اعداد مختلط (۲)

از جلسهٔ قبل به یاد آورید که اگر زوج (r, θ) مختصات قطبی نقطهٔ (x, y) باشد، r فاصلهٔ نقطهٔ (x, y) از مبدأ است و θ زاویه‌ای است که از نیم‌خط مثبت محور x به نیم‌خط واصل از $\circ$ به (x, y) در نظر گرفته می‌شود. جهت مثلثاتی را برای θ مثبت و جهت عقربهٔ ساعت را منفی می‌گیریم. داریم

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \tag{۱}$$

در واقع هر زوج (r, θ) با $r \geq \circ$ که در روابط فوق صدق کند یک زوج مختصات قطبی برای $z = (x, y)$ منظور می‌شود. حال فرض کنید (r', θ') مختصات قطبی برای $z' = (x', y')$ باشد. طبق تعریف ضرب اعداد مختلط داریم:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (rr'\cos(\theta+\theta'), rr'\sin(\theta+\theta')) \\ &= (rr'\cos\theta\cos\theta' - rr'\sin\theta\sin\theta', rr'\sin\theta\cos\theta' + rr'\cos\theta\sin\theta') \\ &= (xx' - yy', xy' + x'y) \end{aligned}$$

پس

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) \tag{۲}$$

رابطه فوق بیان جبری حاصل‌ضرب دو عدد مختلط است و می‌توان از آن به عنوان تعریف حاصل‌ضرب استفاده کرد. با استفاده از (۲)، اکنون صحت قانون پخشی را تحقیق می‌کنیم. فرض

کنید $z'' = (x'', y'')$، در این صورت:

$$\begin{aligned} z \cdot (z' + z'') &= (x, y) \cdot (x' + x'', y' + y'') \\ &= (x(x' + x'') - y(y' + y''), x(y' + y'') + (x' + x'')y) \qquad \text{طبق (۲)} \\ &= ((xx' - yy') + (xx'' - yy''), (xy' + x'y) + (xy'' + x''y)) \\ &= (xx' - yy', xy' + x'y) + (xx'' - yy'', xy'' + x''y) \\ &= zz' + zz'' \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، را به عنوان زیرمجموعهٔ $\mathbb{C}$ متشکل از نقاط روی محور x در نظر می‌گیریم، یعنی x و $(x, ۰)$ یکی فرض می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, ۰) + (۰, y) \\ &= (x, ۰) + (۰, ۱)(y, ۰) \qquad \text{(طبق (۲))} \\ &= x + iy \end{aligned}$$

در واقع وقتی نقاط صفحه را به عنوان "عدد مختلط" تلقی می‌کنیم، نماد $x + iy$ معمول‌تر از (x, y) است. با توجه به قوانین جابجایی، شرکت‌پذیری و پخشی، کارکردن با $x + iy$ مانند کار کردن با اعداد معمولی است. فقط باید توجه داشت که همه جا $i \cdot i$ تبدیل به (-۱) می‌شود. مثلاً دستور (۲) را می‌توان به شکل زیر مجدداً تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} (x + iy) \cdot (x' + iy') &= (x + iy) \cdot x' + (x + iy) \cdot (iy') \\ &= xx' + iyx' + xiy' + (iy)(iy') \\ &= xx' + i(yx' + xy') + (i \cdot i)(yy') \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \end{aligned}$$

نمایش یک عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ را نمایش متعارفی یک عدد مختلط می‌نامند. x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می‌نامند. به طور کلی اعداد روی محور y، یعنی iy، اعداد موهومی خوانده می‌شوند. فاصله $z = x + iy$ از $\underline{۰}$ (که در مختصات قطبی به r نمایش می‌دادیم) قدرمطلق z خوانده می‌شود و به $|z|$ نمایش داده می‌شود. بنابراین

$$|z| = \sqrt{x^۲ + y^۲} \qquad (۳)$$

روابط زیر برای اعداد مختلط z و z' برقرارند:

$$|z+z'| \leq |z|+|z'| \qquad \text{(نامساوی مثلث)} \tag{۴}$$

$$|z \cdot z'| = |z||z'| \tag{۵}$$

رابطه (۵) نتیجه تعریف هندسی حاصل‌ضرب اعداد مختلط است و (۴) قاعده‌ای کلی برای جمع بردارهاست که می‌توان اینجا با به‌کار گرفتن تعریف جمع و (۳) تحقیق نمود (تمرین). معنی هندسی آن این است که مجموع دو ضلع مثلث بزرگتر یا مساوی ضلع سوم است.

نماد معمول و مفید دیگری نماد مزدوج است. برای $z = x+iy$، قرینهٔ آن نسبت به محور x، یعنی $x-iy$ به $\overline{z}$ نمایش داده شده و مزدوج z خوانده می‌شود. اثبات روابط زیر سرراست است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود:

$$\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'} \tag{٦}$$

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} \tag{۷}$$

همچنین توجه کنید که

$$z \cdot \overline{z} = |z|^{۲} \tag{۸}$$

بالاخره برای زاویهٔ قطبی θ، گاهی نماد $arg(z)$ به‌کار می‌رود. بدین ترتیب

$$z = |z|(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z))) \tag{۹}$$

حال اعداد مختلط z با $|z| = ۱$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

این عدد را به $cis(\theta)$ نیز نمایش می‌دهیم. از تعریف هندسی حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود که اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد داریم

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad (۱۰)$$

فرمول (۱۰) به فرمول دُمواور[1] معروف است و کاربردهای فراوانی دارد. قبل از ارائه بعضی از این کاربردها، خاطر نشان می‌کنیم که (۱۰) برای همهٔ اعداد صحیح n، اعم از مثبت، منفی و صفر، برقرار است. برای هر عدد مختلط z، $z^{۰}$ را طبق قرارداد برابر ۱ قرار می‌دهیم که رابطهٔ بالا را برقرار می‌کند. برای $n = -۱$، با توجه به تعریف معکوس ضربی داریم:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-۱} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

حال مقصود از z^{-n}، n: عدد صحیح مثبت، معکوس ضربی z^n است، پس:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))^{-۱} = \cos((-n)\theta) + i\sin((-n)\theta)$$

پس فرمول دموآور همچنان برقرار است.

کاربرد ۱: اتحادهای مثلثاتی

بعضی اتحادهای مثلثاتی را می‌توان به کمک فرمول دموآور به‌دست آورد. معمولاً باید عبارت مناسبی را به قسمت‌های حقیقی و موهومی تفکیک کرد. به عنوان نمونه فرض کنید می‌خواهیم $\cos ۳\theta$ و $\sin ۳\theta$ را برحسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بنویسیم. فرمول دموآور برای $n = ۳$ می‌دهد:

$$\begin{aligned}
\cos ۳\theta + i\sin ۳\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{۳} \\
&= \cos^{۳}\theta + ۳i\cos^{۲}\theta\sin\theta - ۳\cos\theta\sin^{۲}\theta - i\sin^{۳}\theta \\
&= (\cos^{۳}\theta - ۳\cos\theta\sin^{۲}\theta) + i(۳\cos^{۲}\theta\sin\theta - \sin^{۳}\theta)
\end{aligned}$$

[1] de Moivre

پس

$$\begin{cases} \cos ۳\theta = \cos^۳ \theta - ۳ \cos\theta \sin^۲ \theta \\ \sin ۳\theta = ۳ \cos^۲ \theta \sin\theta - \sin^۳ \theta \end{cases}$$

کاربرد ۲: ریشهٔ nـ ام اعداد مختلط

در جلسهٔ قبل ریشه‌های nـ ام واحد را محاسبه کردیم و دیدیم که ۱ دارای n ریشهٔ nـ ام متمایز است. این مطلب برای هر عدد مختلط $z \neq ۰$ درست است. از (۹) استفاده می‌کنیم و برای ساده نویسی $arg(z)$ را به θ نمایش می‌دهیم.

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$$

اگر w یک ریشهٔ nـ ام z باشد، داریم $w^n = z$. w را به صورت $|w|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ می‌نویسیم، پس:

$$|w|^n(\cos n\alpha + i \sin\alpha) = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$$

چون قدرمطلق طرف راست $|z|$ و قدرمطلق طرف چپ $|w|^n$ است داریم $|w|^n = |z|$، یعنی $|w|$ برابر $\sqrt[n]{|z|}$ است که مقصود از $\sqrt[n]{|z|}$ ریشه nـ ام مثبت عدد مثبت $|z|$ می‌باشد. با مساوی قراردادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف داریم

$$\begin{cases} \cos n\alpha = \cos\theta \\ \sin n\alpha = \sin\theta \end{cases}$$

پس

$$n\alpha = \theta + ۲k\pi \quad , \quad k: \text{عدد صحیح}$$

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{۲\pi}{n}$$

بنابراین ریشه‌های nـ ام z عبارتند از اعداد:

$$\sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\theta}{n} + k\frac{۲\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta}{n} + k\frac{۲\pi}{n})) \qquad k: \text{عدد صحیح}$$

توجه کنید که وقتی k کلیه اعداد صحیح را طی می‌کند فقط n مقدار متمایز در طرف راست پدید می‌آید زیرا که اگر مضربی صحیح از n به k افزوده شود، یک مضرب صحیح 2π به $\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}$ افزوده می‌شود که اثری بر کسینوس و سینوس ندارد، پس در واقع n ریشهٔ nــ ام برای $|z|$ به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n})+i\sin(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n})) \\ k=0,1,\ldots,n-1 \end{cases} \tag{11}$$

اکنون با توصیفی که از اعداد مختلط داشته‌ایم می‌توانیم بحث تاریخی در مورد حل معادلات درجه سوم را تکمیل کنیم. یادآوری می‌کنیم که برای حل معادلهٔ $t^3+pt+q=0$، t را به صورت $t=u+v$ نوشتیم و با افزودن یک رابطهٔ $3uv+p=0$ به این نتیجه رسیدیم که u, v باید ریشه‌های سوم جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$، یعنی ریشه‌های سوم دو مقدار:

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2} \tag{12}$$

باشند. ما در آغاز p و q را حقیقی گرفتیم ولی اگر p و q مختلط نیز باشند هیچ خللی در استدلال پدید نمی‌آید زیرا که همان قوانین جبری حاکمند و تا اینجا همهٔ ملاحظات در مورد معادلات درجه سوم با ضرایب مختلط نیز صادق است. توجه کنید که در (۱۲) زیر رادیکال ممکن است منفی شود ولی اکنون این مطلب مشکلی ایجاد نخواهد کرد زیرا که اعداد موهومی و مختلط نیز معنی پیدا کرده‌اند. حال هر یک از دو مقدار z در (۱۲) دارای سه ریشهٔ سوم است (به استثنای حالتی که یک جواب یا هر دو صفر شوند)، و در مجموع $3\times 3=9$ انتخاب برای زوج (u,v) به‌دست خواهد آمد، ولی نشان می‌دهیم که حداکثر سه انتخاب در اینجا در مسأله صدق می‌کند. توجه کنید که رابطهٔ کمکی $3uv+p=0$، یا $uv=-\frac{p}{3}$ باید برقرار باشد. یک جواب ممکن را به (u_1,v_1) نمایش دهید، پس

$$u_1=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}} \quad , \quad v_1=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

که در اینجا مقصود از $\sqrt[3]{}$ یک انتخاب ریشهٔ سوم است به طوری که $u_1v_1=-\frac{p}{3}$. حال هر انتخاب

دیگر ریشهٔ سوم برای جواب‌های (۱۱) باید به شکل

$$u = \omega_1 u_1 \quad , \quad v = \omega_2 u_2$$

باشد که ω_1 و ω_2 ریشه‌های سوم واحد هستند. برای این که $uv = -\frac{p}{3}$ همچنان برقرار بماند باید داشته باشیم $\omega_1\omega_2 = 1$. ولی سه ریشه واحد عبارتند از:

$$1$$

$$\omega = cis(\tfrac{2\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^2 = cis(\tfrac{4\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

و تنها سه امکان برای $\omega_1\omega_2 = 1$ وجود دارد که عبارتند از:

$$(\omega_1 = \omega_2 = 1) \quad , \quad (\omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega^2) \quad , \quad (\omega_1 = \omega^2, \omega_2 = \omega)$$

پس اگر (u_1, v_1) یک زوج قابل قبول باشد، زوج‌های قابل قبول دیگری عبارتند از $(\omega u_1, \omega^2 u_2)$ و $(\omega^2 u_1, \omega u_2)$، پس سه جواب

$$t = u_1 + v_1$$

$$t = \omega u_1 + \omega^2 u_2$$

$$t = \omega^2 u_1 + \omega u_2$$

برای معادلهٔ درجه سه $t^3 + pt + q = 0$ به‌دست می‌آید.

با این ابزار دو مثال آغاز جلسه ۳ را به طور کامل بررسی می‌کنیم:

مثال ۱. معادلهٔ $t^3 - 3t + 2 = 0$ را در نظر بگیرید. داریم $p = -3$، $q = 2$ و u, v ریشه‌های سوم دو مقدار

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$$

خواهند شد. بدین ترتیب هر یک از u, v باید یک ریشهٔ سوم (-1) انتخاب شود. ریشه‌های سوم (-1) طبق (۱۱) عبارتند از:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos\pi = -1 \quad , \quad \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

باید زوج‌هایی انتخاب شوند که حاصل‌ضربشان برابر $-\frac{p}{3}=1$ شود، مثلاً $u_1=v_1=-1$ بدین ترتیب سه ریشهٔ معادله عبارتند از:

$$-\omega^2-\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad , \quad -\omega-\omega^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad , \quad -1-1=-2$$

مثال ۲. معادلهٔ $t^3-6t+4=0$ را در نظر می‌گیریم که برای آن $p=-6$، $q=4$ و u,v هر یک ریشه‌های سوم دو مقدار

$$z=\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}=-2\pm 2i$$

هستند. این ریشه‌های سوم عبارتند از:

ریشه‌های سوم $-2+2i$:

$$\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}=1+i \quad , \quad \sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}) \quad , \quad \sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})$$

ریشه‌های سوم $-2-2i$:

$$\sqrt{2}cis\frac{5\pi}{12} \quad , \quad \sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}) \quad , \quad \sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3})=\sqrt{2}cis(-\frac{\pi}{4})=1-i$$

ملاحظه می‌کنیم که $(1+i)(1-i)=2=-\frac{p}{3}$، پس یک جواب عبارت است از $(1+i)+(1-i)=2$ و همهٔ جواب‌ها به شرح زیرند:

$$(1+i)+(1-i)=2$$

$$\omega(1+i)+\omega^2(1-i)=(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})(1+i)+(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})(1-i)=-1-\sqrt{3}$$

$$\omega^2(1+i)+\omega(1-i)=(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})(1+i)+(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})(1-i)=-1+\sqrt{3}$$

این مثال به خوبی نشان می‌دهد که چگونه با گذر از اعداد مختلط می‌توان به نتایجی با اعداد حقیقی رسید.