

دنباله عددی و سری عددی (۳)

در جلسه قبل اشاره داشتیم به اینکه سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و آزمون‌های همگرایی که مطرح کردیم مربوط به سری‌های اعداد غیرمنفی بودند. دلیل اهمیت سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی قضیه زیر است:

(۸-۱) قضیه. فرض کنید $(z_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنباله اعداد مختلط باشد. اگر $\sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ نیز همگراست.

بدین ترتیب اگر بتوانیم به کمک یکی از آزمون‌های جلسه قبل همگرایی سری قدرمطلق‌های جملات یک سری را به اثبات برسانیم، همگرایی سری اولیه نتیجه می‌شود. اگر برای سری $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ سری قدرمطلق‌ها، یعنی $\sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ را همگرای مطلق می‌نامند. پس طبق قضیه بالا، همگرایی مطلق، همگرایی را نتیجه می‌دهد. برای اثبات قضیه بالا نخست به یک نکته کلی اشاره می‌کنیم.

(۸-۲) گزاره. فرض کنید $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنباله اعداد مختلط باشد، $c_n = a_n + ib_n$ و $c = a + ib$ یک عدد مختلط. در این صورت $c_n \rightarrow c$ اگر و تنها اگر $a_n \rightarrow a$ و $b_n \rightarrow b$.

اثبات. داریم

$$|a_n - a|, |b_n - b| \leq |c_n - c| \quad (۱)$$

و

$$|c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad (2)$$

نامساوی اولی بیان این مطلب است که در مثلث قائم الزاویه هر ضلع زاویه قائمه کوچکتر از وتر است، و نامساوی دوم بیان این مطلب که طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است (شکل ۱).

فرض کنید $c_n \rightarrow c$ پس برای هر $\epsilon > 0$ ، N وجود دارد که $|c_n - c| < \epsilon$ برای هر $n > N$. بنابراین از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که $|a_n - a| < \epsilon$ و $|b_n - b| < \epsilon$ وقتی $n > N$. پس $c_n \rightarrow c$ نتیجه می‌دهد $a_n \rightarrow a$ و $b_n \rightarrow b$ بالعکس فرض کنید $a_n \rightarrow a$ و $b_n \rightarrow b$ برای ϵ داده شده، N_1 و N_2 وجود دارند که:

$$n > N_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$n > N_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

با قرار دادن $N = \max\{N_1, N_2\}$ می‌بینیم که اگر $n > N$ ، آنگاه طبق نامساوی (۲) داریم $|c_n - c| < \epsilon$ و حکم به اثبات می‌رسد. \square

به زبان هندسی، گزاره ۸-۲ حکم می‌کند که شرطی لازم و کافی برای $c_n \rightarrow c$ این است که مؤلفه افقی (قسمت حقیقی) c_n به مؤلفه افقی (قسمت حقیقی) c میل کند و مؤلفه قائم (قسمت موهومی) c_n به مؤلفه قائم (قسمت موهومی) c .

حال قضیه ۸-۱ را در حالتی که c_n ها حقیقی باشند در نظر بگیرید. پس دنباله‌ای از اعداد حقیقی $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ داریم که $\sum_{n=k}^{\infty} |c_n|$ همگراست. می‌نویسیم:

$$c_n = (c_n + |c_n|) + (-|c_n|)$$

چون $\sum |c_n|$ همگرا فرض شده است، اگر همه جملات در عدد ثابت (-1) ضرب شوند، نتیجه می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty} (-|c_n|)$ همگراست. پس اگر ثابت شود که $\sum_{n=k}^{\infty} (c_n + |c_n|)$ نیز همگراست، آنگاه مجموع جمله به جمله دو سری همگرای فوق، همگرا خواهد شد. ولی داریم

$$0 \leq c_n + |c_n| \leq 2|c_n|$$

و $\sum_{n=k}^{\infty} (2|c_n|)$ همگراست، پس طبق آزمون مقایسه جلسه قبل، ۷-۵، سری $\sum_{n=k}^{\infty} (c_n + |c_n|)$ همگراست.

اکنون قضیه ۸-۱ را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. فرض کنید $c_n = a_n + ib_n$ ، پس $|a_n| \leq |c_n|$ و $|b_n| \leq |c_n|$. اگر $\sum |c_n|$ همگرا باشد، طبق آزمون مقایسه، $\sum |a_n|$ و $\sum |b_n|$ همگرا خواهند شد. ولی a_n و b_n اعداد حقیقی هستند، پس طبق بحث بالا $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نیز همگرا می‌شوند. بنابراین طبق گزاره ۸-۲، $\sum c_n$ که در آن $c_n = a_n + ib_n$ نیز همگراست و اثبات ۸-۱ به انجام می‌رسد.

(۸-۳) چند مثال.

(۸-۳-۱) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$ را بررسی می‌کنیم. داریم $|n+i| = \sqrt{n^2+1} > n$ ، پس $|\frac{1}{(n+i)^2}| < \frac{1}{n^2}$ و در مقایسه با سری p ، به ازای $p=2$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+i|^2}$ همگراست، در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$ همگراست.

همگرایی مطلق شرطی کافی برای همگرایی است ولی یک شرط لازم نیست. مثلاً با آن که سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، اگر جملات را یکی در میان منفی کنیم، سری حاصل، یعنی:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

همگراست. در واقع آزمون کلی زیر برقرار است:

(۸-۴) آزمون سری متناوب لایب‌نیتس. فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله اعداد حقیقی نامنفی باشد که:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

و $a_n \rightarrow 0$ وقتی $n \rightarrow +\infty$. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگراست.

اثبات. به دنباله مجموع‌های جزئی این سری نگاه می‌کنیم:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 - a_2, S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \dots$$

مجموع‌های جزئی با اندیس فرد، یعنی S_1, S_3, S_5, \dots را در نظر بگیرید. چون $a_{2n} \geq a_{2n+1}$ داریم:

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

پس

$$\dots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$$

همین طور چون $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$ برای مجموع‌های جزئی زوج داریم $S_{2n+2} =$

$$S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

$$\dots \geq S_4 \geq S_2 \geq S_0$$

توجه کنید که a_1 یک کران بالایی برای دنباله مجموع‌های جزئی زوج است زیرا که $a_i \geq a_{i+1}$ پس:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + \dots - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &\leq a_1 \end{aligned}$$

بنابراین دنباله مجموع‌های جزئی با اندیس زوج به کوچکترین کران بالایی خود، مثلاً S میل می‌کند. نشان می‌دهیم کل دنباله مجموع‌های جزئی، $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ، به S میل می‌کند. فرض کنید $e > 0$ داده شده است. از آنجا که $S_{2n} \rightarrow S$ ، N_1 وجود دارد که:

$$n > N_1 : |S_{2n} - S| < \frac{e}{2}$$

از طرفی دیگر، فرض کرده‌ایم $a_n \rightarrow 0$ پس N_2 وجود دارد که:

$$n > N_2 : |a_n| < \frac{e}{2}$$

حال اگر قرار دهیم $N = \max\{N_1, N_2\}$ ، اگر $n = 2k > N$ داریم $k > N_1$ پس $|S_n - S| < \frac{e}{2} < e$ و اگر $n = 2k - 1 > N$ ، آنگاه $2k > N_2$ و:

$$\begin{aligned} |S_{2k-1} - S| &\leq |S_{2k-1} - S_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &= |a_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &< \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e \end{aligned}$$

□ پس $S_n \rightarrow S$ و حکم به اثبات می‌رسد.

در واقع ایده اثبات فوق بسیار ساده و جالب توجه است. از آنجا که جملات سری متناوباً تغییر علامت می‌دهند و قدرمطلق جملات نوعاً کوچکتر می‌شوند (به هر حال هیچ‌گاه بزرگتر نمی‌شوند)، دنباله S_n روی محور حقیقی متناوباً به چپ و راست می‌جهد در حالی که دامنه جهش آن رو به تنازل به صفر است ($a_n \rightarrow 0$). به این ترتیب S_{2n} ها از طرف چپ و S_{2n+1} ها از طرف راست به سوی نقطه‌ای روی محور حقیقی تجمع می‌کنند (شکل ۲).

با توجه به این گزاره، سری‌های زیر همگرا هستند:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \dots$$

در آینده مجموع این دو سری خاص را محاسبه خواهیم کرد.

در این مقطع لازم است نکته‌ای در مورد به کارگیری نماد \sum به عنوان حد سری گوشزد کنیم. \sum معمولاً به معنای "مجموع" به کار می‌رود، مثلاً $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$. از آنجا که $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به معنای انباشتن متوالی ولی تمام نشدنی a_i هاست، نماد \sum بی‌مورد نیست ولی نباید پنداشت که این "مجموع نامتناهی" لزوماً خواص جمع معمولی را دارد. دیدیم که اگر هر جمله یک سری را در عدد ثابت c ضرب کنیم، حد سری نیز در همان عدد ضرب خواهد شد (تعمیم قانون بخشی)، و نیز اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند، $\sum (a_n + b_n)$ نیز همگراست و به مجموع $\sum a_n$ و $\sum b_n$ میل می‌کند. این نوعی قانون جابجایی (تعویض پذیری) عمل جمع به بی‌نهایت عامل جمع است ولی اگر سری‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ خود همگرا نباشند، سری مجموع جملات متناظر، یعنی $\sum (a_n + b_n)$ می‌تواند رفتار غیرمنتظره‌ای داشته باشد. در واقع ثابت می‌شود که اگر $\sum a_n$ یک سری همگرا باشد که همگرایی مطلق نباشد، می‌توان با جابه‌جا کردن عوامل جمع، حد مجموع را به هر عدد دلخواه میل داد! روش کار را با مثال سری زیر نشان می‌دهیم. همین نوع استدلال در حالت کلی کار می‌کند. سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (3)$$

را در نظر بگیرید. این در واقع مجموع دو سری غیر همگراست که جمله نمونه هریک به صفر میل می کند. یکی از این سری ها، سری جملات با مخرج زوج است:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots$$

این سری با ضرب کردن جملات سری هارمونیک در $(-\frac{1}{3})$ پدید آمده است پس لزوماً واگراست (و گرنه با ضرب کردن جملات در -2 ، سری هارمونیک همگرا می شود). از طرفی دیگر چون $\frac{1}{3} > 1$ ، $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ ، ...، سری جملات با مخرج فرد نیز واگراست. حد سری (۳) قطعاً از ۱ کوچکتر است زیرا با نوشتن سری به صورت زیر:

$$1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + (-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}) + \dots$$

چون مجموع داخل هر پرانتز منفی است، هر بار عددی از مجموع قبلی کم می شود. با این حال نشان می دهیم با جابجایی مناسب می توان مجموع سری را به مثلاً عدد ۲ میل داد. برای این کار نخست جملات فرد $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ را تا جایی جمع می کنیم که از ۲ بیشتر شود. جدول زیر که از محاسبه با ماشین حساب حاصل شده است نشان می دهد باید تا $\frac{1}{15}$ جلو رفت:

$$1 < 2$$

$$1 + \frac{1}{3} \simeq 1/3333 < 2$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \simeq 1/5333 < 2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13} \simeq 1/9551 < 2$$

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15} \simeq 2/0218 > 2$$

حال جملات زوج (منفی) را از مجموع محاسبه شده کم می کنیم تا مجموع کوچکتر از ۲ شود. در واقع در اینجا افزودن $\frac{1}{3}$ - کافی است:

$$(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} \simeq 1/5218$$

مجدداً جملات فرد (مثبت) را به ترتیب می‌افزاییم تا مجموع از ۲ تجاوز کند. محاسبه با ماشین حساب می‌دهد:

$$(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{41}) \simeq 2/0041 > 2$$

اکنون از جملات زوج استفاده می‌کنیم تا مجموع از ۲ کوچکتر شود:

$$(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{41}) - \frac{1}{4} \simeq 1/7541$$

با ادامه دادن این فرایند می‌بینیم که میزان انحراف از ۲ تدریجاً کوچکتر می‌شود زیرا که $\frac{1}{n}$ به تدریج کوچکتر می‌شود. روشن است که به جای ۲ می‌توان با این روش مجموع را به هر عددی میل داد. قضیه‌ای جالب حکم می‌کند که این پدیده برای سری‌های همگرای مطلق رخ نمی‌دهد، یعنی اگر یک سری همگرای مطلق باشد، هیچ‌گونه جابجایی در جملات اثری بر حد سری نخواهد داشت. نکته تمایز از وضعیت بالا این است که در بالا به سبب واگرایی $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ قادر بودیم با افزودن جملات، مجموع را به ۲ برسانیم ولی در مورد سری‌های همگرای مطلق، هیچ زیر دنباله‌ای از سری، واگرا نخواهد شد و قادر نخواهیم بود نوسان‌های مورد نیاز را ایجاد کنیم.