

خواص تابع‌های پیوسته (۱)

در دو بخش قبل کوشش کردیم بر مفهوم پیوستگی به عنوان "پایداری محاسبه" تأکید کنیم و خواننده را از اینکه پیوستگی را نوعی اتصال و یکپارچگی نمودار تابع تلقی کند بر حذر داریم. در واقع اگر دامنه یک تابع پیوسته یک بازه باشد، نمودار تابع برخی خواص "اتصال و یکپارچگی" را خواهد داشت. بعضی احکام این بخش در تأیید این ادعا هستند.

(۱-۱۱) قضیه مقدار بی‌ی. فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، $f(a) = A$ و $f(b) = B$. در این صورت برای هر عدد حقیقی C بین A و B ، نقطه‌ای c در $[a, b]$ وجود دارد که $f(c) = C$.

اگر نمودار f را یک ریسمان فرض کنیم که بین نقطه (a, A) و (b, B) کشیده شده است، طبق حکم این قضیه، ریسمان برای گذر از ارتفاع A به ارتفاع B باید از هر ارتفاع بیابایی C نیز گذر کند که تأییدی بر به هم بستگی و یکپارچگی ریسمان است. در شکل ۱، نمودار تابع سه بار، به ازای مقادیر c_1 ، c_2 و c_3 در $[a, b]$ ، از ارتفاع C عبور می‌کند.

طبعاً برای اثبات این قضیه فقط می‌توان از تعریف تابع پیوسته و احکام دیگری که از این تعریف نتیجه شده باشد استفاده کرد. نخست حالتی خاص از این قضیه را به صورت زیر به اثبات می‌رسانیم، سپس نشان می‌دهیم حالت کلی به سادگی از این حالت خاص نتیجه می‌شود:

(۲-۱۱) (حالت خاص) فرض کنید $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که $g(0) < 0$ و $g(1) > 0$. در این صورت نقطه‌ای r در $[0, 1]$ وجود دارد که $g(r) = 0$.

برهان. نقاط بازه $[0, 1]$ در مبدای ۲ می نویسیم. بدین ترتیب هر عدد نمایشی به شکل $0/n_1 n_2 n_3 \dots$ دارد که در آن n_i برابر صفر یا یک است. بالاخص نقطه ۱ به صورت $0/1111 \dots$ نمایش داده می شود. ما در جستجوی نقطه ای

$$r = 0/r_1 r_2 r_3 \dots$$

هستیم که $g(r) = 0$. ارقام پس از ممیز چین عددی را متوالیاً محاسبه خواهیم کرد. $g(\frac{1}{4})$ را در نظر می گیریم. اگر $g(\frac{1}{4}) = 0$ ، عددی با خاصیت مطلوب در بازه $[0, 1]$ پیدا شده است و $\frac{1}{4} = 0/1000 \dots$ (طرف راست به مبدای ۲) جواب مورد نظر است. اگر $g(\frac{1}{4}) \neq 0$ ، یکی از دو حالت $g(\frac{1}{4}) > 0$ یا $g(\frac{1}{4}) < 0$ برقرار است. قرار می دهیم:

$$r_1 = \begin{cases} 0 & \text{اگر } g(\frac{1}{4}) > 0 \\ 1 & \text{اگر } g(\frac{1}{4}) < 0 \end{cases}$$

اگر $g(\frac{1}{4}) > 0$ بازه $[0, \frac{1}{4}]$ را I_1 می نامیم و از این پس جستجو را در این بازه ادامه می دهیم زیرا که همانند بازه اولیه $[0, 1]$ ، تابع در انتهای چپ این بازه منفی و در انتهای راست مثبت است. چون نمایش نقاط بازه $[0, \frac{1}{4}]$ در مبدای ۲ با رقم ۰ شروع می شود قرار دادیم $r_1 = 0$. همین طور اگر $g(\frac{1}{4}) < 0$ ، بازه $[\frac{1}{4}, 1]$ را I_1 خوانده و جستجو برای r را در این بازه ادامه می دهیم که g در انتهای چپ آن منفی و در انتهای راست آن مثبت است. چون نمایش نقاط این بازه در مبدای ۲ با رقم ۱ شروع می شود قرار دادیم $r_1 = 1$. در هر صورت حال به بازه I_1 توجه می کنیم و مجدداً این بازه را به دو زیربازه بسته چپ و راست تجزیه می کنیم. اگر نقطه میانی m_1 (مکان تجزیه) باشد به علامت $g(m_1)$ نگاه می کنیم. اگر $g(m_1) = 0$ ، ویژگی مورد نظر را دارد و کار تمام است، در غیر این صورت $g(m_1)$ باید مثبت یا منفی باشد. اگر $g(m_1) > 0$ آنگاه نیمه چپ I_1 دارای این ویژگی است که در انتهای چپ آن تابع g منفی و در انتهای راست آن g مثبت است. از این پس جستجو برای r را در این بازه پیگیری می کنیم و قرار می دهیم $r_2 = 0$ زیرا در نمایش مبدای ۲ نیمه چپ I_1 رقم دوم پس از ممیز ۰ است. بالعکس اگر $g(m_1) < 0$ ، نیمه راست I_1 دارای این ویژگی است که در دو انتهای چپ و راست تابع g به ترتیب منفی و مثبت است و این زیربازه را برای ادامه جستجو انتخاب می کنیم.

در این صورت طبعاً قرار می‌دهیم $r_2 = 1$. در هر صورت بازه انتخاب شده را به I_2 نمایش می‌دهیم. حال مجدداً علامت نقطه وسط I_2 ، m_2 را در نظر می‌گیریم و عمل بالا را تکرار می‌کنیم. به طور کلی بسته به این که علامت $g(m_k)$ مثبت یا منفی باشد رقم k -ام پس از ممیز را به ترتیب ۰ یا ۱ می‌گیریم، و اگر $g(m_k) = 0$ ، عدد مورد نظر به صورت $r = 0/r_1 \dots r_k$ به دست آمده است. وقتی هیچ $g(m_k)$ صفر نشود، هر رقم پس از اعشار محاسبه می‌شود و عددی $r = 0/r_1 r_2 r_3 \dots$ به دست می‌آید. ادعا می‌کنیم $g(r) = 0$. مبنای شهودی این ادعا این است که دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو در نظر گرفته‌ایم $0 \leq I_1 \subset I_2 \subset \dots$ که طول آنها به ترتیب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ است و تابع g در انتهای چپ هر یک از این بازه‌ها منفی و در انتهای راست آن مثبت است. عدد r در همه این بازه‌ها قرار دارد، پس دنباله‌ای از چپ به آن میل می‌کند که در همه نقاط دنباله تابع g منفی است و دنباله از طرف راست به آن میل می‌کند که در تمام نقاط آن g مثبت است. از پیوستگی تابع g نتیجه خواهیم گرفت که $g(r) = 0$.

به روش برهان خلف عمل می‌کنیم. نشان می‌دهیم $g(r) \neq 0$ به تناقض می‌جر می‌شود. اگر $g(r) \neq 0$ ، باید مثبت یا منفی باشد. حالت $g(r) > 0$ را در نظر می‌گیریم، مورد $g(r) < 0$ کاملاً مشابه است. اگر $g(r) > 0$ ، نشان می‌دهیم بازه‌ای $[r - \delta, r + \delta]$ حول r وجود دارد که برای هر نقطه x از $[0, 1]$ که در این بازه قرار گیرد داریم $g(x) > 0$. دلیل، پیوستگی g در r است (و این در واقع تنها استفاده ما از پیوستگی در اثبات است)، زیرا اگر $e > 0$ را کوچکتر یا مساوی $g(r)$ بگیریم، طبق تعریف پیوستگی $0 < \delta$ وجود دارد که برای هر عنصر دامنه g (یعنی $[0, 1]$) که در فاصله کوچکتر از δ از r قرار گیرد داریم:

$$-e < g(r) - g(x) < e$$

چون $0 < e \leq g(r)$ ، از نامساوی طرف راست نتیجه می‌گیریم که $g(x) > 0$. حال توجه کنید که طول بازه I_n برابر $\frac{1}{2^n}$ است و اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد $\frac{1}{2^n} < \delta$. از آنجا که r عضو I_n هست و طول I_n کوچکتر از δ ، نتیجه می‌شود که I_n به تمامی در $[r - \delta, r + \delta]$ قرار دارد. بنابراین در هر نقطه I_n ، g باید مثبت باشد، در حالی که در انتهای چپ I_n تابع g همواره منفی بود. این تناقض نشان می‌دهد که $g(r) > 0$ ممکن نیست. مشابهاً $g(r) < 0$ نیز مجرب تناقض می‌شود. پس لزوماً $g(r) = 0$. \square

اکنون نشان می‌دهیم که حالت کلی قضیه ۱-۱۱ به سادگی از ۲-۱۱ نتیجه می‌شود. فرض کنید در صورت ۱-۱۱ داریم $A < B$. حالت $A > B$ را می‌توان با در نظر گرفتن تابع $f -$ نتیجه گرفت. پس $A < C < B$. ایده اثبات این است که از یک سو با کم کردن مقدار ثابت C از $f(x)$ ، تابعی پیوسته به دست می‌آوریم که در انتهای چپ منفی و در انتهای راست مثبت است؛ و از سویی دیگر با تغییر مقیاس و انتقال $[a, b]$ به $[0, 1]$ ، مسأله را به ۲-۱۱ تبدیل می‌کنیم. برای این کار، تابع $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f((1-t)a + tb) - C$$

توجه کنید که وقتی متغیر t بازه $[0, 1]$ را طی می‌کند، عبارت درجه یک $(1-t)a + tb$ بازه $[a, b]$ را می‌پیماید.

تابع ϕ که به صورت $\phi(t) = (1-t)a + tb$ تعریف می‌شود پیوسته است چون از درجه ۱ نسبت به t است، داریم $g(t) = f(\phi(t)) - C$. چون ترکیب تابع‌های پیوسته، پیوسته است $f \circ \phi$ پیوسته است و افزودن تابع ثابت $-C$ نیز پیوستگی را حفظ می‌کند، پس g پیوسته است. ولی $g(0) = A - C < 0$ و $g(1) = B - C > 0$ ، پس طبق ۲-۱۱، نقطه‌ای r در $[0, 1]$ وجود دارد که $g(r) = 0$ ، یعنی

$$f((1-r)a + rb) - C = 0$$

حال $c = (1-r)a + rb$ نقطه متناظر r در $[a, b]$ است و داریم $f(c) = C$ همان که حکم بود. تعدادی از احکام مربوط به تابع‌های پیوسته که حدس صحت آنها مبتنی بر شهود اتصال نمودار تابع پیوسته است از قضیه مقدار بی‌ی نتیجه می‌شوند. در باقیمانده این بخش دو نمونه از این احکام را بررسی خواهیم کرد. یک مورد استفاده ساده این قضیه در اثبات وجود ریشه برای معادلات است.

مثال ۱. نشان دهید معادله $\sin x - x^2 + x + 3 = 0$ دارای دست کم دو ریشه در $[-\pi, \pi]$ است. عبارت $f(x) = \sin x - x^2 + x + 3$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند زیرا که مجموعی از تابع‌های پیوسته است. می‌خواهیم نشان دهیم دست کم دو x متمایز در $[-\pi, \pi]$ وجود دارند که $f(x) = 0$. توجه

کید که:

$$f(-\pi) = -\pi^2 - \pi + 3 < 0$$

$$f(\pi) = -\pi^2 + \pi + 3 < 0$$

ولی $f(0) = 3 > 0$. بابر قضیه مقدار بی‌ی $f(x) = 0$ هم در $[-\pi, 0]$ و هم در $[0, \pi]$ ریشه دارد، که باین دو ریشه متمایزاند.

مثال ۲. فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ یک تابع پیوسته است، یعنی در واقع می‌توان f را یک تابع پیوسته از $[a, b]$ به \mathbb{R} تصور کرد که برای هر x در دامنه، $f(x) \in [a, b]$. نشان می‌دهیم نقطه‌ای x_0 در $[a, b]$ وجود دارد که $f(x_0) = x_0$. چنین نقطه x_0 را یک نقطه ثابت برای تابع f می‌نامد. برای این کار، تابع کمکی $\phi(x) = x - f(x)$ را در نظر بگیرید، $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. ϕ نیز پیوسته است زیرا که تفاضل دو تابع پیوسته می‌باشد. چون $f(a) \in [a, b]$ داریم $f(a) \geq a$ ، پس $\phi(a) \leq 0$. همچنین $f(b) \in [a, b]$ نتیجه می‌دهد $f(b) \leq b$ ، پس $\phi(b) \geq 0$. اگر داشته باشیم $\phi(a) = 0$ یا $\phi(b) = 0$ داریم $f(a) = a$ یا به ترتیب $f(b) = b$ ، و وجود نقطه ثابت به دست آمده است، پس فرض کنید $\phi(a) < 0$ و $\phi(b) > 0$. از قضیه مقدار بی‌ی نتیجه می‌گیریم نقطه‌ای c در $[a, b]$ هست که $\phi(c) = 0$ یا $f(c) = c$ و حکم به اثبات می‌رسد. نمایش هندسی این مطلب را می‌توان به صورت زیر به خاطر سپرد. چون برای هر x در $[a, b]$ ، $f(x)$ نیز در $[a, b]$ است، نمودار f در مربع $[a, b] \times [a, b]$ محصور است. خط $y = x$ از گوشه چپ پایین این مربع به گوشه راست بالا رسم شده است. نمودار f ضلع چپ مربع را به ضلع راست مربع وصل می‌کند. حکم مسأله این است که این نمودار لزوماً خط $y = x$ را قطع می‌کند (شکل ۳).

اکنون به تشریح دو کاربرد قضیه مقدار بی‌ی که قبلاً اشاره کردیم می‌پردازیم.

(۱۱-۳) گزاره. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک. در این صورت f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

برهان. فرض کنید x_0 یک نقطه درونی I است. در این صورت ادعا می‌کنیم یک و تنها یکی از دو وضعیت زیر برقرار است:

(الف) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$.

(ب) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$.

برای اثبات فرض کنید $x_1 > x_0$. از آنجا که f یک به یک است یا $f(x_1) > f(x_0)$ و یا $f(x_1) < f(x_0)$. نخست فرض کنید $f(x_1) > f(x_0)$. نشان می‌دهیم وضعیت (الف) برقرار است. اگر $x_2 < x_0$ باید داشته باشیم $f(x_2) < f(x_0)$ زیرا اگر $f(x_2) > f(x_0)$ و $f(x_1) > f(x_0)$ ، از یک به یک بودن f نتیجه می‌گیریم که $f(x_1) \neq f(x_2)$. حال هر یک از $f(x_1)$ و $f(x_2)$ که بزرگتر باشد، مثلاً $f(x_1)$ ، تابع پیوسته f باید در گذر از $f(x_0)$ به $f(x_2)$ مقدار $f(x_1)$ را یک بار دیگر در بازه بین x_0 و x_2 اتخاذ کند که خلاف یک به یک بودن f است. حال فرض کنید $x_2 > x_0$ ، نشان می‌دهیم $f(x_2) > f(x_0)$. اگر $f(x_2) < f(x_0)$ ، آنگاه داریم $f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$ ، پس تابع پیوسته f باید در گذر از مقدار $f(x_2)$ به $f(x_1)$ دست‌کم یک بار مقدار $f(x_0)$ را بین x_1 و x_2 اتخاذ کند خلاف یک به یک بودن f است زیرا که x_0 در یک طرف x_1 و x_2 قرار دارد. به همین ترتیب اگر برای یک نقطه x_1 با $x_1 > x_0$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_0)$ ، می‌توانیم استدلال کنیم که وضعیت (ب) برقرار است.

برای ادامه اثبات، نقطه دلخواه درونی x_0 از I را در نظر می‌گیریم. نسبت به x_0 ، یکی از دو شرط (الف) یا (ب) بالا برقرار است. در حالت (الف) نشان می‌دهیم f لزوماً صعودی است و در حالت (ب) لزوماً نزولی. مثلاً فرض کنید وضعیت (ب) برقرار است. نشان می‌دهیم f نزولی است. دو نقطه x_1 و x_2 در I در نظر بگیرید که $x_1 < x_2$. باید ثابت کنیم $f(x_1) > f(x_2)$. وضعیت نسبی سه نقطه x_0 ، x_1 و x_2 روی I به یکی از سه صورت زیر است که در هر مورد استدلال لازم را ارائه می‌کنیم:

$x_0 < x_1 < x_2$ طبق (ب) داریم $f(x_1) < f(x_0)$ و $f(x_2) < f(x_0)$. حکم نخست برهان (برقرار بودن (الف) یا (ب)) برای هر نقطه درونی درست است، پس اگر این حکم را برای نقطه درونی x_1

به کار ببریم، چون $f(x_1) > f(x_0)$ ، نتیجه می شود که $f(x_2) < f(x_1)$ ، همان گونه که می خواستیم.

$x_1 < x_0 < x_2$ چون در وضعیت (ب) برای x_0 هستیم، داریم $f(x_1) > f(x_0)$ و $f(x_2) < f(x_0)$ ، پس $f(x_2) < f(x_1)$.

$x_1 < x_2 < x_0$ در اینجا حکم نخست برهان را برای نقطه درونی x_2 به کار می گیریم. چون طبق (ب) $f(x_2) > f(x_0)$ ، نتیجه می شود که $f(x_1) > f(x_2)$ و حکم به اثبات می رسد.

استدلال در حالتی که (الف) برای x_0 برقرار باشد، کاملاً مشابه است و به خواننده واگذار می شود. \square
کاربرد مهم دیگر قضیه مقدار بیسی که ارائه می کنیم پیوستگی وارون یک تابع پیوسته است. اگر $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، قرار می دهیم:

$$T = \{f(x) \mid x \in S\}$$

T را مجموعه مقادیر T می نامد. اگر f یک به یک باشد، به ازای هر $y \in T$ یک و تنها یک x در S وجود دارد که $f(x) = y$. به این ترتیب تابعی $f^{-1}: T \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می شود که $f^{-1}(y) = x$. f^{-1} را وارون یا معکوس (ترکیبی) f می نامد. دو حکم زیر برقرارند:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{برای هر } x \text{ در } S$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{برای هر } y \text{ در } T$$

لازم به ذکر است که چون f^{-1} نقش x و y نسبت به f را تعویض می کند، نمودار f^{-1} در واقع قریه نمودار f نسبت به خط $y = x$ است (شکل ۴).

(۱۱-۴) گزاره. فرض کنید I یک بازه است و $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یک به یک و پیوسته. در این صورت f^{-1} نیز پیوسته است.

برهان. طبق گزاره ۱۱-۳ تابع f صعودی یا نزولی است. حکم را در حالتی که f صعودی است ثابت می کنیم و حالت f نزولی را که مشابه است به خواننده واگذار می کنیم. نخست توجه کنید که مجموعه

تصویر، یعنی:

$$J = \{f(x) \mid x \in I\}$$

یک بازه است، بدین معنی که اگر y_1 و y_2 دو نقطه J باشد که $y_1 < y_2$ ، آنگاه $[y_1, y_2]$ به تمامی در J قرار دارد. این مطلب را به این صورت توجیه می‌کنیم. چون y_1 و y_2 در J هستند، x_1 و x_2 یگانه در I وجود دارند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. چون f صعودی است، $x_1 < x_2$. حال اگر نقطه‌ای y در $[y_1, y_2]$ باشد، چون f روی $[x_1, x_2]$ پیوسته است، طبق قضیه مقدار بی‌ی باید عددی x در $[x_1, x_2]$ یافت شود که $f(x) = y$ ، پس $y \in J$.

برای اثبات پیوستگی f^{-1} ، طبق گزاره ۱-۱۰ بخش پیشین کافی است نشان دهیم که برای هر دنباله (y_n) از نقاط J (دامه f^{-1}) که $y_n \rightarrow y$ ، $y \in J$ داریم $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$. اول فرض کنید y یک نقطه درونی J است و $y = f(x)$. ادعا می‌کنیم که در این صورت x نیز یک نقطه درونی I است. برای این منظور، چون y نقطه درونی است، $\delta > 0$ وجود دارد که $[y - \delta, y + \delta]$ به تمامی در J قرار دارد. پس $y - \delta = f(x_1)$ و $y + \delta = f(x_2)$ ، و از آنجا که f صعودی است $x_1 < x < x_2$. پس بازه $[x_1, x_2]$ حول x به تمامی در I قرار دارد و x یک نقطه درونی است. اکنون به اثبات $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$ می‌پردازیم. قرار می‌دهیم $f^{-1}(y_n) = x_n$ ، یا معادلاً $f(x_n) = y_n$. دو نقطه $x + \rho$ و $x - \rho$ ، $\rho > 0$ ، حول x در I در نظر بگیریم. باید ثابت کنیم N به قسمی وجود دارد که برای $n > N$ داریم $x_n \in [x - \rho, x + \rho]$. قرار دهید $\underline{y} = f(x - \rho)$ و $\overline{y} = f(x + \rho)$. چون $y_n \rightarrow y$ ، N وجود دارد که برای $n > N$ داریم $y_n \in [\underline{y}, \overline{y}]$. نتیجه این که برای $n > N$ داریم $x_n \in [x - \rho, x + \rho]$ و حکم به اثبات می‌رسد. وقتی y یک نقطه انتهایی J باشد، و این تنها در صورتی است J از یک طرف بسته باشد، I نیز در طرف متناظر بسته است (به علت صعودی بودن f) و استدلال بالا با استفاده از بازه‌هایی که یک انتهای آنها بسته است تکرار می‌شود. \square

مثال ۱. فرض کنید \mathbb{R}^+ مجموعه اعداد حقیقی غیر منفی است. تابع $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x^n$ تعریف می‌کنیم که در آن $n \geq 1$ یک عدد صحیح است. این تابع یک به یک و پیوسته و صعودی است، بنابراین وارون آن نیز باید پیوسته باشد. از آنجا که مجموعه تصویر نیز برابر \mathbb{R}^+ است،

تابع وارون به دامهٔ \mathbb{R}^+ است. این تابع عبارت است از $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.

مثال ۲ (وارون توابع مثلثاتی) شش تابع مثلثاتی که تعریف کرده‌ایم همه تاوایی هستند، پس یک به یک نیستند و وارون به مفهوم معمول ندارند. ولی اگر دامهٔ هر یک از این توابع را طوری محدود کنیم که در آن دامه، تابع یک به یک باشد، می‌توان از وارون تابع مثلثاتی صحبت کرد. برای این کار انتخاب‌های متوعی به عنوان دامهٔ هر یک از تابع‌ها وجود دارد ولی قراردادهای زیر، قراردادهای متداول‌اند:

الف) برای سینوس، دامه را به $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کنیم که در این بازه سینوس همهٔ مقادیر $[-1, 1]$ را به طور یک به یک اتخاذ می‌کند. بنابراین \sin^{-1} روی $[-1, 1]$ تعریف می‌شود و مقادیر آن در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ م‌ظور می‌شوند. \sin^{-1} را گاهی به Arcsin (با "A" بزرگ) نمایش می‌دهد.

ب) برای کسینوس، دامه را به $[0, \pi]$ محدود می‌شود که کسینوس این بازه را به طور یک به یک بر $[-1, 1]$ می‌نگارد. بدین ترتیب \cos^{-1} روی $[-1, 1]$ تعریف شده و در $[0, \pi]$ مقدار می‌گیرد. \cos^{-1} را به Arccos نیز نمایش می‌دهد.

ج) برای تانژانت، از $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ استفاده می‌کنیم. تانژانت این بازه را به طور یک به یک بر تمام \mathbb{R} می‌نگارد. \tan^{-1} یا Arctan روی \mathbb{R} تعریف شده است و در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ مقدار می‌گیرد.

تمرین. ثابت کنید مجموعهٔ تصویر تانژانت همه \mathbb{R} است.

د) برای $\cot \theta$ ، $\sec \theta$ و $\csc \theta$ ، به ترتیب دامه‌های $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ و $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$ را م‌ظور می‌کند.