

انتگرال یک متغیری

مفهوم انتگرال یکی از ارکان حساب دیفرانسیل و انتگرال است. از نظر قدمت سوابق این ایده بسیار قدیمی تر از مفهوم مشتق است و به صورتی در ریاضیات یونان قرون ۳ و ۴ پیش از میلاد زیر عنوان "روش افنا"^۱ یافت می شود. هدف این روش یافتن مساحت ناحیه های محصور به منحنی ها یا احجام محصور به سطوح خمیده است. در این روش ناحیه مورد نظر به صورت اجتماعی نامتناهی از ناحیه های محصور به خطوط راست یا صفحات مستوی نمایش داده می شود. با یافتن حد مجموع مساحت ها یا احجام این ناحیه ها عددی به عنوان مساحت یا حجم ناحیه اولیه به دست می آید.

به عنوان نمونه روش ارشمیدس را برای محاسبه قطاعی از سهمی به طور خلاصه بیان می کنیم. سهمی $y = kx^2$ را در نظر بگیرید. مقصود از یک وتر سهمی پاره خط واصل بین دو نقطه نمودار است. ناحیه محصور به یک وتر و کمان سهمی که به دو انتهای وتر محصور می شود را یک قطاع سهمی می نامیم و می خواهیم عددی را به عنوان مساحت قطاع تعریف شده توسط وتر AB نسبت دهیم.

شکل ۱

ارشمیدس از خواص هندسی سهمی که در مطالعه علم مخروطات شناخته شده بود بهره می گیرد. ما اثبات خواص مورد نیاز را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم. امروزه با استفاده از هندسه تحلیلی اثبات این خواص سراسر است ولی شایان ذکر است که قدما این گزاره ها به روش ترکیبی مانند هندسه کلاسیک استخراج می کردند.

حکم ۱. برای هر وتر AB ، نقطه منحصر به فردی C روی کمان AB وجود دارد که مماس بر سهمی

^۱ Method of Exhaustion

در آن نقطه موازی AB است. (اثبات: تمرین).

نقطه C را رأس منسوب به وتر AB می‌نامند. حال فرض می‌کنیم D رأس منسوب به وتر AC باشد (شکل ۱). حکم زیر کلید محاسبه ارشمیدس است.

حکم ۲. مساحت مثلث BDC یک هشتم مساحت BCA است. (اثبات: تمرین).

حال توجه کنید که متناظر به وتر BC نیز رأس E پدید می‌آید و مساحت مثلث AEC نیز یک هشتم مساحت مثلث BCA است. به همین ترتیب نسبت به هر یک از چهار وتر AE ، EC ، CD و DB یک رأس اختیار می‌شود و چهار مثلث ساخته می‌شوند که مساحت هر یک $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$ مساحت ACB است. روش افنا عبارت از این است که این فرایند را به همین ترتیب ادامه دهیم و هر بار مجموع مساحت‌های مثلث‌های پدید آمده را اضافه کنیم. حد این مجموع‌ها را به عنوان مساحت قطاع سهمی تعریف می‌شود. اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم، مجموع مساحت‌های دو مثلث AEC و CDB برابر $\frac{1}{8}S + \frac{1}{8}S = \frac{1}{4}S$ است. به همین ترتیب در مرحله بعد مجموع مساحت‌های چهار مثلث برابر می‌شود با $\frac{1}{16}S = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}S$. اگر این فرایند بلا انقطاع ادامه یابد با چنین مجموعی نامتناهی روبرو هستیم:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \frac{1}{64}S + \frac{1}{256}S + \dots = S\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots\right)$$

مجموع این سری هندسی برابر است با $\frac{4}{3}S$ ، یعنی مساحت قطاع سهمی که توسط AB تعریف می‌شود $\frac{4}{3}$ مساحت مستطیل ACB است که C رأس مربوط به وتر AB می‌باشد.

روشن است که محاسبه بالا مبتنی بر دانش دقیق خواص هندسی سهمی است. مشکل قدما در توسعه این روش وابستگی آن به این اطلاعات خاص بود که از آن اجتنابی تصور نمی‌شد. با ابداع هندسه تحلیلی و بیان منحنی‌ها به صورت اجتماعی از نمودار توابع که تعریف تحلیلی دارند، در قرون ۱۶ و ۱۷ میلادی روش افنا به صورت حساب انتگرال تکامل یافت و رابطه آن با حساب دیفرانسیل تدریجاً کشف شد. رهیافت کلی محاسبه مساحت (و در واقع تعریف آن!) برای یک ناحیه محصور به یک منحنی (مانند شکل ۲) این خواهد بود که ناحیه را به اجزایی تجزیه کنیم که هر جزء عبارت از

ناحیه محصور به نمودار یک تابع، بازه دامنۀ آن تابع و خطوط راست عمود بر محور

شکل ۲

دامنۀ تعریف تابع باشد. در شکل ۲ یک بازه موازی محور افقی به عنوان دامنۀ دو تابع و یک بازه موازی محور y به عنوان بازه تعریف تابع سوم در نظر گرفته شده است. به طور کلی هدف ما این خواهد بود که بتوانیم به ناحیه‌ای مانند ناحیه شکل ۳ که محصور به نمودار $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، بازه $[a, b]$ و دو خط راست $x = a$ و $x = b$ است. عددی را به عنوان مساحت نسبت دهیم. با این انگیزه به تشریح حساب انتگرال می‌پردازیم.

شکل ۳

بازه بسته و کراندار $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. مقصود از یک افراز $[a, b]$ انتخاب دنباله‌ای متناهی $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از نقاط $[a, b]$ است به طوری که

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

بدین ترتیب هر افراز، بازه $[a, b]$ را به زیربازه‌هایی تجزیه می‌کند که فقط در نقاط انتهایی اشتراک دارند. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار باشد، یعنی اعداد حقیقی A و B وجود داشته باشند که:

$$A \leq f(x) \leq B \quad x \in [a, b] \text{ هر}$$

در این صورت اگر دامنۀ f را به $[x_{i-1}, x_i]$ محدود کنیم، مقادیر f روی $[x_{i-1}, x_i]$ دارای کران بالایی و کران پایین هستند. بنابراین طبق اصل تمامیت اعداد حقیقی، مجموعه مقادیر f روی $[x_{i-1}, x_i]$ دارای کوچکترین کران بالایی M_i و بزرگترین کران پایینی m_i است. دو مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i, \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i$$

$L(f, P)$ را مجموع ریمان پایینی f نسبت به افراز P و $U(f, P)$ را مجموع ریمان بالایی f نسبت به P می‌نامیم. وقتی f مثبت باشد، $L(f, P)$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های از بالا محصور به نمودار

f و $U(f, \mathcal{P})$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های از پایین محصور به نمودار f است (شکل ۴). می‌توان $L(f, \mathcal{P})$ را یک تقریب پایینی برای مساحت زیر نمودار و $U(f, \mathcal{P})$ را یک تقریب بالایی برای همین مساحت تصور کرد.

شکل ۴

چون $m_i \leq M_i$ ، طبعاً داریم:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) \quad (۱)$$

اگر $\mathcal{P}' = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$ یک افراز دیگر $[a, b]$ باشد، می‌گوییم \mathcal{P}' یک نظریف \mathcal{P} است در صورتی که هر x_i یکی از x'_j ها باشد، $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$.

(۱-۱) گزاره. اگر \mathcal{P}' یک نظریف \mathcal{P} باشد داریم:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P}) \quad (۲)$$

اثبات. فرض کنید S و S' دوزیرمجموعه ناتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشند، M و m به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی برای S ، و M' و m' به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی برای S' . حال اگر $S \subset S'$ نتیجه می‌شود که:

$$m' \leq m \leq M \leq M' \quad (۳)$$

زیرا که هر کران بالایی برای S' یک کران بالایی برای S است و هر کران پایینی برای S' یک کران پایینی برای S است. بنابراین اگر \mathcal{P}' یک نظریف \mathcal{P} باشد، از آنجا که هر زیربازه I' مربوط به \mathcal{P}' زیرمجموعه‌ای از یک زیربازه I مربوط به \mathcal{P} است، کوچکترین کران بالایی f روی I' کوچکتر یا مساوی کوچکترین کران بالایی f روی I است و بزرگترین کران پایینی f روی I' بزرگتر یا مساوی بزرگترین کران پایینی f روی I است. حکم از این نکته نتیجه می‌شود. \square

(۱-۲) گزاره. اگر P و Q دو افراز $[a, b]$ باشند و $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار، آنگاه

$$L(f, P) \leq U(f, Q) \quad (۴)$$

اثبات. برای مشاهده این مطلب الحاق دو افراز P و Q را در نظر می‌گیریم که در واقع اجتماع مرتب شده نقاط P و Q است، یعنی اگر $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ و $Q = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ ، الحاق P و Q ، که به $P \vee Q$ نمایش داده می‌شود، اجتماع x_i ها و y_j هاست که به ترتیب صعودی منظم شده باشد. واضح است که $P \vee Q$ نظریف P و نیز نظریف Q است، پس طبق گزاره (۱-۱) :

$$L(f, P) \leq L(f, P \vee Q) \quad , \quad U(f, P \vee Q) \leq U(f, Q)$$

از طرفی دیگر بنابر (۱)، $L(f, P \vee Q) \leq U(f, P \vee Q)$ ، پس حکم نتیجه می‌شود. □
حال مجموعه کلیه مجموع‌های ریمان پایینی برای $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را نسبت به همه افرازهای ممکن در نظر بگیرید. اگر B یک کران بالایی برای f روی $[a, b]$ باشد، هر یک از این مجموع‌های ریمان از $M(b-a)$ کوچکتر است، پس این مجموعه ناتهی دارای کوچکترین کران بالایی است که آن را به $\int_a^b f$ نمایش می‌دهیم و انتگرال پایینی f روی $[a, b]$ می‌نامیم. به همین ترتیب اگر A یک کران پایینی برای f روی $[a, b]$ باشد، $A(b-a)$ یک کران پایینی برای مجموعه کلیه مجموع‌های ریمان بالایی برای f است، پس مجموعه مجموع‌های ریمان بالایی دارای بزرگترین کران پایینی است که به $\overline{\int_a^b f}$ نمایش می‌دهیم و انتگرال بالایی f می‌نامیم. چون طبق (۱-۲) هر مجموع ریمان پایین کوچکتر یا مساوی هر مجموع ریمان بالایی است نتیجه می‌شود که:

$$\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \quad (۵)$$

(دقیقاً چرا؟: تمرین). به تعبیری می‌توان $\overline{\int_a^b f}$ را بهترین تقریب بالایی برای مساحت زیر نمودار و $\int_a^b f$ را بهترین تقریب پایینی برای مساحت زیر نمودار f تصور کرد. در صورتی که $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$ ، تابع کراندار $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را انتگرال‌پذیر (به مفهوم ریمان) می‌نامیم و مقدار مشترک را به $\int_a^b f$ نمایش می‌دهیم.

(۳-۱) گزاره. تابع کراندار $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $e > 0$ ، افرازی \mathcal{P} از $[a, b]$ وجود داشته باشد که:

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

اثبات. فرض کنید به ازای هر $e > 0$ ، افرازی \mathcal{P} با شرط فوق وجود داشته باشد. از آنجا که

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq U(f, \mathcal{P})$$

نتیجه می گیریم که برای هر $e > 0$ داریم:

$$\overline{\int_a^b f} - \int_a^b f < e$$

چون $e > 0$ را می توان به دلخواه کوچک گرفت، تساوی $\int_a^b f$ و $\overline{\int_a^b f}$ نتیجه می شود.

بالعکس فرض کنید f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است، یعنی $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$. چون $\int_a^b f$ کوچکترین کران بالایی مجموع های ریمان پایینی است، برای هر $e > 0$ ، افراز \mathcal{P} وجود دارد که

$$\int_a^b f - L(f, \mathcal{P}) < \frac{e}{4}$$

به همین ترتیب افرازی \mathcal{Q} از $[a, b]$ یافت می شود که:

$$U(f, \mathcal{Q}) - \overline{\int_a^b f} < \frac{e}{4}$$

ولی $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$ پس

$$U(f, \mathcal{Q}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

حال $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ، الحاق \mathcal{P} و \mathcal{Q} ، تعریفی از \mathcal{P} و \mathcal{Q} است، پس طبق گزاره ۱-۱ داریم

$$U(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - L(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) < e$$

□

و حکم به اثبات می رسد.

مثال ۱. تابع $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x: \text{گویا} \\ 0 & x: \text{ناگویا} \end{cases}$$

اگر \mathcal{P} یک افراز $[0, 1]$ باشد، در هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ به طول ناصفر هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند، پس $m_i = 0$ و $M_i = 1$. بنابراین

$$U(f, \mathcal{P}) = 1, \quad L(f, \mathcal{P}) = 0$$

چون این روابط برای هر افراز \mathcal{P} برقرارند، داریم:

$$\overline{\int_a^b f} = 1, \quad \underline{\int_a^b f} = 0$$

بدین ترتیب f انتگرال‌پذیر نیست.

مثال ۲. سهمی $y = kx^2$ را روی بازه $[0, c]$ ، $c > 0$ ، در نظر بگیرید. افراز \mathcal{P}_n را با تقسیم $[0, c]$ به n بازه با طول‌های برابر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{P}: 0 = x_0 < x_1 = \frac{c}{n} < x_2 = 2\frac{c}{n} < \dots < x_n = n\frac{c}{n} = c$$

چون f روی $[0, c]$ صعودی است، برای زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ داریم:

$$m_i = k\left(\frac{i-1}{n}c\right)^2, \quad M_i = k\left(\frac{i}{n}c\right)^2$$

پس

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \frac{c}{n} k \left(\frac{i-1}{n}c\right)^2 = \frac{c^3}{n^3} k \sum_{i=1}^n (i-1)^2$$

و به همین ترتیب:

$$U(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{c}{n} k \left(\frac{i}{n}c\right)^2 = \frac{c^3}{n^3} k \sum_{i=1}^n i^2$$

بنابراین:

$$U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \frac{c^3 k}{n}$$

حال اگر $e > 0$ داده شده باشد با بزرگ گرفتن n می توان تضمین کرد که $\frac{c^2 k}{n} < e$ ، پس طبق گزاره ۱-۳، f روی $[0, c]$ انتگرال پذیر است. برای محاسبه $\int_a^b f$ ، نشان می دهیم که $L(f, P_n)$ و $U(f, P_n)$ هر دو به یک حد میل می کنند وقتی $n \rightarrow +\infty$ ، پس این حد مشترک لاجرم انتگرال f روی $[0, c]$ است. با استفاده از فرمول $\sum_{i=1}^p i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ داریم:

$$L(f, P_n) = (c^2 k) \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}, \quad U(f, P_n) = (c^2 k) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

وقتی $n \rightarrow +\infty$ ، هر دو عبارت بالا به $\frac{1}{3}c^2 k$ میل می کنند که مقدار $\int_0^c f$ است. این همان مقداری است که از محاسبه ارشمیدس به دست می آید زیرا بنابر تقارن مساحت زیر نمودار روی $[-c, c]$ برابر $\frac{2}{3}c^2 k$ است، پس حجم قطاع مربوط برابر $\frac{4}{3}c^2 k = \frac{2}{3}c^2 k - \frac{2}{3}c^2 k$ می شود که چهار سوم مساحت مثلث با رئوس $(-c, kc^2)$ ، $(0, 0)$ و (c, kc^2) است.