

بهینه سازی

یکی از کاربردهای بسیار معمول مشتق در مسایل بهینه سازی است. مقصود از بهینه سازی یافتن ماکسیمم یا مینیوموم یک تابع با تنظیم مناسب متغیرهای تابع است. در اینجا ما با تابع یک متغیری سروکار داریم یعنی تابعهای به شکل $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ که S زیر مجموعه ای از \mathbb{R} است. نمونه هایی از مسایل بهینه سازی که در عمل به آن بر می خوریم مسایل زیرند: یافتن سرعتی که اتومبیل با آن سرعت، بهترین راندمان $\frac{\text{کیلومتر}}{\text{لیتر}}$ را داشته باشد (مثال جلسه قبل)، یافتن میزان تولید یک کالا به طوری که سود حاصل از فروش حداکثر ممکن باشد، یافتن مناسبترین ابعاد برای یک قوطی حلبی استوانه شکل با حجم ثابت به طوری که کمترین مقدار حلبی در ساخت آن به کار گرفته شود، ... معمولاً دامنه تابع f یک بازه از اعداد حقیقی است که بسته به نوع مساله ممکن است یک بازه کراندار یا بی کران باشد و نقاط انتهایی بازه کراندار ممکن است مطرح باشند یا نباشند.

نخست حالی را در نظر بگیرید که یک تابع به شکل $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. می دانیم که اگر f پیوسته باشد، تابع f دارای ماکسیمم و مینیوموم روی $[a, b]$ است. در این حالت انجام موفقیت آمیز سه گام زیر منجر به یافتن ماکسیمم مینیوموم می شود:

(۱-۱۹) گامهای یافتن ماکسیمم و مینیوموم روی $[a, b]$

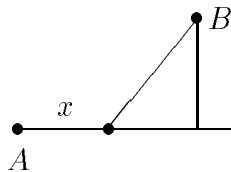
(الف) محاسبه $f(a)$ و $f(b)$.

(ب) یافتن مقدار f در نقاط درونی بازه که در آن مشتق وجود دارد و مشتق در آن نقاط صفر است. این نقاط شامل همه نقاط ماکسیمم مینیوموم موضعی می شود که تابع در آن نقاط مشتق پذیر است. این نقاط را نقاط بحرانی می نامند.

(ج) یافتن مقدار f در نقاطی که در آن f مشتق پذیر نیست. این نقاط را نقاط تکین می نامند. این سه نوع نقطه همه نامزدهای ممکن برای نقاط ماکسیمم و مینیوموم را در بر می گیرند. با مقایسه مقدار f در این سه دسته نقطه می توان ماکسیمم و مینیوموم تابع f را در $[a, b]$ پیدا کرد.

اگر $a = -\infty$, $b = +\infty$ ، هردو، و یا اگر باز $^{\circ}$ به شکل $[a, b[$ ، $[a, b]$ یا $]a, b[$ باشد، طبیعی است که به جای گام (الف)، باید رفتار تابع را وقتی مقدار متغیر به هر انتهای مشمول نشده در دامنه تعریف f نزدیک می شود بررسی کنیم. به هر صورت در مسایل عملی از این نوع، نقطه آغاز حل مساله، طرح دقیق تابع مورد نظر و مشخص کردن دامنه آن است. چنانچه بتوان یک شکل تقریبی از این تابع رسم نمود، معمولاً شکل راهنمای خوبی برای پیشگیری از اشتباه در حل مساله و برخورد با جوابهای نامعقول است.

مثال ۱. برای رسیدن به جزیره B که در فاصله مستقیم ۳ کیلومتری ساحل قرار دارد، فردی در نقطه A در ساحل که ۵ کیلومتر از نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره فاصله دارد و می تواند از قایق موتوری و نیز یک اتومبیل برای حرکت در جاده ساحلی استفاده کند.



سرعت قایق موتوری 20 km/hr و سرعت اتومبیل در جاده ساحلی 40 km/hr است. تعیین کنید که برای رسیدن به جزیره در حداقل زمان ممکن، باید چه مساحتی را نخست با اتومبیل طی کرد و سپس از قایق استفاده نمود.

در این مساله، زمان، t ، باید مینی موم شود. زمان لازم برای رسیدن به نقطه B مجموع دو زمان t_1, t_2 است، $t = t_1 + t_2$ ، که در آن زمان استفاده از اتومبیل و t_2 مدت زمان استفاده از قایق می باشد. اگر مسافت x کیلومتر نخست در جاده ساحلی با اتومبیل طی شود، داریم:

$$t_1 = \frac{x}{40}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{3^2 + (5-x)^2}}{20}$$

بنابراین تابعی که باید مینی موم آن پیدا میشود عبارت است از:

$$t = \frac{x}{۴۰} + \frac{\sqrt{۹ + (۵ - x)^2}}{۲۰}$$

لازم است که دامنه این تابع، یعنی حدود x ، نیز مشخص شود. در اینجا $۰ \leq x \leq ۵$ زیرا که اگر فرد مستقیماً از نقطه A به سوی B با قایق حرکت کند داریم $x = ۰$ ، و از سوی دیگر حداکثر استفاده معقول از اتومبیل راندن تا پای نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره، یعنی $x = ۵$ ، و استفاده از قایق پس از آن است. بنابراین گامهای (الف)، (ب) و (ج) را به صورت زیر پیاده می‌کنیم:

(الف) در $x = ۰$ داریم (ساعت)، $t = \frac{\sqrt{۳۴}}{۲۰} \approx ۰/۲۷۵$ ، و برای $x = ۵$ ، ساعت

$$t = ۰/۱۲۵ + ۰/۱۵ = ۰/۲۵$$

(ب) و (ج). t به عنوان تابع x در داخل بازه $[۰, ۵]$ مشتقپذیر است زیرا تابع جذر فقط در نقطه

۰ مشتقپذیر نیست و اینجا زیر رادیکان حداقل ۹ است. بنابراین کافی است گام (ب) اجرا شود، یعنی

$\frac{dt}{dx}$ برابر صفر قرار داده شده نقاط بحرانی و مقدار f در آنها مشخص شود. داریم:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{۱}{۴۰} + \frac{-۲(۵ - x)}{۴۰\sqrt{۹ - (۵ - x)^2}} = ۰$$

$$\sqrt{۹ - (۵ - x)^2} = ۲(۵ - x)$$

$$۹ - (۵ - x)^2 = ۴(۵ - x)^2$$

$$(۵ - x)^2 = \frac{۹}{۵}$$

$$۵ - x = \pm \frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

چون $۰ \leq x \leq ۵$ تنها جواب عبارت است از

$$x = ۵ - \frac{۳}{\sqrt{۵}} \approx ۳/۶۵۸$$

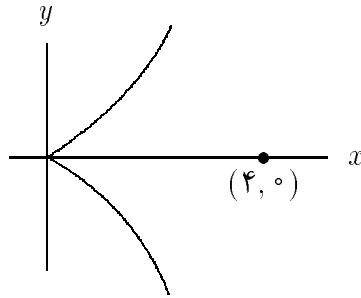
و در این نقطه:

$$t = \frac{۵ - \frac{۳}{\sqrt{۵}}}{۴۰} + \frac{\sqrt{۹ + \frac{۹}{۵}}}{۲۰}$$

$$\approx ۰/۰۹۱ + ۰/۱۶۴ = ۰/۲۵۵ \quad (\text{ساعت})$$

در مقایسه این مقدار با دو مقدار انتهایی، ملاحظه می‌کنیم که مینی موم به ازای $x \approx 3/658^{km}$ به دست می‌آید.

مثال ۲. می‌خواهیم نزدیکترین نقطه منحنی $y^2 = x^3$ را به نقطه $(4, 0)$ پیدا کنیم. این مساله ساده را از سه راه مختلف حل می‌کنیم، و طبعاً در هر سه راه حل به یک جواب خواهیم رسید ولی مقایسه روشها آموزنده است.



راه اول منحنی داده شده اجتماع نمودارهای دو تابع $y = x^{3/2}$ و $y = -x^{3/2}$ هر دو با دو دامنه $[0, +\infty[$ است. بنابر تقارن دو شاخه نسبت به نقطه $(4, 0)$ کافی است مساله را برای یک شاخه حل کنیم و قرینه نقطه به دست آمده در شاخه دیگر را نیز منظور کنیم. بنابراین فقط $y = x^{3/2}$ روی $[0, \infty[$ را در نظر می‌گیریم. فاصله نقطه $(4, 0)$ از نقطه‌ای (x, y) روی این منحنی برابر است با $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$. از آنجا که مینی موم کردن یک کمیت مثبت مطرح است، می‌توان مجذور همین عبارت یعنی $(x-4)^2 + y^2$ را در نظر گرفت که فاقد نماد $\sqrt{\quad}$ است و محاسبه با آن سر راست‌تر. ضمناً برای نقاط منحنی، $y^2 = x^3$ ، پس باید مینی موم تابع زیر را به دست آورد:

$$D(x) = (x-4)^2 + x^3, \quad 0 \leq x < +\infty$$

در نقطه انتهایی $x = 0$ داریم $D(0) = 16$. رفتار تابع وقتی $x \rightarrow +\infty$ را نیز باید در نظر بگیریم که $D(x) \rightarrow +\infty$ وقتی $x \rightarrow +\infty$. تابع D به عنوان تابع x در $0 < x < +\infty$ مشتقپذیر

است، پس باید $\frac{dD}{dx}$ را برابر صفر قرار داده مینی مومهای موضعی را پیدا کنیم.

$$\frac{dD}{dx} = 2(x - 4) + 3x^2$$

معادله $3x^2 + 2x - 8 = 0$ دارای ریشه های $-\frac{4}{3}$ ، 2 است که -2 در دامنه تابع ما نیست، بنابراین فقط $x = \frac{4}{3}$ نیاز به بررسی دارد. داریم $D(\frac{4}{3}) = \frac{256}{27}$. با توجه به اینکه $D(\frac{4}{3}) < D(0)$ ، جواب مساله به ازای $\frac{4}{3}$ به دست می آید و نقاط منحنی که حداقل فاصله را می دهند عبارتند از $(\frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3\sqrt{3}})$.

راه دوم. می توانیم بجای اینکه y را تابعی از x روی منحنی بگیریم، x را تابعی از y فرض کنیم، $x = y^{2/3}$ و در این صورت به جای تابع D بالا که بر حسب x نمایش داده شده، مجذور فاصله را بر حسب y بررسی می کنیم:

$$E(y) = (y^{2/3} - 4)^2 + y^2, \quad -\infty < y < +\infty$$

توجه کنید که در اینجا فقط یک تابع مطرح است و دامنه آن تمام \mathbb{R} می باشد. وقتی $y \rightarrow \pm\infty$ ، داریم $E \rightarrow +\infty$. تابع داده شده در $y = 0$ مشتق پذیر نیست بنابراین باید مقدار تابع را در این نقطه به طور جداگانه بررسی کرد. داریم $E(0) = 16$. در سایر نقاط تابع مشتق پذیر است و با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = 0$ نقاط بحرانی را پیدا می کنیم. داریم

$$\frac{dE}{dy} = \frac{4}{3} y^{1/3} (y^{2/3} - 4) + 2y$$

با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = 0$ مضرب کردن در $\frac{3}{4} y^{1/3}$ (توجه کنید که $y = 0$ قبلاً بررسی شد.) نتیجه می شود.

$$3y^{4/3} + 2y^{2/3} - 8 = 0$$

که یک معادله درجه ۲ بر حسب $y^{2/3}$ است. از حل این معادله نتیجه می شود $y^{2/3} = -2/\frac{4}{3}$ یا $y^{2/3} = \frac{4}{3}$ ، پس $y^{2/3} = \frac{4}{3}$ یا $y = \pm \frac{8}{3\sqrt{3}}$ و در نتیجه $x = \sqrt[3]{y^2} = \frac{4}{3}$. مجدداً $E(\pm \frac{8}{3\sqrt{3}}) < E(0)$ و همان جواب راه اول نتیجه می شود.

راه سوم. وقتی از رابطه $f(x, y) = 0$ نتوان یکی از x یا y را به صورت تابعی ساده از دیگری نوشت، ممکن است کوشش کنیم هر دو متغیر x, y را برحسب متغیر جدیدی t بنویسیم. با تجسم t به عنوان زمان می توان فرض کرد که منحنی داده شده مسیر حرکت نقطه ای (x, y) برحسب زمان است. برای منحنی $y^2 = x^3$ می توان نوشت:

$$x = t^2, y = t^3, -\infty < t < +\infty$$

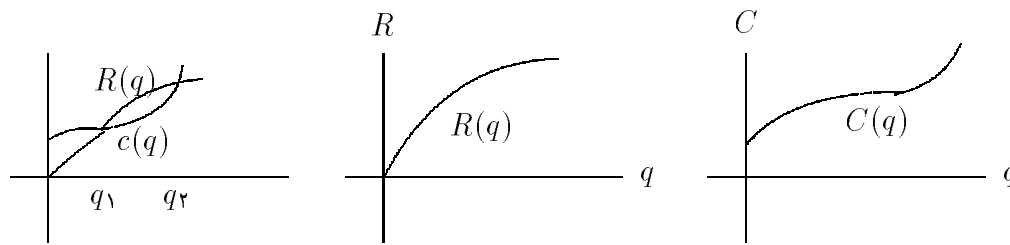
در این صورت مجذور فاصله (x, y) از $(4, 0)$ به صورت تابعی از t ارائه می شود:

$$F(t) = (t^2 - 4)^2 + t^6, -\infty < t < +\infty$$

داریم $F(t) \rightarrow +\infty$ وقتی $Ft \rightarrow \pm\infty$ به عنوان تابعی از t همه جا مشتق پذیر است، مشتق آن نسبت به t را برابر صفر قرار می دهیم که نتیجه می شود $0 = 6t^5 + 4t^3 - 16t = 0$ یا $t(3t^2 + 2t - 8) = 0$ که جوابهای $t = 0$ ، $t^2 = -2$ و $t^2 = \frac{4}{3}$ (غیر قابل قبول) را می دهد. داریم $F(0) = 16$ و $F(\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{256}{27}$ و جواب مساله همان نقاط $(\frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3\sqrt{3}})$ هستند.

نکته قابل مقایسه در این سه راه حل وضعیت نقطه $(0, 0)$ روی منحنی $y^2 = x^3$ است که یک ماکسیمم موضعی برای فاصله از نقطه $(4, 0)$ می باشد. از راه حل اول، این نقطه به صورت یک انتهای باز تابع ظاهر می شود، در راه حل دوم به عنوان یک نقطه تکین که در آن تابع مشتق پذیر نیست، و در راه حل سوم به عنوان یک نقطه که در آن مشتق وجود دارد و صفر است. بنابراین بسته به اینکه مساله چگونه صورتبندی شود، ماهیت یک نقطه ممکن است به صورتهای گوناگون دیده شود.

(۱۹-۲) کاربرد در مسایل اقتصاد فرض کنید یک شرکت تولیدی کالایی تولید می کند که می توان میزان تولید آن کالا را عملاً کمیتی پیوسته فرض کرد. مثلاً تولید شکر برحسب تن یا کیلوگرم، ولی نه تولید هواپیما یا زیردریایی که در موارد اخیر میزان تولید با عدد صحیح سنجیده می شود. هزینه تولید برحسب مقدار تولید نوعاً یک منحنی مانند شکل ۳ است. اگر هزینه تولید q مقدار از کالا را به $C(q)$ نمایش دهیم (مثلاً برحسب ریال)، شکل نمودار شکل ۳



شکل ۳

شکل ۴

شکل ۵

به صورت زیر توجیه می شود. برای راه اندازی تولید، مقداری سرمایه گذاری اولیه لازم است، بنابر در آغاز (یعنی $q = 0$) به هر حال مبلغی هزینه شده است که به صورت $C(0) > 0$ ظاهر می شود. با افزایش تولید، چون سرمایه گذاری اولیه جدیدی لازم نیست هزینه نسبی تولید کاهش می یابد، یعنی $C(q)$ پایین تر از یک خط راست خواهد بود. مثلاً در چاپ یک کتاب، هزینه ای که صرف تهیه فیلم و زینک می شود و به نسبت بالاست تکرار نمی شود و هرچه تولید بیشتر باشد هزینه نسبی، یعنی $\frac{C(q)}{q}$ کاهش می یابد. این واقعیت به صورت تقعر نمودار $C(q)$ تا مقدار قابل ملاحظه ای از q نمایش داده شده است. ولی وقتی تولید از حد معینی تجاوز کند ممکن است نیاز به افزایش ماشین آلات و نیروی کار باشد که در این صورت این افزایش برحسب تغییر جهت تقعر $C(q)$ می شود، همچنان که در شکل نمایش داده شده است. برای تولید بعضی محصولات ممکن است این تغییر جهت صورت نگیرد تا خیلی دیر به وقوع بپیوندد. در مقابل هزینه تولید، در شکل ۴ در آمد حاصل از فروش q مقدار کالا، $R(q)$ ، نمایش داده شده است. در اینجا $R(0) = 0$ ، یعنی قبل از فروش در آمدی وجود ندارد. در آغاز فروش R حدوداً خطی است، یعنی به تناسب فروش q واحد، در آمدی که برابر حاصل ضرب q در قیمت فروش یک واحد است حاصل می شود. ولی با افزایش تولید نوعاً به سبب برآورده شدن نیاز و اشباع بازار، یا به سبب ظهور واحدهای رقیب و افت قیمت، تدریجاً افزایش تولید موجب افزایش متناسب در آمد نمی شود و نمودار $R(q)$ رو به پایین مقعر می شود. در شکل ۵ دو منحنی روی هم قرار داده شده اند. روی بازه $[q_1, q_2]$ میزان در آمد از هزینه بالاتر است و برای اینکه تولید سود ده باشد، باید مقدار تولید در بازه $[q_1, q_2]$ بماند. در واقع تولید کننده مایل است که سود خود، یعنی $p(q) = R(q) - C(q)$ را

به حداکثر ممکن برساند، یعنی باید میزانی از تولید، q ، را در بازه $[q_1, q_2]$ انتخاب کند که برای آن $P(q)$ ماکسیمم شود. برای اینکه بتوانیم از ابزار حساب دیفرانسیل استفاده کنیم، فرض می‌کنیم تابعهای $C(q)$ ، $R(q)$ عملاً علاوه بر پیوسته بودن، مشتقپذیر نیز باشند. در اینصورت ماکسیمم سود حتماً در میزانی q از تولید حادث می‌شود که در آن $\frac{dp}{dq} = 0$. برای درک اقتصادی این مطلب باید برداشتی اقتصادی از مفهوم مشتق ارائه کنیم.

$\frac{dR}{dq}$ و $\frac{dC}{dq}$ چه معنایی دارند؟ طبق تعریف، برای میزان q_0 از تولید، داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) = \lim_{q \rightarrow q_0} \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$$

پس در واقع برای q نزدیک q_0 داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) \approx \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$$

در عمل میزان تولید واقعاً پیوسته نیست، مثلاً برای تولید شکر، حداقل معنی داری از تغییر متغیر، یک تن شکر است، یا در مورد تولید هر کالای دیگر نیز، یک کوچکترین واحد معنی داری به عنوان حداقل افزایش یا کاهش تولید مطرح است. بنابراین کوچکترین مقدار مثبت $q - q_0$ را می‌توان واحد فرض کرد و داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) \approx \frac{C(q_0+1) - C(q_0)}{1} = C(q_0 + 1) - C(q_0) \quad (1)$$

به بیان دیگر، تعبیر اقتصادی $\frac{dC}{dq}(q_0)$ هزینه تولید یک واحد اضافی از کالا است وقتی تولید به q_0 رسیده باشد. در اصطلاح اقتصاد، $\frac{dC}{dq}(q_0)$ را هزینه نهایی می‌نامند (دلیل استفاده از لغت نهایی را خواهیم دید). با عیناً همین استدلال می‌توان گفت که:

$$\frac{dR}{dq}(q_0) \approx R(q_0 + 1) - R(q_0) \quad (2)$$

یعنی $\frac{dR}{dq}(q_0)$ درآمد حاصل از فروش یک واحد اضافی از کالا است وقتی تولید به q_0 رسیده باشد. $\frac{dR}{dq}(q_0)$ را درآمد نهایی می‌نامند.

حال به مسأله ماکسیمم کردن سود باز می‌گردیم. اگر به ازای مقدار q_0 در $[q_1, q_2]$ ماکسیمم

سود حاصل شود، داریم $0 = \frac{dR}{dq}(q_0) - \frac{dC}{dq}(q_0)$ ، پس بنابر (1) و (2):

$$R(q_0 + 1) - R(q_0) \approx C(q_0 + 1) - C(q_0) \quad (3)$$

یعنی درجایی ماکسیمم حاصل می‌شود که درآمد ناشی از فروش یک واحد اضافی از کالا برابر هزینه تولید یک واحد اضافی از کالا است. این مطلب را می‌توان به‌طور شهودی نیز توجیه کرد. برای اینکه q_0 یک نقطه ماکسیمم باشد باید برای q نزدیک q_0 و کوچکتر از q_0 ، تابع $P = R - C$ صعودی باشد یعنی تولید بیشتر، سود بیشتر ایجاد کند، یا به عبارت دیگر در آمد فروش هر واحد بیش از هزینه تولید همان واحد باشد. بالعکس برای q نزدیک q_0 و بزرگتر از q_0 ، تابع $P = R - Q$ باید نزولی باشد، یعنی تولید بیشتر، سود کمتر ایجاد کند، یا معادلاً درآمد فروش هر واحد بیشتر کمتر از هزینه تولید همان واحد باشد. بنابراین در نقطه گذر از صعود به نزول P ، باید هزینه تولید یک واحد اضافی با درآمد ناشی از فروش آن برابر شود. حال می‌توان به دلیل استفاده از لغت نهایی پی برد. مقدار q_0 که در آن ماکسیمم سود حاصل می‌شود، در واقع میزان نهایی تولید مطلوب است زیرا که پس از آن سود تولید کاهش خواهد یافت.

به عنوان تمرینی در این مفاهیم، به عنوان مثال، روشی ترسیمی برای محاسبه هزینه نهایی را که در اقتصاد معمول است ارائه می‌کنیم.

مثال فرض کنید هزینه تولید یک واحد از کالا را وقتی که مقدار تولید کالا q باشد به $a(q)$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$C(q) = q \cdot a(q) \quad (3)$$

نمودار $a(q)$ بسیاری اوقات مانند شکل ۶ است، یعنی تولید هرچه بیشتر باشد (تا حد معقولی)، هزینه تولید هر واحد ارزانتر می‌شود. برای یافتن $\frac{dC}{dq}(q_0)$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد. در نقطه $(q_0, a(q_0))$ مماس نمودار $a(q)$ را رسم می‌کنیم تا محور قائم را در نقطه S قطع کند. از S خط راستی یا ضریب زاویه دو برابر ضریب زاویه خط مماس فوق رسم می‌کنیم تا خط قائم $q = q_0$ را در نقطه ای T قطع کند. مختصه قائم T برابر $\frac{dC}{dq}(q_0)$ است. توجیه این مطلب یک محاسبه سر راست است. با مشتقگیری از رابطه (۳) داریم.

$$\frac{dC}{dq}(q_0) = a(q_0) + q_0 \cdot \frac{da}{dq}(q_0) \quad (4)$$

از طرفی دیگر معادله خط مماس بر نمودار $a(q)$ در نقطه $(q_0, a(q_0))$ هست:

$$y - a(q_0) = \frac{da}{dq}(q_0) \cdot (q - q_0)$$

این خط محور قائم، y ، را در $q = 0$ قطع می‌کند، پس $S = (0, a(q_0) - \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0)$ معادله خط راست گذرا از S با شیب $\frac{da}{dq}(q_0)$ هست:

$$y - a(q_0) + \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 = \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q$$

اشتراک این خط راست با $q = q_0$ با قرار دادن $q = q_0$ حاصل می‌شود که بنابراین مقدار y آن هست:

$$\begin{aligned} y &= a(q_0) - \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 + \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 \\ &= a(q_0) + \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 \end{aligned}$$

که در مقایسه با (۴) نتیجه می‌دهد:

$$y = \frac{dC}{dq}(q_0)$$

همانطور که ادعا شده بود.