تابع‌های پیوسته: مثال‌های ابتدایی

مفهوم پیوستگی یا پایداری محاسبه در بخش قبل معرفی شد. خواننده ممکن است شباهتی میان استدلال‌هایی که در بحث مثال‌های ۹—۱—۲ و ۹—۱—۳ به‌کار رفت و استدلال همگرایی حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت دنباله‌های همگرا مشاهده کرده باشد. این شباهت تصادفی نیست. در واقع می‌توان پیوستگی را با ضابطه‌ای بر اساس همگرایی دنباله‌ها بیان کرد.

(۱۰—۱) گزاره. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است که S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است و $a \in S$. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ (a_n) از نقاط S که $a_n \longrightarrow a$ داشته باشیم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$.

دنباله همگرا به a را می‌توان سلسله‌ای از اندازه‌گیری‌های تدریجاً دقیق‌تر یک داده تلقی کرد و محتوای این گزاره این است که در صورت پیوستگی f در a، اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر ورودی a، نتیجه‌های دقیق‌تر خروجی را فراهم می‌آورند.

برهان. فرض کنید f در a پیوسته است و $a_n \longrightarrow a$. می‌خواهیم ثابت کنیم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$. پس برای $e > 0$ داده شده، می‌خواهیم N را طوری تعیین کنیم که اگر $n > N$، آنگاه $|f(a_n) - f(a)| < e$. بنابر پیوستگی f در a، برای همین e، δ وجود دارد که اگر $|x - a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(a)| < e$. حال چون $a_n \longrightarrow a$، برای این $\delta > 0$، N وجود دارد که اگر $n > N$، آنگاه $|a_n - a| < \delta$. بنابراین این N شرط مورد نظر را ارضاء می‌کند.

بالعکس فرض کنید برای هر دنبالهٔ (a_n) که $a_n \longrightarrow a$ داریم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$، نشان می‌دهیم f در a پیوسته است. فرض کنید $e > ۰$ داده شده باشد. اگر f در a پیوسته نباشد هیچ $\delta > ۰$ نمی‌توان یافت که برای هر نقطهٔ دامنه با $|x-a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < e$. مثلاً برای $\delta = ۱$، نقطه‌ای $x_۱$ در دامنه وجود دارد که $|x_۱ - a| < ۱$ و $|f(x_۱) - f(a)| \geq e$. به همین ترتیب برای هر عدد صحیح مثبت n، نقطه‌ای x_n در دامنه یافت می‌شود که $|x_n - a| < \frac{۱}{n}$ و $|f(x_n) - f(a)| \geq e$. حال توجه کنید که دنبالهٔ به‌دست آمده از نقاط دامنه، یعنی (x_n) به a همگراست. اگر $\rho > ۰$ داده شده باشد، عدد N را طوری می‌گیریم که $\frac{۱}{N} < \rho$، پس اگر $n > N$، داریم

$$|x_n - a| < \frac{۱}{n} < \frac{۱}{N} < \rho$$

پس $x_n \longrightarrow a$. طبق فرض باید داشته باشیم $f(x_n) \longrightarrow f(a)$، پس برای $e > ۰$ بالا، باید N وجود داشته باشد که $n > N$ نتیجه دهد $|f(x_n) - f(a)| < e$، در حالی که داریم $|f(x_n) - f(a)| \geq e$ برای هر n. این تناقض نشان می‌دهد که فرض ناپیوستگی f در a درست نیست. $\square$

به کمک گزارهٔ بالا می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تابع‌های پیوسته را نتیجه گرفت.

(۱۰–۲) گزاره. فرض کنید تابع‌های f و g دارای دامنهٔ مشترک تعریف S هستند، $a \in S$، و هر دو تابع در نقطهٔ a پیوسته‌اند. در این صورت:

الف) تابع $f + g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

ب) تابع $f \cdot g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

ج) فرض کنید مضافاً $g(a) \neq ۰$ و $S' = \{x \in S \mid g(x) \neq ۰\}$. در این صورت تابع $\frac{f}{g} : S' \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

برهان. اثبات این احکام همه به سادگی از احکام مشابه برای دنباله‌ها، گزارهٔ ۶—۴، و گزاره ۱۰—۱ نتیجه می‌شوند. به عنوان نمونه، اثبات (ج) را ارائه می‌کنیم. فرض کنید (x_n) دنباله‌ای در S' است که $x_n \longrightarrow a$، باید نشان دهیم $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$. بنابر پیوستگی f و g در نقطهٔ a داریم $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ و $g(x_n) \longrightarrow g(x)$ و $g(a) \neq 0$. طبق گزاره (۶—۴) نتیجه می‌شود که $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$. $\square$

به کمک گزارهٔ بالا می‌توان دستهٔ بزرگی از تابع‌های پیوسته را شناسایی کرد. نشان می‌دهیم تابع‌های گویا، یعنی تابع‌هایی که مقدار آنها برابر نسبت دو چندجمله‌ای است:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n} \qquad (1)$$

در هر نقطه که مخرج صفر نباشد پیوسته‌اند.

گام اول. هر تابع ثابت پیوسته است. این واضح است زیرا که برای هر $e > 0$، $|f(x) - f(a)| = 0 < e$ مستقل از x.

گام دوم. "تابع همانی"، یعنی تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x$، همه‌جا پیوسته است. برای $a \in \mathbb{R}$ و $e > 0$ داده شده، با گرفتن $\delta = e$، $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = e$.

گام سوم. هر تابع تک‌جمله‌ای، $f(x) = cx^k$ پیوسته است، زیرا که حاصل‌ضرب متوالی تابع‌های با مقدار c، x، …، x است.

گام چهارم. هر تابع چندجمله‌ای $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_p x^p$ پیوسته است زیرا که مجموع تابع‌های پیوسته گام سوم می‌باشد.

گام پنجم. در نقاطی که مخرج (۱) صفر نباشد. طبق قسمت (ج) گزاره (۱۰—۲) خارج‌قسمت دو تابع از نوع گام چهارم پیوسته است.

بدین ترتیب با اتکاء به گزارهٔ ۱۰—۲ می‌توان با استفاده از عملیات جبری از تابع‌های پیوستهٔ داده شده تابع‌های پیوستهٔ جدید ساخت. حربهٔ دیگری برای تولید تابع‌های پیوسته، استفاده از ترکیب

تابع‌های پیوسته است:

(۱۰−۳) گزاره. فرض کنید $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g: T \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع‌های داده شده‌اند، $a \in S$، $b = f(a)$ در T قرار دارد، f در a پیوسته است و g در b پیوسته. در این صورت تابع $g \circ f$ در a پیوسته است.

برهان. قبل از ارائه اثبات لازم است یادآوری کنیم که دامنهٔ تعریف $g \circ f$ زیرمجموعهٔ زیر از S است:

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

بدین ترتیب a در S' است و $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ معنی دارد. برای $e > 0$ داده شده، $\delta > 0$ را جستجو می‌کنیم به طوری که اگر $x \in S'$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < e$. نخست چون g در نقطهٔ $b = f(a)$ پیوسته است، $\delta' > 0$ وجود دارد که اگر $y \in T$ و $|y - b| < \delta'$، آنگاه $|g(y) - g(b)| < e$. حال چون f در a پیوسته است و $b = f(a)$، برای $\delta' > 0$ بالا، $\delta > 0$ متناظری وجود دارد که اگر $x \in S$ و $|x - a| < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(a)| < \delta'$. بالاخص چون $S' \subset S$، همین حکم برای عناصر x از S' که $|x - a| < \delta$ نیز برقرار است. بنابراین برای $x \in S'$ که $|x - a| < \delta$ داریم $|f(x) - f(a)| < \delta'$ و طبق انتخاب δ'، آنگاه $|g(f(x)) - g(f(a))| < e$ و پیوستگی $g \circ f$ در $x = a$ به اثبات می‌رسد. □

در اینجا ضمن یادآوری توابع مثلثاتی، خواص پیوستگی آنها را بررسی می‌کنیم. برای بیان "اندازه زاویه" به طریق زیر عمل می‌کنیم. دایرهٔ واحد $x^2 + y^2 = 1$ را در نظر بگیرید. همهٔ زوایا به صورت قطبی با رأس در مبدأ مختصات و نیم‌خط مثبت محور x به عنوان ضلع آغازی در نظر گرفته می‌شوند. اندازهٔ زاویه همواره به "رادیان" است، یعنی نسبت طول کمان مقابل به زاویه روی دایره، به شعاع دایره (که در اینجا واحد فرض شده است). از آنجا که این اندازه به صورت نسبت دو کمیت همجنس (هر دو طول) است، اندازهٔ زاویه به رادیان یک "عدد" حقیقی است. جهت مثلثاتی را جهت مثبت و جهت عقربهٔ ساعت را منفی قرارداد می‌کنیم. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی یک زاویه منظور می‌شود که به معنای طی کردن مسافتی روی محیط دایره (در جهت مثبت یا منفی، بسته به این که عدد داده شده مثبت یا منفی باشد) برحسب رادیان به اندازهٔ آن عدد است. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی θ، نقطهٔ

مشخصی روی دایرهٔ واحد به‌دست می‌آید. مختصهٔ x این نقطه را $\cos\theta$ و مختصهٔ y این نقطه را $\sin\theta$ می‌نامیم. توابع مثلثاتی دیگر به صورت $\tan = \frac{\sin}{\cos}$، $\cot = \frac{\cos}{\sin}$، $sec = \frac{1}{\cos}$ و $csc = \frac{1}{\sin}$ تعریف می‌شوند که البته دامنهٔ تعریف این چهار تابع حقیقی همهٔ $\mathbb{R}$ نیست، بلکه مجموعهٔ نقاطی از $\mathbb{R}$ است که در آن مخرج عبارت تعریف‌کننده صفر نباشد. اتحادهای مربوط توابع مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا مانند $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ همان طور که در بررسی اعداد مختلط دیدیم، همه از ضرب اعداد مختلط نتیجه می‌شوند و در اینجا دانسته فرض می‌شوند.

(۱۰–۴) گزاره. هر شش تابع مثلثاتی در دامنهٔ تعریف خود پیوسته‌اند.

برهان. کافی است پیوستگی $\sin$ و $\cos$ ثابت شود زیرا سایر توابع از ضرب و تقسیم این دو به‌دست می‌آیند و هر جا که مخرج صفر نباشد، طبق ۱۰–۲ پیوسته خواهند شد. به عنوان نمونه پیوستگی $\cos$ را ثابت می‌کنیم، پیوستگی $\sin$ مشابه است و نیز می‌توان با توجه به $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$، پیوستگی آن را به عنوان ترکیب دو تابع پیوسته $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$ و $\cos$ نتیجه گرفت. نخست نشان می‌دهیم کسینوس در 0 پیوسته است. چون $\cos 0 = 1$، باید ثابت کنیم که برای هر $e > 0$ داده شده، δ وجود دارد که هرگاه $|\theta| = |\theta - 0| < \delta$، آنگاه $|\cos\theta - 1| < e$. برای $|\theta|$ کوچک و مثبت طول OH برابر $\cos\theta$ است و برای $|\theta|$ کوچک منفی طول OK برابر $\cos\theta$ می‌باشد. بنابراین $|1 - \cos\theta| = 1 - \cos\theta$ برابر طول HT (یا KT) در حالت θ مثبت (به ترتیب در حالت θ منفی) می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویه AHT (به ترتیب BKT) طول ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از طول وتر کوچکتر است، یعنی $0 \le 1 - \cos\theta \le AT$ (به ترتیب $0 \le 1 - \cos\theta \le BT$). از طرفی دیگر طول وتر AT (به ترتیب BK) از طول کمان AT (به ترتیب BT) کوچکتر است، پس

$$0 \le 1 - \cos\theta \le |\theta| \qquad (2)$$

حال اگر برای $e > 0$ داده شده، δ را برابر e بگیریم، از $|\theta - 0| < \delta$ نتیجه شود که $|1 - \cos\theta| < e$ و پیوستگی $\cos$ در $\theta = 0$ به اثبات می‌رسد. به همین ترتیب پیوستگی $\sin$ در $\theta = 0$ را می‌توان ثابت کرد. در واقع توجه کنید که $|\sin\theta|$ برابر طول AH یا BK است که هر یک به دلیل مشابه فوق از $|\theta|$ کوچکتر

است، بنابراین

$$0 \le |\sin\theta| \le |\theta| \qquad (3)$$

یا $|\sin\theta - \sin 0| \le |\theta - 0|$ و مجدداً با گرفتن $\delta = e$ می‌توان پیوستگی $\sin$ در $\theta = 0$ را نتیجه گرفت.
حال نشان می‌دهیم $\cos$ در هر نقطه θ_0 پیوسته است. برای $e > 0$ داده شده، می‌خواهیم $\delta > 0$ پیدا کنیم که $|h| < \delta$ نتیجه دهد $|\cos(\theta_0 + h) - \cos\theta_0| < e$. داریم

$$\begin{aligned}
|\cos(\theta_0 + h) - \cos\theta_0| &= |\cos\theta_0 \cos h - \sin\theta_0 \sin h - \cos\theta_0| \\
&\le |\cos\theta_0 (\cos h - 1)| + |\sin\theta_0||\sin h| \\
&\le |\cos h - 1| + |\sin h| \qquad (\text{چون } |\cos\theta_0| \le 1, |\sin\theta_0| \le 1) \\
&\le 2|h| \qquad (\text{طبق (2) و (3)})
\end{aligned}$$

بنابراین با گرفتن $\delta = \frac{e}{2}$ حکم به اثبات می‌رسد. □

بدین ترتیب اکنون با توجه به گزاره‌های ۱۰–۲، ۱۰–۳ و ۱۰–۴، می‌توان در مورد پیوستگی انواع آمیزه‌های توابع گویا و توابع مثلثاتی بحث کرد.