# اعداد حقیقی (۲)

صحبت جلسه گذشته با این سؤال به پایان رسید که اگر $c_{\circ}$ یک عدد طبیعی یا صفر باشد و هر $c_i$، $i = ۱, ۲, \ldots$، یک رقم، یعنی عددی از مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, ۹\}$، آیا می‌توان عبارت:

$$c_{\circ}/c_{۱}c_{۲}c_{۳}\ldots \tag{۱}$$

را یک "عدد" تلقی کرد؟ برای اینکه این سؤال معنی داشته باشد باید دو چیز روشن شود:

الف) مقصود از عبارت بالا چیست؟

ب) مقصود از یک عدد چیست؟

در مورد سؤال (ب)، جواب ریاضیدانان باستان را می‌دانیم و فعلاً همین جواب را مبنا قرار می‌دهیم. مقصود از یک عدد، نسبت طول‌های دو پاره‌خط است. بالاخص اگر پاره‌خطی را به عنوان واحد انتخاب و تثبیت کنیم، طول‌های همهٔ پاره‌خط‌های ممکن، مجموعهٔ اعداد (مثبت) را تشکیل می‌دهند. به این ترتیب اگر نیم‌خطی $H$ انتخاب کنیم، مبدأ آن را ۰ بنامیم و نقطه‌ای دیگر را به عنوان نقطهٔ واحد، ۱، اختیار کنیم، تناظری یک به یک میان نقاط این نیم‌خط و اعداد (مثبت) منظور می‌شود. بدین ترتیب که هر نقطهٔ $c$ روی این نیم‌خط، پاره‌خطی از ۰ تا $c$ تعریف می‌کند (شکل ۱) که طول این پاره‌خط نسبت به واحد اختیار شده عدد متناظر است. البته در اینجا ادراک هندسی، شهودی قابل اعتماد تلقی می‌گردد. بدین ترتیب فرض می‌کنیم در مورد مفهوم خط راست و طول مناقشه‌ای نیست، برداشت همهٔ انسان‌ها از این مفاهیم یکسان است، و کارکردن با این مفاهیم به مشکل منطقی منجر

نمی‌شود. باید توجه داشت که از نظر دانشمندان باستان، هندسه یک شاخهٔ علم طبیعی بود و اصول متعارف متکی بر ادراک انسان مجاز شمرده می‌شدند.

در مورد (الف)، اکنون کوشش خواهیم کرد برای (۱) معنایی قایل شویم. اگر به جای سه نقطه (ادامه نامحدود) در (۱) عبارت $c_۰/c_۱\dots c_n$ را در نظر بگیریم، این عبارت مفهومی دقیق و روشن دارد:

$$C_n = c_۰/c_۱\dots c_n = c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_n}{۱۰^n}$$

یک $n$ خاص تثبیت می‌کنیم. اگر عبارت (۱) یک عدد باشد، این عدد قطعاً باید دست کم به اندازهٔ $C_n$ باشد زیرا که افزودن ارقام $c_{n+۱}$ به بعد نمی‌تواند آن را کوچکتر سازد. ولی عددی که ممکن است توسط (۱) بیان شود حداکثر چقدر بزرگتر از $C_n$ می‌تواند باشد؟ این عدد نمی‌تواند از $\frac{۱}{۱۰^n}$ بزرگتر از $C_n$ باشد زیرا که در آن صورت می‌بایست رقم $n$ ام پس از اعشار از $c_n$ بزرگتر شود. بنابراین:

$$C_n \le c_۰/c_۱c_۲c_۳\dots \le C_n + \frac{۱}{۱۰^n} \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۲) باید به‌ازای هر $n$ برقرار باشد. بدین ترتیب $c_۰/c_۱c_۲c_۳\dots$، در صورت وجود، عددی است که در نامساوی (۲) به‌ازای هر $n$ صدق می‌کند، $n = ۰, ۱, ۲, \dots$.

**(۲—۱) لم.** حداکثر یک عدد ممکن است در نامساوی (۲) به‌ازای هر $n$ صدق کند.

**اثبات.** اگر دو عدد $c$ و $c'$ وجود داشته باشند که به‌ازای هر $n$ در بازهٔ $[C_n, C_n + \frac{۱}{۱۰^n}]$ قرار گیرند، فاصلهٔ این دو عدد از هر $\frac{۱}{۱۰^n}$ کوچکتر است. چون با بزرگ گرفتن $n$، $\frac{۱}{۱۰^n}$ را می‌توان به دلخواه کوچک ساخت، فاصله $c$ و $c'$ باید از هر عددی کوچکتر باشد، پس $c = c'$. □

اکنون می‌بینیم که وجود عددی با ویژگی (۲) متضمن چیست. چنین عددی باید در همهٔ بازه‌های $[C_n, C_n + \frac{۱}{۱۰^n}]$ قرار گیرد. توجه کنید که چون

$$C_۰ \le C_۱ \le C_۲ \le \cdots$$

$$C_۰ + ۱ \ge C_۱ + \frac{۱}{۱۰} \ge C_۲ + \frac{۱}{۱۰^۲} \ge \cdots$$

این بازه‌ها تو در تو هستند:

$$\cdots \subset [C_۲, C_۲ + \frac{۱}{۱۰^۲}] \subset [C_۱, C_۱ + \frac{۱}{۱۰}] \subset [C_۰, C_۰ + ۱]$$

هر بازه طولی $\frac{۱}{۱۰}$ بازهٔ سمت راست خود دارد و عدد فرضی $c_۰/c_۱c_۲\ldots$ باید در همهٔ این بازه‌ها قرار گیرد. شهود ما از "پیوسته بودن" نیم‌خط $H$ حکم می‌کند که این دنبالهٔ انقباضی بازه‌های بسته باید به یک تک نقطه روی نیم‌خط $H$ متقارب شود که باید به ناچار همان نقطهٔ $c_۰/c_۱c_۲\ldots$ باشد که در همهٔ این بازه‌ها قرار دارد. این تصور هندسی قابل اثبات نیست بلکه جزیی از ادراک ما از پیوسته بودن خط راست است. به این دلیل این حکم را به عنوان یک اصل وضع می‌کنیم:

**(۲—۲) اصل تمامیت (صورت اول).** عددی (منحصر به فرد) وجود دارد که در همهٔ نامساوی‌های (۲)، به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$، صدق می‌کند. (در واقع به زودی خواهیم دید که، بالعکس، هر نقطهٔ روی $H$ نمایشی به شکل $c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$، مختوم یا نامختوم، دارد).

بدین ترتیب، طبق اصل تمامیت، $c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ نمایشگر یک عدد (و فقط یک عدد، طبق لم ۲—۱) است. همچنان که در جلسهٔ قبل دیدیم در میان این اعداد فقط آنهایی که مختومه هستند، یعنی $c_n = ۰$ از یک $n$ به بعد، و آنهایی که مالاً متناوب می‌شوند نمایشگر اعداد گویا، یعنی کسرهای $\frac{m}{n}$، $m, n$ عدد طبیعی، هستند. سایر اعداد را ناگویا یا اصم می‌نامند. بنابراین با اتکاء به اصل تمامیت می‌توان اعداد ناگویای فراوانی ارائه کرد.

نکتهٔ زیر، که به عنوان مثال ارائه می‌شود، نتیجه مستقیم اصل تمامیت و لم ۲—۱ است:

**مثال.** می‌خواهیم عدد زیر را بررسی کنیم:

$$۱/۹۹۹\ldots$$

پس در اینجا $c_۰ = ۱$ و $c_i = ۹$ به‌ازای هر $i \geq ۱$. طبق اصل تمامیت این قطعاً یک عدد است و در همهٔ نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$۱/\underbrace{۹\ldots۹}_{n} \leq ۱/۹۹۹\ldots \leq ۱/\underbrace{۹\ldots۹}_{n} + \frac{۱}{۱۰^n} = ۲ \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

از طرفی دیگر عدد ۲ نیز در همین نامساوی به‌ازای هر $n$ صدق می‌کند. بنابراین طبق ۲—۱ داریم:

$$۱/۹۹۹\ldots = ۲$$

**تمرین.** فرض کنید $c_n < ۹$ و $c_i = ۹$ به‌ازای هر $i > n$. به روش مثال قبل ثابت کنید عدد

$$c_۰/c_۱ \ldots c_n ۹۹۹\ldots$$

برابر $c_۰/c_۱\ldots c_{n-۱}(c_n + ۱)$ است.

در اینجا لازم است برای تکمیل بحث نشان دهیم هر عدد، یعنی هر عضو $H$، به صورت اعشاری مختوم یا نامختوم قابل نمایش است. اگر $c$ عضوی از $H$ باشد، دو عدد صحیح متوالی $c_۰$ و $c_۰ + ۱$ می‌توان یافت که $c_۰ \leq c < c_۰ + ۱$. اگر بازهٔ $[c_۰, c_۰ + ۱[$ را به صورت زیر به ۱۰ زیربازهٔ مجزا تجزیه کنیم:

$$[c_۰, c_۰ + \frac{۱}{۱۰}[\cup[c_۰ + \frac{۱}{۱۰}, c_۰ + \frac{۲}{۱۰}[\cup\cdots\cup[c_۰ + \frac{۹}{۱۰}, c_۰ + ۱[$$

عدد $c$ در یک و تنها یکی از این ۱۰ بازه قرار دارد، مثلاً $c$ عضو $[c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰}, c_۰ + \frac{c_۱+۱}{۱۰}[$، $c_۱ = ۰, ۱, \ldots, ۹$، است. که در این صورت می‌توان نوشت:

$$c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} \leq c \leq c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰}$$

به همین ترتیب بازهٔ $[c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰}, c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰}[$ را به ۱۰ بازهٔ به طول $\frac{۱}{۱۰۰}$ تجزیه کرده و نتیجه می‌گیریم که رقمی $c_۲$ وجود دارد به طوری که:

$$c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \frac{c_۲}{۱۰۰} \leq c \leq c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \frac{c_۲}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰}$$

با ادامهٔ این عمل، اگر در گامی، $c$ دقیقاً برابر نقطهٔ انتهایی سمت چپ شود، مثلاً $c = c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_k}{۱۰^k}$، داریم $c = c_۰/c_۱\ldots c_k$. در غیر این صورت این فرایند متوقف نمی‌شود و خواهیم داشت:

به‌ازای هر $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$

$$\begin{aligned} c_۰ + \tfrac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \tfrac{c_n}{۱۰^n} \leq c \quad &< \quad c_۰ + \tfrac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \tfrac{c_n}{۱۰^n} + \tfrac{۱}{۱۰^n} \\ &\leq \quad c_۰ + \tfrac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \tfrac{c_n}{۱۰^n} + \tfrac{۱}{۱۰^n} \end{aligned}$$

عددی که در هر همهٔ این نامساوی‌ها صدق کند، طبق تعریف به $c_0/c_1c_2c_3\ldots$ نمایش دادیم.

معمولاً اصل تمامیت به شکل معادل دیگری ارائه می‌شود که مجردتر است، کلی‌تر به نظر می‌رسد و وابستگی ظاهری (۲—۲) به مبنای عددنویسی ۱۰ را ندارد. ضمن ارائه این صورت اصل تمامیت، نشان خواهیم داد که در واقع دو صورت معادل‌اند. توجه داشته باشید که تصویر هندسی ما از مجموعه اعداد، اکنون نقاط روی یک نیم‌خط $H$ است. نقطهٔ آغازی این نیم‌خط را $\bar{0}$ نامیدیم و امتداد نیم‌خط را معمولاً به طرف راست می‌گیریم (شکل ۱). به این ترتیب رابطهٔ ترتیبی $a < b$ از نظر هندسی بدین معنی است که $b$ در طرف راست $a$ قرار دارد. از این پس از نماد متداول برای بازه‌ها نیز استفاده خواهیم کرد. بدین ترتیب اگر $a$ و $b$ در $H$ باشند، $[a,b] = \{x \in H \mid a \le x \le b\}$، $[a,b[= \{x \in H \mid a \le x < b\}$ و به همین ترتیب $]a,b]$ و $]a,b[$ تعریف می‌شوند. اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از $H$ باشد، عدد $M$ را یک کران بالا برای $S$ می‌نامیم در صورتی که:

$$M \ge s \text{ برای هر عضو } s \text{ از } S$$

بعضی زیرمجموعه‌های $S$ دارای کران بالایی هستند و بعضی نیستند. مثلاً برای هر یک از دو بازه $[a,b]$ و $]a,b[$، هر عدد $M$ که $M \ge b$ یک کران بالایی برای مجموعه است، ولی مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, \ldots\}$ کران بالایی ندارد. عدد $M_0$ را کوچکترین کران بالایی برای مجموعهٔ $S$ می‌نامیم در صورتی که:

الف) $M_0$ یک کران بالا برای $S$ باشد.

ب) به‌ازای هر کران بالای $M$ برای مجموعهٔ $S$ داشته باشیم $M_0 \le M$.

توجه کنید که، در صورت وجود، کوچکترین کران بالا منحصر به فرد است زیرا که اگر $M_0$ و $M_1$ هر دو کوچکترین کران بالا برای مجموعهٔ $S$ باشند باید داشته باشیم $M_0 \le M_1$ و $M_1 \le M_0$، پس $M_1 = M_0$.

(۲—۳) اصل تمامیت (صورت دوم). اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی $S$ از $H$ کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای $S$ یک کوچکترین کران بالایی (منحصر به فرد) وجود دارد.

لازم به تذکر است که کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ $S$ ممکن است عضو $S$ باشد یا نباشد. مثلاً برای هر دو مجموعهٔ $[۱,۲]$ و $]۱,۲[$، عدد ۲ کوچکترین کران بالا است که عضو $[۱,۲]$ می‌باشد ولی عضو $]۱,۲[$ نیست.

اکنون نشان می‌دهیم که دو صورت اصل تمامیت معادل هستند به این مفهوم که اگر هر یک را بپذیریم، دیگری از اصل پذیرفته شده قابل اثبات است.

نخست نشان می‌دهیم صورت اول، صورت دوم را نتیجه می‌دهد. بدین ترتیب $S$ را مجموعه‌ای ناتهی از $H$ می‌گیریم که کران بالایی دارد و برای آن کوچکترین کران بالایی را ارائه می‌کنیم. هر عضو $S$ را به صورت اعشاری نمایش می‌دهیم. چون $S$ کران بالا دارد، در بین اجزاء صحیح این نمایش‌های اعشاری بزرگترین وجود دارد (در غیر این صورت برای هر عدد طبیعی $n$، $S$ عضوی بزرگتر از $n$ خواهد داشت و $S$ دارای کران بالایی نخواهد بود). بزرگترین جزء صحیح در میان اعضای $S$ را $c_۰$ می‌نامیم. حال $S_۱$ را زیرمجموعهٔ $S$ می‌گیریم که از اعضای با جزء صحیح $c_۰$ تشکیل شده است و به رقم اول پس از اعشار اعضای $S_۱$ نگاه می‌کنیم. این رقم باید یکی از اعداد $۰,۱,\dots,۹$ باشد. بزرگترین رقم اول پس از اعشار موجود میان اعضای $S_۱$ را $c_۱$ می‌نامیم. حال $S_۲$ را زیرمجموعهٔ $S_۱$ می‌گیریم که اعضایش با $c_۰/c_۱$ شروع می‌شوند و به رقم دوم پس از اعشار در میان عناصر $S_۲$ نگاه می‌کنیم. بزرگترین رقم موجود را $c_۲$ می‌نامیم و عمل بالا را ادامه می‌دهیم. حال $c = c_۰/c_۱c_۲c_۳\dots$ طبق اصل تمامیت یک عدد است و از روش ساخت $c$ مشخص است که:

$$c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\dots+\frac{c_n}{۱۰^n}\le c\le c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\dots+\frac{c_n}{۱۰^n}+\frac{۱}{۱۰^n}\qquad \text{برای هر } n=۰,۱,۲,\dots$$

ادعا می‌کنیم $c$ کوچکترین کران بالایی برای مجموعهٔ $S$ است. اینکه $c$ کران بالایی برای $S$ است از نامساوی‌های سمت چپ نتیجه می‌شود، در واقع در هر مرحله رقم $n$ ام $c$ بزرگترین رقم موجود در بین عناصر $S$ انتخاب شد. به علاوه کران بالایی کوچکتری از $c$ برای $S$ وجود ندارد زیرا که اگر $c' = c'_۰/c'_۰c'_۱c'_۲\dots$ کوچکتر از $c = c_۰/c_۱c_۲c_۳\dots$ باشد، در یک مرحله رقم متناظر، $c'_n$، باید کوچکتر از $c_n$ باشد. اگر این رویداد برای اولین بار به‌ازای $n = k$ رخ دهد، عناصری از $S$ وجود دارند که رقم $k$ ام آنها بزرگتر از $c'_k$ است، پس $c'$ از بعضی عناصر $S$ کوچکتر است و نمی‌تواند کران بالا برای $S$

باشد.

بالعکس ثابت می‌کنیم صورت دوم اصل تمامیت، صورت اول را نتیجه می‌دهد. یعنی ثابت می‌کنیم هرگاه $c_۰$ یک عدد صحیح از مجموعه $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ باشد و $c_i$ ها یک مجموعهٔ ارقام، یعنی اعضای مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, ۹\}$، آنگاه عددی $c$ وجود دارد که:

$$c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_n}{۱۰^n} \leq c \leq c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_n}{۱۰^n} + \frac{۱}{۱۰^n} \quad n = ۰, ۱, ۲, \ldots \text{ برای هر } \quad (۳)$$

برای این کار، مجموعهٔ $T$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \{c_۰, c_۰/c_۱, c_۰/c_۱c_۲, \ldots\}$$

این مجموعه کران بالا دارد (مثلاً $c_۰ + ۱$)، پس طبق صورت دوم اصل تمامیت، دارای کوچکترین کران بالایی است که به $c$ نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم این عدد $c$ در نامساوی‌های (۳) صدق می‌کند. اینکه $c$ کران بالایی برای $S$ است نشان می‌دهد $c$ از هیچ یک از $c_۰/c_۱ \ldots c_n$ها کوچکتر نیست، یعنی نامساوی‌های سمت چپ برقرارند. حال اگر نامساوی‌های سمت راست برقرار نباشند عدد صحیحی $k$ وجود دارد که

$$c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_k}{۱۰^k} + \frac{۱}{۱۰^k} < c$$

ولی $c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_k}{۱۰^k} + \frac{۱}{۱۰^k}$ از همهٔ عناصر $T$ بزرگتر است (توجه کنید که $۰/۰ \ldots ۰c_{k+۱} \ldots c_n < \frac{۱}{۱۰^k}$) بنابراین یک کران بالایی برای $T$ کوچکتر از $c$ یافت شده است که خلاف انتخاب $c$ به عنوان کوچکترین کران بالایی $T$ است. بدین ترتیب صورت اول اصل تمامیت از صورت دوم نتیجه می‌شود.

در اینجا لازم است از "اعداد منفی" نیز صحبت شود. از نظر تاریخی پذیرفتن اعداد منفی به عنوان عدد قرن‌ها طول کشید و در واقع اعداد منفی کمابیش همراه با "اعداد موهومی" که در جلسات بعد مطرح خواهند شد در قرن شانزدهم میلادی طی توسعه بیشتر علم جبر به عنوان "عدد" پذیرفته شدند. ساده‌ترین راه معرفی اعداد منفی تداوم نیم‌خط $H$ به سوی چپ به یک خط راست کامل است. قرینهٔ

هر عضو $x$ در $H$ را به "$-x$" نمایش می‌دهیم، عملیات جبری مأنوس را اعمال می‌کنیم و رابطه ترتیب $a < b$ به معنای $a$ در طرف چپ $b$ قرار دارد را منظور می‌کنیم. مجموعهٔ اعداد مثبت، منفی و صفر که بدین طریق به‌دست می‌آیند مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌نامیم و به $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. صورت دوم اصل تمامیت را می‌توان عیناً برای اعداد حقیقی نوشت:

**(۲—۴) اصل تمامیت برای** $\mathbb{R}$.اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی $S$ از $\mathbb{R}$ کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای $S$ یک کوچکترین کران بالایی وجود دارد.

اینکه (۲—۴) از (۲—۳) نتیجه می‌شود به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. به علاوه می‌توان مفهوم کران پایین و بزرگترین کران پایین را نیز با وارونه کردن نامساوی‌ها تعریف کرد و حکم زیر را نتیجه گرفت:

**(۲—۴)** اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی $S$ از $\mathbb{R}$ کران پایینی وجود داشته باشد، آنگاه برای $S$ بزرگترین کران پایینی وجود دارد.

**تمرین.** (۲—۵) را از (۲—۴) نتیجه بگیرید (راهنمایی. مجموعهٔ $S'$ را در نظر بگیرید که از کلیهٔ "$-x$" ها، به‌ازای $x \in S$، تشکیل شده است).

**تمرین.** نشان دهید کران بالایی $A$ برای مجموعهٔ $S$ کوچکترین کران بالایی است $A$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد طبیعی $n$، عضوی از $s$ از $S$ وجود داشته باشد که $s > A - \frac{1}{10^n}$.

هرگاه $a$ و $b$ اعداد حقیقی باشند، بازه‌های $[a,b]$، $[a,b[$، $]a,b]$ و $]a,b[$ عیناً مانند قبل تعریف می‌شوند. مقصود از $[a,\infty[$ مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$ و مقصود از $]-\infty,a]$ مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$ است. به همین ترتیب مجموعه‌های $]a,\infty[$ و $]-\infty,a[$ تعریف می‌شوند.