پایداری محاسبه

از این بخش بررسی تابع‌های حقیقی یک متغیری را آغاز می‌کنیم. مقصود از یک تابع حقیقی یک متغیری تابعی $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ است که در آن دامنهٔ تابع، یعنی S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. به این ترتیب به هر عضو s از S، عدد حقیقی مشخصی $f(s)$ منسوب می‌شود. اگر f را، که معمولاً با یک فرمول یا دستورالعمل داده می‌شود، یک ماشین محاسبه یا برنامه‌ای رایانه‌ای فرض کنیم، به‌ازای ورودی s، همواره خروجی مشخصی $f(s)$ حاصل می‌شود.

یکی از ملاحظاتی که در همهٔ محاسبات علمی و مهندسی ظاهر می‌شود، موضوع تقریب است. نتیجه یک محاسبه یا حاصل به‌کارگیری یک تابع ممکن است عددی باشد که دانش "دقیق" آن به منظور کاربرد مورد نظر ضروری است. اما "دقیق" به چه معنی است؟ مثلاً توجه کنید که حتی عظیم‌ترین رایانه جهان حافظه‌ای محدود دارد و گنجایش ضبط و به‌کارگیری یک عدد اعشاری نامختومه $c_0/c_1c_2c_3\ldots$ را ندارد. به علاوه در هر کاربرد نیز، حساسیت دستگاه‌ها و دقت سنجش، آستانه‌ای دارد که دقت بیش از آن نه عملی است و نه لزوماً ضروری. بنابراین در هر کاربرد یا مقوله، معمولاً اندازهٔ خطای قابل تحملی $e > 0$ منظور می‌شود که عملاً دو نتیجهٔ نزدیکتر از e به یکدیگر از هم غیرقابل تشخیص‌اند و تقریب تا این اندازه قابل قبول محسوب می‌شود.

در زمینهٔ محاسبهٔ مقدار توابع، معمولاً آستانهٔ دقتی برای نتیجهٔ حاصل از به‌کارگیری تابع منظور می‌شود و سؤال اساسی این است که داده‌ها باید به چه دقتی معلوم باشند که حاصل محاسبه از دقت مورد نظر برخوردار شود. با ذکر چند مثال موضوع را پیگیری می‌کنیم.

(۹—۱) چند مثال.

(۹—۱—۱) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت $f(x)=5x+3$ تعریف می‌کنیم. ورودی این تابع باید به چه دقت باشد که خطای خروجی آن کمتر از 10^{-4} باشد؟

حل و بحث. توجه کنید که چنین سؤالی می‌تواند مصداق عملی کاملاً معنی‌داری داشته باشد. فرض کنید لازم است ابعاد یک تصویر رایانه‌ای را پنج برابر بزرگ کنیم به طوری که تصویر حاصل همچنان هموار به نظر رسد یعنی جزییات عکس به صورت نقطه‌چین ظاهر نشود. به این منظور لازم است نقطه‌های مجاور از فاصلهٔ معینی به هم نزدیک‌تر بمانند که چشم انسان عکس را به صورت هموار مشاهده کند. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که در شکل اولیه نقاط روشن باید چه اندازه به هم نزدیک باشند که پس از بزرگ‌سازی با ضریب ۵ تصویر قابل قبولی به‌دست آید. در فرمول این تابع می‌توان جمع‌کردن عدد ۳ را به معنای انتقال تصویر تلقی کرد که نباید اثری بر جواب مسأله داشته باشد.

حال به حل مسأله می‌پردازیم. دو ورودی x_1 و x_2 در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم فاصلهٔ این دو ورودی، یعنی $|x_1-x_2|$ چقدر باشد که فاصله خروجی‌های متناظر، یعنی $|f(x_1)-f(x_2)|$، کوچکتر از 10^{-4} باشد. باید داشته باشیم:

$$|(5x_1+3)-(5x_2+3)|<10^{-4}$$

یا معادلاً

$$5|x_1-x_2|<10^{-4}$$

بنابراین واضح است که اگر $|x_1-x_2|<\frac{1}{5}10^{-4}$، آنگاه دقت مورد نظر در خروجی منظور می‌شود.

(۹—۱—۲) تابع مجذور کردن، یعنی $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x)=x^2$، را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم عدد x باید به چه وقتی معلوم باشد که خطا در محاسبهٔ مجذور آن کوچکتر از 10^{-3} باشد.

حل و بحث. خواهیم دید که بر خلاف مثال قبل، در اینجا جواب مطلقی وجود ندارد، بلکه جواب به

حدود اندازهٔ x وابسته است. اگر x_1 و x_2 دو ورودی این تابع باشند، می‌خواهیم درجه دقتی $\delta > 0$ منظور کنیم که اگر $|x_1 - x_2| < \delta$ آنگاه فاصلهٔ خروجی‌های متناظر، یعنی $|x_1^2 - x_2^2|$، کوچکتر از 10^{-3} باشد. پس باید داشته باشیم:

$$|x_1^2 - x_2^2| < 10^{-3}$$

یا معادلاً:

$$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| < 10^{-3}$$

کمی توجه به عبارت بالا نشان می‌دهد که مسأله به این صورت جواب ندارد، یعنی هیچ مقدار $\delta > 0$ وجود ندارد که برای هر دو عدد x_1 و x_2 به فاصله کوچکتر از δ، فاصلهٔ $|x_1^2 - x_2^2|$ کوچکتر از 10^{-3} باشد. فرض کنید چنین δ ای وجود داشته باشد. اگر دو عدد x_1 و x_2 را هر دو بزرگتر از $\frac{1}{\delta}$ ولی به فاصله $\frac{\delta}{2}$ از یکدیگر انتخاب کنیم، مثلاً:

$$x_1 = \frac{1}{\delta} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

از طرفی داریم $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ و از سویی دیگر $|x_1 + x_2| = \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}$، پس:

$$\begin{aligned} |x_1^2 - x_2^2| &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| = (\tfrac{2}{\delta} + \tfrac{\delta}{2})(\tfrac{\delta}{2}) \\ &= (\tfrac{2}{\delta} + \tfrac{\delta}{2})(\tfrac{\delta}{2}) = 1 + \tfrac{\delta^2}{4} \end{aligned}$$

که δ هرچه باشد $1 + \frac{\delta^2}{4}$ از 10^{-3} کوچکتر نمی‌شود. نکتهٔ این مسأله این است که وقتی عددی مجذور می‌شود، یعنی در خود ضرب می‌شود، هر خطا در عدد ورودی، خطایی حدوداً دو برابر حاصل‌ضرب این خطا در مقدار عدد داده شده در نتیجهٔ محاسبه ایجاد می‌کند. به طور دقیق، فرض کنید x مقدار "واقعی" و h خطایی در ارائه آن باشد. در این صورت:

$$(x + h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

وقتی h کوچکتر از ۱ باشد، h^2 از h کوچکتر است، ولی $2hx$ می‌تواند بزرگ باشد اگر x بزرگ باشد.

بدین ترتیب سؤال مطرح شده را نمی‌توان به این کلیت پاسخ داد ولیکن در عمل، عددی که باید مجذور شود به طور تقریبی معلوم است و این دانش تقریبی، کافی است که ما را قادر سازد حدودی برای تقریب لازم به‌دست آوریم. مسأله خاص زیر را در نظر می‌گیریم. عددی a به صورت زیر داده شده است:

$$a = ۱۵/a_۱ a_۲ a_۳ a_۴ \ldots$$

که ارقام پس از اعشار a_n، تا n های خیلی بزرگ معلوم‌اند یا قابل محاسبه‌اند. می‌خواهیم بدانیم این عدد را پس از چند رقم مختومه کنیم که اختلاف مجذور عدد حاصل از مجذور a کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد. اگر عدد a را پس از n رقم اعشار مختومه کنیم، عددی

$$A_n = ۱۵/a_۱ \ldots a_n$$

به‌دست می‌آید. می‌خواهیم بدانیم تا چند رقم n باید جلو رفت که $|A^۲ - A_n^۲|$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد. توجه کنید که این مصداقی از مسأله اولیه است. وقتی a را پس از n رقم اعشاری مختومه می‌کنیم، اختلاف $|A - A_n|$ کوچکتر یا مساوی ۱۰^{-n} است. پس در واقع سؤال این است که $|A - A_n|$ چه قدر کوچک گرفته شود که $|A^۲ - A_n^۲| < ۱۰^{-۳}$. داریم

$$|A^۲ - A_n^۲| = |A + A_n||A - A_n|$$

حال قطعاً A و A_n هر دو کوچکتر ۱۶ هستند، پس:

$$|A^۲ - A_n^۲| < ۳۲|A - A_n| \leq (۳۲)۱۰^{-n}$$

پس اگر بتوانیم n را طوری بگیریم که $(۳۲)۱۰^{-n} \leq ۱۰^{-۳}$، دقت مورد نظر در محاسبهٔ مجذور حاصل می‌شود. معادلاً باید داشته باشیم:

$$۱۰^n \geq (۳۲)۱۰^۳$$

اگر n برابر ۵ یا بزرگتر گرفته شود این نامساوی برقرار می‌شود. حاصل اینکه مجذور $۱۵/a_۱ \ldots a_۵$ از مجذور $۱۵/a_۱ a_۲ a_۳ \ldots$ کمتر از $۱۰^{-۳}$ فاصله دارد.

در مثال خاص بالا ما فقط تقریب نقصانی برای A را در نظر گرفتیم زیرا $A_n \leq A$. همین استدلال را می‌توان در واقع به طور کلی، بدون استفاده از عددنویسی اعشاری برای محاسبه مجذور اعداد نزدیک به ۱۵ تکرار کرد. فرض کنید a عددی باشد $15 < a < 16$، می‌خواهیم عددی $\delta > 0$ بیابیم که اگر $|a - a'| < \delta$، آنگاه $|a^2 - a'^2| < 10^{-3}$. مقدمتاً δ_1 را کوچکتر یا مساوی $16 - a$ و $a - 15$ می‌گیریم، پس اگر $|a - a'| < \delta_1$، آنگاه a' نیز عددی در بازهٔ $]15, 16[$ است. در این صورت داریم:

$$|a^2 - a'^2| = |a + a'||a - a'| < (32)|a - a'|$$

بنابراین اگر $(32)|a - a'|$ کوچکتر از 10^{-3} باشد، یعنی $|a - a'| < \frac{1}{32}10^{-3}$، $|a^2 - a'^2|$ کوچکتر از 10^{-3} خواهد بود. پس

$$\delta = \min\{16 - a, a - 15, \frac{1}{32}10^{-3}\}$$

ویژگی مورد نظر را دارد. اگر هیچ دانشی نسبت به اندازه $a - 15$ و $16 - a$ نداشته باشیم، یعنی ندانیم a کجای بازهٔ $]15, 16[$ قرار گرفته است می‌توانیم برای به‌دست آوردن δ مناسب به طریق زیر عمل کنیم. مقدمتاً فرض می‌کنیم $\delta_1 = 1$. آنگاه اگر $|a - a'| < \delta_1$، قطعاً $14 < a' < 17$، پس $|a + a'| = a + a' < 33$ و داریم:

$$|a^2 - a'^2| = |a + a'||a - a'| < 33|a - a'|$$

پس اگر $|a - a'|$ کوچکتر از $\frac{1}{33}10^{-3}$ گرفته شود، داریم $|a^2 - a'^2| < 10^{-3}$. بنابراین

$$\delta = \min\{1, \frac{1}{33}10^{-3}\} = \frac{1}{33}10^{-3}$$

به هر حال کار می‌کند.

(۹—۱—۳) تابع $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که $f(x) = \frac{1}{x}$. می‌خواهیم بدانیم عدد x باید به چه دقت معلوم باشد که خطای معکوس محاسبه شده از 10^{-2} کوچکتر باشد.

حل و بحث. در اینجا نیز پدیده‌ای مشابه مثال قبل ظاهر می‌شود، یعنی به طور کلی جواب به حدود اندازهٔ x وابسته خواهد بود. توجه کنید که اگر دو عدد بزرگ به اندازهٔ 10^{-n} اختلاف داشته باشند (n بزرگ) اختلاف معکوس آنها بسیار کوچک است، در حالی که اگر دو عدد کوچک همین اندازه اختلاف داشته باشند معکوسشان می‌تواند به نسبت دور از هم باشد. به عنوان مثال:

$$x_1 = 10 \quad , \quad x_2 = 10 + 10^{-3} \quad , \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \simeq 0/0000099990$$

در حالی که

$$x_1 = 10^{-3} \quad , \quad x_2 = 10^{-3} + 10^{-3} \quad , \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 500$$

بنابراین لازم است سؤال اولیه را با قید بیشتری مطرح کنیم. فرض کنید عدد a به صورت زیر داده شده است:

$$a = 0/02a_3a_4a_5\ldots$$

می‌خواهیم $\delta > 0$ را طوری تعیین کنیم که اگر $|a-a'| < \delta$، آنگاه $|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < 10^{-2}$. چون دامنهٔ f را اعداد حقیقی مثبت در نظر گرفته‌ایم، برای هر a' در دامنهٔ f داریم:

$$|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| = \frac{|a-a'|}{aa'}$$

از این عبارت روشن است که $\delta = a$ نمی‌تواند تخمین $|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < 10^{-2}$ را تأمین کند زیرا که اگر $\delta = a$، a' را می‌توان به دلخواه نزدیک به 0 گرفت و در این صورت کسر به دلخواه بزرگ می‌شود. برای رفع این اشکال، مقدمتاً $\delta_1 > 0$ را عددی کوچکتر از a می‌گیریم، مثلاً $\delta_1 = 10^{-2}$. بنابراین اگر $|a-a'| < \delta_1$، چون $a = 0/02a_3a_4\ldots \geq 0/02$، داریم $a' > 0/01$. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$|a-a'| < 10^{-2} : \quad |\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < \frac{|a-a'|}{(0/01)(0/02)} = \frac{10^4}{2}|a-a'|$$

اکنون می‌توانیم $\delta > 0$ نهایی مورد نظر را پیدا کنیم. می‌خواهیم عبارت بالا از 10^{-2} کوچکتر شود، پس اگر δ را برابر یا کوچکتر از $(2)(10^{-6})$ بگیریم داریم:

$$|a-a'| < 2 \times 10^{-2} : \quad |\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < \frac{10^4}{2}|a-a'| < 10^{-2}$$

ضمناً این δ از δ_1 مقدماتی، یعنی 10^{-2}، کوچکتر است، پس شرط اولیهٔ دور ماندن از 0 نیز خود به خود برقرار می‌شود.

در دو مثال آخر سعی کردیم نشان دهیم تأمین دقت لازم در یک محاسبه ممکن است چندان آسان نباشد. گاهی اوقات درجهٔ دقت در داده‌ها باید بسیار زیاد باشد تا دقت مورد نظر در نتیجه حاصل شود. به طور کلی این انتظار که بتوان با اعمال دقت کافی در ارائه داده‌ها، دقت مورد نظر در نتیجهٔ مورد نظر را تأمین کرد "پایداری محاسبه" می‌نامیم. این ویژگی همیشه برقرار نیست. مثلاً تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۲ نمایش داده شده است. مقدار این تابع در $x = 0$ برابر ۱ است. توجه کنید که هیچ $\delta > 0$ وجود ندارد که $|x - 0| < \delta$ لزوماً دقت مثلاً $|f(x) - f(0)| < 10^{-1}$ را تضمین کند زیرا که اگر $x > 0$ و $|x - 0| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(0)| = 1 - x$ و $x > 0$ هر قدر کوچکتر شود، $1 - x$ بزرگتر می‌شود.

در زیر تعریف دقیق پایداری محاسبهٔ f در نقطه‌ای از قلمرو f را توصیف می‌کنیم. عنوان معمول‌تری برای "پایداری محاسبه"، اصطلاح "پیوستگی" است که در اینجا نیز به‌کار خواهیم برد، ولی کلمهٔ پیوستگی بار شهودی زیادی دارد که گاهی موجب سوء تفاهم می‌شود. دانشجو باید همواره تعریف دقیق زیر و آنچه با استدلال صحیح از آن نتیجه می‌شود در نظر داشته باشد و بیش از آن را از مفهوم پیوستگی انتظار نداشته باشد.

(۹—۲) تعریف. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و $a \in S$. می‌گوییم تابع f در a پیوسته است (یا تابع f در a از پایداری محاسبه برخوردار است) در صورتی که برای هر $e > 0$ داده شده، $\delta > 0$ متناظری وجود داشته باشد که برای هر نقطهٔ x از دامنهٔ f که $|x - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < e$.

اگر تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطهٔ دامنهٔ خود پیوسته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامیم. همان طور که

اشاره کردیم، نباید از کلمهٔ پیوستگی انتظاراتی فرای تعریف داشت. در مثال اول زیر تابع فقط در یک نقطه از دامنه خود پیوسته است و در مثال دوم تابعی پیوسته داریم که اطلاق کلمهٔ پیوسته برای آن دور از انتظار به نظر خواهد رسید.

چند مثال

(۹—۳—۱) تابع $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{گویا } x \\ 1 - x & \text{ناگویا } x \end{cases}$$

نشان می‌دهیم این تابع فقط در نقطهٔ $x = \frac{1}{2}$ پیوسته است. از تمرین‌های بخش ۱ یادآوری می‌کنیم که در هر بازهٔ باز از اعداد حقیقی، هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند. بنابراین شکل تقریبی نمودار این تابع (شکل ۳) را می‌توان به صورت دو نقطه‌چین متراکم روی خطوط $y = x$ و $y = 1 - x$ تصور کرد که در نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ تجمع می‌یابند. نشان می‌دهیم این تابع در $x = \frac{1}{2}$ پیوسته است. برای $e > 0$ داده شده، ادعا می‌کنیم $\delta = e$ در نقطهٔ $\frac{1}{2}$ شرط تعریف را برآورده می‌کند. فرض کنید $|x - \frac{1}{2}| < e$. اگر x گویا شد که $f(x) = x$ و $|f(x) - f(\frac{1}{2})| < e$. اگر x ناگویا باشد، داریم $f(x) = 1 - x$، پس $f(x) - \frac{1}{2} = 1 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - x$، پس مجدداً $|f(x) - f(\frac{1}{2})| = |\frac{1}{2} - x| = |x - \frac{1}{2}| < e$. حال نشان می‌دهیم برای $a \neq \frac{1}{2}$، تابع در a پیوسته نیست. e را برابر $|a - \frac{1}{2}| > 0$ می‌گیریم. $\delta > 0$ هرچه باشد، نقطه‌ای x ارائه می‌کنیم که $|x - a| < \delta$ ولی $|f(x) - f(a)| \not< e$. دو حالت در نظر می‌گیریم. اگر a گویا باشد داریم $f(a) = a$ و نقطهٔ ناگویای x را آنقدر نزدیک به a می‌گیریم که اولاً a و x در یک طرف $\frac{1}{2}$ باشند، ثانیاً $|x - a| < \delta$. در این صورت $f(x) = 1 - x$ و:

$$|f(x) - f(a)| = |1 - x - a| = |(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - a)|$$

حالت دیگر اینکه a ناگویا و $f(a) = 1 - a$. در این حالت x را نقطه‌ای گویا آنقدر نزدیک به a

می‌گیریم که x و a هر دو در یک طرف $\frac{1}{2}$ باشند و $|x-a|<\delta$. در این صورت نیز داریم:

$$|f(x)-f(a)|=|x-1+a|=|(\frac{1}{2}-x)+(\frac{1}{2}-a)|$$

چون x و a در یک طرف $\frac{1}{2}$ انتخاب شده‌اند، $\frac{1}{2}-a$ و $\frac{1}{2}-a$ هم علامتند، پس:

$$\begin{aligned}|(\tfrac{1}{2}-x)+(\tfrac{1}{2}-a)| &= |\tfrac{1}{2}-x|+|\tfrac{1}{2}-a| \\ &> |\tfrac{1}{2}-a|=e\end{aligned}$$

در نتیجه مستقل از اینکه $\delta>0$ چه باشد، برای چنین x که $|x-a|<\delta$ داریم $|f(x)-f(a)|>e$، یعنی f در a پیوسته نیست.

(۹—۳—۲) مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. نشان می‌دهیم هر تابع $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته است. این ممکن است با شهود پیوستگی سازگار به نظر نرسد ولی ملاحظه خواهیم کرد که "گسستگی دامنه" در واقع پیوستگی تابع را سهل‌تر می‌سازد. نشان می‌دهیم f در هر نقطهٔ دامنه، $n\in\mathbb{Z}$، پیوسته است. $e>0$ هرچه باشد، می‌گیریم $\delta=1$. حال اگر x عنصری از دامنه باشد که $|x-n|<1$، چون x عدد صحیح است، لزوماً داریم $x=n$، پس $|f(x)-f(n)|=0<e$ و شرط پیوستگی برقرار است. این مثال را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد که اگر قرار باشد داده‌ها همه عدد صحیح باشند، تنها دادهٔ "نزدیک" به یک عدد صحیح خود آن است، پس خطایی در محاسبه صورت نمی‌گیرد.

(۹—۳—۳) در مقابل مثال قبل فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد که همه‌جا صفر است به استثنای در مقادیر صحیح n که در آن $f(n)\neq 0$. نشان می‌دهیم f در n پیوسته نیست. $e>0$ را کوچکتر از $|f(n)|$ می‌گیریم. حال $\delta>0$ هرچه باشد، نقطه‌ای x وجود دارد که $|x-n|<\delta$ و x عدد صحیح نیست. پس $f(x)=0$ و $|f(x)-f(n)|=|f(n)|>e$ و f در n پیوسته نیست. به سادگی می‌توان نشان داد f در هر نقطهٔ غیر عدد صحیح پیوسته است.

در مورد کارایی تعریف پیوستگی در رابطه با محاسبات عملی آن‌گونه که در آغاز این بخش مورد بحث قرار گرفت، ممکن است ایراد زیر به ذهن برسد. ما پیوستگی یا پایداری محاسبهٔ تابع f در یک

نقطهٔ a را تعریف کردیم. از آنجا که مقدار a ممکن است فقط به طور تقریبی معلوم باشد و تابع ممکن است در نقاط به دلخواه نزدیک به a پیوسته نباشد (مانند مثال ۹—۳—۱)، این تعریف چه ارزش عملی می‌تواند داشته باشد؟ در زیر نشان می‌دهیم که در واقع اگر f در a پیوسته باشد، برای هر دو مقدار $a_۱$ و $a_۲$ به اندازهٔ کافی نزدیک به a، فاصله $|f(a_۱) - f(a_۲)|$ نیز کوچک است، و بالعکس برقراری این رابطه دال بر پیوستگی f در a است.

(۹—۴) گزاره. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و $a \in S$. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $e > ۰$، عددی $\delta > ۰$ وجود داشته باشد که برای هر دو نقطهٔ $a_۱$ و $a_۲$ در دامنهٔ f که در بازهٔ $]a - \delta, a + \delta[$ باشند، داشته باشیم $|f(a_۱) - f(a_۲)| < e$.

برهان. نخست توجه کنید که اگر ویژگی ذکر شده برقرار باشد، تابع در a پیوسته است زیرا که می‌توان یکی از $a_۱$ و $a_۲$ را خود نقطهٔ a گرفت و دیگری را نقطه‌ای دلخواه x در $]a - \delta, a + \delta[$. پس $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| < e$.

بالعکس فرض کنید f در a پیوسته است. اگر $e > ۰$ داده شده باشد، طبق پیوستگی f در a، برای $\frac{e}{۲} > ۰$، عددی $\delta > ۰$ وجود دارد که $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| < \frac{e}{۲}$. حال اگر برای $a_۱$ و $a_۲$ در دامنه تابع داشته باشیم $|a - a_۱| < \delta$ و $|a - a_۲| < \delta$، نتیجه می‌شود که:

$$|f(a_۱) - f(a_۲)| \leq |f(a_۱) - f(a)| + |f(a) - f(a_۲)| < \frac{e}{۲} + \frac{e}{۲} = e$$

□

بدین ترتیب اگر داده‌ها همه نزدیک به یک نقطهٔ پیوستگی تابع f باشند، می‌توان انتظار داشت که نتایج محاسبه با آنها نیز به هم نزدیک باشند.

نکتهٔ قابل ذکر دیگر این که همچنان که مثال‌های ۹—۱—۲ و ۹—۱—۳ در آغاز این بخش نشان دادند، برای $e > ۰$ داده شده، $\delta > ۰$ مناسب ممکن است علاوه بر وابستگی به e، به نقطه‌ای که در آن پیوستگی مطرح است وابسته باشد. در مثال ۹—۱—۱، برای $e > ۰$ داده شده، یک $\delta > ۰$ واحد برای هر نقطهٔ دامنه تعریف پیوستگی را برقرار می‌ساخت ولی در مثال‌های ۹—۱—۲ و ۹—۱—۳، مقدار δ

به اندازه نقطهٔ a در دامنه نیز وابسته بود. در حالتی که برای $e > 0$ داده شده، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد که در سراسر دامنه کار کند، یعنی هرگاه $|x_1 - x_2| < \delta$، آنگاه $|f(x_1) - f(x_2)| < e$ می‌گوییم تابع f در دامنهٔ خود به طور یکنواخت پیوسته است. در حالت کلی، مانند مثال $f(x) = x^2$، در مثال ۹-۱-۲، یا مثال $f(x) = \frac{1}{x}$ در مثال ۹-۱-۳ با دامنهٔ $x > 0$، تابع در سراسر دامنه خود پیوسته است ولیکن از پیوستگی یکنواخت برخوردار نیست.