

## انتگرال یک متغیری (۲)

مفهوم انتگرال پذیری برای تابع های کراندار  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  در جلسه گذشته مورد بحث قرار گرفت. در این جلسه نخست پاره ای خواص ابتدایی تابع های انتگرال پذیر و نتایج فوری تعریف را ثبت می کنیم.

### (۱-۲) خواص ابتدایی انتگرال

(۱-۱-۲) هر تابع ثابت  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x) = c$  برای هر  $x$  در  $[a, b]$ ، انتگرال پذیر است و

$$\int_a^b f = c(b - a)$$

اثبات. هر مجموع ریمان بالایی و هر مجموع ریمان پایینی  $f$  برابر می شود با  $c(b - a)$  و حکم نتیجه می شود.  $\square$

(۲-۱-۲) اگر دو تابع  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  انتگرال پذیر باشند،  $f + g$  نیز انتگرال پذیر است و

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

اثبات. فرض کنید  $\mathcal{P} : a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$  یک افراز  $[a, b]$  باشد. اگر کوچکترین کران بالایی  $f + g$ ،  $f$  و  $g$  روی  $[x_{i-1}, x_i]$  را به ترتیب  $M_i$ ،  $M'_i$ ،  $M''_i$  و بزرگترین کران پایینی  $f + g$ ،  $f$  و  $g$  را به ترتیب به  $m_i$ ،  $m'_i$  و  $m''_i$  نمایش دهیم، داریم:

$$m'_i + m''_i \leq m_i \leq M_i \leq M'_i + M''_i \quad (۱)$$

زیرا که  $f(x) \leq M'_i$  و  $g(x) \leq M''_i$  برای  $x$  در  $[x_{i-1}, x_i]$ ، نتیجه می‌دهد  $M'_i + M''_i$  یک کران بالایی برای  $f + g$  روی  $[x_{i-1}, x_i]$  است، بنابراین کوچکترین کران بالایی  $f + g$  روی  $[x_{i-1}, x_i]$  حداکثر برابر  $M'_i + M''_i$  است. استدلال مشابهی برای  $m'_i, m_i$  و  $m''_i$  برقرار است. بنابراین:

$$L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leq L(f + g, \mathcal{P}) \leq U(f + g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) \quad (2)$$

چون  $f$  و  $g$  انتگرال پذیر فرض شده‌اند، می‌توان برای  $\epsilon > 0$  داده شده، با انتخاب مناسب افرازهای  $\mathcal{P}$  و  $\mathcal{Q}$  نامساوی‌های زیر را تأمین کرد:

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \leq \frac{\epsilon}{4} \quad (3)$$

$$U(g, \mathcal{Q}) - L(g, \mathcal{Q}) \leq \frac{\epsilon}{4} \quad (4)$$

حال برای  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  که تعریف  $\mathcal{P}$  و  $\mathcal{Q}$  دو نامساوی فوق همچنان برقرار می‌مانند، پس اگر به جای  $\mathcal{P}$  و  $\mathcal{Q}$ ،  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  را در (3) و (4) جایگزین کرده و طرف‌های متناظر نامساویها را جمع کنیم:

$$[U(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + U(g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})] - [L(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + L(g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})] \leq \epsilon$$

بنابراین از (2) نتیجه می‌شود که

$$U(f + g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - L(f + g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq \epsilon$$

پس  $f + g$  انتگرال پذیر است. به علاوه چون بزرگترین کران بالایی طرف راست (2) و نیز کوچکترین کران بالایی طرف چپ (2) هر دو برابر  $\int_a^b f + \int_a^b g$  هستند، نتیجه می‌شود که انتگرال بالایی و انتگرال پایینی  $f + g$  هر دو برابر  $\int_a^b f + \int_a^b g$  هستند و حکم به اثبات می‌رسد.  $\square$

(2-1-3) اگر  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  انتگرال پذیر باشد و  $c \in \mathbb{R}$ ، آنگاه  $cf$  انتگرال پذیر است و

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f$$

اثبات. نخست اگر  $c \geq 0$  و  $M_i$  و  $m_i$  به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی  $f$  روی یک بازه  $[x_{i-1}, x_i]$  از افراز  $\mathcal{P}$  باشند، کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی  $cf$  روی  $[x_{i-1}, x_i]$  به ترتیب برابر  $cM_i$  و  $cm_i$  خواهد شد و با فاکتورگیری از  $c$  می‌توان به سادگی به نتیجه رسید. در حالت  $c < 0$ ، کوچکترین کران بالایی  $cf$  برابر  $cm_i$  و بزرگترین کران پایینی آن برابر  $cM_i$  می‌شود و مجدداً می‌توان به نتیجه مورد نظر رسید.  $\square$

(۲-۱-۴) اگر برای تابع انتگرال‌پذیر  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  داشته باشیم  $f(x) \geq 0$  برای هر  $x$  در  $[a, b]$ ، آنگاه  $\int_a^b f \geq 0$ .

اثبات. برای چنین تابع  $f$ ،  $m_i \leq M_i$  و همهٔ مجموع‌های ریمان غیرمنفی خواهند بود. پس  $\bar{J}$  و  $\underline{J}$  غیرمنفی می‌شوند و چون  $f$  انتگرال‌پذیر است،  $\int_a^b f = \bar{J}_a^b f = \underline{J}_a^b f \geq 0$ .  $\square$

(۲-۱-۵) نتیجه. اگر  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  انتگرال‌پذیر باشند و  $f(x) \geq g(x)$  برای هر  $x$  در  $[a, b]$ ، آنگاه

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

اثبات. تابع  $f - g$  طبق (۲-۱-۳) و (۲-۱-۲) انتگرال‌پذیر است و  $\int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g$  و  $\int_a^b (f - g) \geq 0$  پس حکم نتیجه می‌شود.  $\square$

ولی طبق (۲-۱-۴) داریم  $\int_a^b (f - g) \geq 0$  پس حکم نتیجه می‌شود.

اگر تابع کراندار  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  انتگرال‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_b^a f = - \int_a^b f \quad (5)$$

این قرار داد را می‌توان اینگونه توجیه کرد که در حالت  $f \geq 0$  که  $\int_a^b f$  تعبیر هندسی مساحت زیر نمودار را دارد، اگر جهت محور دامنه را تعویض کنیم، نقش  $a$  و  $b$  به عنوان نقاط چپ و راست دامنه تعویض می‌شود و مساحت مورد نظر زیر محور قرار خواهد گرفت. بدین ترتیب باید علامت منفی برای مساحت

منظور کرد.

(۶-۱-۲) برای هر سه نقطه  $a, b$  و  $c$  در  $\mathbb{R}$  داریم:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad (6)$$

مشروط بر این که انتگرال‌های فوق تعریف شده باشند. در واقع هرگاه دو انتگرال از سه انتگرال بالا تعریف شده باشند، سومی نیز تعریف شدنی است و تساوی برقرار است. برای اثبات (۶-۱-۲)، دولم سودمند بیان و ثابت می‌کنیم.

(۷-۱-۲) لم ۱. اگر  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  انتگرال‌پذیر باشد و  $[c, d] \subset [a, b]$ ، آنگاه تحدید  $f$  به  $[c, d]$  نیز انتگرال‌پذیر است.

اثبات. تحدید  $f$  به زیربازه  $[c, d]$  از  $[a, b]$  را به  $\bar{f}$  نمایش می‌دهیم. برای  $\epsilon > 0$ ، باید افراز  $\bar{\mathcal{P}}$  از  $[c, d]$  ارائه کنیم که  $U(\bar{f}, \bar{\mathcal{P}}) - L(\bar{f}, \bar{\mathcal{P}}) < \epsilon$ . چون  $f$  انتگرال‌پذیر است افرازی  $\mathcal{P}$  از  $[a, b]$  وجود دارد که  $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \epsilon$ . افراز  $\mathcal{P}$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

چون  $[c, d] \subset [a, b]$ ، اندیس‌های  $i$  و  $j$  بین  $0$  و  $n$  وجود دارند که:

$$x_i \leq c \leq x_{i+1}, \quad x_{j-1} \leq d \leq x_j$$

افراز  $\bar{\mathcal{P}}$  را به صورت زیر برای  $[c, d]$  در نظر می‌گیریم:

$$\bar{\mathcal{P}} : c = x'_i \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_{j-1} \leq x'_j = d$$

فرض کنید  $M'_{i+1}$  و  $m'_{i+1}$  کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی  $\bar{f}$  روی  $[x'_i, x_{i+1}]$  باشند. در مقایسه با  $M_{i+1}$  و  $m_{i+1}$  مقادیر متناظر برای  $f$  روی بازه (احتمالاً) بزرگتر  $[x_i, x_{i+1}]$  داریم

$$m_{i+1} \leq m'_{i+1} \leq M'_{i+1} \leq M_{i+1}$$

به همین ترتیب اگر  $M'_j$  و  $m'_j$  را به  $[x_{j-1}, x'_j]$  نسبت دهیم، داریم:

$$m_j \leq m'_j \leq M'_j \leq M_j$$

نتیجه می شود که:

$$U(\bar{f}, \bar{\mathcal{P}}) - L(\bar{f}, \bar{\mathcal{P}}) \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

و حکم به اثبات می رسد.  $\square$

(۲-۱-۸) لم ۲. اگر  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  انتگرال پذیر باشد و  $[a, b] \subset [A, B]$ ، تابع  $\tilde{f}: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  را

به صورت

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

تعریف می کنیم. در این صورت  $\tilde{f}$  روی  $[A, B]$  انتگرال پذیر است و  $\int_A^B \tilde{f} = \int_a^b f$ .

اثبات. برای  $e > 0$ ، باید افراز  $\tilde{\mathcal{P}}$  برای  $[A, B]$  بیابیم که

$$U(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{P}}) - L(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{P}}) < e$$

چون  $f$  روی  $[a, b]$  انتگرال پذیر است، افراز  $\mathcal{P}$  به صورت زیر برای  $[a, b]$  وجود دارد که

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

$$\mathcal{P}: a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_p = b$$

حال  $\tilde{\mathcal{P}}$  را با افزودن نقاط  $A$  و  $B$  تعریف می کنیم:

$$\tilde{\mathcal{P}}: A = \tilde{x}_0 \leq a = x_0 \leq \dots \leq x_p = b \leq \tilde{x}_p = B$$

چون تابع تعریف شده  $\tilde{f}$  خارج  $[a, b]$  صفر است نتیجه می شود که  $U(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{P}}) = U(f, \mathcal{P})$  و

$$L(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{P}}) = L(f, \mathcal{P}) \text{ و حکم نتیجه می شود.}$$

حال به اثبات ۲-۱-۶ باز می گردیم. نخست فرض کنید  $a \leq b \leq c$  و  $f$  روی  $[a, b]$  و  $[b, c]$

انتگرال پذیر است. تحدید  $f$  به  $[a, b]$  را  $f'$  و تحدید  $f$  به  $[b, c]$  را به  $f''$  نمایش می دهیم. فرض کنید  $\tilde{f}'$

و  $\tilde{f}''$  توسعه  $f'$  و  $f''$  به همه  $[a, c]$  به ترتیب لم ۲ باشند، یعنی بیرون بازه تعریف تابع را برابر صفر قرار دهید. از لم ۲ نتیجه می شود که  $\tilde{f}'$  و  $\tilde{f}''$  انتگرال پذیرند. به علاوه چون  $f = \tilde{f}' + \tilde{f}''$ :

$$\begin{aligned}\int_a^c f &= \int_a^c \tilde{f}' + \int_a^c \tilde{f}'' \\ &= \int_a^b f + \int_b^c f \quad (\text{طبق لم ۲})\end{aligned}$$

و حکم در حالت  $a \leq b \leq c$  به اثبات می رسد. حالت های دیگر به ترتیب  $a, b$  و  $c$  نیز از لم ۱ و لم ۲ نتیجه می شود.

تاکنون مثالی جز تابع ثابت و سهمی برای تابع انتگرال پذیر ارائه نکرده ایم و لم ۲ نشان می دهد پیوستگی یک شرط لازم برای انتگرال پذیری نیست زیرا اگر مقدار  $f$  در یکی از دو انتهای بازه  $[a, b]$  ناصفر باشد، با توسعه  $f$  با مقدار صفر بیرون  $[a, b]$  به یک دامنه بزرگتر، تابع به دست آمده همچنان انتگرال پذیر است ولی در نقاط  $a$  و  $b$  ممکن است پیوسته نباشد. گزاره زیر نشان می دهد که پیوستگی یک شرط کافی برای پیوستگی است.

(۲-۲) گزاره. هر تابع پیوسته  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  انتگرال پذیر است.

اثبات این گزاره را به کمک لم زیر ارائه خواهیم کرد ولی اثبات لم را به جلسات آینده وقتی درباره دنباله های اعداد حقیقی صحبت می شود موکول می کنیم.

(۲-۳) لم. اگر  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته باشد آنگاه ویژگی زیر برقرار است: برای هر  $\epsilon > 0$ ، عددی  $\delta > 0$  وجود دارد به طوری که هرگاه برای  $x_1$  و  $x_2$  در  $[a, b]$  داشته باشیم  $|x_1 - x_2| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ .

در نگاه اول به نظر می آید حکم این لم چیزی فرای پیوستگی نباشد ولی کمی دقت تفاوت ظریف آن را مشخص می کند. پیوستگی  $f$  در  $[a, b]$  بدین معنی است که  $f$  در همه نقاط  $[a, b]$  پیوسته است، یعنی برای هر  $x_0$  در  $[a, b]$ ، عددی  $\epsilon' > 0$  وجود دارد که هرگاه  $|x - x_0| < \epsilon'$ ،  $x$  در  $[a, b]$ ، آنگاه  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . نکته این است که اندازه  $\epsilon'$  به نقطه  $x_0$  وابسته است و ممکن است یک  $\epsilon' > 0$  واحد وجود نداشته باشد که برای هر  $x_0$  کار کند. طبق لم اگر دامنه تابع پیوسته  $f$  یک بازه بسته و

کراندار باشد، آنگاه می‌توان یک  $e' > 0$  واحد (که در لم  $\delta$  خوانده شده است) پیدا کرد که هرگاه دو نقطه در دامنه فاصله‌شان کوچکتر از این  $e'$  باشد، فاصله مقادیر آنها از  $e$  کوچکتر است. این وضعیت پیوستگی یکنواخت خوانده می‌شود و ممکن است اگر دامنه یک تابع پیوسته یکی از دو شرط کراندار بودن یا بسته بودن را حایز نباشد برقرار نشود. به عنوان مثال، تابع‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

$$h: ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x}$$

هر یک از این دو تابع در دامنه خود پیوسته است، ولی نشان می‌دهیم پیوستگی یکنواخت برقرار نیست. نخست تابع  $g$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $e > 0$  داده شده است. برای این که مقدار  $g$  در دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$ ، مثلاً  $0 \leq x_1 < x_2$ ، کوچکتر از  $e$  باشد، حداکثر فاصله  $x_1$  و  $x_2$  چه قدر می‌تواند باشد؟ می‌نویسیم  $x_2 = x_1 + d$  که  $d$  فاصله  $x_1$  و  $x_2$  است. داریم:

$$\begin{aligned} |g(x_2) - g(x_1)| &= (x_1 + d)^2 - x_1^2 \\ &= 2dx_1 + d^2 < e \end{aligned}$$

توجه کنید که  $d$  هر قدر کوچک (ولی مثبت) گرفته شود، می‌توان با بزرگ کردن  $x_1$ ،  $2dx_1$  را از  $e$  بزرگتر ساخت. البته اگر  $x_1$  نخست مفروض باشد، می‌توان  $d$  را طوری گرفت که  $2dx_1$  و  $d^2$  هر دو کوچکتر از  $\frac{e}{2}$  شوند و در نتیجه پیوستگی در  $x_1$  برقرار است. اگر به نمودار  $g$  توجه کنیم می‌بینیم که با سوق دادن  $x$  به  $+\infty$  در دامنه، شیب نمودار به  $+\infty$  میل می‌کند. در نتیجه باید  $d$  را تدریجاً کوچکتر ساخت تا نامساوی مورد نظر برقرار بماند. در واقع  $d \rightarrow 0^+$  وقتی  $x_1 \rightarrow +\infty$ .

### شکل ۱

در مورد تابع  $h$ ، که دامنه‌اش کراندار است، به وضعیت مشابهی برمی‌خوریم. مجدداً اگر  $e > 0$  داده شده باشد و  $x_1$  و  $x_2$  در  $]0, 1]$  باشند به طوری که  $0 < x_1 = x_2 - d$ ، می‌خواهیم  $d$  را آنقدر کوچک بگیریم که  $|h(x_1) - h(x_2)|$  کوچکتر از  $e$  باشد:

$$\begin{aligned} |h(x_1) - h(x_2)| &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + d} \\ &= \frac{d}{(x_1 + d)x_1} < e \end{aligned}$$

در اینجا نیز توجه کنید که هر  $d > 0$  که داده شده باشد، می توان  $x_1$  را آنقدر کوچکتر (نزدیکتر به نقطه انتهایی  $0$ ) گرفت که نسبت  $\frac{d}{(x_1+d)x_1}$  بزرگتر از  $e$  شود. در عین حال تابع در  $x_1$  پیوسته است زیرا که اگر  $x_1$  داده شده باشد می توان  $d$  را متناسباً کوچک گرفت، مثلاً  $0 < d < ex_1^2$ ، به طوری که:

$$\frac{d}{(x_1+d)x_1} < \frac{d}{x_1^2} < e$$

در این مثال نیز، با نزدیک شدن  $x_1$  به نقطه  $0$  (که در دامنه تابع نیست) شیب نمودار به  $+\infty$  میل می کند و اندازه  $d$  لزوماً به صفر میل می کند.

طبق لم ۲-۳، هرگاه قلمرو یک تابع پیوسته، یک بازه بسته و کراندار باشد، می توان برای هر  $e > 0$  داده شده یک  $\delta > 0$  یکنواخت پیدا کرد که برای هر دو نقطه دامنه در فاصله کوچکتر از  $\delta$ ، فاصله مقادیر از  $e$  کوچکتر باشد. حال به کمک این لم، گزاره ۲-۲ را ثابت می کنیم. می خواهیم ثابت کنیم که هرگاه  $e > 0$  داده شده باشد، افرازی  $\mathcal{P}$  از  $[a, b]$  وجود دارد که:

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

طبق لم، برای  $\frac{e}{b-a}$ ، عددی  $\delta > 0$  وجود دارد که هرگاه  $|x - x'| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x) - f(x')| < e$ . افراز  $\mathcal{P}$  را طوری می گیریم که فاصله دو نقطه متوالی افراز از  $\delta > 0$  کوچکتر باشد نتیجه می شود که اگر  $M_i$  و  $m_i$  به ترتیب ماکسیمم و مینیمم  $f$  روی یک زیربازه افراز باشند، داریم  $M_i - m_i < \frac{e}{b-a}$ . بنابراین:

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) &= \sum (x_i - x_{i-1})M_i - \sum (x_i - x_{i-1})m_i \\ &= \sum (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \\ &< \frac{e}{b-a} \sum (x_i - x_{i-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

□

و حکم ۲-۲ به اثبات می رسد.

سوالی که در اینجا طبعاً مطرح می شود این است که آیا می توان توابع انتگرال پذیر را به گونه ای ساده مشخص کرد؟ قضیه معروف زیر از لیگ<sup>۱</sup> که اثبات آن فرای این درس است شرطی لازم و کافی به

---

<sup>۱</sup>H. Lebesgue



این منظور ارائه می‌کند. یک زیرمجموعه  $Z$  از  $\mathbb{R}$  را یک مجموعه اندازه صفر می‌نامیم در صورتی که برای هر  $\epsilon > 0$  دنباله‌ای از بازه‌ها  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  وجود داشته باشد به طوری که مجموع سری  $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ ،  $l(I_n) = \text{طول بازه } I_n$ ، کوچکتر از  $\epsilon$  باشد.

(۲-۴) قضیه لبگ. تابع کراندار  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$  یک مجموعه اندازه صفر باشد.

هر مجموعه متناهی و در واقع هر مجموعه شمارا یک مجموعه اندازه صفر است. بدین ترتیب تابع‌های کراندار  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  که به جز در تعدادی شمارا نقطه پیوسته باشند انتگرال پذیرند.