خواص تابع‌های پیوسته (۲)

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. نقطهٔ $x_\circ$ از S را یک نقطهٔ بیشینه یا ماکسیمم برای تابع f می‌نامیم در صورتی که $f(x_\circ) \geq f(x)$ برای هر x در S. به همین ترتیب نقطه کمینه یا می‌نیمم به عنوان نقطه‌ای $x_\circ$ که در آن $f(x_\circ) \leq f(x)$، برای هر x در S، تعریف می‌شود. در حالت اول $f(x_\circ)$ را بیشینه یا ماکسیمم تابع f در S، و در حالت دوم، $f(x_\circ)$ را کمینه یا می‌نیمم تابع f در S می‌نامند.

به طور کلی، به دلایل مختلف، تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ ممکن است فاقد ماکسیمم یا می‌نیمم باشد. در شکل ۱ سه تابع نمایش داده شده‌اند. در (الف) تابع پیوسته نیست، به‌ازای مقادیر صحیح می‌نیمم تابع اتخاذ می‌شود ولی تابع ماکسیمم ندارد. در واقع تابع به دلخواه به کوچکترین کران بالایی مقادیر خود نزدیک می‌شود ولی به‌ازای هیچ نقطه دامنه برابر کوچکترین کران بالایی، یعنی $+1$، نمی‌شود. در (ب)، تابع پیوسته و صعودی است ولی از آنجا که دامنهٔ تابع یک بازهٔ باز است، تابع در هیچ نقطهٔ دامنه به کوچکترین کران بالایی خود یا بزرگترین کران پایینی نمی‌رسد. در (ج) نیز تابع پیوسته و صعودی است ولی در نزدیک شدن به دو انتهای بازه تابع بی‌کران می‌شود. برای تابعی که مجموعهٔ مقادیرش کران بالایی داشته باشد، نقطهٔ ماکسیمم نقطه‌ای در دامنه است که تابع این مقدار را بگیرد، و به همین ترتیب، برای تابعی که مجموعهٔ مقادیرش کران پایینی داشته باشد، نقطهٔ می‌نیمم نقطه‌ای از دامنه است که مقدار تابع در آن برابر بزرگترین کران پایینی باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که برای یک تابع پیوسته تعریف شده روی $[a, b]$، a, b عدد حقیقی، همواره نقطهٔ ماکسیمم و نقطهٔ می‌نیمم وجود دارد، بالاخص چنین تابعی لزوماً کراندار است.

(۱۲—۱) **قضیه.** هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای نقطهٔ ماکسیمم و می‌نیمم در $[a, b]$ است.

برهان این قضیه را نیز، مانند برهان قضیهٔ مقدار بینی در بخش پیش، نخست برای $[a,b]=[۰,۱]$ ارائه می‌کنیم. حالت کلی به روشی کاملاً مانند اثبات قضیهٔ مقدار بینی از همین حالت خاص نتیجه خواهد شد که این نتیجه‌گیری را به خواننده واگذار می‌کنیم.

برهان. فرض می‌کنیم $[a,b]=[۰,۱]$، $a=۰$، $b=۱$. نقاط بازهٔ $[۰,۱]$ را در مبنای ۲ می‌نویسیم. بدین ترتیب هر عضو $[۰,۱]$ نمایشی به شکل

$$c=۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$$

دارد که در آن c_i ها رقم ۰ یا ۱ هستند. نقطه‌ای با نمایش بالا جستجو می‌کنیم که نقطهٔ ماکسیمم تابع f باشد. مانند اثبات قضیهٔ مقدار بینی ارقام $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، ... را به ترتیب می‌سازیم ولی روش کار در اینجا از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. بازهٔ $[۰,۱]$ را به صورت اجتماع دو زیربازهٔ $[۰,\frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲},۱]$ در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم دست کم یکی از دو بازهٔ $[۰,\frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲},۱]$ ویژگی زیر را دارد:

(*) هیچ نقطهٔ $t_۰$ از این بازه وجود ندارد که به‌ازای هر t در بازهٔ دیگر داشته باشیم:

$$f(t_۰)>f(t)$$

این ادعا که دست‌کم یکی از دو بازه $[۰,\frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲},۱]$ ویژگی (*) را دارد بدین طریق توجیه می‌شود:

اگر یکی از این دو بازه ویژگی ذکر شده را نداشته باشد، آنگاه عنصر $t_۰$ از این بازه هست که $f(t_۰)$ اکیداً بزرگتر از $f(t)$ برای هر t در بازهٔ دیگر است. بنابراین هیچ عنصری از بازهٔ دیگر وجود ندارد که مقدار f در آن اکیداً بزرگتر از مقدار f در هر نقطهٔ این بازه (بالاخص $f(t_۰)$) باشد، یعنی بازهٔ دیگر ویژگی (*) را داراست.

اگر فقط یکی از دو بازه ویژگی (*) را داشته باشد، بازهٔ دیگر را $I_۱$ می‌نامیم، و اگر هر دو بازه این ویژگی را داشته، یکی از آنها را به دلخواه $I_۱$ می‌نامیم. رقم $c_۱$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_۱=\begin{cases} ۰ & I_۱=[۰,\frac{۱}{۲}] \text{ اگر} \\ ۱ & I_۱=[\frac{۱}{۲},۱] \text{ اگر} \end{cases}$$

از این پس جستجو برای نقطهٔ ماکسیمم را به بازهٔ $I_۱$ محدود می‌کنیم. $I_۱$ را به صورت اجتماع دو زیربازهٔ چپ و راست، هر یک به طول $\frac{۱}{۴}$ می‌نویسیم. مجدداً به همان استدلالی که در بالا آمد ادعا می‌کنیم دست‌کم یکی از این دو زیربازهٔ $I_۱$ باید واجد شرط (*) نسبت به دیگری باشد. مانند قبل اگر فقط یک زیربازه شرط (*) را احراز کند، دیگری را $I_۲$ می‌نامیم، و اگر هر دو واجد شرط (*) باشند، یکی را به دلخواه $I_۲$ می‌نامیم. تعریف می‌کنیم:

$$c_۲ = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } I_۲ \text{ زیربازهٔ چپ باشد} \\ ۱ & \text{اگر } I_۲ \text{ زیربازهٔ راست باشد} \end{cases}$$

و از این جستجو برای نقطهٔ ماکسیمم را به $I_۲$ محدود می‌کنیم. این فرایند را با نیمه کردن $I_۲$، ادعای این‌که (*) باید برای دست‌کم یک نیمهٔ آن برقرار باشد، انتخاب $I_۳$ و تعیین $c_۳$ برابر صفر یا یک بسته به این که نیمهٔ چپ $I_۳$ باشد یا نیمهٔ راست، ادامه می‌دهیم. با ادامهٔ روش به ترتیب رقم‌های c_n ساخته می‌شوند. ثابت می‌کنیم نقطهٔ $c = ۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ که بدین طریق به‌دست می‌آید یک نقطهٔ ماکسیمم است. استدلال به طریق برهان خلف است. فرض می‌کنیم c یک نقطهٔ ماکسیمم نباشد و به تناقض می‌رسیم. اگر $f(c)$ ماکسیمم نباشد، نقطه‌ای d در $[۰,۱]$ وجود دارد، $d \neq c$، که:

$$f(d) > f(c) \qquad (۱)$$

توجه کنید که هر نقطهٔ غیر از c در یک مرحلهٔ فرایند نصف کردن بالا باید از c جدا شده باشد زیرا فاصله c تا d هرچه قدر کوچک باشد، عددی n وجود دارد $\frac{۱}{۲^n}$ (یعنی طول بازهٔ I_n، که c همواره در آن است) از فاصله c تا d کوچکتر است و بازهٔ شامل c نمی‌تواند شامل d نیز باشد. فرض کنید $n_۱$ اولین مرحله‌ای است که d در زیربازهٔ کنار گذاشته شده واقع شده است. در این صورت طبق (*) نقطه‌ای d' وجود دارد، در بازهٔ $I_{n_۱}$، که:

$$f(d) \leq f(d') \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) می‌بینیم که $f(d') > f(c)$. حال در مورد d' نیز استدلالی مشابه d انجام می‌دهیم. داریم $d' \neq c$ چون $f(d') \neq f(c)$، پس $n_۲$ را اولین مرحله‌ای می‌گیریم که d' از c جدا شده است، یعنی d' در

I_{n_2} قرار ندارد. پس طبق $(*)$ عنصری d'' در I_{n_2} وجود دارد که:

$$f(d') \leq f(d'') \qquad (3)$$

بدین ترتیب تاکنون داریم $f(d'') \geq f(d') \geq f(d) \geq f(c)$، با ادامه این استدلال، دنباله‌ای $d^{(k)}$ از نقاط $[0,1]$ پیدا می‌کنیم که $d^{(k)} \in I_{n_k}$ و $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. چون طول I_j برابر $\frac{1}{2^j}$ است و دنبالهٔ $(n_i)_i$ اکیداً صعودی است، دنبالهٔ I_{n_k} به سوی نقطهٔ c منقبض می‌شود و داریم:

$$d^{(k)} \longrightarrow c \quad \text{وقتی} \quad k \longrightarrow +\infty$$

نشان می‌دهیم این در تناقض با $f(c) < f(d)$ است. اگر $f(d) - f(c) > 0$ را به e نمایش دهیم، نتیجه می‌شود $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر x با $|x - c| < \delta$ داریم $|f(x) - f(c)| < e$، بالاخص $f(x) - f(c) < e$، یا

$$f(x) < f(c) + e \qquad (4)$$

چون $d^{(k)} \longrightarrow c$، برای k بزرگ داریم $|d^{(k)} - c| < \delta$، پس

$$f(d^{(k)}) < f(c) + e = f(d)$$

که در تناقض با $f(d) \leq f(d') \leq f(d'') \leq \cdots$ است. این تناقض نشان می‌دهد فرض $f(c) < f(d)$ نادرست است و $f(c)$ باید ماکسیمم تابع f در $[0,1]$ باشد.

استدلال مربوط به مینیمم کاملاً مشابه است و به خواننده واگذار می‌شود. □

(۱۲–۲) یادداشت. نکته مهمی در مورد اثبات بالا باید ذکر شود. در اثبات اینکه $f(c)$ ماکسیمم است، تنها استفادهٔ ما از پیوستگی f، استفاده از نامساوی (۴) بود. این در واقع "نصف پیوستگی" است زیرا که طبق پیوستگی f در c، برای $e > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد که $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(c)| < e$. نامساوی اخیر شامل دو حکم است:

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) &< e \\ -e < f(x) - f(c) & \end{aligned}$$

در اثبات قبل فقط از نامساوی اول استفاده شد. اگر اثبات وجود می‌نیمم را به طور مشابه دنبال کنیم خواهیم دید که در آن اثبات فقط از نامساوی دوم بالا استفاده می‌شود. تابع‌هایی که فقط یکی از دو نامساوی بالا برایشان برقرار باشد تابع‌های "نیم پیوسته" خوانده می‌شوند. به طور خاص، تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته از بالا در نقطهٔ c از دامنه می‌نامیم در صورتی که برای هر $e > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد که هرگاه $x \in S$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه

$$f(x) < f(c) + e$$

به همین ترتیب f نیم پیوسته از پایین در نقطهٔ c خوانده می‌شود اگر برای $e > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد که هرگاه $x \in S$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه:

$$f(x) > f(c) - e$$

f را نیم‌پیوسته از بالا در S (به ترتیب نیم‌پیوسته از پایین در S) می‌نامیم در صورتی که f در همهٔ نقاط S نیم‌پیوسته از بالا (به ترتیب نیم‌پیوسته از پایین) باشد.

بدین ترتیب می‌توان برای بهره‌برداری بیشتر از قضیهٔ ۱۲—۱، قضیه را به دو قسمت تجزیه کرد:

(۱۲—۳) قضیه. تابع $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. (الف) اگر f نیم‌پیوسته از بالا باشد، f دارای ماکسیمم در $[a, b]$ است، (ب) اگر f نیم‌پیوسته از پایین باشد، f دارای می‌نیمم در $[a, b]$ است. □

به زودی کاربرد مهمی از این صورت جامعتر قضیه خواهیم دید، ولی نخست مثال‌هایی ارائه می‌کنیم.

مثال ۱. تابع $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x - [x]$ در نظر می‌گیریم که مقصود از $[x]$ جزء صحیح x است. در واقع $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$. این تابع در همهٔ نقاط به استثنای $x = 1$ پیوسته است و در $x = 1$ نیم‌پیوسته از پایین است و نیم‌پیوسته از بالا نیست. فرض کنید $e > 0$ داده شده است. قطعاً برای هر x داریم:

$$f(x) > f(0) - e = -e$$

زیرا که f در $[۰,۱]$ نامنفی است. از طرفی دیگر، اگر $e = \frac{۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم، $\delta > ۰$ هرچه باشد برای $x \in [۰,۱]$ که $|x-۱| < \delta$ نمی‌توان حکم کرد که

$$f(x) < f(۰) + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

زیرا که اگر x از طرف چپ به ۱ نزدیک باشد، $f(x) = x$ نزدیک ۱ است. ضمناً توجه کنید که این تابع در $[۰,۱]$ دارای می‌نیمم است ولی دارای ماکسیمم نیست.

مثال ۲. تابعی که به صورت $f : [۰,۱] \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = [x] - x$ تعریف می‌شود در نقطهٔ ۱ نیم‌پیوسته از بالا است ولی نیم‌پیوسته از پایین نیست. در واقع داریم $f(x) = \begin{cases} -x & ۰ \leq x < ۱ \\ ۰ & x = ۱ \end{cases}$. برای $e > ۰$ داده شده، x هر نقطه‌ای که در دامنه باشد، داریم $f(x) < f(۰) + e = e$ زیرا که مقادیر f نامثبت‌اند، پس نیم‌پیوستگی از بالا برقرار است. بالعکس برای $e = \frac{۱}{۲}$، $\delta > ۰$ هرچه باشد، $|x-۱| < \delta$، $x \in [۰,۱]$، دلالت بر $f(x) > f(۱) - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$ نمی‌کند زیرا که برای x نزدیک ۱ از سمت چپ مقدار f نزدیک -۱ است.

اکنون کاربرد مهمی از نیم‌پیوستگی را در رابطه با بحث "پیوستگی یکنواخت" که در پایان بخش ۹ آمد ارائه می‌کنیم. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. از گزارهٔ ۹—۴ به یاد می‌آوریم که هرگاه $e > ۰$ داده شده باشد، برای هر نقطهٔ $t \in [a,b]$، عددی $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر دو نقطهٔ $t_۱$ و $t_۲$ از $[a,b]$ که در $]t-\delta, t+\delta[$ قرار گیرند داریم $|f(t_۱) - f(t_۲)| < e$. برای هر $t \in [a,b]$، $\delta(t)$ را برابر کوچکترین کران بالایی $\delta > ۰$ هایی می‌گیریم که در ویژگی بالا صدق می‌کند ولی سقف $b-a$ را برای $\delta(t)$ منظور می‌کنیم. توجه کنید که به هر حال اگر δ از $b-a$ بزرگتر شود، آنگاه $]t-\delta, t+\delta[$ از بازهٔ $[a,b]$ بزرگتر می‌شود و بزرگتر کردن آن نقاط جدیدی از $[a,b]$ به‌دست نمی‌دهد. بدین ترتیب اگر $\delta < \delta(t)$، آنگاه برای هر دو نقطهٔ $t_۱$ و $t_۲$ که در $]t-\delta_۱, t+\delta_۱[$ باشند، داریم $|f(t_۱) - f(t_۲)| < e$.

(۱۲—۴) لم. برای $e > ۰$ ثابت، تابع $\delta(t)$ که برای $t \in [a,b]$ تعریف شده است، نیم‌پیوسته از پایین است.

برهان. باید ثابت کنیم برای هر $e' > 0$ داده شده، $\delta' > 0$ وجود دارد که هرگاه $t' \in]t - \delta', t + \delta'[$، آنگاه $\delta(t') > \delta(t) - e'$. یعنی باید ثابت کنیم که برای این δ'، اگر $|t' - t| < \delta$ و t_1 و t_2 در فاصلهٔ $\delta(t) - e$ از t' قرار گیرند، آنگاه $|f(t_1) - f(t_2)| < e$. برای مطلب اخیر، کافی است نشان دهیم که اگر t_1 و t_2 در این بازه باشند، آنگاه $t_1, t_2 \in]t - \delta(t), t + \delta(t)[$. قرار می‌دهیم $0 < \delta' < e'$. بنابراین اگر t_1, t_2 در $]t' - \delta', t' + \delta'[$ باشند، داریم:

$$i = 1, 2: \quad |t_i - t| \le |t_i - t'| + |t' - t| < \delta' + \delta(t) - e' < \delta(t)$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

به کمک این لم اکنون می‌توان به سادگی دید که هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است، یعنی هرگاه $e > 0$ داده شده باشد، آنگاه $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر دو نقطهٔ t_1 و t_2 از $[a, b]$ با $|t_1 - t_2| < \delta$، داریم $|f(t_1) - f(t_2)| < e$. به این منظور، برای $e > 0$ داده شده، برای هر $t \in [a, b]$، $\delta(t)$ را طبق بحث فوق در نظر می‌گیریم δ تابعی است با مقادیر اکیداً مثبت که طبق لم نیم‌پیوسته از پایین است. بنابراین طبق ۱۲—۳، ب، $\delta(t)$ در $[a, b]$ می‌نیمم خود را اتخاذ می‌کند. مقدار این می‌نیمم را به δ نمایش می‌دهیم، پس $\delta \le \delta(t)$ برای هر t. در نتیجه اگر $|t_1 - t_2| < \delta$، آنگاه t_2 در فاصلهٔ کوچکتر یا مساوی $\delta(t_1)$ از t_1 قرار دارد، بنابراین $|f(t_2) - f(t_1)| < e$ و حکم به اثبات می‌رسد:

(۱۲—۵) قضیه. هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است. □