دو قضیهٔ اساسی

در جلسهٔ قبل دیدیم که قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال رابطه‌ای تنگاتنگ میان مفهوم انتگرال و مفهوم تابع اولیه بیان می‌کند. از این رو تابع اولیه گاهی انتگرال نامعین نیز خوانده می‌شود. این ارتباط موجب می‌شود که به‌ازای هر قاعدهٔ مشتقگیری یک قاعدهٔ متناظر انتگرال‌گیری وجود داشته باشد. در این جلسه قواعد انتگرال متناظر با قاعدهٔ مشتق حاصل‌ضرب و قاعدهٔ زنجیره‌ای را که به ترتیب به "قاعدهٔ انتگرال جزء به جزء" و "فرمول تعویض متغیر انتگرال" معروفند بیان و ثابت می‌کنیم.

نخست یک نماد متداول را معرفی می‌کنیم. برای تابع انتگرال‌پذیر $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ انتگرال f روی $[a,b]$ را به $\int_a^b f$ نمایش دادیم. به جای $\int_a^b f$ بسیاری اوقات $\int_a^b f(x)dx$، $\int_a^b f(t)dt$ یا به طور کلی $\int_a^b f(*)d*$ به‌کار می‌رود، که در اینجا مقصود از x، t یا $*$ حرفی است که برای نمایش عناصر $[a,b]$ به‌کار می‌رود. همان‌طور که نماد دیفرانسیل منجر به نمایش سودمند قاعدهٔ زنجیره‌ای به شکل $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ قابل استفاده گردید، خواهیم دید که این شیوهٔ نمادگذاری منجر به بیانی به ذهن ماندنی از فرمول تعویض متغیر انتگرال خواهد شد. نکتهٔ قابل تأکید در مورد $\int_a^b f=\int_a^b f(x)dx$ این است که در هر دوی $f(x)$ و dx از یک حرف x برای متغیر استفاده می‌شود. با این نمادگذاری، تابع‌های اولیهٔ f به $\int f(x)dx$ نمایش داده می‌شوند.

حال فرمول لایب نیتس برای مشتق حاصل‌ضرب دو تابع مشتق‌پذیر را یادآوری می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad (۱)$$

اگر f' و g' روی بازهٔ $[a,b]$ وجود داشته و پیوسته باشند، طبق قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x) &= \int_a^b \frac{d}{dx}(f(x)g(x))dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a)\end{aligned}$$

یا معادلاً:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \qquad (۲)$$

فرمول (۲) فرمول انتگرال جزء به جزء (برای انتگرال معین) خوانده می‌شود. نخست همین شرایط $f(x)g(x)$ یک تابع اولیه (انتگرال نامعین) برای $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ می‌شود، پس

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (۳)$$

که به فرمول انتگرال جزء به جزء برای انتگرال نامعین معروف است. وقتی قلمرو کلیهٔ تابع‌های بالا یک بازهٔ $[a,b]$ باشد، هر یک از انتگرال‌های نامعین فرمول (۳) با تقریب جمع یک عدد ثابت منظور می‌شود. فرمول (۳) بسیاری اوقات حربه نیرومندی برای یافتن تابع‌های اولیه است.

مثال ۱. می‌خواهیم تابع اولیه $\ln x$ روی $x > ۰$ را محاسبه کنیم. در $\int \ln x dx$، می‌نویسیم $f(x) = \ln x$ و $g'(x) = ۱$، بنابراین با گرفتن $g(x) = x$، داریم:

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x\ln x - \int \frac{۱}{x}x dx \\ &= x\ln x - x\end{aligned}$$

البته با افزودن یک ثابت به $x\ln x - x$ تابع اولیه دیگری روی $x > ۰$ برای $\ln x$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲. برای عدد صحیح مثبت n، می‌خواهیم تابع اولیهٔ $x^n e^x$ را به‌دست آوریم. با نوشتن $f(x) = x^n$، $g'(x) = e^x$ و $g(x) = e^x$ داریم:

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-۱} e^x dx$$

برای $n=1$، انتگرال سمت راست برابر e^x است و نتیجه xe^x-e^x به‌دست می‌آید. برای $n>1$ می‌توان از $\int x^{n-1}e^x dx$ با فرمول انتگرال جزء به جزء به $\int x^{n-2}e^x dx$ رسید و به همین ترتیب با n بار استفاده از فرمول جزء به جزء به نتیجه خواهیم رسید.

مثال ۳. می‌خواهیم $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ را محاسبه کنیم. با قرار دادن $f(x)=\sin x$، $g'(x)=e^x$ و $g(x)=e^x$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx &= e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx\end{aligned} \tag{4}$$

بدین ترتیب از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ به انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ رسیده‌ایم که از همان نوع است ولی یک بار استفاده دیگر از انتگرال جزء به جزء به طور غیر منتظره منجر به یافتن جواب می‌شود. این بار می‌گیریم $f(x)=\cos x$، $g(x)=g'(x)=e^x$، پس:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} - e^0 \cos 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx\end{aligned}$$

پس با جایگزینی در (۴) داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

و در نتیجه:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$$

اکنون به بحث پیرامون "فرمول تعویض متغیر انتگرال" می‌پردازیم.

(۴–۱) فرمول تعویض متغیر در انتگرال (صورت انتگرال نامعین) تابع‌های $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$، $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$، I و J بازه در $\mathbb{R}$، داده شده‌اند به طوری که $\phi(I) \subset J$، ϕ و F مشتق‌پذیر با مشتق

پیوسته‌اند و $F' = f$. در این صورت $F \circ \phi$ یک تابع اولیه برای $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ است:

$$\int (f \circ \phi) \cdot \phi' = F \circ \phi \tag{۵}$$

فرمول (۵) نتیجه مستقیم قاعدهٔ زنجیری است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F(\phi(t))) &= F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \end{aligned}$$

در واقع اگر بنویسیم $x = \phi(t)$، فرمول (۵) به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = F(x) \tag{٦}$$

مثال ۱. فرض کنید تابع ϕ در بازهٔ تعریف خود ناصفر با مشتق پیوسته است، در این صورت یک تابع اولیه برای $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ تابع $\ln|\phi(x)|$ است. کافی است در (٦) $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $F(x) = \ln|x|$ را جایگزین کنیم. به عنوان نمونه تابع اولیه‌ای برای $\tan\theta$، وقتی $\cos\theta \neq ۰$، تابع $-\ln|\cos\theta| = \ln|\cos\theta|$ است.

مثال ۲. به عنوان یک مثال نه چندان واضح، تابع اولیه $\frac{۱}{\sqrt{x^۳+x^۴}}$ را که دامنهٔ تعریف آن $\mathbb{R} - [-۱, ۰]$ است محاسبه می‌کنیم. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{\sqrt{x^۳ + x^۴}} &= \frac{۱}{x^۲} \cdot \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{x} + ۱}} \\ &= \frac{(\frac{۱}{x} + ۱)^{-\frac{۱}{۲}}}{x^۲} \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که $\frac{d}{dx}(\frac{۱}{x} + ۱) = -\frac{۱}{x^۲}$، پس اگر در فرمول (۵) جایگزینی‌های زیر را قرار دهیم:

$$\phi(x) = \frac{۱}{x} + ۱ \quad , \quad f(x) = x^{-\frac{۱}{۲}} \quad , \quad F(x) = ۲x^{\frac{۱}{۲}}$$

نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} \int \frac{۱}{\sqrt{x^۳ + x^۴}} dx &= -\int f(\phi(x))\phi'(x) dx \\ &= -۲\sqrt{\frac{۱}{x} + ۱} \end{aligned}$$

(۴—۲) جایگزینی متداول در عبارت‌های به شکل $\sqrt{\pm x^۲ \pm a^۲}$

در اینجا $a > ۰$ یک عدد حقیقی داده شده است. جایگزینی‌های زیر معمولاً در محاسبهٔ تابع اولیهٔ عبارت‌هایی که شامل $\sqrt{\pm x^۲ \pm a^۲}$ باشند، جوابگو هستند:

الف) $\sqrt{x^۲ + a^۲}$: جایگزینی $x = a\tan\theta$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{x^۲ + a^۲} = a|\sec\theta|$، و نیز جایگزینی $x = a\sinh t$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{x^۲ + a^۲} = a\cosh t$، که در هر دو حالت علامت $\sqrt{}$ از بین می‌رود.

ب) $\sqrt{-x^۲ + a^۲}$: جایگزینی $x = a\sin\theta$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{-x^۲ + a^۲} = a|\cos\theta|$.

ج) $\sqrt{x^۲ - a^۲}$: جایگزینی $x = a\sec\theta$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{x^۲ - a^۲} = a|\tan\theta|$ و جایگزینی $x = a\cosh t$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{x^۲ - a^۲} = a|\sinh t|$.

د) $\sqrt{-x^۲ + a^۲}$ حقیقی نیست و مطرح نمی‌شود.

لازم به ذکر است که هر عبارت درجه دوم $At^۲ + Bt + C$ را می‌توان پس از تکمیل مجذور به یکی از چهار شکل بالا تبدیل کرد.

بالاخره همان‌طور که در آغاز جلسه اشاره کردیم نماد دیفرانسیل در $\int f(x)dx$ به جای $\int f$ این ویژگی جالب توجه را دارد که فرمول تعویض متغیر به نوعی در آن نهفته است. همان‌طور که در (۵) عمل کردیم، اگر بنویسیم $x = \phi(t)$، فرمول (٦) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int f(\phi(t))\frac{dx}{dt}dt = \int f(x)dx \qquad (۷)$$

به این صورت، اگر محاسبهٔ $\int f(x)dx$ مطرح باشد، با جایگزینی بر حسب t، $x = \phi(t)$، باید به جای dx، $\frac{dx}{dt}dt$ را جایگزین نمود. در بررسی صورت انتگرال معین فرمول تعویض متغیر، به تعبیری هندسی از این فرمول اشاره خواهیم کرد.

(۴—۳) فرمول تعویض متغیر در انتگرال (صورت انتگرال معین) فرض کنید $\phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$، مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است، $\phi(\alpha) = a$ و $\phi(\beta) = b$، $\phi[\alpha, \beta] \subset I$، و $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی

مشتق‌پذیر با مشتق پیوستهٔ f است. در این صورت:

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx \qquad (۸)$$

صحت این فرمول را به این طریق مشاهده می‌کنیم: طبق ۴—۱، $F\circ\phi$ یک تابع اولیه برای $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ است، پس طبق قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt &= (F\circ\phi)(\beta)-(F\circ\phi)(\alpha)\\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}$$

که طرف راست مجدداً بنابر قضیهٔ اساسی برابر $\int_a^b f(x)dx$ است.

(۴—۴) **تعبیر هندسی فرمول تعویض متغیر در انتگرال معین** برای فرمول (۷) تعبیری هندسی ارائه می‌کنیم که در آینده مبنای درک فرمول تعویض متغیر در انتگرال‌های چند متغیری خواهد بود. برای سهولت نخست فرض کنید $f \geq ۰$ و ϕ یک تابع یک به یک است. بدین ترتیب $\int_a^b f(x)dx$ تعبیر مساحت زیر نمودار f را دارد و ϕ بازهٔ $[\alpha,\beta]$ را به طور یک به یک بر بازهٔ $[a,b]$ یا $[b,a]$ می‌نگارد، بسته به این که $a<b$ یا $b<a$. وقتی تابع یک به یک ϕ صعودی باشد (معادلاً وقتی $\phi'>۰$)، داریم $\phi[\alpha,\beta]=[a,b]$، و وقتی ϕ نزولی باشد (معادلاً وقتی $\phi'<۰$)، داریم $\phi[\alpha,\beta]=[b,a]$ (شکل ۱). حال نمودار تابع‌های $f\circ\phi$ و f را مقایسه می‌کنیم (شکل ۲، برای ϕ صعودی). توجه کنید که ارتفاع

شکل ۱

نمودار $f\circ\phi$ به‌ازای مقدار t از متغیر برابر ارتفاع نمودار f به‌ازای مقدار $x=\phi(t)$ از متغیر f است. اگر ناحیهٔ

شکل ۲

زیر نمودار را به صورت اجتماع پاره‌خط‌های قائم تجسم کنیم، می‌بینیم که یک تناظر یک به یک میان طول پاره‌خط‌ها در دو نمودار وجود دارد. با این حال نمی‌توان حکم کرد که $\int_\alpha^\beta f\circ\phi = \int_a^b f$ زیرا که مثلاً در شکل ۲ همان پاره‌خط‌های قائم روی دو قاعده به طول‌های نابرابر توزیع شده‌اند. خاصیت

ضریب ϕ' در فرمول $\int_\alpha^\beta (f\circ\phi)\cdot\phi' = \int_a^b f$ این است که تغییر طول پایه را با تغییر ارتفاع نمودار خنثی می‌کند به نحوی که مساحت زیر نمودار $f\circ\phi$ روی بازهٔ $[\alpha,\beta]$ برابر مساحت زیر نمودار f روی بازهٔ $[a,b]$ باقی می‌ماند. به طور دقیقتر، اگر $0<\phi'(t)<1$، ϕ یک بازهٔ کوچک حول t را به بازه‌ای کوچکتر حول $x=\phi(t)$ می‌نگارد، پس تقلیل ارتفاع $f\circ\phi$ با ضرب کردن در عدد کوچکتر از واحد $\phi'(t)$ موجب می‌شود که مساحت مربوط تغییر نکند. به همین ترتیب وقتی $\phi'(t)>1$ بازهٔ کوچکی حول t به بازهٔ بزرگتری حول x نگاشته می‌شود و ضرب کردن ارتفاع $f\circ\phi$ در عدد بزرگتر از واحد $\phi'(t)$ بزرگتر شدن قاعده را خنثی می‌کند.

مثال. فرض کنید f تابع ثابت با مقدار ۱ است و $\phi:[0,2]\longrightarrow[0,4]$ به صورت $\phi(t)=t^2$ تعریف می‌شود. در شکل ۳ نمودارهای f روی محور x و $f\circ\phi$ و $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ روی محور t و نیز نمودار ϕ نمایش داده شده‌اند. چون f تابع ثابت با مقدار یک است، $\int_0^4 f(x)dx=4$ و $\int_0^2 f(\phi(t))dt=2$. داریم $\phi'(t)=2t$. وقتی $t\in[0,\frac{1}{2}]$، داریم $0\le\phi'(t)\le 1$، پس ϕ زیربازه‌های $[0,\frac{1}{2}]$ را منقبض می‌کند

شکل ۳

زیرا که طبق قضیهٔ میانگین خواهیم داشت $|\phi(t_1)-\phi(t_2)|\le|t_1-t_2|$ هرگاه t_1 و t_2 در $[0,\frac{1}{2}]$ باشند. کل بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ به بازهٔ کوچکتر $[0,\frac{1}{4}]$ نگاشته می‌شود. مساحت زیر نمودار f روی بازهٔ $[0,\frac{1}{4}]$ نصف مساحت زیر نمودار $f\circ\phi$ روی بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ است. ضرب کردن در $\phi'(t)=2t$ برای $0\le t\le\frac{1}{2}$ مساحت مثلثی شکل نمایش داده شده را جایگزین مساحت زیر نمودار $f\circ\phi$ می‌کند که نصف آن مقدار را دارد. برعکس برای t_1، t_2 در $[\frac{1}{2},2]$، داریم $\phi'(t)\ge 1$ و $|\phi(t_1)-\phi(t_2)|\ge|t_1-t_2|$ و مساحت زیر $f\circ\phi$ روی $[t_1,t_2]$ کوچکتر از مساحت زیر f روی $[\phi(t_1),\phi(t_2)]$ است. در اینجا ضرب کردن در $\phi'(t)\ge 1$ مجدداً برابری را برقرار می‌کند.

به بحث کلی باز می‌گردیم. لازم است حالتی که ϕ نزولی است بررسی کنیم. در اینجا ϕ' منفی است پس نمودار $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ زیر محور t است و انتظار داریم مقداری منفی برای انتگرال به‌دست آید، ولی اینکه $\phi(\alpha)=a>b=\phi(\beta)$، یعنی حد بالای انتگرال کوچکتر از حد پایین انتگرال است علامت

منفی را خنثی می‌کند. می‌توان در این حالت نوشت:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\beta}^{\alpha} f(\phi(t))|\phi'(t)|dt = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

بدین ترتیب در این حالت نیز همان تحلیل حالت ϕ صعودی کارساز است. بالاخره توجه کنید که (۴–۳) بدون فرض یک به یک بودن ϕ برقرار است. چگونه می‌توان این مطلب را برحسب مقایسهٔ مساحت‌ها توجیه کرد؟ در اینجا اتفاقی که رخ می‌دهد این است که مقدار انتگرال روی بازه‌های صعود و نزول ϕ در $\int_{\alpha}^{\beta}(f\circ\phi)\cdot\phi'$ طوری همدیگر را خنثی می‌کنند که نتیجه برابر $\int_{a}^{b} f$ به‌دست می‌آید. مثال زیر موضوع را به خوبی بیان می‌کند.

مثال. فرض کنید $f:[۱,۴]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع ثابت با مقدار ۱ باشد و $\phi:[-۱,۲]\longrightarrow\mathbb{R}$، $\phi(t)=t^{۲}$. داریم $\alpha=-۱$، $\beta=۲$، $a=۱$، $b=۴$ و:

$$\int_{۱}^{۴} f(x)dx = ۳ \quad , \quad \int_{-۱}^{۲} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{-۱}^{۲}(۲t)dt = ۳$$

در شکل ۴ می‌بینیم که انتگرال‌های $\int_{-۱}^{۰}(۲t)dt$ و $\int_{۰}^{۱}(۲t)dt$ یکدیگر را حذف می‌کنند که اولی مربوط به نزول تابع ϕ $(\phi'<۰)$ و دومی مربوط به صعود ϕ $(\phi'>۰)$ است.

شکل ۳