

اعداد حقیقی (۱)

اعداد اولین بار در رابطه با امر شمارش ظاهر شدند. اعداد طبیعی:

$$1, 2, 3, \dots$$

وسیلهٔ سنجش تعدد اشیاء در یک مجموعهٔ مشخص‌اند. از آنجا که کمیت‌های مورد اندازه‌گیری همیشه به صورت گسسته و مجزا ظاهر نمی‌شوند، انسان از دیرباز دریافت که برای سنجش میزان کمیت، شمارش و اعداد طبیعی کفایت نمی‌کند، بلکه باید نسبت دو کمیت از یک جس را نیز نوعی عدد تلقی کرد. مقایسهٔ وزن اجسام و طول پاره‌خط‌ها از این جمله‌اند. برای انجام مقایسهٔ دو کمیت، شیئی همجس با دو شیء مورد مقایسه ولی کوچکتر از آنها در نظر گرفته می‌شود که اندازهٔ هر شیء مضرب صحیحی از اندازهٔ آن باشد. در شکل ۱ دو پاره‌خط L و L_1 نمایش داده شده‌اند و پاره‌خطی L که ۵ بار در L و ۳ بار در L_1 می‌گنجد. در این صورت نسبت طول L به طول L_1 را به $\frac{5}{3}$ نمایش می‌دهد. نسبت‌های $\frac{m}{n}$ که در آن m و n عدد طبیعی باشد امروزه اعداد گویا یا کسرهای متعارف می‌نامیم. ریاضیدان یونانی یودوکسوس^۱ حدود ۴ قرن قبل از میلاد کسرها را به طور جامع بررسی کرد و نظریهٔ او در فصل پنجم کتاب اصول اقلیدس (قرن سوم قبل از میلاد) نقل شده است. هرگاه پاره‌خطی L به n عوان مرجع یا واحد در نظر گرفته شود، n یک عدد طبیعی باشد، و L' پاره‌خطی که L دقیقاً n بار در آن می‌گنجد، نسبت طول L' به طول L برابر $\frac{n}{1}$ است. از آنجا که طول L' را می‌توان نتیجهٔ n بار شمارش طول L در نظر گرفت، تمایزی میان $\frac{n}{1}$ و n قایل نمی‌شویم و از این رو مجموعهٔ اعداد گویا را گسترشی از مجموعهٔ اعداد طبیعی تلقی می‌کنیم.

^۱Eudoxus

به طور کلی دو کمیت از یک ج س را همسگ می نامیم در صورتی که کمیتی از همان ج س (به عنوان "واحد" یا "سگه") وجود داشته باشد که اندازه هر یک از کمیت های داده شده مضرب صحیحی از اندازه سگه باشد. در شکل ۱، طول پاره خط های L و L_1 همسگ هستند و می توان از طول L به عنوان سگه استفاده کرد. در عمل به نظر می آید باید بتوان برای مقایسه هر دو کمیت همجس، واحدی به اندازه کافی کوچک انتخاب کرد که هر دو کمیت مضرب صحیحی از آن واحد باشد، یا به عبارتی دیگر، به نظر می آید که هر دو کمیت همجس، همسگ باشد. برای تأکید بر اهمیت مسأله، موضوع را به صورت یک سؤال مطرح می کنیم:

سؤال. آیا هر دو کمیت همجس، همسگ نیز هستند؟

اینکه جواب این سؤال منفی است ظاهراً در قرن پنجم پیش از میلاد توسط هیپاسوس^۲ کشف شد و بحرانی در فلسفه و علم باستان پدید آورد. فیثاغورسیان اعتقاد داشتند که اعداد (صحیح) به نوعی مشاء و عصر ساخت همه هستی اند و این کشف هیپاسوس که دو پاره خط وجود دارد که نمی توان هر دو را با یک واحد مشترک شمرد بیاد تفکر آنها را متزلزل ساخت. استدلال هیپاسوس را بعداً خواهیم آورد ولی استدلال ساده زیر که دو قرن بعد در جزوه دهم کتاب اصول اقلیدس ظاهر می شود اندکی بعد کشف شد. در اینجا نشان داده می شود که طول ضلع مربع و طول قطر آن همسگ نیستند، یا به زبان امروزی نسبت این دو طول یک عدد گویا نیست. اگر طول ضلع مربع را l بگیریم، طول قطر آن طبق قضیه فیثاغورس برابر $l\sqrt{2}$ است و نسبت طول قطر به طول ضلع برابر $\sqrt{2}$ می شود. روش ارائه شده در کتاب اقلیدس برای اثبات ناگویا بودن $\sqrt{2}$ ، برهان خلف است. فرض می کنیم $\sqrt{2} = \frac{M}{N}$ که در آن M و N عدد صحیح هستند. کسر $\frac{M}{N}$ را تا حد ممکن با حذف مقسوم علیه های مشترک ساده می کنیم تا به صورت $\frac{m}{n}$ در آید، پس $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ در وضعیتی است که m و n مقسوم علیه مشترک ندارند. با مجذور کردن دو طرف داریم $2n^2 = m^2$ ، پس m^2 زوج است پس $m = 2k$ و نتیجه می گیریم که $n^2 = 2k^2$. باز به ترتیب بالا n باید خود زوج باشد، $n = 2l$. حال m و n هر دو زوج هستند، یعنی هر دو بر ۲ قابل قسمت اند در حالی که فرض شده بود m و n مقسوم علیه مشترک ندارند. این تناقض نشان می دهد که

Hippasus^۲

بیان $\sqrt{2}$ به صورت $\frac{m}{n}$ ممکن نیست، یعنی $\sqrt{2}$ گویا نیست، و به بیانی دیگر طول ضلع و طول قطر مربع همسگ نیست.

در واقع می‌توان به سادگی ثابت کرد که اگر n خود مجذور کامل نباشد \sqrt{n} گویا نیست. در قطعه ۱۴۷ کتاب ته‌توس افلاطون^۳ (قرن چهارم پیش از میلاد) اشاره می‌شود که ریاضیدان یونانی تودروس این مطلب را تا $n = 17$ به اثبات رسانده است. در جای دیگری از آثار افلاطون یکی از مآثره‌ک‌دگان از چهل آتی‌ها نسبت به اعداد ابراز شرمساری کرد و بالاخص اینکه اکثر مردم به وجود کمیت‌های ناهمسگ آگاهی نداشتند.

در اینجا آنچه به ظن قوی کشف هیپاسوس از نسبت‌های ناگویا بوده است نقل می‌کنیم. علامت ویژه فیثاغورسیان موسوم به پیتاگرام یک پنج ضلعی منظم بود. در یک چین پنج ضلعی با رسم قطرهای پنج ضلعی منظم دیگری در داخل ساخته می‌شود و می‌توان این کار را همواره ادامه داد (شکل ۲). نشان می‌دهیم چگونه مقایسه نسبت طول قطر پنج ضلعی منظم به طول ضلع آن یک کمیت ناگویا به دست می‌دهد. به طور کلی فرض کنید a_0 و a_1 دو کمیت همجس باشند (مثلاً طول‌های دو پاره خط) و $a_1 < a_0$. اگر دقیقاً n_1 بار در a_0 بگنجد، n_1 : عدد طبیعی، آنگاه a_0 و a_1 همسگ هستند و داریم $a_0 = n_1 a_1$. در هر صورت n_1 را بزرگترین عدد طبیعی می‌گیریم که $n_1 a_1$ از a_0 تجاوز نکند و داریم

$$a_0 = n_1 a_1 + a_2 \quad , \quad 0 \leq a_2 < a_1 \quad (1)$$

ملاحظه کردیم که اگر $a_1, a_2 = 0$ خود سه‌گه مناسب برای مقایسه a_0 و a_1 است. حال فرض کنید $a_2 \neq 0$. در اینجا a_2 را به حداکثر دفعات ممکن در a_1 می‌گجانیم یعنی بزرگترین عدد طبیعی n_2 را انتخاب می‌کنیم که $n_2 a_2 \leq a_1$ پس:

$$a_1 = n_2 a_2 + a_3 \quad , \quad 0 \leq a_3 < a_2 \quad (2)$$

اگر $a_3 = 0$ ، آنگاه a_1 مضرب صحیحی از a_2 است. از (۱) می‌بینیم که در این صورت a_0 نیز مضرب صحیحی از a_2 خواهد شد و بدین ترتیب a_2 سه‌گه مناسب برای سنجش a_0 و a_1 است. اگر $a_3 \neq 0$ ، دوره آثار افلاطون (جلد پنجم و هفتم)، ترجمه محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۵۷).

این فرایند را ادامه داده می‌نویسیم:

$$a_2 = n_3 a_3 + a_4, \quad 0 \leq a_4 < a_3 \quad (3)$$

که در آن n_3 یک عدد طبیعی است. مجدداً اگر $a_4 = 0$ با دنبال کردن (۳)، (۲) و (۱) می‌بینیم که a_3 سه‌گه‌ای برای سه‌جش a_1 و a_0 است و گرنه ادامه می‌دهیم. ادعا می‌کنیم:

(۱-۱) گزاره. a_1 و a_0 همسگ هستند اگر و تنها اگر فرایند بالا در تعدادی متناهی گام به باقیماندهٔ صفر برسد، یعنی عدد طبیعی k وجود داشته باشد که $n_k a_k = a_{k-1}$ ، عدد طبیعی. در این صورت a_k سه‌گه‌ای برای سه‌جش a_1 و a_0 است.

اثبات. اگر فرایند فوق در k گام به صفر برسد داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_0 = n_1 a_1 + a_2, & 0 < a_2 < a_1 \quad \text{عدد طبیعی } n_1 \\ a_1 = n_2 a_2 + a_3, & 0 < a_3 < a_2 \quad \text{عدد طبیعی } n_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-2} = n_{k-1} a_{k-1} + a_k, & 0 < a_k < a_{k-1} \quad \text{عدد طبیعی } n_{k-1} \\ a_{k-1} = n_k a_k & \text{عدد طبیعی } n_k \end{array} \right. \quad (4)$$

رابطهٔ آخر نشان می‌دهد a_{k-1} مضرب صحیحی از a_k است؛ پس از رابطهٔ یکی به آخر a_{k-2} مضربی از a_k است، و به همین ترتیب با صعود به دو رابطهٔ اول نتیجه می‌شود که a_1 و a_0 هر دو مضرب صحیحی از a_k هستند، یعنی a_k سه‌گه‌ای برای سه‌جش a_1 و a_0 است. بالعکس فرض کنید a_1 و a_0 همسگ باشند، در این صورت عددی $u > 0$ به عنوان سه‌گه وجود دارد که a_1 و a_0 هر دو مضرب صحیحی از u هستند. از رابطهٔ اول بالا نتیجه می‌شود که a_2 نیز مضربی صحیح از u است، سپس از رابطه بعد a_3 مضربی صحیح از u است، و به همین ترتیب اگر ثابت شده باشد که a_0, a_1, \dots, a_p مضرب صحیح u هستند و رابطهٔ بعدی به شکل

$$a_{p-1} = n_p a_p + a_{p+1}$$

باشد، نتیجه می‌گیریم که $a_{p+1} = a_{p-1} - n_p a_p$ مضرب صحیحی از u است. حال اگر این فرایند به باقیماندهٔ صفر نرسد، دنباله باقیمانده‌ها به صورت نزولی زیر است:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

که در اینجا همهٔ a_j ها مضرب صحیحی از عدد مثبت u می‌باشد. چنین وضعیتی غیرممکن است زیرا که بین دو عدد u و a_1 فقط تعدادی متناهی مضرب صحیح u می‌گردد. این امر نشان می‌دهد که اگر a_0 و a_1 همسگ باشند، فرایند بالا بالاخره به باقیمانده صفر می‌رسد و آخرین مقسوم‌علیه به دست آمده سه‌گانه لازم است. \square

با اتکاء به مطلب بالا و استدلالی هندسی، هیپاسوس نشان داد نسبت‌های قطر و ضلع پنج ضلعی منتظم همسگ نیستند بدین ترتیب که اگر فرایند فوق برای آنها پیاده شود هیچگاه به باقیمانده صفر نمی‌رسیم. به شکل (۲) توجه کنید. از تساوی زوایای داخلی و اضلاع پنج ضلعی منتظم مشاهده می‌کنیم که هر قطر موازی ضلعی است که از هیچ یک از دو انتهای آن نمی‌گذرد: $AC \parallel ED$ ، $BE \parallel CD$ ، بنابراین مثلث‌های ABC و $EB'D$ به اضلاع دو به دو موازی متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB'}{ED}$$

طول قطر پنج ضلعی را a_0 و طول ضلع آن را a_1 می‌نامیم. از آنجا که زوایای داخلی پنج ضلعی باز هستند (108°) داریم $a_0 > a_1$. چون چهارضلعی $ABCB'$ متوازی‌الاضلاع است داریم $EB' = a_0 - a_1$. پس

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_0 - a_1}{a_1}$$

$a_0 - a_1$ را به a_2 نمایش می‌دهیم. داریم $a_2 < a_1$ زیرا که در مثلث $EB'D$ هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. پس:

$$a_0 = 1 \cdot a_1 + a_2, \quad 0 < a_2 < a_1$$

حال $a_1 - a_2$ را به a_3 نمایش می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که a_3 برابر طول پنج ضلعی منتظم کوچک $A'B'C'D'E'$ است زیرا که طول AB' برابر a_1 و طول AC' برابر a_2 است. از طرفی دیگر طول قطر

$A'B'C'D'E'$ برابر a_2 است زیرا که اگر از A' به D' و C' وصل کنیم متوازی الاضلاعی ایجاد می‌شود
 $A'D'$ و AD هر دو موازی BC هستند؛ $A'C'$ و AC هر دو موازی DE (باین $a_2 < a_3$ و داریم:

$$a_1 = 1 \cdot a_2 + a_3, \quad 0 < a_3 < a_2$$

حال اگر پنج ضلعی منظم $A'B'C'D'E'$ به ضلع a_3 و قطر a_2 را در نظر بگیریم، مجدداً وضعیت
 پنج ضلعی متشابه $ABCDE$ با طول ضلع و طول قطر به ترتیب a_1 و a_0 تکرار می‌شود، یعنی خواهیم
 داشت

$$a_2 = 1 \cdot a_3 + a_4, \quad 0 < a_4 < a_3$$

$$a_3 = 1 \cdot a_4 + a_5, \quad 0 < a_5 < a_4$$

به طور کلی اگر a_i ها تا a_n تعریف شده باشد، با تعریف $a_{n+1} = a_{n-1} - a_n$ و با توجه به اینکه
 همواره با رسم کردن قطرهای پنج ضلعی منظم یک پنج ضلعی منظم دیگر در درون پنج ضلعی پدید
 می‌آید خواهیم داشت:

$$a_{n-1} = 1 \cdot a_n + a_{n+1}, \quad 0 < a_{n+1} < a_n$$

بدین ترتیب در وضعیت گزاره ۱-۱ هستیم و در شقی که هرگز باقیمانده به صفر نمی‌رسد، پس a_0 و
 a_1 همسگ نیستند، یا به عبارت دیگر $\frac{a_0}{a_1}$ ناگویا است!

تمرین ۱. نشان دهید $\frac{a_0}{a_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. این نسبت به نسبت طلایی معروف است و خواص ریاضی جالب
 توجهی دارد که بعضی از دوران باستان شاخته شده بودند. بالاخص یونانیان “زیباترین” مستطیل از
 نظر تناسب اضلاع را، مستطیلی می‌دانستند که نسبت طول به عرض آن برابر نسبت طلایی باشد.
 نشان دهید این مستطیل‌ها، و فقط این مستطیل‌ها، این ویژگی را دارند که اگر از آنها یک مربع به ضلع
 عرض مستطیل داده شده برداشته شود، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه است.

تمرین ۲. نشان دهید اگر عدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، \sqrt{n} ناگویا است. (راه‌مایی: از تجزیه
 اعداد طبیعی به عوامل اول استفاده کنید.)

در اینجا باید به این مطلب اشاره شود که نظام عددنویسی متداول امروز به صورت اعشاری (یا هر مبادی دیگر) در زمان یونان باستان وجود نداشت. یک نسبت گویا که مطابق (۱-۱) در k گام به سه گه می‌رسد به صورت زیر نمایش داده می‌شد:

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}} \quad (5)$$

چنین عبارتی را یک کسر مسلسل متاهی (یا مختومه) می‌نامد. توجه کنید که طبق (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= n_1 + \frac{a_2}{a_1} = n_1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{a_3}{a_2}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} \end{aligned}$$

و با ادامه استفاده از (۴) به (۵) می‌رسیم. در مورد نسبت‌های ناگویا کسر مسلسل مختومه نمی‌شود. مثلاً در مورد نسبت طلایی نمایش زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots 1 + \dots}}} \quad (6)$$

کسرهای مسلسل امروزه نیز در ریاضیات کاربردهای مهم دارند، نه برای نمایش روزمره اعداد، بلکه به منظور محاسبات تقریبی دقیق و نیز در پاره‌ای مقولات نظری.

با روش امروزی عددنویسی (به پایه ۱۰ یا هر پایه دیگر)، می‌توان رهیافت ساده‌ای برای اثبات وجود نسبت‌های ناگویا مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نسبت $\frac{m}{n}$ ، m و n دو عدد طبیعی، را به صورت اعشاری بویسیم. به روش معمولی تقسیم اگر m بر n بخش پذیر باشد که به یک عدد طبیعی می‌رسیم. و گرنه، پس از استفاده از همه ارقام m ، باقیمانده‌ای حاصل می‌شود که از n کوچکتر و از صفر بزرگتر است. در این صورت با افزودن یک صفر به طرف راست باقیمانده به عمل تقسیم ادامه می‌دهیم. هر بار عددی کوچکتر از به عنوان باقیمانده به دست می‌آید. اگر این باقیمانده زمانی صفر شود به عددی به شکل $c_0/c_1c_2\dots c_k$ رسیده‌ایم به معنای

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k}$$

است. اگر باقیمانده هیچگاه صفر نشود، هر باقیمانده باید یکی از اعداد $1, 2, \dots, n-1$ باشد، بنابراین قطعاً با n بار تکرار، باقیمانده‌ای برای بار دوم ظاهر خواهد شد. از آن پس ارقام اعشاری به صورت اولین ظهور این باقیمانده تکرار خواهد شد. بنابراین اگر نمایش اعشاری $\frac{m}{n}$ مختومه نشود، ارقام پس از اعشار ملاً به صورت تائویی تکرار خواهد شد. بنابراین هر کسر اعشاری که ملاً تائویی نباشد نمی‌تواند نمایشگر یک عدد گویا باشد. بدین ترتیب، مثلاً:

$$0/10100100010000100001\dots$$

که در آن طول بلوک‌های صفر هر بار یکی نسبت به قبلی افزایش می‌یابد و امکان تائوب در آن وجود ندارد برابر هیچ کسر $\frac{m}{n}$ نیست. تنها سؤالی که می‌ماند این است که آیا عبارت بالا واقعاً یک “عدد” است؟ یا به طور کلی، آیا می‌توان هر عبارت به شکل

$$c_0/c_1c_2c_3\dots$$

که در آن c_0 یک عدد صحیح نامفی و بقیه c_i ها رقم (یعنی اعداد ۰ تا ۹) هستند یک “عدد” تلقی کرد؟ برای پاسخ به این سؤال لازم است که مفهوم “عدد” به طور دقیق‌تر بررسی شود و این در جلسه آینده انجام خواهد شد.