سری تیلور و سری توانی (۱)

در جلسه ۲۰ چندجمله‌ای تیلور را بررسی کردیم. اگر تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ تعریف خود دارای مشتق تا مرتبهٔ n باشد، چندجمله‌ای تیلور درجهٔ n تابع f در نقطهٔ a، یا تقریب درجهٔ n تابع f در نقطهٔ a، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n \qquad (1)$$

حال فرض کنید تابع f دارای مشتق از هر مرتبه در نقطهٔ a است، پس می‌توان $f^{(k)}(a)$ را به‌ازای هر k در نظر گرفت. بدین ترتیب می‌توان به‌ازای هر عدد x، سری زیر را تشکیل داد:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \qquad (2)$$

سری فوق را سری تیلور تابع f در نقطه a می‌نامیم. دو سؤال طبیعی در اینجا به ذهن می‌رسد.

الف) آیا سری (۲) به‌ازای هر x یا بعضی x ها همگراست؟

ب) اگر x در دامنهٔ تعریف f باشد و سری (۲) به‌ازای x همگرا، آیا حد سری برابر $f(x)$ می‌شود؟

توجه کنید که زمینه‌ای معقول برای جواب مثبت به (ب) وجود دارد. به طور کلی دیدیم که با افزایش درجهٔ تقریب تابع، یعنی افزایش n در (۱)، تقریب درجهٔ n در نزدیکی a از تابع دورتر نمی‌شود. بنابراین غیرقابل تصور به نظر نمی‌رسد که با افزایش n، حد (۱)، یعنی سری (۲)، به خود تابع میل کند. مثال‌های زیر تنوع وضعیت‌های ممکن را تا حدی بیان خواهد کرد.

(۳۳—۱) چند مثال

(۳۳—۱—۱) تابع $f(x)=e^x$ را با $a=0$ در نظر می‌گیریم. از آنجا که $f^{(n)}(0)=1$ به‌ازای هر n، سری تیلور تابع در $a=0$ به شکل زیر است:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{۳}$$

می‌خواهیم همگرایی سری فوق را به‌ازای x های مختلف بررسی کنیم و اینکه اگر به‌ازای یک x این سری همگرا باشد، آیا مجموع سری برابر e^x است؟ در اینجا، و در بسیاری موارد دیگر، هر روشی که برای تخمین خطای تقریب درجهٔ n در اختیار داشته باشیم می‌تواند مفید واقع شود. می‌دانیم که اگر $p_n(x)$ تقریب درجهٔ n تابع f در a باشد، داریم:

$$f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{۴}$$

که در اینجا c نقطه‌ای بین a و x (و البته وابسته به n) است جمله دوم سمت را باقیماندهٔ لاگرانژ نامیدیم. اگر برای x داده شده داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=0$$

آنگاه $\lim_{n\to\infty}(f(x)-p_n(x))=0$، یعنی سری تیلور به‌ازای x به مقدار $f(x)$ میل می‌کند. پس در این صورت به‌ازای چنین مقدار x، جواب (الف) و (ب) هر دو مثبت می‌شود. در مورد تابع $f(x)=e^x$ و $a=0$ داریم:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

که c نقطهٔ نامشخصی بین 0 و x و وابسته به n است. x هرچه باشد می‌توان نوشت $0\leq c\leq |x|$، پس $e^c\leq e^{|x|}$. بنابراین برای x داده شده، چنانچه ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$، باقیماندهٔ لاگرانژ به صفر میل می‌کند و نتیجه خواهد شد که سری تیلور (۳) به e^x همگراست. در واقع برای x داده شده، N را بزرگتر یا مساوی $|x|$ می‌گیریم. در این صورت برای $n>N$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{|x|^N}{N!}\cdot\frac{|x|}{N+1}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{n+1}\\ &\leq \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{n-N}\end{aligned}$$

چون نسبت ثابت $\frac{|x|}{N+۱}$ اکیداً از یک کوچکتر است، وقتی $n \to \infty$، طرف راست بالا به صفر میل می‌کند، پس باقیماندهٔ لاگرانژ به صفر میل می‌کند. بنابراین برای هر x داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad (۵)$$

بدین ترتیب برای این مثال، سری تیلور e^x در $a = ۰$ به‌ازای هر x به خود تابع میل می‌کند. در اثبات بالا دیدیم که برای کوچک کردن باقیمانده لازم بود N را بزرگتر یا مساوی $|x|$ بگیریم. به طور کلی باید انتظار داشت که هرچه x از a دورتر شود، برای نزدیک کردن مجموع سری تیلور به $f(x)$ جملات بیشتری از سری تیلور لازم باشد. در شکل ۱ مجموع‌های ۱، $۱ + x$، $۱ + x + \frac{x^۲}{۲}$ و $۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳!}$ به عنوان تقریب‌های e^x نمایش داده شده‌اند. ملاحظه کنید که هرچه $|x|$ بزرگتر شود، تقریب از مقدار واقعی دورتر است هرچند که به‌ازای هر x داده شده، با افزودن جملات سری تیلور می‌توان به e^x به دلخواه نزدیک شد.

?

(۳۳—۱—۲) تابع‌های $\sin x$، $\cos x$، $sinh\ x$ و $cosh\ x$ را در نظر می‌گیریم. سری‌های تیلور این توابع در $a = ۰$ به سادگی محاسبه می‌شوند زیرا که

$$\sin^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & \text{زوج } n \\ ۱ & n = ۴k + ۱ \\ -۱ & n = ۴k + ۳ \end{cases} \qquad \cos^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & \text{فرد } n \\ ۱ & n = ۴k \\ -۱ & n = ۴k + ۲ \end{cases}$$

$$sinh^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & \text{زوج } n \\ ۱ & \text{فرد } n \end{cases} \qquad cosh^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & \text{فرد } n \\ ۱ & \text{زوج } n \end{cases}$$

پس سری‌های تیلور این توابع در $a = ۰$ به شرح زیرند:

$$\sin x: \quad x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + - \cdots$$

$$\cos x: \quad ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + - \cdots$$

$$sinh\ x: \quad x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$$

$$cosh\ x: \quad ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۶}{۶!} + \cdots$$

در واقع به سبب شباهت ضرایب این سری‌ها به ضرایب سری تیلور e^x، می‌توان با استفاده از باقیماندهٔ لاگرانژ به روشی مشابه آنچه در مثال قبل گذشت نشان داد که هر یک از این سری‌ها به‌ازای هر x به تابع مربوط میل می‌ک د، یع ی به‌ازای هر x داریم:

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + - \cdots \qquad (۶)$$

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + - \cdots \qquad (۷)$$

$$sinh\ x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \frac{x^۷}{۷!} + \cdots \qquad (۸)$$

$$cosh\ x = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۶}{۶!} + \cdots \qquad (۹)$$

به ع وان مثال، چ د تقریب متوالی $\sin x$ با چ دجمله‌ای‌های تیلور در شکل ۲ نمایش داده شده است.

?

(۳۳-۱-۳) تابع $f:]۰,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در نظر می‌گیریم. سری تیلور این تابع را در نقطهٔ $a = ۱$ از قلمرو بررسی می‌ک یم. داریم $f'(x) = x^{-۲}$، $f''(x) = (-۱)(-۲)x^{-۳}$، و با استقراء $f^{(n)}(x) = (-۱)^n n! x^{-n-۱}$، پس $f^{(n)}(۱) = (-۱)^n n!$ و $\frac{f^{(n)}(۱)}{n!} = (-۱)^n$. ب ابراین سری تیلور تابع در $a = ۱$ به صورت زیر است:

$$۱ - (x-۱) + (x-۱)^۲ - (x-۱)^۳ + - \cdots$$

ملاحظه می‌ک یم که این یک سری ه دسی با قدر نسبت $-(x-۱)$ است، پس شرطی لازم و کافی برای همگرایی آن این است که $|-(x-۱)| < ۱$، یا $۰ < x < ۲$. از طرفی دیگر از فرمول مجموع سری ه دسی همگرا، برای $|-(x-۱)| < ۱$، داریم:

$$۱ - (x-۱) + (x-۱)^۲ - + \cdots = \frac{۱}{۱ - (-(x-۱))} = \frac{۱}{x}$$

بدین ترتیب برای تابع $\frac{1}{x}$ و $a = ۱$، نتیجهٔ زیر در مورد (الف) و (ب) حاصل می‌شود: سری تیلور در بازهٔ $]۰, ۲[$ همگراست و در این بازه به خود تابع میل می‌کند. از آنجا که تابع $\frac{1}{x}$ در $x = ۰$ تعریف نشده است، واگرایی سری تیلور به‌ازای $x = ۰$ شاید عجیب به نظر نرسد، ولی برای $x \geq ۲$ تابع $\frac{1}{x}$ تعریف شده است و در عین حال سری تیلور در $a = ۱$ همگرا نیست.

(۳۳–۱–۴) یک تابع چندجمله‌ای در نظر بگیرید:

$$f(x) = a_{۰} + a_{۱}x + \cdots + a_k x^k$$

داریم $f^{(n)}(x) = ۰$ اگر $n > k$. دیده‌ایم که اگر به جای x، $a + (x - a)$ جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

پس در واقع سری تیلور f در نقطه a برابر چندجمله‌ای تیلور تابع در نقطهٔ a و برابر خود تابع است.

(۳۳–۱–۵) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{۱}{x^{۲}}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

برای $x \neq ۰$ با استفاده مکرر از قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان ملاحظه کرد که این تابع از هر مرتبه مشتق دارد. در واقع ادعا می‌کنیم که به‌ازای $x = ۰$ نیز تابع از هر مرتبه مشتق دارد و $f^{(n)}(۰) = ۰$ برای هر n. اگر این ادعا ثابت شود نتیجه می‌شود که همه ضرایب سری تیلور، $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$، در $a = ۰$ صفر هستند، پس سری تیلور f در $a = ۰$ به صورت:

$$۰ + ۰ \cdot x + ۰ \cdot x^{۲} + \cdots$$

است، پس سری تیلور به‌ازای هر x همگراست ولی به‌جای اینکه به تابع f میل کند، به تابع ثابت صفر میل می‌کند! در واقع تقریب درجهٔ n تابع f در صفر، برای هر n، تابع ثابت صفر است. برای اثبات

ادعا، به طور استقرایی ثابت می‌کنیم که

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} c\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p} \text{ مجموع جملات به شکل } & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در عبارت بالا، c یک عدد حقیقی و p یک عدد صحیح مثبت است. نخست توجه کنید که حکم برای $n = 1$ درست است زیرا که برای $x \neq 0$ داریم

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (\frac{2}{x^3})$$

و

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

اگر $\frac{1}{x}$ را برابر t قرار دهیم حد بالا برابر $\lim_{t \to \pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}}$ می‌شود که صفر است. حال فرض می‌کنیم حکم تا n ثابت شده است و حکم را برای $(n+1)$ ثابت می‌کنیم. طبق فرض، مشتق nـام تابع f در $x \neq 0$ مجموع جملاتی هر یک به شکل $c\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p} = ce^{-x^{-2}}x^{-p}$ است پس مشتق $(n+1)$ـام در $x \neq 0$ مجموع جملاتی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ce^{-x^{-2}}x^{-p} &= c[2e^{-x^{-2}}x^{-p-3} + e^{-x^{-2}}(-p)x^{-p-1}] \\ &= (2c)\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+3}} - p\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+1}} \end{aligned}$$

پس مشتق $(n+1)$ـام نیز همچنان مجموع جملاتی به شکل مورد نظر است. حال برای مشتق $(n+1)$ـام در صفر باید حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x}$$

که در آن $f^{(n)}(x)$ مجموع جملاتی به شکل $ce^{-x^{-2}}x^{-p}$ است. برای هر چنین چندجمله‌ای داریم:

$$\frac{ce^{-x^{-2}} \cdot x^{-p}}{x} = c\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+1}} = c\frac{t^{p+1}}{e^{t^2}}$$

که در اینجا t را جایگزین $\frac{1}{x}$ کرده‌ایم. وقتی $x \longrightarrow 0$، داریم، $t \longrightarrow \pm\infty$، و حد بالا صفر است. بدین ترتیب ادعا به اثبات می‌رسد.

مثال‌های متنوع بالا نشان داد که اولاً جواب سؤال (الف) ممکن است به‌ازای بعضی x ها منفی باشد، یعنی سری تیلور تابع f در نقطهٔ a از دامنهٔ f ممکن است به‌ازای بعضی x ها همگرا نباشد، و ثانیاً در جواب (ب)، حتی اگر سری تیلور به‌ازای x همگرا باشد، ممکن است مجموع سری برابر خود تابع نشود. در مقابل دیدیم که در مورد بعضی توابع مأنوس و مهم مانند e^x، $\sin x$، $\cos x$، $sinh\ x$ و $cosh\ x$، سری تیلور در $a = 0$ به‌ازای هر x به خود تابع میل می‌کند. برای درک بهتر نظام حاکم بر این امر، به یک بحث جامع‌تر می‌پردازیم.

فرض کنید c یک عدد حقیقی یا مختلط باشد و c_0، c_1، c_2، ... اعداد حقیقی یا مختلط داده شده برای هر z مختلط، سری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$c_0 + c_1(z-c) + c_2(z-c)^2 + \cdots \qquad (10)$$

سری (۱۰) را یک سری توانی در c (یا حول c، یا به مرکز c) می‌نامند. از آنجا که مجموعهٔ اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط است، بحث بعدی را در مورد اعداد مختلط انجام خواهیم داد، که در واقع روشن‌کننده‌تر است، ولی خواننده می‌تواند c_i ها، c و z را حقیقی فرض کند و هیچ تغییری در بحث حاصل نخواهد شد. اگر سری بالا به‌ازای z هایی همگرا باشد، مجموع سری تابعی به دامنهٔ این z ها تعریف می‌کند. شباهت (۱۰) را به نمایش اعداد حقیقی در یک مبنا، مثلاً مبنای ۱۰، ملاحظه کنید. هر عدد مثبت را می‌توانیم به صورت:

$$a_0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots \qquad (11)$$

بنویسیم که در آن a_0 یک عدد صحیح مثبت است و a_1، a_2، ... ارقامی از میان ۰ تا ۹. همان طور که اعداد (مثبت) را به صورت (۱۱) نمایش می‌دهیم، جالب خواهد بود اگر بتوانیم تابع‌ها، یا دست‌کم دستهٔ بزرگی از تابع‌ها، را به صورت واحد (۱۰) نمایش دهیم. در این صورت چندجمله‌ای‌ها متناظر کسرهای اعشاری مختومه می‌شوند. قضیهٔ سادهٔ زیر کلید بحث‌های بعدی است.

(۳۳–۲) قضیه. اعداد مختلط c، c_0، c_1، c_2، ... داده شده‌اند. در این صورت ρ وجود دارد، $0 \leq \rho \leq \infty$، به طوری که:

الف) به‌ازای هر z که $|z-c|<\rho$، سری توانی (۱۰) همگرای مطلق است.

ب) به‌ازای هر z که $|z-c|>\rho$، سری توانی (۱۰) واگراست.

قبل از ارائه اثبات ۳۳–۲، نتایج حکم آن را مختصراً تشریح می‌کنیم. نخست توجه کنید که به‌ازای $z=c$ تمام جملات سری (۱۰) از اندیس ۱ به بعد صفر می‌شوند و سری به c_0 همگراست. اگر $\rho=0$، (الف) مصداقی ندارد و هر $z\neq c$ در $|z-c|>0$ صدق می‌کند، پس سری (۱۰) به‌ازای هر $z\neq c$ واگراست. بالعکس اگر $\rho=+\infty$، حکم (ب) مصداقی ندارد و به‌ازای هر z، سری (۱۰) همگرای مطلق است. در حالت $0<\rho<\infty$، اگر دایرهٔ به شعاع ρ و مرکز c را در نظر بگیریم، طبق حکم قضیه، سری (۱۰) به‌ازای هر z در درون دایره همگرای مطلق و به‌ازای هر z در بیرون این دایره واگراست. قضیه حکمی در مورد نقاط روی دایره ارائه نمی‌کند و در واقع بررسی این نقاط را باید جداگانه در هر مورد خاص انجام داد. بدین ترتیب نظام مشخصی بر مجموعهٔ نقاط همگرایی و واگرایی یک سری مانند (۱۰) حکمفرماست. در حالتی که همهٔ داده‌ها، یعنی c، c_0، c_1، ... حقیقی باشند و نظر خود را فقط به z های حقیقی محدود کنیم، $x=z$، قضیهٔ ۳۳–۲ نتیجه می‌دهد که بازه‌ای به شعاع ρ حول c وجود دارد به طوری که برای هر x در $]c-\rho,c+\rho[$، سری $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-c)^n$ همگرای مطلق است و به‌ازای هر x که $|x-c|>\rho$، سری $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-c)^n$ واگرا می‌باشد. در مورد دو نقطهٔ انتهایی بازه، یعنی $x=c+\rho$ و $x=c-\rho$، قضیه حکمی نمی‌کند و در واقع بستگی به مورد خاص دارد. توجه کنید که سری تیلور یک تابع f در نقطهٔ a، یک سری توانی حول a است. بدین ترتیب دامنهٔ همگرایی سری تیلور نیز از نظام خاص برخوردار است یعنی بازه‌ای متقارن به مرکز a وجود دارد که سری در تمام نقاط داخل این بازه همگرای مطلق و در همهٔ نقاط بیرون بازه واگراست. مثلاً در مثال ۳۳–۱–۳، تابع $\frac{1}{x}$ حول $a=1$، دیدیم که $\rho=1$ و سری تیلور مربوط بیرون $]0,2[$ واگراست هرچند که $\frac{1}{x}$ برای همه $x\geq 2$ تعریف شده است.

برهان ۳۳–۲. کافی نشان دهیم اگر (۱۰) به‌ازای $z=z_1$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای هر z که $|z-c|<|z_1-c|$، یعنی به‌ازای هر z نزدیکتر از z_1 به c، نیز سری همگرا و در واقع همگرای مطلق

است. پس فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-c)^n$ همگراست. در این صورت کرانی K برای قدرمطلق جملات این سری وجود دارد، یعنی عددی $K>0$ هست که:

$$|c_n(z_1-c)^n| \leq K \quad : \quad \text{برای هر } n$$

حال z را طوری در نظر بگیرید که $|z-c|<|z_1-c|$ و $\frac{|z-c|}{|z_1-c|}$ را برابر σ قرار دهید، که $\sigma<1$. داریم

$$|c_n(z-c)^n| = |c_n(z_1-c)^n| \cdot |\frac{z-c}{z_1-c}|^n \leq K \cdot \sigma^n$$

مقایسه با سری هندسی $K\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$، $0 \leq \sigma < 1$ نشان می‌دهد که $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-c)^n|$ همگراست، یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ همگرای مطلق است و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

عدد ρ را شعاع همگرایی سری (۱۰) می‌نامند و گوی باز $|z-c|<\rho$ (یا در حالت حقیقی بازهٔ باز $]c-\rho, c+\rho[$) ناحیه همگرایی سری خوانده می‌شود. محاسبهٔ ρ بسیاری اوقات ساده است. در واقع می‌توان بر اساس هر آزمون همگرایی مطلق روشی برای محاسبهٔ ρ ارائه کرد. مثلاً آزمون نسبت را در نظر بگیرید. فرض کنید $\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ وجود دارد و برابر L است $(0 \leq L \leq +\infty)$. در این صورت ادعا می‌کنیم که:

$$\rho = \frac{1}{L} \tag{۱۲}$$

در واقع حد نسبت قدرمطلق دو جملهٔ توانی (۱۰) عبارت است از:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(z-c)^{n+1}|}{|c_n(z-c)^n|} = \lim_{n\to\infty} (\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|z-c|) = L \cdot |z-c|$$

اگر این حد کوچکتر از ۱ باشد، یعنی $|z-c|<\frac{1}{L}$، سری همگرای مطلق است، و اگر بزرگتر از ۱ باشد، یعنی $|z-c|>\frac{1}{L}$، سری واگراست، پس $\frac{1}{L}$ شعاع همگرایی سری است.

به همین ترتیب با استفاده از آزمون ریشه، چنانچه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ وجود داشته و برابر L باشد، مجدداً $\rho=\frac{1}{L}$ شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ خواهد بود.

(۳۳—۳) چ‌ند مثال

(۳۳—۳—۱) در مورد سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$، قبلاً دیدیم (مثال ۳۳—۱—۱) به‌ازای هر z حقیقی این سری به e^x میل می‌ک‌ند. حال چون هر z مختلط نزدیکتر از یک x حقیقی به ۰ است (مثلاً نزدیکتر از $|z|$۲)، از قضیه نتیجه می‌شود که $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ به‌ازای هر z همگرا (ی مطلق) است. مجموع این سری را به تبعیت از حالت حقیقی e^z یا $\exp z$ می‌نامیم. بدون استفاده از مطالب چ‌ندجمله‌ای تیلور و باقیمانده نیز می‌توان شعاع همگرایی این سری را به‌دست آورد. مثلاً از آزمون نسبت، داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$، پس $\rho=+\infty$.

(۳۳—۳—۲) سری‌های توانی طرف راست (٦)، (۷)، (۸) و (۹) را با جایگزی‌ی z مختلط به‌جای x در نظر بگیرید. از آنجا که هر یک از این سری‌ها به‌ازای هر x حقیقی همگراست، از قضیه نتیجه می‌شود که این سری‌ها به‌ازای هر z مختلط نیز همگرا می‌شوند. در واقع $\sin z$، $\cos z$، $sinh\ z$ و $cosh\ z$ را به صورت زیر تعریف می‌ک‌یم:

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\quad,\quad \cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\tag{13}$$

$$sinh\ z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\quad,\quad cosh\ z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\tag{14}$$

سایر توابع مثلثاتی و هذلولوی برای مقادیر مختلط نیز برحسب $\sin z$، $\cos z$، $sinh\ z$ و $cosh\ z$ تعریف می‌شوند. مجدداً می‌توان مستقیماً نشان داد شعاع همگرایی هر یک از سری‌های توانی بالا $+\infty$ است. مثلاً برای $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$ داریم $c_n=0$ اگر n فرد باشد و $c_n=\frac{(-1)^k}{(2k)!}$ اگر $n=2k$. برای n فرد $\sqrt[n]{|c_n|}=0$ و برای n زوج، $n=2k$، $a_n=\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. چون برای هر عدد صحیح مثبت m، $\sqrt[2k]{m}\geq 1$ ، داریم

$$\frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}}\leq\frac{1}{\sqrt[2k]{2k}}\cdots\cdots\frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}}\leq\left(\frac{1}{\sqrt[n]{k+1}}\right)^k=\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

و حد جملهٔ طرف راست صفر است وقتی $k\to+\infty$.

(۳۳–۳–۳) برای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}(n!)z^n$، از آنجا که $\frac{(n+1)!}{n!} \longrightarrow +\infty$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$، داریم $\rho = 0$.

(۳۳–۳–۴) برای عدد حقیقی و نامنفی دادهٔ شدهٔ p، سری توانی p را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^p}}$ برابر ۱ است، داریم $\rho = 1$، p هر چه باشد. بدین ترتیب برای هر z با $|z| < 1$ این سری همگرا و به‌ازای هر z با $|z| > 1$ این سری واگراست. برای مقادیر مختلف p، رفتار این سری روی دایرهٔ $|z| = 1$ متفاوت است. برای $p > 1$، چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}|\frac{z^n}{n^p}|$ همگراست. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ به‌ازای هر z با $|z| = 1$ همگراست. برای $p = 1$، سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ که به‌ازای $z = 1$ به‌دست می‌آید واگراست و لیکن سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$، برای $z = -1$، همگراست. برای $p = 0$، سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty}z^n$ به‌ازای هر z با $|z| = 1$ واگراست.