)}$$

مسئله: جسمی به جرم 2 kg روی سطح شیب داری با زاویه 45° درجه قرار دارد. ضریب ای به این جسم وارده می شود و سرعت 5 m/s را به جسم می دهد و جسم به

طرف بالای سطح شیب را حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح شیب را 0.2 است. بعد از اینکه جسم متوقف شود چه مسافتی را طی خواهد کرد؟



$$\sum F_x = m a_x$$

$$-F_k - mg \sin 45 = m a_x$$

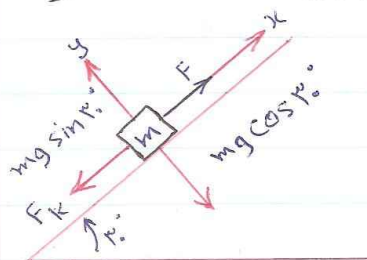
$$F_k = \mu_k N = \mu_k mg \cos 45 = 0.2 \times 2 \times 10 \times 0.7$$

$$F_k = 2.8 \text{ (N)}$$

$$-2.8 - 2 \times 10 \times 0.7 = 2 \times a_x$$

$$a_x = \frac{-19.6}{2} = -9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

مسئله: چسبی به جرم 1 kg در نقطه توقف توسط نیروی 20 N به روی سطح شیب داری بازآوری می‌شود. در چه مسافتی بالای سطح شیب را رها کرده می‌شود. شتاب حرکت این جسم با فرض اینکه ضریب اصطکاک جنبشی 0.4 باشد، محاسبه کنید.



$$\sum F_x = m a_x$$

$$F - F_k - mg \sin 30 = m a_x$$

$$F_k = \mu_k N = \mu_k mg \cos 30$$

$$0.4 \times 1 \times 10 \times 0.87 = 3.48$$

$$20 - 3.48 - 1 \times 10 \times 0.5 = 1 \times a_x$$

$$11.52 = a_x$$