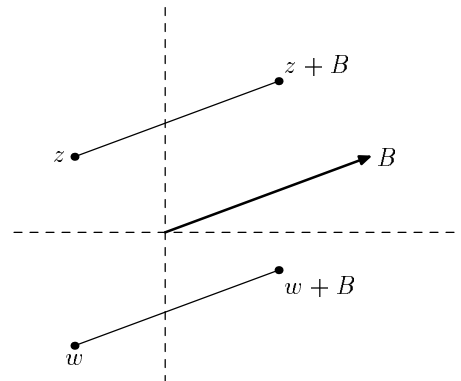


## اعداد مختلط و تبدیلات صفحه

کاربردهای متنوعی برای اعداد مختلط وجود دارد. در اینجا به ارائه یک نمونه از این کاربردها می‌پردازیم. صفحه  $\mathbb{R}^2$  یا معادلاً  $\mathbb{C}$  را در نظر بگیرید. به کمک اعداد مختلط به بررسی تبدیلهای "انتقال"، "دوران" و "تجانس" از صفحه خواهیم پرداخت. انتقال را به این مفهوم می‌گیریم که همه نقاط صفحه در یک امتداد و به یک مقدار حرکت کنند. به طور دقیق‌تر، برای بردار ثابتی  $B$ ، هر نقطه به اندازه  $B$  حرکت می‌کند. از آنجا که جمع اعداد مختلط متناظر با جمع بردارها تعریف شد، می‌توان انتقال را تابعی  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  به شکل

$$T(z) = z + B \quad (1)$$

تلقی کرد که در آن  $B$  یک عدد مختلط ثابت است. بدین ترتیب اگر  $B_1$  و  $B_2$  دو عدد مختلط ثابت

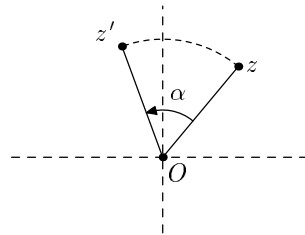


باشند حاصل دو انتقال متوالی با  $B_1$  و  $B_2$  عبارت است از:

$$z \rightarrow z + B_1 \rightarrow (z_1 + B_1) + B_2 = z + (B_1 + B_2)$$

یعنی انتقال به وسیله  $B_1 + B_2$ .

حال دوران را در نظر می‌گیریم و نخست دوران حول مبدأ مختصات، یعنی  $z_0$ ، را بررسی می‌کنیم. برای هر زاویه  $\alpha$ ، مقصود از دوران حول  $z_0$  به زاویه  $\alpha$  تبدیلی است که هر نقطه  $z$  را به نقطه‌ای  $z'$  می‌فرستد که فاصله آن از مبدأ برابر فاصله  $z$  از مبدأ است ولی زاویه از خط واصل از  $z_0$  به  $z$  به خط واصل از  $z_0$  به  $z'$  برابر مقدار ثابت  $\alpha$  است. توجه داشته باشید که همواره طبق قرارداد، مقادیر مثبت  $\alpha$  در جهت مثلثانی (ضد عقربه ساعت) منظور می‌شود. با توجه به تعریف حاصل ضرب اعداد مختلط، اگر



$R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  یک دوران حول مبدأ مختصات باشد، داریم:

$$R(z) = \text{cis}(\alpha) \cdot z \quad (2)$$

که  $\alpha$  مقداری ثابت است. حال اگر بخواهیم دوران زاویه  $\alpha$  حول نقطه دلخواهی  $z_0$  را با اعداد مختلط نمایش دهیم به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست انتقالی به اندازه  $(-z_0)$  انجام می‌دهیم که  $z_0$  را به  $z_0 - z_0 = 0$  منتقل کند، سپس دوران زاویه  $\alpha$  حول  $0$  را انجام می‌دهیم (ضرب کردن در  $\text{cis}(\alpha)$ )، و بالاخره با انتقال به وسیله  $z_0$ ، نقطه اولیه  $z_0$  را به مکان اولیه‌اش باز می‌گردانیم. بدین ترتیب دوران زاویه  $\alpha$  حول  $z_0$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$z \rightarrow z - z_0 \rightarrow \text{cis}(\alpha) \cdot (z - z_0) \rightarrow \text{cis}(\alpha) \cdot (z - z_0) + z_0 \quad (3)$$

پس فرمول دوران زاویه  $\alpha$  حول  $z_0$  به صورت زیر نیز داده می‌شود:

$$z \rightarrow \text{cis}(\alpha) \cdot (z - z_0) + z_0 = \text{cis}(\alpha) \cdot z + (1 - \text{cis}(\alpha)) \cdot z_0 \quad (4)$$

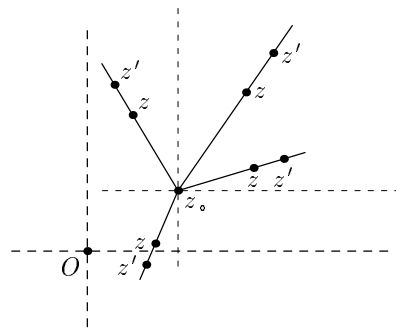
توجه کنید که چون  $(1 - \text{cis}(\alpha)) \cdot z_0$  یک عدد مختلط ثابت است، بلافاصله نتیجه می‌شود که

(۵-۱) هر دوران در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب دوران حول  $z_0$  با همان زاویه و یک انتقال

نوشت.

بالعکس اگر متوالیاً یک دوران زاویه  $\alpha \neq 2k\pi$  حول  $z_0$  و سپس یک انتقال صورت گیرد، ادعا می‌کنیم حاصل یک دوران زاویه  $\alpha$  حول نقطه‌ای  $z_0$  خواهد بود. چنین ترکیبی به صورت  $cis(\alpha) \cdot z + B$  خواهد بود. چون فرض کرده‌ایم  $\alpha \neq 2k\pi$  داریم  $\cos(\alpha) \neq 1$  پس اگر  $z_0$  را به صورت  $\frac{B}{1-cis(\alpha)}$  تعریف کنیم، داریم  $cis(\alpha) \cdot z + B = cis(\alpha) \cdot z + (1 - cis(\alpha)) \cdot z_0$  که طبق (۴) دوران زاویه  $\alpha$  حول  $z_0$  است.

حال تبدیل تجانس را در نظر می‌گیریم. اگر عدد حقیقی نامنفی  $k$  داده شده باشد و  $z_0$  یک نقطه در صفحه باشد، مقصود از تجانس به مرکز  $z_0$  با ضریب  $k$  این است که هر نقطه  $z$  روی نیم‌خط واصل از  $z_0$  به  $z$  به نقطه‌ای  $z'$  حرکت می‌کند که فاصله‌اش از  $z_0$ ،  $k$  برابر فاصله  $z$  از  $z_0$  است.



چون فاصله  $z_0$  از  $z_0$  صفر است و  $k \cdot 0 = 0$  مرکز تجانس تحت اثر تجانس ثابت باقی می‌ماند. برای به‌دست آوردن فرمولی برای تجانس، نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که مرکز تجانس مبدأ مختصات،  $z_0$ ، است. در این حالت روشن است که نقطه  $z$  به نقطه  $kz$  فرستاده می‌شود (ضرب عدد  $k$  در "بردار"  $z$ ). بدین ترتیب تابع تجانس به مرکز  $z_0$  با ضریب  $k$ ،  $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  عبارت است از:

$$H(z) = kz \quad (5)$$

برای تجانس نسبت به مرکز دلخواه  $z_0$ ، به روشی مشابه دوران حول  $z_0$  عمل می‌کنیم، یعنی نخست با انتقال  $(-z_0)$  در صفحه، نقطه  $z_0$  را به  $z_0$  منتقل می‌کنیم، سپس تجانس فوق،  $H$ ، را انجام می‌دهیم و

بالاخره حاصل را به اندازه  $z_0$  انتقال می دهیم:

$$z \rightarrow z - z_0 \rightarrow k(z - z_0) \rightarrow k(z - z_0) + z_0. \quad (6)$$

یعنی تابع تجانس به مرکز  $z_0$  و ضریب  $k$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$z \rightarrow k(z - z_0) + z_0 = kz + (1 - k)z_0. \quad (7)$$

از آنجا که  $(1 - k)z_0$  عددی ثابت است داریم

(۵-۲) هر تجانس در صفحه را می توان به صورت ترکیب تجانس حول  $z_0$  با همان ضریب و یک انتقال نوشت.

در اینجا نیز عکس مطلب درست است. فرض کنید نخست تجانس با ضریب  $k \neq 1$  انجام گیرد و سپس یک انتقال با بردار  $B$ . در این صورت حاصل اثر بر نقطه  $z$  عبارت است از  $kz + B$ . چون  $k \neq 1$ ،  $\frac{B}{1-k}$  تعریف شده است و اگر آن را  $z_0$  بنامیم داریم  $kz + B = kz + (1 - k)z_0$  که طبق (۷) تجانس با ضریب  $k$  به مرکز  $z_0$  است. حال اگر به فرمول های کلی انتقال، دوران و تجانس، که توسط (۱)، (۴) و (۷) ارائه شده اند، نظر کنیم، ملاحظه می کنیم که هر سه، تابع های درجه یک نسبت به  $z$  تعریف می کنند. اکنون نشان می دهیم که عکس این مطلب نیز صحیح است، یعنی هر تابع درجه یک  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  در واقع ترکیبی از این سه نوع تبدیل است. فرض کنید تابع  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  به صورت

$$f(z) = Az + B \quad (8)$$

داده شده است که در آن  $A, B$  اعداد مختلط ثابت باشند. اگر  $A = 0$  که همه نقاط صفحه به نقطه ثابت  $B$  فرستاده می شوند و این، تجانس به مرکز  $B$  با ضریب  $k = 0$  است.

فرض کنید  $A \neq 0$ ، می توان نوشت:

$$A = |A|cis(\alpha) \quad (9)$$

پس  $f$  را می توان به صورت ترکیب زیر نوشت:

$$z \xrightarrow{\text{دوران حول } z_0} cis(\alpha) \cdot z \xrightarrow{\text{تجانس به مرکز } z_0} |A|cis(\alpha) \cdot z \xrightarrow{\text{انتقال}} |A|cis(\alpha) \cdot z + B \quad (10)$$

یعنی هر تابع درجه یک، ترکیب یک دوران حول  $z_0$ ، یک تجانس به مرکز  $z_0$  و یک انتقال است. همچنین چون عمل ضرب جابجایی است، می‌توان ترتیب دوران و تجانس را تعویض کرد. در واقع اکنون می‌بینیم که ترکیب  $(10)$  یا یک انتقال است و یا ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز مشترک:

حالت اول:  $A = 1$  در این صورت تابع به  $z \rightarrow z + B$  خلاصه می‌شود که یک انتقال است. حالت دوم:  $A \neq 1$  در این صورت نشان می‌دهیم که نقطه‌ای  $z_0$  وجود دارد به طوری که  $z \rightarrow Az + B$  ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز  $z_0$  است. یک چنین نقطه  $z_0$  باید در رابطه  $Az_0 + B = z_0$  صدق کند چون مرکز دوران و تجانس ثابت می‌ماند، پس معادلاً  $z_0 = \frac{B}{1-A}$  و چون  $A \neq 1$  فرض شده است،  $z_0 = \frac{B}{1-A}$  به دست می‌آید. حال نشان می‌دهیم که این نقطه فی الواقع ویژگی مورد نظر را دارد، یعنی  $z \rightarrow Az + B$  ترکیب دوران و تجانس حول  $z_0$  است. داریم:

$$Az + B = A\left(z - \frac{B}{1-A}\right) + B + \frac{AB}{1-A} = A(z - z_0) + z_0.$$

با نوشتن  $A = |A|cis(\alpha)$  ملاحظه می‌کنیم که این تابع ترکیب دوران با زاویه  $\alpha$  و تجانس با ضریب  $|A|$  حول  $z_0$  است.

بالاخص دو حالت زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم:

اگر  $A \neq 1$  و  $|A| = 1$ ، تابع  $z \rightarrow Az + B$  دوران به زاویه  $arg(A)$  حول  $z_0 = \frac{B}{1-A}$  است.

اگر  $A \neq 1$  و  $A \geq 0$ ، تابع  $z \rightarrow Az + B$  تجانس با ضریب  $A$  حول  $z_0 = \frac{B}{1-A}$  است.

مثال ۱. فرض کنید  $T_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  دوران به زاویه  $\alpha$  حول  $z_1$  و  $T_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  دوران به زاویه  $\beta$  حول  $z_2$  است.

در این صورت ترکیب  $T_2 \circ T_1$  چگونه تبدیلی است؟

داریم  $T_1(z) = cis(\alpha) \cdot z + B_1$  و  $T_2(z) = cis(\beta) \cdot z + B_2$ . پس

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(z) &= T_2(cis(\alpha) \cdot z + B_1) + B_2 \\ &= cis(\beta) \cdot cis(\alpha) \cdot z + cis(\beta) \cdot B_1 + B_2 \\ &= cis(\alpha + \beta) \cdot z + (cis(\beta) \cdot B_1 + B_2) \end{aligned}$$

که در اینجا  $cis(\beta) \cdot B_1 + B_2$  یک عدد مختلط ثابت است. اگر  $\alpha + \beta = 2k\pi$  یا  $\cos(\alpha + \beta) = 1$

این تبدیل یک انتقال با مقدار  $cis(\beta) \cdot B_1 + B_2$  است. اگر  $\alpha + \beta \neq 2k\pi$ ، تبدیل فوق یک دوران به زاویه  $\alpha + \beta$  حول  $z_0 = \frac{cis(\beta) \cdot B_1 + B_2}{1 - cis(\alpha + \beta)}$  می‌باشد.