دنبالهٔ عددی و سری عددی (۱)

وقتی در جلسات اول مفهوم عدد حقیقی را مطرح کردیم، اشاره داشتیم به اینکه عملیات جبری را می‌توان همانند عملیاتی که برای اعداد گویا مطرح می‌شود به همهٔ اعداد حقیقی تعمیم داد. در واقع اگر چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را به صورت هندسی مطرح کنیم هیچ تفاوتی میان اعداد گویا و ناگویا مشاهده نمی‌شود. در شکل ۱ این چهار عمل نمایش داده شده‌اند. فرض کنید دو عدد حقیقی مثبت a و b داده شده‌اند. نقاط A و B در سمت راست محور حقیقی را طوری می‌گیریم که پاره‌خط‌های OA و OB طول‌های به ترتیب a و b داشته باشند. حال اگر دهانهٔ پرگاری را به اندازه OA باز کنیم و به مرکز B و این شعاع دایره‌ای رسم کنیم، نقطهٔ تقاطع دایره در سمت راست نقطهٔ B، یعنی نقطهٔ C، عدد $a+b$ را نمایش می‌دهد (یعنی طول پاره‌خط OC برابر $a+b$ است) و نقطهٔ تقاطع در سمت چپ B، یعنی نقطهٔ D، نمایشگر عدد $a-b$ است. برای عمل ضرب دو نیم‌خط از O رسم می‌کنیم. روی یک نیم‌خط نقاط U و B را طوری می‌گیریم که طول OU برابر واحد و طول OB برابر b باشد. روی نیم‌خط دیگر نقطهٔ A به نحوی اختیار می‌کنیم که طول OA برابر a باشد. حال اگر خط راستی از B به موازات UA رسم کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط دیگر، یعنی C طوری است که طول OC برابر ab است (بنابر تشابه مثلث‌ها). برای ترسیم نسبت $\frac{a}{b}$ کافی است بدانیم چگونه باید $\frac{1}{b}$ را رسم کنیم. روی دو نیم‌خط متقاطع در O، نقاط U و V را طوری بگیرید که OU و OV هر دو طول واحد داشته باشند. نقطهٔ B را روی نیم‌خط OU طوری می‌گیریم که طول OB برابر b باشد. در این صورت خطی که از U به موازات BV رسم شود خط دیگر را در نقطه‌ای B' قطع می‌کند که فاصله‌اش از O برابر $\frac{1}{b}$ است (مجدداً تشابه). روش معمول دیگری این است که دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز O رسم

می‌کنیم. روی نیم‌خطی ساطع از O، نقطهٔ B را طوری می‌گیریم که طول OB برابر b باشد. نخست فرض کنید $۱ < b$، پس B خارج دایره باشد. در این صورت از B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ تماس بر OB عمود می‌کنیم. فاصلهٔ پای عمود، B'، از O برابر $\frac{۱}{b}$ است (مجدداً تشابه مثلث‌ها). برای $۱ > b$، با مراجعه به همان شکل معکوس فرایند بالا را در نظر می‌گیریم.

هرگاه یکی یا هر دوی a و b منفی باشند، می‌توان با قرینه‌گیری مناسب کماکان از روش‌های بالا استفاده کرد. این نیز قابل ذکر است که هرگاه پاره‌خط‌هایی به طول a و b داده شده باشند، ترسیمات هندسی فوق به کمک پرگار و خط‌کش غیرمدرج قابل اجرا هستند.

حال می‌خواهیم چهار عمل اصلی را به صورت حسابی یا جبری توصیف کنیم. فرض کنید $a = a_۰/a_۱a_۲a_۳\ldots$ و $b = b_۰/b_۱b_۲b_۳\ldots$ دو عدد مثبت باشند. چگونه باید $a+b$ را محاسبه کرد؟ اگر بسط اعشاری a و b مختومه باشند روش محاسبهٔ $a+b$ را در دبستان آموخته‌ایم. به طور کلی اگر a و b گویا باشند، آنها را به صورت $a = \frac{m}{n}$ و $b = \frac{m'}{n'}$ می‌نویسیم، که در اینجا n', m', n, m عدد صحیح مثبت هستند، و داریم $a+b = \frac{nm'+n'm}{nn'}$. مشکل وقتی است که a و b ناگویا باشند. روشن است که الگوریتم دبستانی جمع اعشاری از سمت راست در اینجا جوابگو نیست زیرا که در سمت راست این اعداد مختومه نمی‌شوند و نقطهٔ شروعی وجود ندارد.

$$\begin{array}{cccccc} & a_۰ & / & a_۱ & a_۲ & a_۳ \;\ldots \\ + & b_۰ & / & b_۱ & b_۲ & b_۳ \;\ldots \\ \hline & & & ? & & \end{array}$$

ولی می‌توان یک راه تقریب عملی به صورت زیر ارائه کرد. اگر هر یک از دو عدد بالا رقم پس از n رقم اعشار مختومه کنیم عددهای $a' = a_۰/a_۱\ldots a_n$ و $b' = b_۰/b_۱\ldots b_n$ به‌دست می‌آیند که تقریب‌های a و b هر یک با خطای کوچکتر یا مساوی $\frac{۱}{۱۰^n}$ هستند. حال اگر a' و b' را به طریق عادی جمع کنیم حاصل حداکثر $\frac{۱}{۱۰^n} \times ۲$ با مجموع $a+b$ فاصله دارد. با بزرگ گرفتن n می‌توان $\frac{۲}{۱۰^n}$، یعنی حداکثر خطای حاصل جمع، را به دلخواه کوچک کرد. اکنون می‌توان به سادگی نشان داد که $a+b$ در واقع کوچکترین کران بالایی این تقریب‌هاست. در مورد حاصلضرب و خارج‌قسمت (به فرض مخرج $\neq ۰$) می‌توان به روش مشابهی از کسرهای مختومه برای تقریب استفاده کرد ولی در این دو مورد اگر $|a-a'| \le \frac{۱}{۱۰^n}$ و $|b-b'| \le \frac{۱}{۱۰^n}$، تخمین خطای حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت، یعنی $|ab-a'b'|$ و

$|\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}|$ به این سادگی نیست. در زیر مفهومی کارساز و کلی‌تر، زیر عنوان "همگرایی دنباله" مطرح می‌کنیم که در برگیرنده همهٔ این موارد است و کاربردهای فراوان دیگری نیز خواهد داشت.

مقصودمان از یک قطعه از اعداد صحیح مجموعه‌ای به شکل زیر متشکل از اعداد صحیح است:

$$\{k, k + ۱, k + ۲, \ldots\}$$

یعنی قطعه شامل همهٔ اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی k است. اگر S یک قطعه از اعداد صحیح باشد و E یک مجموعه، هر تابع $a : S \longrightarrow E$ را یک دنباله (در E) می‌نامند. بدین ترتیب a به هر عضو n از S، عنصری $a(n)$ از E نسبت می‌دهد. معمولاً به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n و تصویر تابع a را به ترتیب صعودی ردیف می‌کنیم:

$$a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, \ldots \qquad (۱)$$

نماد $(a_i)_{i=k}^{\infty}$ نیز برای نمایش دنباله به‌کار می‌رود. بدین ترتیب معمولاً به جای اینکه دنباله را یک تابع از S به E تلقی کنیم، دنباله را مجموعه‌ای از عناصر E تلقی می‌کنیم که به ترتیب از k شماره‌گذاری شده است. ضمناً لزومی ندارد که a_i ها، به عنوان اعضای E، متمایز باشند، یا به زبان تابعی، تابع a لزوماً یک به یک فرض نمی‌شود.

(۶—۱) چند مثال

(۶—۱—۱) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n = \frac{۱}{n}$$

این یک دنباله از اعداد حقیقی است که به سوی نقطهٔ ۰ تجمع می‌کند.

(۶—۱—۲) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$a_n = n + \frac{۱}{n}$$

تعریف می‌شود دنباله‌ای دیگر از اعداد حقیقی است که با افزایش اندیس n به تدریج بزرگتر می‌شود و هیچ‌جا تجمع نمی‌کند.

(٦—١—٣) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a_n = \frac{i^n}{n}$$

چند جملهٔ اول این دنباله عبارتند از:

$$i, \frac{-۱}{۲}, \frac{-i}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{i}{۵}, \frac{-۱}{٦}, \ldots$$

این اعداد به صورت چرخشی چهار نیم محور صفحه را متناوباً سیر می‌کنند و به سوی ۰ تجمع می‌کنند (شکل ۲).

(٦—١—۴) $\mathcal{L}$ را مجموعهٔ خطوط راست در صفحه می‌گیریم و تابع $l : \{۰, ۱, ۲, \ldots\} \longrightarrow \mathcal{L}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $l(n)$ یا l_n خط راست گذرا از ۰ با شیب n است، یعنی خط راست $y = nx$ (شکل ۳). این یک دنبالهٔ خطوط راست است که به سوی محور y میل می‌کند.

(٦—١—۵) $\mathcal{F}$ را مجموعهٔ تابع‌های از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ می‌گیریم و تابع $c : \{۱, ۲, \ldots\} \longrightarrow \mathcal{F}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $c(n)$ تابع $\cos nx$ است (شکل ۴). هر c_n یک تابع تناوبی است با دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{n}$.

در این مرحله ما فقط به دنباله‌های عددی می‌پردازیم یعنی دنباله‌های $a : S \longrightarrow E$ که در آن E معمولاً $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است. بحث کلی را برای دنباله‌های اعداد مختلط می‌نویسیم و از آنجا که $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ تلقی می‌شود، می‌توان دنباله‌های اعداد حقیقی را نیز به عنوان دنباله‌هایی از اعداد مختلط در نظر گرفت. در بعضی مثال‌ها مانند (٦—١—١) و (٦—١—٣) می‌بینیم که با افزایش اندیس n، اعضای دنباله به نقطهٔ خاصی نزدیک می‌شوند. اگر دقت دید یا تشخیص دستگاه‌های مشاهده مثلاً $e > ۰$ باشد، آنگاه اگر اعضای دنباله در فاصله‌ای کوچکتر از e نسبت به نقطهٔ تجمع قرار گیرند، آنگاه نمی‌توان آنها را از نقطهٔ تجمع تمیز داد، انگار که دنباله به حالت سکون رسیده است. این مفهوم را "همگرایی" می‌نامیم و به شکل دقیق زیر تعریف می‌کنیم:

(٦—٢) **تعریف.** دنبالهٔ $a : S \longrightarrow \mathbb{C}$ را به نقطهٔ a^* همگرا می‌نامیم یا می‌گوییم a_n به a^* میل می‌کند، (و می‌نویسیم $a_n \longrightarrow a^*$، یا $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$)

در صورتی که برای هر $e > 0$، عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد که هرگاه $n \geq N$، آنگاه $|a_n - a^*| < e$.

توجه کنید که طبق این تعریف، هر درجهٔ تشخیص $e > 0$ که منظور شود، قرار است مرحله‌ای N، علی‌الاصول وابسته به e، وجود داشته باشد که از آن مرحله به بعد، a_n ها از a^* غیر قابل تشخیص باشند.

(٦—٣) چند مثال

(٦—٣—١) به مثال ٦—١—١ توجه کنید. در اینجا داریم $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ زیرا که اگر $e > 0$ منظور شود، با گرفتن عدد صحیح N بزرگتر از $\frac{1}{e}$، یعنی $\frac{1}{N} < e$، داریم: هرگاه $n \geq N$، آنگاه:

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < e$$

(٦—٣—٢) در مثال ٦—٣—٣، دنباله به 0 همگراست زیرا که برای هر $e > 0$ داده شده، اگر مجدداً N را بزرگتر از $\frac{1}{e}$ می‌گیریم. برای $n \geq N$ داریم:

$$|\frac{i^n}{n} - 0| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < e$$

(٦—٣—٣) فرض کنید $c = c_0/c_1c_2c_3\ldots$ یک عدد مثبت به صورت بسط اعشاری باشد. دنباله C_n را به صورت بسط‌های مختومهٔ این عدد تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$C_0 = c_0 \quad , \quad C_1 = c_0/c_1 \quad , \quad C_2 = c_0/c_1c_2 \quad , \quad \ldots$$

ادعا می‌کنیم $C_n \longrightarrow c$. فرض کنید $e > 0$ داده شده باشد. عدد N را طوری می‌گیریم که $\frac{1}{10^N} < e$ برای $n \geq N$ داریم:

$$|c - C_n| = 0/0\ldots0c_{n+1}c_{n+2}\ldots \leq \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^N} < e$$

(٦—٣—٤) مثال فوق را می‌توان بدین صورت تعمیم داد. فرض کنید $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ و مجموعهٔ $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ دارای کران بالایی باشد.

نشان می‌دهیم a_n به کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ فوق میل می‌کند. نخست می‌دانیم که طبق اصل تمامیت برای مجموعهٔ $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ کوچکترین کران بالایی a^* وجود دارد. حال هر $e > 0$ که منظور شود، به بازه $]a^* - e, a^* + e[$ نگاه می‌کنیم. اگر هیچ a_N در این بازه قرار نگیرد، از آنجا که a^* یک کران بالایی برای مجموعهٔ a_n هاست، باید داشته باشیم $a_n \leq a^* - e$ برای هر n. بنابراین هر عدد بین $a^* - e$ و a^* یک کران بالایی برای مجموعه، کوچکتر از a^*، خواهد بود که خلاف این فرض است که a^* کوچکترین کران بالایی برای $\{a_0, a_1, \ldots\}$ می‌باشد. پس N وجود دارد که a_N در $]a^* - e, a^* + e[$ قرار می‌گیرد. البته $a^* - e < a_N \leq a^*$. از آنجا که دنبالهٔ (a_n) غیرنزولی است و هر a_n باید کوچکتر از کران بالایی a^* یا مساوی آن باشد، برای هر $n \geq N$ داریم:

$$a^* - e < a_N \leq a_n \leq a^*$$

بنابراین برای هر $n \geq N$، نامساوی $|a_n - a^*| < e$ برقرار است.

اکنون به مسألهای که در آغاز این بخش مطرح شد باز می‌گردیم، یعنی روش محاسبه مجموع، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت اعداد حقیقی با تقریب مختومه ساختن را بررسی می‌کنیم. گزاره زیر در واقع کلی‌تر از این نیاز خاص است و بعداً موارد استفاده بسیار دیگری نیز خواهد داشت.

(۶–۴) **گزاره.** فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=k}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد مختلط باشند که $a_n \longrightarrow a^*$ و $b_n \longrightarrow b^*$. در این صورت:

الف) اگر دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = a_n + b_n$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow a^* + b^*$.

ب) اگر دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = a_n \cdot b_n$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow a^* \cdot b^*$.

ج) اگر مضافاً فرض کنیم $b_n \neq 0$ برای هر n و $b^* \neq 0$ و دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow \frac{a^*}{b^*}$.

اثبات. (الف) فرض کنید $e > 0$ داده شده باشد، N را طوری جستجو می‌کنیم که $n \geq N$ نتیجه دهد $|(a_n + b_n) - (a^* + b^*)| < e$. اگر بتوانیم N را طوری تأمین کنیم که $|a_n - a^*| < \frac{e}{2}$ و

$|b_n - b^*| < \frac{e}{2}$ هر دو به‌ازای $n \geq N$ برقرار شوند، بنابر نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a^* + b^*)| &= |(a_n - a^*) + (b_n - b^*)| \\ &\leq |a_n - a^*| + |b_n - b^*| \\ &< \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e \end{aligned}$$

ولی از آنجا که $a_n \longrightarrow a^*$، برای $\frac{e}{2} > 0$، عددی N_1 وجود دارد که $n \geq N_1$ نتیجه می‌دهد که $|a_n - a^*| < \frac{e}{2}$، و نیز از آنجا که $b_n \longrightarrow b^*$، برای $\frac{e}{2} > 0$، عددی N_2 وجود دارد که $n \geq N_2$ نتیجه می‌دهد $|b_n - b^*| < \frac{e}{2}$. پس با گرفتن $N = \max\{N_1, N_2\}$، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(ب) در اینجا نیز برای $e > 0$ داده شده، N را طوری جستجو می‌کنیم که $n \geq N$ نتیجه دهد $|a_n b_n - a^* b^*| < e$. در اینجا مرتبط ساختن $|a_n b_n - a^* b^*|$ با دو کمیت $|a_n - a^*|$ و $|b_n - b^*|$ به سادگی قسمت (الف) نیست، مثلاً حاصل‌ضرب $(a_n - a^*)(b_n - b^*)$ برابر است با $a_n b_n - a_n b^* - a^* b_n + a^* b^*$ که در آن دو جملهٔ زاید وجود دارد و به جای تفاضل $a_n b_n - a^* b^*$، مجموع این دو جمله ظاهر می‌شود. از حکم کمکی زیر استفاده می‌کنیم:

(٦—٥) لم. هرگاه (c_n) دنباله‌ای همگرا از اعداد مختلط باشد و $c_n \longrightarrow c^*$، آنگاه عددی $K > 0$ وجود دارد که $|c^*| \leq K$ و $|c_n| \leq K$ برای هر n (یا به اصطلاح، هر دنباله همگرا کراندار است).

اثبات ٦—٥. حول c^* یک گوی به شعاع ۱ در نظر می‌گیریم. طبق تعریف همگرایی، عددی N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|c_n - c^*| < 1$. بنابراین برای $n \geq N$ داریم $|c_n| < |c^*| + 1$ زیرا که هر نقطهٔ داخل گوی شعاع ۱ حول c^* باید نزدیکتر از $|c^*| + 1$ از 0 باشد. حال در بین تعداد متناهی عضو دنباله، قبل از مرحله N، که در بیرون گوی هستند، فاصلهٔ دورترین آنها به 0 را به R نمایش می‌دهیم. در این صورت $K = \max\{R, |c^*| + 1\}$ عدد مورد نظر است. □

اکنون به اثبات قسمت (ب) از گزاره باز می‌گردیم. عبارت $a_n b_n - a^* b^*$ را به صورت $a_n b_n - a_n b^* + a_n b^* - a^* b^*$ می‌نویسیم. پس داریم:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a^* b^*| &\leq |a_n b_n - a_n b^*| + |a_n b^* - a^* b^*| \\ &\leq |a_n||b_n - b^*| + |b^*||a_n - a^*| \end{aligned}$$

حال طبق لم ٦—٥، کرانی K_1 برای دنبالهٔ (a_n) و a^*، و نیز کرانی K_2 برای (b_n) و b^* وجود دارد،

پس:

$$|a_nb_n - a^*b^*| \leq K_1|b_n - b^*| + K_2|a_n - a^*| \qquad (2)$$

از آنجا که $a_n \longrightarrow a^*$، برای $\frac{e}{2K_2} > 0$، عددی N_1 وجود دارد که برای $n \geq N_1$ داریم $|a_n - a^*| < \frac{e}{2K_2}$، و نیز $b_n \longrightarrow b^*$ نتیجه می‌دهد که $\frac{e}{2K_1} > 0$، N_2 وجود دارد که برای $n \geq N_2$ داریم $|b_n - b^*| < \frac{e}{2K_1}$. با گرفتن $N = \max\{N_1, N_2\}$، برای $n \geq N$ هر دو نامساوی برقرارند و نتیجه می‌شود که $|a_nb_n - a^*b^*| < e$.

(ج) برای اثبات $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a^*}{b^*}$، کافی است نشان دهیم $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b^*}$ و از حکم (ب) برای حاصل‌ضرب $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ استفاده کنیم. در اینجا نیز یک لم کمکی مشابه و معکوس لم قبلی مورد نیاز است:

(٦—٦) لم. هرگاه (b_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط ناصفر باشد که $b_n \longrightarrow b^*$ و $b^* \neq 0$، آنگاه عددی $k > 0$ وجود دارد که $|b^*| \geq k$ و $|b_n| \geq k$ برای هر n.

اثبات. نقطهٔ b^* در فاصلهٔ مثبت $|b^*|$ از 0 قرار دارد. اگر گوی به شعاع $\frac{1}{2}|b^*|$ به مرکز b^* را در نظر بگیریم، چون $b_n \longrightarrow b^*$، N وجود دارد که برای $n \geq N$، $|b_n - b^*| < \frac{|b^*|}{2}$، پس $|b_n| > \frac{|b^*|}{2}$ برای $n \geq N$. برای تعداد متناهی عضو دنباله که ممکن است در خارج این گوی باشند، یعنی برای $n < N$، چون همه غیر صفر هستند، یکی کوچکترین فاصلهٔ مثبت ممکن از 0 را دارد. این فاصله را به r نمایش می‌دهیم. حال $\min\{r, \frac{|b^*|}{2}\}$ عدد k مورد نظر است. □

به اثبات (ج) باز می‌گردیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b^*}$. فرض کنید $e > 0$ داده شده باشد. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b^*}\right| &= \frac{|b_n - b^*|}{|b_n||b^*|} \\ &\leq \frac{|b_n - b^*|}{k^2} \quad \text{(طبق لم ٦—٦)} \end{aligned} \qquad (3)$$

حال چون $b_n \longrightarrow b^*$، برای $ek^2 > 0$، وجود دارد N که $n \geq N$ نتیجه می‌دهد $|b_n - b^*| < ek^2$، پس برای $n \geq N$ داریم $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b^*}\right| < e$. □

بدین ترتیب، برای محاسبه حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت دو عدد $a = a_0/a_1a_2a_3\ldots$ و $b = b_0/b_1b_2b_3\ldots$ می‌توان از تقریب‌های مختومهٔ $a = a_0/a_1\ldots a_n$ و $b = b_0/b_1\ldots b_n$ استفاده کرد

و با افزایش n به مقدار واقعی $a \cdot b$ نزدیکتر شد. اما در مورد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تفاوت عمده‌ای با مجموع وجود دارد. در مورد مجموع دیدیم که اگر a و b هر یک پس از n رقم بعد از ممیز مختومه شوند، خطای مجموع از $\frac{2}{10^n}$ بیشتر نیست، مستقل از این‌که اعداد a و b چه باشند. در مورد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت نمی‌توان احکام مشابهی صادر کرد بدین معنی که اگر $a = a_0/a_1 \ldots a_n$ و $b = b_0/b_1 \ldots b_n$ به عنوان تقریب‌های مختومهٔ a و b در نظر گرفته شوند، انحراف حاصل‌ضرب (و خارج‌قسمت، به ترتیب) این دو عدد از ab (و $\frac{a}{b}$، به ترتیب) فقط به n وابسته نیست، بلکه به اندازهٔ a و b نیز بستگی خواهد داشت. مثلاً در اثبات ۶—۴ (ب)، طبق (۲) داریم:

$$|a_n b_n - a^* b^*| \leq K_1 |b_n - b^*| + K_2 |a_n - a^*|$$

که در این‌جا K_1 یک کران بالایی برای دنبالهٔ (a_n) و K_2 یک کران بالایی برای دنبالهٔ (b_n) است. بدین ترتیب اگر قدرمطلق a_n ها به نسبت بزرگ باشد، باید $|b_n - b^*|$ را متناسباً کوچک انتخاب کرد، و همین طور برای b_n ها در رابطه با $|a_n - a^*|$، تا دقت مورد نظر حاصل شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

(۶—۷) مثال

(۶—۷—۱) دو عدد $a = 487/r_1 r_2 r_3 \ldots$ و $b = 3/s_1 s_2 s_3 \ldots$ داده شده‌اند. می‌خواهیم n را طوری اختیار کنیم که انحراف حاصل‌ضرب $a_n = 487/r_1 \ldots r_n$ و $b_n = 3/s_1 \ldots s_n$ از حاصل‌ضرب ab کوچکتر از 10^{-5} باشد. برای چنین n داریم $|a_n - a^*| \leq 10^{-n}$ و $|b_n - b^*| < 10^{-n}$، پس طبق (۲):

$$|a_n b_n - ab| \leq (K_1 + K_2) 10^{-n}$$

می‌توان $K_1 = 488$ و $K_2 = 4$ را به عنوان کران بالایی برای دنباله‌های مختومه در نظر گرفت، پس طرف راست نامساوی بالا کوچکتر از $10^{-n}(492)$ است. اگر بخواهیم این خط کوچکتر از 10^{-5} باشد، $n = 8$ کار می‌کند زیرا $10^3 > 492$ ولی $n = 7$ کار نمی‌کند. بدین ترتیب اگر هر یک از a و b

پس از هشت رقم پس از ممیز مختومه شوند، انحراف حاصل‌ضرب دو عدد مختومه از حاصل‌ضرب واقعی کوچکتر از 10^{-5} خواهد بود.

(۶—۷—۲) عدد $b = 0/032190990999\ldots$ را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد را پس از n رقم بعد از ممیز مختومه کنیم. تقریب را به b_n نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم n را طوری اختیار کنیم که اختلاف $\frac{1}{b_n}$ با $\frac{1}{b}$ کوچکتر از 10^{-3} باشد. طبق نامساوی (۳) در اثبات ۶—۶ داریم:

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| \leq \frac{1}{k^2}|b_n - b|$$

که در آن $k > 0$ عددی است که $|b_n| \geq k$ و $|b^*| \geq k$. در اینجا می‌توانیم k را برابر ۰/۰۳۲۱ اختیار کنیم و با توجه به این که $10^5 < (321)^2$ داریم $10^{-3} < (0/0321)^2$ و $\frac{1}{k^2} < 10^3$، پس

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| < (10^3)|b_n - b^*|$$

برای اینکه طرف راست کوچکتر از 10^{-3} باشد، کافی است که $|b_n - b^*|$ کوچکتر از 10^{-6} باشد، بنابراین معکوس ۰/۰۳۲۱۹۰ از b^{-1} انحرافی کوچکتر از 10^{-3} خواهد داشت. محاسبه با ماشین حساب به نسبت قوی نشان می‌دهد که:

$$(0/032190990999)^{-1} = 31/06459195$$
$$(0/032190)^{-1} = 31/06554830$$

اختلاف این دو عدد برابر ۰/۰۰۰۹۵۶۳۵ است که از 10^{-3} کوچکتر می‌باشد.